



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EVOLÜT EĞRİSİNE AİT FRENET VE SABBAN
ÇATILARINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

PINAR DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Pınar DEMİR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

EVOLÜT EĞRİSİNE AİT FRENET VE SABBAN ÇATILARINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

PINAR DEMİR

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 98 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi SÜLEYMAN ŞENYURT)

Çalışmamız beş bölüm halinde düzenlendi. Giriş bölümünde çalışmanın temel amacına, yapılan çalışmalara yer verildi ve konunun ele alınma nedenine tartışıldı. Materyal ve Yöntem bölümünde öklid uzayı, evolüt eğrileri, küresel Serret-Frenet formülleri ve Smarandache eğrilerine ait temel kavramlar ve bunlara ait teoriler özetlendi. Üçüncü bölümde ise bu çalışmanın temel amacı olan öklid uzayında alınan bir eğrinin evolüt eğrisinin Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri tanımlanarak tanımlanan her bir eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplandı. Daha sonra evolüt eğrisinin Frenet vektörlerinin oluşturduğu küresel eğrilerin Sabban çatıları tanımlandı ve bu çatılardan elde edilen Smarandache eğrilerinin Sabban formülleri ve geodezik eğrilikleri hesaplanarak esas eğri ile aralarındaki ilişki verildi. Elde edilen Smarandache eğrilerinin görsel ifadeleri şekillerde verildi. Sonuç ve öneriler dördüncü bölümde, kullanılan kaynaklar beşinci bölümde verildi.

Anahtar Kelimeler: evolüt eğrisi, Sabban çatısı, Smarandache eğrisi, geodezik eğrilik.

ABSTRACT

ON SMARANDACHE CURVES OF EVOLUT CURVE ACCORDING TO FRENET AND SABBAN FRAMES

PINAR DEMİR

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 98 PAGES

(SUPERVISOR: Asst. Prof. Dr. SÜLEYMAN ŞENYURT)

Our work is organized in five parts. In the introduction, the main purpose of the study, the studies carried out, and the reason for dealing with the subject are discussed. In the Materials and Methods section, the basic concepts of Euclidean space, evolute curves, spherical Serret-Frenet formulas and Smarandache curves and their theories are summarized. In the third chapter, the Frenet vectors and curvatures of each defined curve are calculated by defining the Smarandache curves according to the Frenet frame of the evolute curve of a given curve taken in Euclidean space, which is the main purpose of this study. Then, Sabban frame of the spherical curves formed by the Frenet vectors of the evolute curve are defined and the Sabban formulas and geodesic curvatures of the Smarandache curves obtained from these frame are calculated and their relationship with the principal curve is given. The visual expressions of the resulting Smarandache curves are given in the figures. Conclusion and recommendations are given in the fourth section, and the sources used are given in the fifth section.

Keywords: evolute curve, Sabban Frames, Smarandache curve, geodesic curvature.

TEŞEKKÜR

Tez çalıőmam boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT'a ve Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü hocalarına en samimi duygularım ile teőekkürlerimi sunarım. Son olarak yüksek lisans sürecimde ve hayatımın her anında maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen sevgili aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	3
2.1 Öklid Uzayı.....	3
2.2 Öklid Uzayında Bir Eğrinin Evolüt Eğrisi.....	6
2.3 Öklid Uzayında Bulunan Smarandache Eğrileri.....	10
2.4 Küresel Serret - Frenet Formülleri.....	10
3. BULGULAR ve TARTIŞMA	16
3.1 Evolüt Egrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri.....	16
3.2 Evolüt Egrilerine Ait Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri.....	38
4. SONUÇ ve ÖNERİLER	94
5. KAYNAKLAR	96
ÖZGEÇMİŞ	98

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Bir eğrinin Evolüt eğrisi	6
Şekil 2.2 Sabban Çatısı	11
Şekil 3.1 Evolüt eğrisinin Frenet elemanlarından oluşan Smarandache eğrileri ...	16
Şekil 3.2 Eğrilerin teğet ve aslinormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri.....	33
Şekil 3.3 Eğrilerin aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri.....	33
Şekil 3.4 Eğrilerin teğet ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri.....	34
Şekil 3.5 Eğrilerin teğet,aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri	34
Şekil 3.6 Eğrilerin teğet ve aslinormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri.....	36
Şekil 3.7 Eğrilerin aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri.....	37
Şekil 3.8 Eğrilerin teğet ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri.....	37
Şekil 3.9 Eğrilerin teğet, aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri	38
Şekil 3.10 T^* , N^* , B^* göstergelerinin oluşturduğu Smarandache eğrileri	40
Şekil 3.11 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_5 - esas$ ve β_5 - Smarandache eğrileri	77
Şekil 3.12 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_6 - esas$ ve β_6 - Smarandache eğrileri	78
Şekil 3.13 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_7 - esas$ ve β_7 - Smarandache eğrileri	78
Şekil 3.14 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_8 - esas$ ve β_8 - Smarandache eğrileri	79
Şekil 3.15 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_9 - esas$ ve β_9 - Smarandache eğrileri.....	79
Şekil 3.16 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{10} - esas$ ve β_{10} - Smarandache eğrileri.....	80
Şekil 3.17 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{11} - esas$ ve β_{11} - Smarandache eğrileri.....	80
Şekil 3.18 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{12} - esas$ ve β_{12} - Smarandache eğrileri.....	81
Şekil 3.19 β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{13} - esas$ ve β_{13} - Smarandache eğrileri	81

Şekil 3.20	β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{14} - esas$ ve β_{14} - Smarandache eğrileri	82
Şekil 3.21	β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{15} - esas$ ve β_{15} - Smarandache eğrileri	82
Şekil 3.22	β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{16} - esas$ ve β_{16} - Smarandache eğrileri	83
Şekil 3.23	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{5-esas}$ ve $\bar{\beta}_5^*$ - Smarandache eğrileri	87
Şekil 3.24	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{6-esas}$ ve $\bar{\beta}_6^*$ - Smarandache eğrileri	88
Şekil 3.25	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{7-esas}$ ve $\bar{\beta}_7^*$ - Smarandache eğrileri	88
Şekil 3.26	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{8-esas}$ ve $\bar{\beta}_8^*$ - Smarandache eğrileri	89
Şekil 3.27	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{9-esas}$ ve $\bar{\beta}_9^*$ - Smarandache eğrileri	89
Şekil 3.28	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{10-esas}$ ve $\bar{\beta}_{10}^*$ - Smarandache eğrileri	90
Şekil 3.29	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{11-esas}$ ve $\bar{\beta}_{11}^*$ - Smarandache eğrileri	90
Şekil 3.30	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{12-esas}$ ve $\bar{\beta}_{12}^*$ - Smarandache eğrileri	91
Şekil 3.31	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{13-esas}$ ve $\bar{\beta}_{13}^*$ - Smarandache eğrileri	91
Şekil 3.32	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{14-esas}$ ve $\bar{\beta}_{14}^*$ - Smarandache eğrileri	92
Şekil 3.33	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{15-esas}$ ve $\bar{\beta}_{15}^*$ - Smarandache eğrileri	92
Şekil 3.34	$\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{16-esas}$ ve $\bar{\beta}_{16}^*$ - Smarandache eğrileri	93

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride eğriler üzerinde bir çok çalışma yapılmış ve yapılmayada devam etmektedir. Bu çalışmalarda kullanılan eğrilere örnek olarak involüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğri çiftleri, Mannheim eğri çiftleri, Salkowski ve Anti-Salkowski eğrileri verilebilir. Söz konusu eğrilere ait temel kavramlara bir çok Diferansiyel Geometri kitaplarından ulaşılabilir. Bunlara örnek olarak [7, 12, 13] kaynakları verilebilir.(1999) yılında yapılan bir çalışmada involüt-evolüt eğrilerinin Frenet çatıları arasındaki bağıntılar farklı bir yaklaşımla elde edildi, involüt eğrisi için tanımlanan küresel gösterge eğrilerinin bazı geometrik özellikleri bulundu ve esas eğriye bağlı bazı sonuçlar verildi [3].Benzer olarak Bertrand eğri çiftinin Frenet vektörlerinin ve bu vektörlere bağlı birim Darboux vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde oluşturdukları küresel gösterge eğrileri ve sabit pol eğrisinin yay uzunlukları E^3 Öklid uzayına ve S^2 birim küresine göre geodezik eğrilikleri hesaplandı [15]. Bertrand eğri çiftine benzer şekilde Mannheim eğri çiftleri için Öklid uzayında, Minkowski uzayında, Dual ve Dual Lorentz uzayında çeşitli çalışmalar yapıldı ve bazı karakterizasyonlar incelenerek sonuçlar elde edildi [9, 10, 11, 14]. Smarandache eğrisi ilk olarak (2008) yılında tanımlanmış [23] daha sonra eğriler üzerinde tanımlanan Frenet çatısı, Bishop çatısı alternatif çatı gibi farklı çatılardan Smarandache eğrileri türetildi ve temel özellikleri incelendi.Bu çalışmalara [1, 2, 4, 5, 6, 16, 17, 18, 19, 23] kaynaklarından ulaşılabilir. Sabban çatısı tanımı ilk olarak 1990 yılında verildi [8] ve söz konusu eğriler kullanılarak bir çok çalışma yapıldı [21]. Benzer bir çalışmada Salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanarak her bir eğrinin ayrı ayrı Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplandı [20].

Tezimizde ilk olarak bir eğriye ait Evolüt eğrisinin Frenet vektörleri tarafından oluşturulan Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonları hesaplandı. Daha sonra bu eğrilikler esas eğrinin eğrilik ve torsiyonları cinsinden ifade edilerek konu ile ilgili gerekli örnekler ve eğrilerin görsel ifadesi verildi. İkinci olarak evolüt eğrisinin Frenet vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizerek oluşturdukları küresel eğrilere ait Sabban çatıları tanımlanarak küresel Sabban formülleri hesaplandı. Devamında tanımlanan Sabban çatıları konum vektörü olarak alınmış bu vektörler tarafından çizilen Smarandache eğrilerinin tanımı yapılarak geodezik eğrilikleri hesaplandı ve sonrasında esas eğrinin Frenet vektörleri cinsinden ifadeleri verildi. Devamında konu ile ilgili örnekler verilip gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra şekillerle ifade edilmiştir.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Öklid Uzayı

Tezimizin bu kısmında öklid uzayı, evolüt eğrileri, küresel Serret-Frenet formülleri, Smarandache eğrileri ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 B boş olmayan bir cümle, V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : B \times B \rightarrow V$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa B ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

i. $B_1 : \forall p, q, r \in B$ için $f(p, q) + f(q, r) = f(p, r)$,

ii. $B_2 : \forall p \in B, \forall \zeta \in V$ için $f(p, q) = \zeta$

olacak şekilde bir tek $q \in B$ noktası mevcuttur.

Tanım 2.1.2 V, B ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıda bulunan i., ii. ve iii. şartları sağlarsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu denir:

$\forall k, l, m \in V, \forall x, y \in \mathbb{R}$ için

i. Bilineerlik aksiyomu;

$$\langle xk + yl, z \rangle = x\langle k, z \rangle + y\langle l, z \rangle,$$

$$\langle k, xl + yz \rangle = x\langle k, l \rangle + y\langle k, z \rangle,$$

ii. Simetri aksiyomu;

$$\langle k, l \rangle = \langle l, k \rangle,$$

iii. Pozitif tanımlılık (kararlılık) ;

$$\langle k, k \rangle \geq 0,$$

$$\langle k, k \rangle = 0 \Leftrightarrow k = \vec{0}.$$

Tanım 2.1.3 \mathbb{R}^n Afın uzay olmak üzere, $\forall Z, T \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle Z, T \rangle = \sum_{i=1}^n z_i t_i$$

fonksiyonu iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu \mathbb{R}^n vektör uzayı ile birleşen afın uzayına n -boyutlu standart Öklid uzayı denir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 $Z, T \in \mathbb{E}^3$ için

$$d : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(Z, T) \rightarrow d(Z, T) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (t_i - z_i)^2}$$

fonksiyonuna uzaklık fonksiyonu, $d(Z, T) \in \mathbb{R}$ sayısına da Z ile T noktaları arasındaki uzaklık denir.

Tanım 2.1.5 $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$, $\beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \dots, \beta_n(s))$ diferensiyellenebilir fonksiyona \mathbb{E}^n de bir eğri ,

$$\beta'(s) = \left. \frac{d\beta}{ds} \right|_s = \left(\frac{d\beta_1(s)}{ds}, \frac{d\beta_2(s)}{ds}, \dots, \frac{d\beta_n(s)}{ds} \right) \Big|_s$$

vektörüne β eğrisinin hız vektörü, $\|\beta'(s)\| = 1$ ise bu eğri birim hızlıdır denir [7].

Tanım 2.1.6 $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $x, y \in I$ için

$$s = \int_x^y \|\beta'(s)\| ds$$

sayısına $\beta(x)$ ile $\beta(y)$ arasındaki yay uzunluğu denir.

Tanım 2.1.7 $\zeta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ türevlenebilir bir eğri olsun. $\{\zeta', \zeta'', \zeta'''\}$ lineer bağımsız cümlesinden Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormal sistemine ζ eğrisinin $\zeta(s)$ noktasındaki Serret-Frenet 3-ayaklısı denir.

Teorem 2.1.8 $\zeta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\zeta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun.

a) $s \in I$ yay parametresi ise

$$\begin{cases} T(s) = \zeta'(s) \\ N(s) = \frac{1}{\|\zeta''(s)\|} \zeta''(s) \\ B(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

b) $s \in I$ keyfi parametre ise

$$\begin{cases} T(s) = \frac{1}{\|\zeta'(s)\|} \zeta'(s) \\ N(s) = B(s) \wedge T(s) \\ B(s) = \frac{1}{\|\zeta'(s) \wedge \zeta''(s)\|} (\zeta'(s) \wedge \zeta''(s)), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

dır [7].

Teorem 2.1.9 ζ eğrisi keyfi parametreye bağlı ve Frenet vektörleri T, N, B ve $\kappa(s)$ sayısı eğrinin eğriliği ve $\tau(s)$, ζ eğrisinin burulması olmak üzere;

$$\kappa(s) = \frac{\|\zeta(s)' \wedge \zeta(s)''\|}{\|\zeta(s)'\|^3}, \quad \tau(s) = \frac{\langle \zeta(s)' \wedge \zeta(s)'' , \zeta(s)''' \rangle}{\|\zeta(s)' \wedge \zeta(s)''\|^2} \quad (2.1.3)$$

denklemleriyle verilir [7].

Teorem 2.1.10 $\zeta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$, eğriliği $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ olsun. Frenet vektörleri ile eğriliklerin türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

bağıntısı vardır [7].

Teorem 2.1.11 $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $T(s), N(s), B(s)$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması $\kappa(s), \tau(s)$ olsun. $\|\zeta'\| = \nu$ olduğuna göre

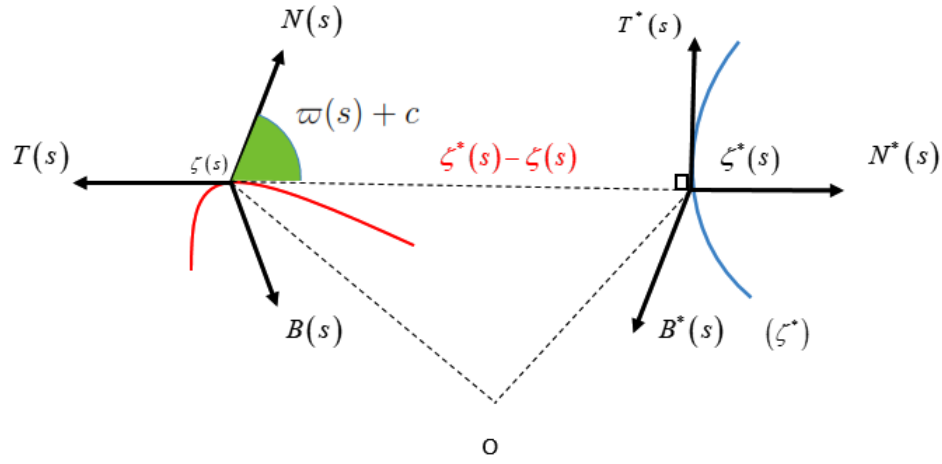
$$\begin{cases} T(s)' = \nu\kappa(s)N(s) \\ N(s)' = \nu(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \\ B(s)' = -\nu\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

dir [13].

2.2 Öklid Uzayında Bir Eğrinin Evolüt Eğrisi

Tanım 2.2.1 $\zeta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ ve $\zeta^* : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ türevlenebilir iki eğri olsun. ζ eğrisinin $\zeta(s)$ noktasındaki teğet vektörü $\zeta^*(s)$ noktasından geçiyor ve bu noktadaki ζ^* eğrisinin teğet vektörüne dik oluyorsa ζ^* eğrisine ζ eğrisinin bir evolütü denir [13].

Bu tanıma göre ζ eğrisinin teğet vektörü T ve ζ^* evolüt eğrisinin teğet vektörü T^* , ile gösterilirse $\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$ bağıntısı vardır.



Şekil 2.1 Bir eğrinin Evolüt eğrisi

Teorem 2.2.2 ζ^* eğrisi, ζ eğrisinin bir evolütü olsun

$$c \in R \text{ ve } \varpi(s) = \int_0^s \tau(s) ds$$

evolüt eğrisinin denklemleri

$$\zeta^* = \zeta(s) + \rho(s)N(s) - \rho(s) \tan(\varpi(s) + c) B(s) \quad (2.2.1)$$

dır. Burada $\rho = \frac{1}{\kappa}$ dır. $\varpi(s) + c$ açısı, $\overrightarrow{\zeta(s)\zeta^*(s)}$ ile $N(s)$ arasındaki açıdır [13].

İspat Evolüt eğrisi tanımı dikkate alındığında ζ^* eğrisi, ζ eğrisinin N ve B vektörlerinin gerdiği düzleminde bulunur. Buna göre evolüt eğrisi

$$\zeta^*(s) = \zeta(s) + \lambda(s) N(s) + \mu(s) B(s) \quad (2.2.2)$$

şeklinde yazılır Bu ifadenin türevi alınır

$$\begin{aligned} (\zeta^*)' &= \zeta' + \lambda'(s) N + \lambda(-\kappa T + \tau B) + \mu' B + \mu(-\tau N) \\ &= (1 - \lambda \kappa) T + (\lambda' - \mu \tau) N + (\lambda \tau + \mu') B \end{aligned}$$

olur. Evolüt eğrisinin tanımından $\langle \zeta^{*'}, T \rangle = 0, 1 - \lambda \kappa = 0$ dır. Bu durumda

$$\zeta^{*'} = (\lambda' - \mu \tau) N + (\lambda \tau + \mu') B \quad (2.2.3)$$

yazılır. $1 - \lambda \kappa = 0$ eşitliğinden $\lambda = \frac{1}{\kappa}$ bulunur. Bu ise eğrilik çemberinin yarıçapı idi.

Bu ifadeyi ρ demiştik. Bu takdirde

$$\lambda = \rho$$

bulunur. Evolüt eğrisi tanımına göre $(\zeta^*)'$ vektörü $\zeta^* - \zeta$ vektör alanına paraleldir.

(2.2.2) ve (2.2.3) eşitlikleri göz önüne alınır

$$\frac{\lambda' - \mu \tau}{\lambda} = \frac{\lambda \tau + \mu'}{\mu}$$

elde edilir. Burada λ yerine ρ yazılırsa

$$\tau = \frac{\mu \rho' - \mu' \rho}{\mu^2 + \rho^2} = \left[\arctan \left(-\frac{\mu}{\rho} \right) \right]'$$

ifadesine ulaşılır. Öyleyse

$$\int_0^s \tau(u) du + c = \arctan \left(-\frac{\mu}{\rho} \right) \quad (2.2.4)$$

demektir. $\int_0^s \tau(u) du = \varpi(s)$ denilirse

$$\mu = -\rho \tan \varpi$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak bulunan ifadeler (2.2.2) yerine yazılırsa

$$\zeta^*(s) = \zeta(s) + \rho(s)N(s) - \rho(s) \tan(\varpi(s) + c) B(s)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3 ζ eğrisinin evolütü ζ^* eğrisi olsun. ζ^* eğrisinin Frenet vektörleri T^*, N^*, B^* olsun. ζ ve ζ^* eğrilerinin Frenet vektörleri arasında

$$\begin{aligned} T^*(s) &= \cos \varpi N(s) - \sin \varpi B(s), \\ N^*(s) &= -T(s), \\ B^*(s) &= \sin \varpi N + \cos \varpi B, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

bağıntıları vardır [13].

İspat ζ^* eğrisinin Frenet vektörleri T^*, N^*, B^* olsun. (2.2.2) bağıntısından evolüt eğrisinin türevi alınır ve normu hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
(\zeta^*)' &= T + \rho'(s) N + \rho(-\kappa T + \tau B) - \rho\varpi'(1 + \tan^2 \varpi) B - \rho \tan \varpi (\tau N) \\
&= (\rho' + \rho\tau \tan \varpi) (N - \tan \varpi B) \\
&= \frac{\rho' + \rho\tau \tan \varpi}{\cos \varpi} (\cos \varpi N(s) - \sin \varpi B(s)) \\
\|(\zeta^*)'\| &= \frac{\rho' + \rho\tau \tan \varpi}{\cos \varpi}
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

olur. (2.1.2) bağıntısından T^* Teğet vektörü

$$\begin{aligned}
T^* &= \frac{(\zeta^*)'}{\|(\zeta^*)'\|} \\
&= \cos \varpi N(s) - \sin \varpi B(s)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınır ve norm hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
(T^*)' &= -\varpi' \sin \varpi N + \cos \varpi (-\kappa T + \tau B) - \varpi' \cos \varpi B + \sin \varpi \tau N \\
&= -\kappa \cos \varpi T \\
\|(\zeta^*)'\| \kappa^* N^* &= -\kappa \cos \varpi T
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

olur. N^* ve T vektörleri birim uzunlukta olduğundan

$$N^* = -T \quad \text{veya} \quad N^* = T$$

elde edilir. $B^* = T^* \wedge N^*$ olduğundan

$$\begin{aligned}
B^*(s) &= (\cos \varpi N(s) - \sin \varpi B(s)) \wedge (-T) \\
&= \sin \varpi N + \cos \varpi B
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.4 ζ^* eğrisi, birim hızlı ζ eğrisinin bir evolütü olsun. ζ^* eğrisinin eğrilik ve burulması κ^* ve τ^* olduğuna göre bu iki eğrinin eğrilikleri arasında

$$\kappa^*(s) = \frac{\kappa^3 \cos^3 \varpi}{\kappa\tau \sin \varpi - \kappa' \cos \varpi}, \quad \tau^*(s) = \frac{-\kappa^3 \sin \varpi \cos^2 \varpi}{\kappa\tau \sin \varpi - \kappa' \cos \varpi} \tag{2.2.8}$$

bağıntıları vardır [13].

İspat (2.1.3) bağıntısında κ^* eğriliği

$$\begin{aligned}\kappa^* &= \frac{\kappa \cos \varpi}{\|(\zeta^*)'\|} \\ &= \frac{\kappa \cos \varpi}{\rho' + \rho \tau \tan \varpi} \\ &= \frac{\cos \varpi}{\kappa^3 \cos^3 \varpi} \\ &= \frac{\cos \varpi}{\kappa \tau \sin \varpi - \kappa' \cos \varpi}\end{aligned}$$

olur. $B^* = \cos \varpi N(s) - \sin \varpi B(s)$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(B^*)' &= \varpi' \cos \varpi N + \sin \varpi (-\kappa T + \tau B) - \varpi' \sin \varpi B - \cos \varpi \tau N \\ &= -\kappa \sin \varpi T\end{aligned}$$

bulunur. $N^* = -T$ alındığında

$$\|(\zeta^*)'\| \tau^* = -\kappa \sin \varpi$$

olur. Buradan τ^* eğriliği

$$\begin{aligned}\tau^* &= \frac{-\kappa \sin \varpi}{\|(\zeta^*)'\|} \\ &= \frac{-\sin \cos \varpi}{\rho' + \rho \tau \tan \varpi} \\ &= \frac{\cos \varpi}{-\kappa^3 \cos^2 \varpi \sin \varpi} \\ &= \frac{\cos \varpi}{\kappa \tau \sin \varpi - \kappa' \cos \varpi}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 2.2.5 ζ^* eğrisi, birim hızlı ζ eğrisinin bir evolütü olsun. ζ^* eğrisinin eğrilik ve burulması κ^* ve τ^* olduğuna göre

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = -\tan \varpi \quad (2.2.9)$$

dir [13].

2.3 Öklid Uzayında Bulunan Smarandache Eğrileri

Tanım 2.3.1 Bir ζ eğrisinin Frenet vektörleri Konum vektörü olarak alındığında bu vektörlerden elde edilen regüler bir γ eğrisine Smarandache eğrisi denir[20].

Bu tanıma göre birim hızlı bir ζ eğrinin Frenet üç 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilirse bu vektörlerden elde edilen γ Smarandache eğrisi,

$$\gamma = \frac{aT + bN + cB}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (2.3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir [16].

(2.3.1) bağıntısında a, b, c katsayılarının seçilişine göre elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N) & TN\text{-Smarandache eğrisi,} \\ \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B) & NB\text{-Smarandache eğrisi,} \\ \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B) & TB\text{-Smarandache eğrisi,} \\ \gamma_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B) & TNB\text{-Smarandache eğrisi} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

şeklinde yazılır.

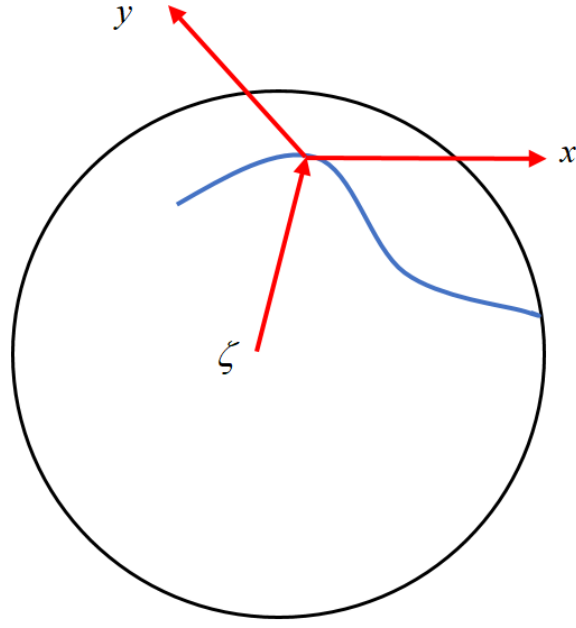
2.4 Küresel Serret-Frenet Formülleri

ζ birim vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğrinin teğet vektörü x ve $y = \zeta \wedge x$ ile gösterilirse $\{\zeta, x, y\}$ şeklinde elde edilen çatıya Sabban çatısı denir (bknz. Şekil 2.2), [22].

Bu çatıya göre Sabban formülleri

$$\begin{cases} \zeta'(s) = x(s) \\ x'(s) = -\zeta(s) + \kappa_g(s)y(s) \\ y'(s) = -\kappa_g(s)x(s) \end{cases} \quad (2.4.1)$$

şeklinde verilir. Burada $\kappa_g = \langle x', y \rangle$ şeklinde verilen geodezik eğriliktir [21].



Şekil 2.2 Sabban Çatısı

ζ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. (2.4.1) bağıntısından T teğet vektörünün birim küre yüzeyinde çizdiği eğrinin teğet vektörü T_1 ve $T \wedge T_1 = T_2$ olmak üzere küresel Sabban formülleri ve geodezik eğriliği

$$\begin{cases} T = T, & T_1 = N, & T_2 = B, \\ T' = T_1, & T_1' = -T + \frac{\tau}{\kappa} T_2, & T_2' = -\frac{\tau}{\kappa} T_1, \\ \kappa_g = \frac{\tau}{\kappa}, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

N aslinormaller vektörünün birim küre yüzeyinde çizdiği eğrinin teğet vektörü N_1 ve $N \wedge N_1 = N_2$ olmak üzere küresel Sabban formülleri ve geodezik eğriliği

$$\begin{cases} N = N, & N_1 = -\cos \varpi T + \sin \varpi B, & N_2 = \sin \varpi T + \cos \varpi B, \\ N' = N_1, & N_1' = -N + \frac{\varpi'}{\|W\|} N_2, & N_2' = -\frac{\varpi'}{\|W\|} N_1, \\ \kappa_g = \frac{\varpi'}{\|W\|}, \end{cases} \quad (2.4.3)$$

B binormaller vektörünün birim küre yüzeyinde çizdiği eğrinin teğet vektörü B_1 ve $B \wedge B_1 = B_2$ olmak üzere küresel Sabban formülleri ve geodezik eğriliği

$$\begin{cases} B = B, & B_1 = -N, & B_2 = T, \\ B' = B_1, & B_1' = -B + \frac{\kappa}{\tau}B_2, & B_2' = -\frac{\kappa}{\tau}B_1, \\ \kappa_g = \frac{\kappa}{\tau}, \end{cases} \quad (2.4.4)$$

şeklinde tanımlanır [4, 6].

Tanım 2.4.1 $\zeta : I \rightarrow S^2$ birim hızlı regüler eğrinin teğetler göstergesine ait Sabban çatısı $\{T, T_1, T_2\}$ olsun. Bu çatıdan elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T + T_1), & TT_1\text{- Smarandache eğrisi,} \\ A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T + T_2), & TT_2\text{- Smarandache eğrisi,} \\ A_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 + T_2), & T_1T_2\text{- Smarandache eğrisi,} \\ A_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T + T_1 + T_2), & TT_1T_2\text{- Smarandache eğrisi} \end{aligned}$$

şeklinde verilir [4].

Teorem 2.4.2 $\zeta : I \rightarrow S^2$ eğrisinin teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri,

$$\begin{aligned} \kappa_g^{A_1} &= \frac{1}{(2 + (\frac{\tau}{\kappa})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \lambda_1 + \frac{\tau}{\kappa} \lambda_2 + 2\lambda_3 \right), \\ \kappa_g^{A_2} &= \frac{\kappa + \tau}{\kappa - \tau}, \\ \kappa_g^{A_3} &= \frac{1}{(1 + 2(\frac{\tau}{\kappa})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\tau}{\kappa} \mu_1 - \frac{\tau}{\kappa} \mu_2 + \mu_3 \right), \\ \kappa_g^{A_4} &= \frac{1}{(1 + 2(\frac{\tau}{\kappa})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\left(2\frac{\tau}{\kappa} - 1 \right) \epsilon_1 - \left(1 + \frac{\tau}{\kappa} \right) \epsilon_2 + \left(2 - \frac{\tau}{\kappa} \right) \epsilon_3 \right), \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' - \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 2, & \lambda_2 = -\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' - \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^4 - 3 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 2, \\ \lambda_3 = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' + \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^3 + 2 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right), \\ \mu_1 = 2\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' + \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^3 + 2 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right), & \mu_2 = -\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' - 2 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^4 - 3 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1, \\ \mu_3 = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' - 2 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^4 - \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(2\frac{\tau}{\kappa} - 1) + 2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^3 - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) - 2, \\ \epsilon_2 = -\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(\frac{\tau}{\kappa} + 1) - 2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^4 + 2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^3 - 4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) - 2, \\ \epsilon_3 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(2 - \frac{\tau}{\kappa}) - 2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^4 + 4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^3 - 4\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır [4].

Tanım 2.4.3 $\zeta : I \rightarrow S^2$ birim hızlı regüler eğrinin aslinormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{N, N_1, N_2\}$ olsun. Bu çatıdan elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned} A_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N + N_1), \quad NN_1\text{-Smarandache eğrisi,} \\ A_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N + N_2), \quad NN_2\text{-Smarandache eğrisi,} \\ A_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1 + N_2), \quad N_1N_2\text{-Smarandache eğrisi,} \\ A_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(N + N_1 + N_2), \quad NN_1N_2\text{-Smarandache eğrisi} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Teorem 2.4.4 $\zeta : I \rightarrow S^2$ eğrisinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \kappa_g^{A_5} &= \frac{1}{(2 + (\frac{\varpi'}{\|W\|})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \lambda_1 + \frac{\varpi'}{\|W\|} \lambda_2 + 2\lambda_3 \right), \\ \kappa_g^{A_6} &= \frac{\|W\| + \varpi'}{\|W\| - \varpi'}, \\ \kappa_g^{A_7} &= \frac{1}{(1 + 2(\frac{\varpi'}{\|W\|})^2)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\varpi'}{\|W\|} \mu_1 - \frac{\varpi'}{\|W\|} \mu_2 + \mu_3 \right), \\ \kappa_g^{A_8} &= \frac{1}{(1 + 2(\frac{\varpi'}{\|W\|})^2)^{\frac{5}{2}}} \left((2\frac{\varpi'}{\|W\|} - 1)\xi_1 - (1 + \frac{\varpi'}{\|W\|})\xi_2 + (2 - \frac{\varpi'}{\|W\|})\xi_3 \right) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\varpi'}{\|W\|} \left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right)' - \left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right)^2 - 2, \\ \lambda_2 = -\frac{\varpi'}{\|W\|} \left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right)' - \left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right)^4 - 3\left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right)^2 - 2, \\ \lambda_3 = \left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right)' + \left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right)^3 + 2\left(\frac{\varpi'}{\|W\|} \right) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 2 \frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)' + \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^3 + 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right), \\ \mu_2 = - \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)' - 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^4 - 3 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^2 - 1, \\ \mu_3 = \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)' - 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^4 - \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^2, \\ \xi_1 = \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)' \left(2 \frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} - 1 \right) + 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^3 - \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^2 + 4 \frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} - 2, \\ \xi_2 = - \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)' \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} + 1 \right) - 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^4 + 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^3 - 4 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^2 + 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right) - 2, \\ \xi_3 = \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)' \left(2 - \frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right) - 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^4 + 4 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^3 - 4 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right)^2 + 2 \left(\frac{\varpi'}{\|\overline{W}\|} \right) \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır [4].

Tanım 2.4.5 $\zeta : I \rightarrow S^2$ birim hızlı regüler eğrinin binormaller göstergesine ait Sabban çatısı $\{B, B_1, B_2\}$ olsun. Bu çatıdan elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned} A_9 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B + B_1), \quad BB_1\text{-Smarandache eğrisi} \\ A_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B + B_2), \quad BB_2\text{-Smarandache eğrisi} \\ A_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_2), \quad B_1B_2\text{-Smarandache eğrisi} \\ A_{12} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(B + B_1 + B_2), \quad BB_1B_2\text{-Smarandache eğrisi} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Teorem 2.4.6 $\zeta : I \rightarrow S^2$ eğrisinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen Smarandache eğrilerinin geodezik eğrilikleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \kappa_g^{A_9} &= \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\kappa}{\tau} \lambda_1 + \frac{\kappa}{\tau} \lambda_2 + 2\lambda_3 \right), \\ \kappa_g^{A_{10}} &= \frac{\tau + \kappa}{\tau - \kappa}, \\ \kappa_g^{A_{11}} &= \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\kappa}{\tau} \mu_1 - \frac{\kappa}{\tau} \mu_2 + \mu_3 \right), \\ \kappa_g^{A_{12}} &= \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\left(\frac{\kappa}{\tau} - 1\right) \xi_1 - \left(1 + \frac{\kappa}{\tau}\right) \xi_2 + \left(2 - \frac{\kappa}{\tau}\right) \xi_3 \right) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\kappa}{\tau} \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' - \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 - 2, \quad \lambda_2 = -\frac{\kappa}{\tau} \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' - \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^4 - 3 \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^2 - 2, \\ \lambda_3 = \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)^3 + 2 \left(\frac{\kappa}{\tau} \right), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 2\frac{\kappa}{\tau}(\frac{\kappa}{\tau})' + (\frac{\kappa}{\tau})^3 + 2(\frac{\kappa}{\tau}), \quad \mu_2 = -(\frac{\kappa}{\tau})' - 2(\frac{\kappa}{\tau})^4 - 3(\frac{\kappa}{\tau})^2 - 1, \\ \mu_3 = (\frac{\kappa}{\tau})' - 2(\frac{\kappa}{\tau})^4 - (\frac{\kappa}{\tau})^2, \\ \xi_1 = (\frac{\kappa}{\tau})'(2\frac{\kappa}{\tau} - 1) + 2(\frac{\kappa}{\tau})^3 - (\frac{\kappa}{\tau})^2 + 4\frac{\kappa}{\tau} - 2, \\ \xi_2 = -(\frac{\kappa}{\tau})'(\frac{\kappa}{\tau} + 1) - 2(\frac{\kappa}{\tau})^4 + 2(\frac{\kappa}{\tau})^3 - 4(\frac{\kappa}{\tau})^2 + 2(\frac{\kappa}{\tau}) - 2, \\ \xi_3 = (\frac{\kappa}{\tau})'(2 - \frac{\kappa}{\tau}) - 2(\frac{\kappa}{\tau})^4 + 4(\frac{\kappa}{\tau})^3 - 4(\frac{\kappa}{\tau})^2 + 2(\frac{\kappa}{\tau}), \end{array} \right.$$

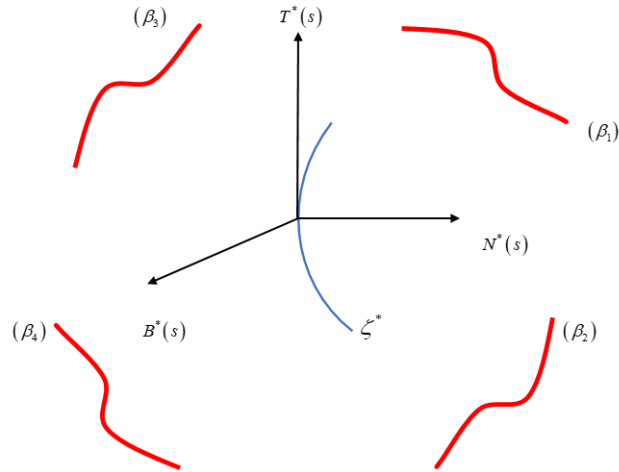
şeklinde birer katsayıdır [4].

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu kısım çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Burada ilk olarak herhangi bir eğrinin Evolüt eğrisine ait Frenet vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri tanımlanarak tanımlanan herbir eğrinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması ayrı ayrı hesaplandı. Daha sonra bu eğrilerin esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden ifadeleri verildi. Son olarak Evolüt eğrisinin Frenet vektörlerinin birim küre yüzeyi üzerinde çizdikleri küresel eğrilere ait Sabban çatıları ve Sabban formülleri ifade edildi. Sabban çatıları kullanılarak Smarandache eğrileri tanımlanıp herbir Smarandache eğrisinin geodezik eğrilikleri ayrı ayrı hesaplandı. Buna ilave olarak geodezik eğriliklerin esas eğrinin eğriliklerine bağlı ifadeleri verildi.

3.1 Evolüt Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri

ζ^* eğrisi birim hızlı bir eğri değildir. Ancak çalışmamızda matematiksel işlemlerden kolaylık sağlanması için ζ^* eğrisini birim hızlı hale dönüştürülmüş şekliyle işlem yapıldı ve elde edilebilecek Smarandache eğrilerinin bir görünümü Şekil 3.1 de verildi.



Şekil 3.1 Evolüt eğrisinin Frenet elemanlarından oluşan Smarandache eğrileri

Tanım 3.1.1 ζ eğrisinin evolütü ζ^* olsun. ζ^* eğrisinin teğet ve aslinormal vektöründen elde edilen T^*N^* - Smarandache eğrisi

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.2 T^*N^* - Smarandache eğrisinin $T_{\beta_1}, N_{\beta_1}, B_{\beta_1}$ Frenet vektörleri

$$T_{\beta_1} = \frac{-\kappa^*T^* + \kappa^*N^* + \tau^*B^*}{\sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}, \quad (3.1.2)$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\begin{aligned} &(\kappa^{*2}\tau^*\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' - (2\kappa^{*2} + \tau^{*2})\kappa^{*2})T^* \\ &- ((2\kappa^{*2} + \tau^{*2})(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \kappa^{*2}\tau^*\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)')N^* \\ &+ (\kappa^*\tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 2\kappa^{*3}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)')B^* \end{aligned}}{\sqrt{\begin{aligned} &(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) \\ &+ 2\kappa^{*2}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left((2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2\tau^* + \kappa^{*2}(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \right) \end{aligned}}}, \quad (3.1.3)$$

$$B_{\beta_1} = \frac{\left(\tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\kappa^{*2} \right)T^* + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\kappa^{*2}N^* + \kappa^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})B^*}{\sqrt{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 2\kappa^{*2}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'(\kappa^{*2}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' + \tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}))}} \quad (3.1.5)$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.1) ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa

$$\beta_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa^*T^* + \kappa^*N^* + \tau^*B^*), \quad (3.1.6)$$

$$\beta_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}}((-\kappa^{*2} - \kappa^{*'})T^* + (\kappa^{*'} - \kappa^{*2} - \tau^{*2})N^* + (\kappa^*\tau^* + \tau^{*'})B^*), \quad (3.1.7)$$

$$\beta_1''' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\kappa^{*3} + \kappa^*\tau^{*2} - 3\kappa^*\kappa^{*'} - \kappa^{*''})T^* + \\ (-\kappa^{*3} - \kappa^*\tau^{*2} - 3\kappa^*\kappa^{*'} - 3\tau^*\tau^{*'} + \kappa^{*''})N^* + \\ (-\tau^{*3} - \tau^*\kappa^{*2} + 2\kappa^{*'}\tau^* + \kappa^*\tau^{*'} + \tau^{*''})B^* \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

olur. β_1', β_1'' vektörel çarpım yapılır ve normlar hesaplanırsa

$$\beta_1' \wedge \beta_1'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2} \right) T^* + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2} N^* \\ + \kappa^* (2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) B^* \end{pmatrix}, \quad (3.1.9)$$

$$\|\beta_1'\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}, \quad (3.1.10)$$

$$\|\beta_1' \wedge \beta_1''\| = \frac{1}{2} \sqrt{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 2\kappa^{*2} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\kappa^{*2} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\right) + \tau^* (2\kappa^{*2} + \tau^{*2})} \quad (3.1.11)$$

olur. (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11) ifadeleri (2.1.2) bağıntısında yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa β_1 eğrisinin Frenet vektörleri hesaplanmış olur.

Sonuç 3.1.3 β_1 Smarandache eğrisine ait Frenet vektörlerinin esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden ifadeleri;

$$T_{\beta_1} = \frac{-\cos\varpi T - N}{\sqrt{1 + \cos^2\varpi}},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{(\kappa^3 \cos\varpi (1 + \cos^2\varpi) (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1} + \tau \sin\varpi) T - (\kappa^3 \cos^2\varpi (1 + \cos^2\varpi) (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1} + \tau \sin\varpi \cos\varpi) N - \tau (1 + \cos^2\varpi) B}{\sqrt{\kappa^6 \cos^2\varpi (1 + \cos^2\varpi)^3 (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-2} + 2\tau^2 (1 + \cos^2\varpi) + 2\kappa^3 \tau \sin\varpi \cos\varpi (1 + \cos^2\varpi) (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1}}},$$

$$B_{\beta_1} = \frac{\tau T - \tau \cos\varpi N + \left(\kappa^3 \cos\varpi (1 + \cos^2\varpi) (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1} + \tau \sin\varpi \right) B}{\sqrt{\kappa^6 \cos^2\varpi (1 + \cos^2\varpi)^2 (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-2} + 2\tau^2 + 2\kappa^3 \sin\varpi \cos\varpi \tau (1 + \cos^2\varpi) (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1}}}$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.2), (3.1.3), (3.1.5) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa β_1 eğrisinin esas eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri cinsinden ifadesi bulunur.

Teorem 3.1.4 T^*N^* - Smarandache eğrisinin κ_{β_1} eğriliği ve τ_{β_1} torsiyonu

$$\kappa_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 4(\tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})^2 + 4\tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})(\tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})}}{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.12)$$

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\tau^{*'}(\kappa^{*2}\tau^{*2} + 2\kappa^{*4}) - \kappa^{*'}(2\tau^*\kappa^{*3} + \tau^{*3}\kappa^*) + \kappa^{*'}\tau^{*'}(3\tau^{*2} - 6\kappa^{*2}) - \kappa^{*''}(2\tau^*\kappa^{*2} + \tau^{*3}) + \tau^{*''}(2\kappa^{*3} + \kappa^*\tau^{*2}) + 3\kappa^*\tau^*(2(\kappa^{*'}{}^2) - (\tau^{*'}{}^2))}{2^{-\frac{1}{2}}((2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 2(\tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})^2 + 2\tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})(\tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'}))} \quad (3.1.13)$$

şeklinde verilir.

İspat (2.1.3) bağıntısında (3.1.8), (3.1.9) (3.1.11) ve (3.1.10) ifadeleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa κ_{β_1} ve τ_{β_1} eğrilikleri hesaplanmış olur.

Sonuç 3.1.5 T^*N^* - Smarandache eğrisinin, eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden karşılıkları;

$$\kappa_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2\kappa^6 \cos^2 \varpi (1 + \cos^2 \varpi)^2 + 4\tau^2 (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa') + 4\kappa^3 \tau \sin \varpi \cos \varpi (1 + \cos^2 \varpi) (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')}}{\kappa^3 \cos \varpi (1 + \cos^2 \varpi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.14)$$

$$\tau_{\beta_1} = \frac{3(-\kappa^3 \cos \varpi \sin \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})' (\kappa^3 \cos^2 \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})' + (1 + \cos^2 \varpi) (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^2 - 3 \cos \varpi \sin \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^2 - \left(2(\kappa^3 \cos^2 \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})'^2 - (-\kappa^3 \cos \varpi \sin \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})'^2\right) - (-\kappa^3 \cos \varpi \sin \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})'' \kappa^3 \cos^2 \varpi (1 + \cos^2 \varpi) (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa') + (\kappa^3 \cos^2 \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})'' \kappa^3 \cos \varpi \sin \varpi (1 + \cos^2 \varpi) (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa') + (-\kappa^3 \cos \varpi \sin \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})' \kappa^6 \cos^4 \varpi (1 + \cos^2 \varpi) + (\kappa^3 \cos^2 \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1})' \kappa^6 \sin \varpi \cos^3 \varpi (1 + \cos^2 \varpi)}{2^{-\frac{1}{2}} \kappa^6 \cos^2 \varpi \left(\kappa^6 \cos^4 \varpi (1 + \cos^2 \varpi)^2 (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-2} + 2\tau^2 + 2\kappa^3 \tau \cos \varpi \sin \varpi (1 + \cos^2 \varpi) (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1} \right)} \quad (3.1.15)$$

şeklinde bulunur.

İspat (3.1.12) ve (3.1.13) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntıları yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa β_1 eğrisinin eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden eşitliği bulunur.

Tanım 3.1.6 ζ eğrisinin evolütü ζ^* olsun. ζ^* eğrisinin aslinormal ve binormal vektöründen elde edilen N^*B^* - Smarandache eğrisi

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad (3.1.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.7 N^*B^* - Smarandache eğrisinin $T_{\beta_2}, N_{\beta_2}, B_{\beta_2}$ Frenet vektörleri

$$T_{\beta_2} = \frac{-\kappa^*T^* - \tau^*N^* + \tau^*B^*}{\sqrt{2\tau^{*2} + \kappa^{*2}}}, \quad (3.1.17)$$

$$N_{\beta_2} = \frac{\begin{aligned} &\left(2\tau^*\kappa^{*2}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' + \tau^*\kappa^*(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})\right)T^* \\ &+ \left(- (2\tau^{*2} + \kappa^{*2})(\tau^{*2} + \kappa^{*2}) - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*3}\right)N^* \\ &+ \left(-\tau^{*2}(2\tau^{*2} + \kappa^{*2}) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*3}\right)B^* \end{aligned}}{\sqrt{\begin{aligned} &(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^3(\tau^{*2} + \kappa^{*2}) + 2\kappa^{*3}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'(2\tau^{*2} \\ &+ \kappa^{*2})\left(\kappa^*\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' + (2\tau^{*2} + \kappa^{*2})\right) \end{aligned}}}, \quad (3.1.18)$$

$$B_{\beta_2} = \frac{\begin{aligned} &\left(2\tau^{*3} + \tau^*\kappa^{*2}\right)T^* + \left(\tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'}\right)N^* + \left(\kappa^{*3} + 2\tau^{*2}\kappa + \tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'}\right)B^* \end{aligned}}{\sqrt{\begin{aligned} &(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^2(\kappa^{*2}\tau^{*2}) + 2\kappa^{*3}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\kappa^*\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' + (2\tau^{*2} + \kappa^{*2})\right) \end{aligned}}}, \quad (3.1.19)$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.16) ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınır

$$\beta_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa^* T^* - \tau^* N^* + \tau^* B^*), \quad (3.1.20)$$

$$\beta_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\kappa^* \tau^* - \kappa')T^* + (-\kappa^{*2} - \tau^{*2} - \tau^{*'})N^* + (\tau^{*'} - \tau^{*2})B^*\right), \quad (3.1.21)$$

$$\beta_2''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{l} \left(\kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} + 2\kappa^* \tau^{*'} + \kappa^{*'} \tau^* - \kappa^{*''}\right)T^* \\ + \left(\tau^{*3} + \kappa^{*2} \tau^* - 3\kappa^* \kappa^{*'} - 3\tau^* \tau^{*'} - \tau^{*''}\right)N^* \\ + \left(-\kappa^{*2} \tau^* - \tau^{*3} - 3\tau^* \tau^{*'} + \tau^{*''}\right)B^* \end{array}\right) \quad (3.1.22)$$

olur. β_2', β_2'' vektörel çarpılır ve gerekli norm hesaplaması yapılır

$$\beta_2' \wedge \beta_2'' = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} (2\tau^{*3} + \tau^* \kappa^{*2})T^* + (\tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'})N^* \\ + (\kappa^{*3} + 2\tau^{*2} \kappa^* + \tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'})B^* \end{array}\right), \quad (3.1.23)$$

$$\|\beta_2'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\kappa^{*2} + 2\tau^{*2}}, \quad (3.1.24)$$

$$\|\beta_2' \wedge \beta_2''\| = \frac{1}{2}\sqrt{(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 2\kappa^{*3}\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\kappa^*\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\right) + (2\tau^{*2} + \kappa^{*2})} \quad (3.1.25)$$

olur. (3.1.20), (3.1.21), (3.1.23), (3.1.24), (3.1.25) ifadeleri (2.1.2) bağıntısından yerine yazılırsa β_2 eğrisinin Frenet vektörleri bulunur.

Sonuç 3.1.8 β_2 Smarandache eğrisine ait Frenet vektörlerinin esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden ifadeleri

$$T_{\beta_2} = \frac{-\sin\varpi T - N}{\sqrt{1 + \sin^2\varpi}},$$

$$\begin{aligned}
N_{\beta_2} &= \frac{\left(\kappa^3(1 + \sin^2\varpi) - \tau(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa') \right) T \\
&\quad + \left(\tau \sin\varpi(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa') - \kappa^3 \sin\varpi(1 + \sin^2\varpi) \right) N \\
&\quad + \left(-\tau(1 + \sin^2\varpi) \cos^{-1}(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa') \right) B}{\sqrt{\kappa^6 \cos^2\varpi(1 + \sin^2\varpi)^3 (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-2} + 2\tau^2(1 + \sin^2\varpi) - 2\tau\kappa^3 \cos^2\varpi(1 + \sin^2\varpi)^2 (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1}}}, \\
B_{\beta_2} &= \frac{\tau T - \tau \sin\varpi N + \left(\kappa^3 \cos\varpi(1 + \sin^2\varpi)(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1} - \tau \cos\varpi \right) B}{\sqrt{\kappa^6 \cos^2\varpi(1 + \sin^2\varpi)^2 (\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-2} + 2\tau^2 - 2\tau\kappa^3 \cos^2\varpi(1 + \sin^2\varpi)(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1}}}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.17), (3.1.18), (3.1.19) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa β_2 eğrisinin esas eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri cinsinden ifadesi bulunur.

Teorem 3.1.9 N^*B^* – Smarandache Eğrisinin κ_{β_2} eğrilği ve τ_{β_2} torsiyonu sırasıyla

$$\kappa_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 4\kappa^{*3} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' \left(\kappa^* \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' + (2\tau^{*2} + \kappa^{*2}) \right)}}{(2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.26)$$

$$\tau_{\beta_2} = \frac{-\tau^{*'} \left(2\kappa^* \tau^{*3} + \kappa^{*3} \tau^* \right) + \kappa^{*'} \left(2\tau^{*4} + \kappa^{*2} \tau^{*2} \right) - \kappa^{*'} \tau^{*'} \left(6\tau^{*2} - 3\kappa^{*2} \right) - \kappa^{*''} \left(2\tau^{*3} + \kappa^{*2} \tau^* \right) + \tau^{*''} \left(2\kappa^* \tau^{*2} + \kappa^{*3} \right) + 3\kappa^* \tau^* \left((\kappa^{*'})^2 - 2(\tau^{*'})^2 \right)}{2^{-\frac{3}{2}} \left((2\tau^{*2} + \kappa^{*2})^2 (\tau^{*2} + \kappa^{*2}) + 2\kappa^{*3} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' \left(\kappa^* \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' + 2\tau^{*2} + \kappa^{*2} \right) \right)} \quad (3.1.27)$$

bağıntısıyla verilir.

İspat (2.1.3) bağıntısında (3.1.22), (3.1.23), (3.1.24), (3.1.25) ifadeleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa κ_{β_2} eğriliği ve τ_{β_2} torsiyonu hesaplanmış olur.

Sonuç 3.1.10 N^*B^* - Smarandache eğrisinin, eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden karşılıkları

$$\kappa_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2\kappa^6 \cos^2 \varpi (1 + \sin^2 \varpi)^2 + 4\tau^2 (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^2 - 4\tau \kappa^3 \cos^2 \varpi (1 + \sin^2 \varpi) (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')}}{\kappa^3 \cos \varpi (1 + \sin^2 \varpi)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\begin{aligned} & \left(\frac{-\kappa^3 \sin \varpi \cos \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)' \kappa^6 \sin \varpi \cos^3 \varpi (1 + \sin^2 \varpi) \\ & + \left(\frac{\kappa^3 \cos^2 \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)' \kappa^6 \sin \varpi \cos^2 \varpi (1 + \sin^2 \varpi) \\ & - \frac{\left(\frac{\kappa^3 \cos^2 \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)' \left(\frac{-\kappa^3 \sin \varpi \cos \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)' 3(3 \sin^2 \varpi - 1)}{(\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-2}} \\ & + \frac{\left(\frac{\kappa^2 \cos^2 \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)'' \kappa^3 \cos \varpi \sin \varpi (1 + \sin^2 \varpi)}{(\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1}} \\ & + \frac{\left(\frac{-\kappa^3 \sin \varpi \cos \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)'' \kappa^3 \cos^2 \varpi (1 + \sin^2 \varpi)}{(\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1}} \\ & - \frac{\left(\left(\left(\frac{\kappa^3 \cos^2 \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)' \right)^2 - 2 \left(\left(\frac{-\kappa^3 \sin \varpi \cos \varpi}{\kappa \tau \tan \varpi - \kappa'} \right)' \right)^2 \right)}{\left(3 \sin \varpi \cos \varpi (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^2 \right)^{-1}} \end{aligned}}{\sqrt{2}^{-1} \kappa^6 \cos^2 \varpi \left(\begin{aligned} & \kappa^6 \cos^2 \varpi (1 + \sin^2 \varpi)^2 (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-2} + 2\tau^2 \\ & - 2\tau \kappa^3 \cos^2 \varpi (1 + \sin^2 \varpi) (\kappa \tau \tan \varpi - \kappa')^{-1} \end{aligned} \right)}$$

şeklinde bulunur.

İspat (3.1.26) ve (3.1.27) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa β_2 eğrisinin eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden eşitliği bulunur.

Tanım 3.1.11 ζ eğrisinin Evolütü ζ^* olsun. ζ^* eğrisinin teğet ve binormal vektöründen elde edilen T^*B^* - Smarandache eğrisi

$$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad (3.1.28)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.12 T^*B^* - Smarandache eğrisinin $T_{\beta_3}, N_{\beta_3}, B_{\beta_3}$ Frenet vektörleri

$$T_{\beta_3} = N^*, \quad (3.1.29)$$

$$N_{\beta_3} = \frac{\left(2\kappa^{*2}\tau^* - \kappa^{*3} - \kappa^*\tau^{*2}\right)T^* + \left(\tau^*\kappa^{*2} + \tau^{*3} - 2\kappa^*\tau^{*2}\right)B^*}{\sqrt{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3 - 4\kappa^*\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2})\left((\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^*\tau^*\right)}}, \quad (3.1.30)$$

$$B_{\beta_3} = \frac{\left(\tau^*\kappa^{*2} + \tau^{*3} - 2\kappa^*\tau^{*2}\right)T^* + \left(\kappa^{*3} + \kappa^*\tau^{*2} - 2\kappa^{*2}\tau^*\right)B^*}{\sqrt{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3 - 4\kappa^*\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2})\left((\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^*\tau^*\right)}} \quad (3.1.31)$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.28) bağıntısının birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa

$$\beta_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\kappa^* - \tau^*\right)N^*, \quad (3.1.32)$$

$$\beta_3'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(-\kappa^{*2} + \kappa^*\tau^*\right)T^* + \left(\kappa^{*'} - \tau^{*'}\right)N^* + \left(\kappa^*\tau^* - \tau^{*2}\right)B^*\right), \quad (3.1.33)$$

$$\beta_3''' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{l} \left(-3\kappa^*\kappa^{*'} + 2\kappa^*\tau^{*'} + \kappa^{*'}\tau^*\right)T^* \\ + \left(\kappa^*\tau^{*'} + 2\kappa^{*'}\tau^* - 3\tau^*\tau^{*'}\right)B^* \\ + \left(-\kappa^{*3} + \kappa^{*2}\tau^* + \kappa^{*''} - \tau^{*''} - \kappa^*\tau^{*2} + \tau^{*3}\right)N^* \end{array}\right) \quad (3.1.34)$$

olur. β_3', β_3'' vektörel çarpılır ve gerekli norm hesaplaması yapılırsa

$$\beta_3' \wedge \beta_3'' = \frac{1}{2} \left((\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - 2\kappa^*\tau^{*2})T^* + (\kappa^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - 2\kappa^{*2}\tau^*)B^* \right), \quad (3.1.35)$$

$$\|\beta_3'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\kappa^* - \tau^*), \quad (3.1.36)$$

$$\|\beta_3' \wedge \beta_3''\| = \frac{1}{2} \sqrt{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3 - 4\kappa^*\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) \left((\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^*\tau^* \right)} \quad (3.1.37)$$

olur. (3.1.32), (3.1.33), (3.1.35), (3.1.36), (3.1.37) ifadeleri (2.1.2) bağıntısında yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa β_3 eğrisinin Frenet vektörleri hesaplanmış olur.

Sonuç 3.1.13 β_3 Smarandache eğrisine ait Frenet vektörlerinin esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden ifadeleri

$$\begin{aligned} T_{\beta_3} &= -T, \\ N_{\beta_3} &= \frac{\left(-\sin 2\varpi - 1 \right) N}{\sqrt{1 + 4\cos\varpi \sin\varpi (1 + \cos\varpi \sin\varpi)}}, \\ B_{\beta_3} &= \frac{\left(1 + \sin 2\varpi \right) B}{\sqrt{1 + 4\cos\varpi \sin\varpi (1 + \cos\varpi \sin\varpi)}} \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.29), (3.1.30) ve (3.1.31) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa β_3 eğrisinin esas eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri cinsinden ifadeleri bulunur.

Teorem 3.1.14 T^*B^* – Smarandache eğrisinin κ_{β_3} eğriliği ve τ_{β_3} torsiyonu

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3 - 8\kappa^*\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) \left((\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^*\tau^* \right)}}{(\kappa^* - \tau^*)^3}, \quad (3.1.38)$$

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\kappa^{*'} \left(3\kappa^{*2}\tau^{*2} + \tau^{*4} - 3\kappa^*\tau^{*3} - \kappa^{*3}\tau^* \right) + \tau^{*'} \left(3\kappa^{*2}\tau^{*2} + \kappa^{*4} - 3\tau^*\kappa^{*3} - \tau^{*3}\kappa^* \right)}{\sqrt{2}^{-1} \left((\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3 - 4\kappa^*\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) \left((\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^*\tau^* \right) \right)} \quad (3.1.39)$$

şeklinde verilir.

İspat (2.1.3) bağıntısında (3.1.34), (3.1.35), (3.1.36) ve (3.1.37) ifadeleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa κ_{β_3} ve τ_{β_3} eğrilikleri hesaplanmış olur.

Sonuç 3.1.15 T^*B^* - Smarandache eğrisinin, eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden karşılıkları

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2 + 8\cos\varpi\sin\varpi \left(1 + \cos\varpi\sin\varpi \right)}}{\left(\cos\varpi + \sin\varpi \right)^3},$$

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\left(\frac{\kappa^3\cos^2\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'} \right)' \left(\sin^2\varpi(2\cos^2\varpi + 1) + \cos\varpi\sin\varpi(2\sin^2\varpi + 1) \right) + \left(\frac{-\kappa^3\cos\varpi\sin\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'} \right)' \left(\cos^2\varpi(2\sin^2\varpi + 1) + \cos\varpi\sin\varpi(2\cos^2\varpi + 1) \right)}{\frac{\kappa^6\cos^2\varpi}{\sqrt{2}(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^2} \left(1 + 4\cos\varpi\sin\varpi + 4\cos^2\varpi\sin^2\varpi \right)} \quad (3.1.40)$$

ifadesiyle verilir.

İspat (3.1.38) ve (3.1.39) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntılarında bulunan karşılıklar yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa β_3 eğrisinin eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden ifadeleri bulunur.

Tanım 3.1.16 ζ eğrisinin Evolütü ζ^* olsun. ζ^* eğrisinin teğet, aslinormal ve binormal vektöründen elde edilen $T^*N^*B^*$ - Smarandache eğrisi

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad (3.1.41)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.17 $T^*N^*B^*$ – Smarandache eğrisinin $T_{\beta_4}, N_{\beta_4}, B_{\beta_4}$ Frenet vektörleri

$$T_{\beta_4} = \frac{-\kappa^*T^* + (\kappa^* - \tau^*)N^* + \tau^*B^*}{\sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)}}, \quad (3.1.42)$$

$$\begin{aligned} & \left(2\kappa^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(\tau^* - \kappa^*) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2}(2\tau^* - \kappa^*) \right) T^* \\ & + \left(-2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2}(\kappa^* + \tau^*) \right) N^* \\ & + \left(2\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(\kappa^* - \tau^*) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2}(2\kappa^* - \tau^*) \right) B^* \\ N_{\beta_4} = & \frac{\left(2\kappa^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(\tau^* - \kappa^*) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2}(2\tau^* - \kappa^*) \right) T^* + \left(-2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2}(\kappa^* + \tau^*) \right) N^* + \left(2\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(\kappa^* - \tau^*) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \kappa^{*2}(2\kappa^* - \tau^*) \right) B^*}{\sqrt{6\kappa^{*4}(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*) \left(\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\right)^2 + 8(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)^3(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 8(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)^2(\kappa^{*3} + \kappa^{*2}\tau^*) \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'}}, \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

$$\begin{aligned} & (2\kappa^{*2}\tau^* - 2\kappa^*\tau^{*2} + 2\tau^{*3} + \tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})T^* + (\tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})N^* \\ & + (-2\kappa^{*2}\tau^* + 2\kappa^*\tau^{*2} + 2\tau^{*3} + \tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})B^* \\ B_{\beta_4} = & \frac{(2\kappa^{*2}\tau^* - 2\kappa^*\tau^{*2} + 2\tau^{*3} + \tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})T^* + (\tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})N^* + (-2\kappa^{*2}\tau^* + 2\kappa^*\tau^{*2} + 2\tau^{*3} + \tau^{*'}\kappa^* - \tau^*\kappa^{*'})B^*}{\sqrt{3\kappa^{*4} \left(\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\right)^2 + 4(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 4\kappa^{*2}(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^*\tau^*)(\kappa^* + \tau^*) \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'}}, \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.41) ifadesinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa

$$\beta_4' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\kappa^*T^* + (\kappa^* - \tau^*)N^* + \tau^*B^* \right), \quad (3.1.45)$$

$$\beta_4'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left((-\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \tau^*\kappa^*)T^* + (-\kappa^{*2} + \kappa^{*'} - \tau^{*'} - \tau^{*2})N^* + (\kappa^*\tau^* - \tau^{*2} + \tau^{*'})B^* \right), \quad (3.1.46)$$

$$\beta_4''' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \left(\kappa^{*3} - 3\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^{*'} \kappa^* + \tau^* \kappa^{*'} + \kappa^* \tau^{*2} \right) T \\ + \left(-\kappa^{*3} - 3\kappa^* \kappa^{*'} + \tau^* \kappa^{*2} + \kappa^{*''} + \tau^{*3} - 3\tau^* \tau^{*'} - \kappa^* \tau^{*2} - \tau^{*''} \right) N \\ + \left(-\tau^{*3} - 3\tau^* \tau^{*'} - \tau^* \kappa^{*2} + 2\tau^* \kappa^{*'} + \kappa^* \tau^{*'} + \tau^{*''} \right) B \end{pmatrix} \quad (3.1.47)$$

olur. β_4', β_4'' vektörel çarpılır ve gerekli norm hesaplaması yapılırsa

$$\beta_4' \wedge \beta_4'' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \left(2\kappa^{*2} \tau^* - 2\kappa^* \tau^{*2} + 2\tau^{*3} + \tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'} \right) T^* + \left(\tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'} \right) N^* \\ + \left(-2\kappa^{*2} \tau^* + 2\kappa^* \tau^{*2} + 2\kappa^{*3} + \tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'} \right) B^* \end{pmatrix}, \quad (3.1.48)$$

$$\|\beta_4'\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)}, \quad (3.1.49)$$

$$\|\beta_4' \wedge \beta_4''\| = \frac{1}{3} \sqrt{3\kappa^{*4} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' ^2 + 4(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 4(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*) (\tau^* \kappa^{*2} + \tau^{*3}) \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' }, \quad (3.1.50)$$

bulunur. (3.1.45), (3.1.46), (3.1.48), (3.1.49) ve (3.1.50) ifadeleri (2.1.2) bağıntısından yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa β_4 eğrisinin Frenet vektörleri elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1.18 β_4 Smarandache egrisine ait Frenet vektörlerinin esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden ifadeleri

$$T_{\beta_4} = \frac{-(\cos\varpi + \sin\varpi)T - N}{\sqrt{2 + \sin 2\varpi}},$$

$$N_{\beta_4} = \frac{\begin{pmatrix} 2\kappa^3(\cos\varpi + \cos^2\varpi \sin\varpi)(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^{-1} - \tau(\cos\varpi - \sin\varpi) \\ + \left(\frac{-2\kappa^3(\cos\varpi + \cos^2\varpi \sin\varpi)(\sin\varpi + \cos\varpi)}{(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')} + \tau(\cos^2\varpi - \sin^2\varpi) \right) N \\ + \left(-\tau \cos\varpi(\sin\varpi(2\sin\varpi + \cos\varpi)) + \tau(2\cos\varpi + \sin\varpi) \right) B \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{6\tau^2(1 + \cos\varpi \sin\varpi) + \frac{8\kappa^6 \cos^2\varpi(1 + \cos\varpi \sin\varpi)^3}{(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')^2}}{\frac{8\kappa^3 \tau \cos\varpi(1 + \cos\varpi \sin\varpi)(\cos^3\varpi - \sin^3\varpi)}{(\kappa\tau \tan\varpi - \kappa')}}}},$$

$$B_{\beta_4} = \frac{\tau T - \tau(\cos\varpi + \sin\varpi)N + (2\kappa^3 \cos\varpi(1 + \cos\varpi \sin\varpi)(\kappa \tau \tan\varpi - \kappa')^{-1} + \tau(\sin\varpi - \cos\varpi))B}{\sqrt{3\tau^2 + \frac{4\kappa^6 \cos^2\varpi(1 + \cos\varpi \sin\varpi)^2}{(\kappa \tau \tan\varpi - \kappa')^2} - \frac{4\kappa^3 \tau \cos\varpi(\cos^3\varpi - \sin^3\varpi)}{(\kappa \tau \tan\varpi - \kappa')}}}$$

şeklinde verilir.

İspat (3.1.42), (3.1.43), (3.1.44) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa β_3 eğrisinin esas eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri cinsinden ifadeleri bulunur.

Teorem 3.1.19 $T^*N^*B^*$ – Smarandache eğrisinin κ_{β_4} eğriliği ve τ_{β_4} torsiyonu

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{9\kappa^{*4} \left(\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' \right)^2 + 12(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 12(\kappa^{*3} + \kappa^{*2} \tau^*) (\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*) \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)'}}{\left(2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*) \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.1.51)$$

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\kappa^{*'} \left(-2\kappa^{*3} \tau^* + 4\kappa^{*2} \tau^{*2} - 4\kappa^* \tau^{*3} + 2\tau^{*4} \right) + \tau^{*'} \kappa^{*'} \left(-6\kappa^{*2} + 6\tau^{*2} \right) + \tau^{*'} \left(-4\kappa^{*3} \tau^* + 4\kappa^{*2} \tau^{*2} - 2\kappa^* \tau^{*3} + 2\tau^{*4} \right) \kappa^{*''} \left(\tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'} \right) + \tau^{*''} \left(2\kappa^{*3} + 2\kappa^* \tau^{*2} - 2\kappa^{*2} \tau^* \right) + \left(\kappa^{*'} \right)^2 \left(6\kappa^* \tau^* - 3\tau^{*2} \right) + \left(\tau^{*'} \right)^2 \left(3\kappa^{*2} - 6\kappa^* \tau^* \right)}{3^{-\frac{1}{2}} (3\kappa^{*4} \left(\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)' \right)^2 + 4(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 4(\kappa^{*3} + \kappa^{*2} \tau^*) (\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*) \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \right)')}, \quad (3.1.52)$$

şeklinde verilir.

İspat (2.1.3) bağıntısında (3.1.47), (3.1.48), (3.1.49) ve (3.1.50) ifadeleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa κ_{β_4} ve τ_{β_4} eğrilikleri hesaplanmış olur.

Sonuç 3.1.20 $T^*N^*B^*$ – Smarandache eğrisinin eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden karşılıkları

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{9\tau^2(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa') + 12\kappa^6\cos^2\varpi(1 + \cos\varpi\sin\varpi)^2(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^{-1} - 12\kappa^3\tau\cos\varpi(\cos^3\varpi - \sin^3\varpi)}}{\left(\kappa^3\cos\varpi\sqrt{2(1 + \cos\varpi\sin\varpi)}\right)^3},$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\kappa^3\cos^2\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)' \left(\begin{array}{l} 2\kappa^6\cos^2\varpi\sin^2\varpi(1 + \cos^2\varpi) \\ + 2\kappa^6\cos^3\varpi\sin\varpi(1 + \sin^2\varpi) \end{array}\right) \\ & + \left(\frac{-\kappa^3\cos\varpi\sin\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)' \left(\begin{array}{l} 2\kappa^6\cos^4\varpi(1 + \sin^2\varpi) \\ + 2\kappa^6\cos^3\varpi\sin\varpi(1 + \cos^2\varpi) \end{array}\right) \\ & + \left(\frac{\kappa^3\cos^2\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)' \left(\frac{-\kappa^3\cos\varpi\sin\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)' 6(\sin^2\varpi - \cos^2\varpi)(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^2 \\ & + \left(\frac{\kappa^3\cos^2\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)'' \tau(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^2 \\ & + \left(\frac{-\kappa^3\cos\varpi\sin\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)'' 2\kappa^3\cos^2\varpi(1 + \cos\varpi\sin\varpi)(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa') \\ & + \left(\frac{\kappa^3\cos^2\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)'^2 - 3\sin\varpi(2\cos\varpi + \sin\varpi)(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^2 \\ & + \left(\frac{-\kappa^3\cos\varpi\sin\varpi}{\kappa\tau\tan\varpi - \kappa'}\right)'^2 3\cos\varpi(\cos\varpi + 2\sin\varpi)(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^2 \end{aligned}$$

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\left(\begin{array}{l} 3\kappa^6\tau^2\cos^2\varpi + 4\kappa^{12}\cos^4\varpi(1 + \cos\varpi\sin\varpi)^2(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^{-2} \\ - 4\kappa^9\tau\cos^3\varpi(\cos^3\varpi - \sin^3\varpi)(\kappa\tau\tan\varpi - \kappa')^{-1} \end{array}\right)}{3^{-\frac{1}{2}}}$$

şeklinde bulunur.

İspat (3.1.51) ve (3.1.52) ifadelerinin (2.2.5) ve (2.2.8) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa β_4 eğrisinin eğrilik ve torsiyonunun esas eğrinin Frenet elemanları cinsinden ifadeleri bulunur.

Örnek 3.1.21 $\beta(s) = (s \cos(\ln(s)), s \sin(\ln(s)), s)$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))), \frac{\sqrt{3}}{3} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))), \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \\ N &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))), \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))), 0 \right), \\ B &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{6} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))), -\frac{\sqrt{6}}{6} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))), \frac{\sqrt{6}}{3} \right), \\ \kappa &= \frac{\sqrt{2}}{3s}, \quad \tau = \frac{1}{3s} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu eğrinin Frenet vektörlerinden oluşan Smarandache eğrileri (2.3) bağıntısına göre

$$\begin{aligned} \beta_{1-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + N), \\ \beta_{2-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N + B), \\ \beta_{3-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + B), \\ \beta_{4-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T + N + B) \end{aligned} \tag{3.1.53}$$

şeklinde tanımlanır. β eğrisinin Evolütü (2.2.1) bağıntısından

$$\beta^* = \left(\begin{array}{l} s \cos(\ln(s)) - \frac{3s}{2} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))) + \frac{\sqrt{3}s}{2} \tan\left(\frac{31}{3}\right) (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))), \\ s \sin(\ln(s)) + \frac{3s}{2} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))) + \frac{\sqrt{3}s}{2} \tan\left(\frac{31}{3}\right) (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))), \\ s - \sqrt{3}s \tan\left(\frac{31}{3}\right) \end{array} \right)$$

şeklinde yazılır. β^* eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri

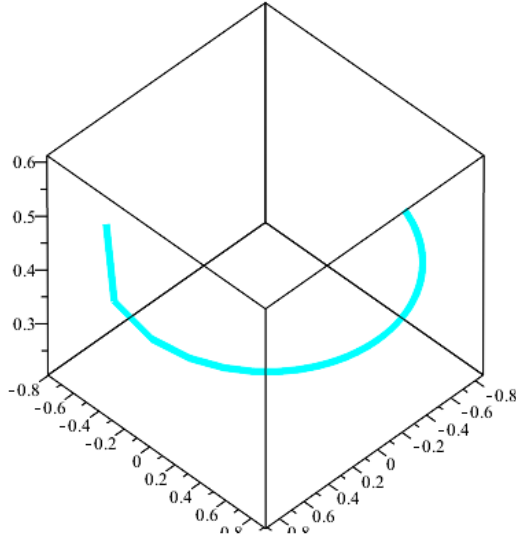
$$T^* = \left(\begin{array}{l} \frac{\sqrt{6}}{6} (\sin\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 2 \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)), \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} (\sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos(\ln(s)) + \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) - 2 \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)), \\ \frac{\sqrt{6}}{6} (\sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} - \cos\left(\frac{31}{3}\right)) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
N^* &= \begin{pmatrix} \frac{\sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos(\ln(s)) + \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) - 2 \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)}{\sqrt{2 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2 \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^2 + 3}}, \\ \frac{\sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \sin(\ln(s)) + 2 \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)}{\sqrt{2 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2 \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^2 + 3}}, 0 \end{pmatrix} \\
B^* &= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6} \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) - 2\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) - 4\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 3 \sin(\ln(s))\right)}{6\sqrt{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 3}}, \\ \frac{-\sqrt{6} \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 4\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) - 2\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) - 3 \cos(\ln(s))\right)}{6\sqrt{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 3}}, \\ \frac{\sqrt{2} \left(2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 6 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 3\sqrt{3}\right)}{6\sqrt{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 3}} \end{pmatrix} \\
\kappa^* &= - \frac{\sqrt{2 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2 \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^2 + 3 \cos\left(\frac{31}{3}\right)}}{6s} \\
\tau^* &= \frac{\sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) \left(\begin{aligned} &16\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^5 + 48 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^4 + 36\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^3 \\ &- 36 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^2 - 27\sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) - 27 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \end{aligned} \right)}{18s \left(\begin{aligned} &8 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^3 \sqrt{3} - 8 \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^4 + 12 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) \\ &+ 24 \left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^2 + 9 \end{aligned} \right)}
\end{aligned}$$

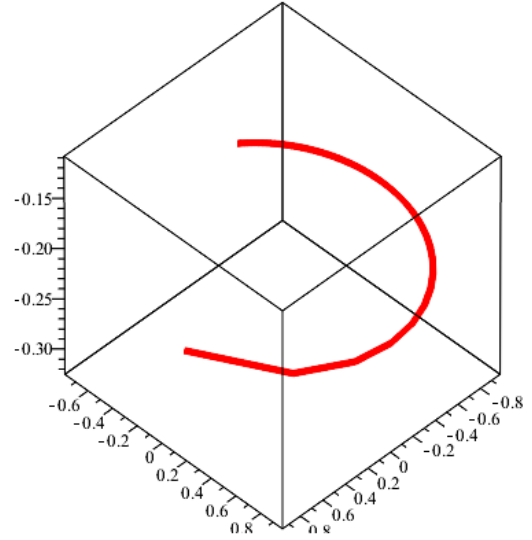
şeklinde hesaplanır. Bu eğrinin Frenet elemanlarının oluşturduğu Smarandache eğrileri (2.3.2) bağıntısına göre

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + N^*), \\
\beta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + B^*), \\
\beta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + B^*), \\
\beta_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T^* + N^* + B^*)
\end{aligned} \tag{3.1.54}$$

şeklinde tanımlanır. (3.1.53) ve (3.1.54) numaralı bağıntılarda bulunan Smarandache eğrilerinin grafikleri Şekil 3.2, Şekil 3.3, Şekil 3.4, Şekil 3.5 de verilmiştir.

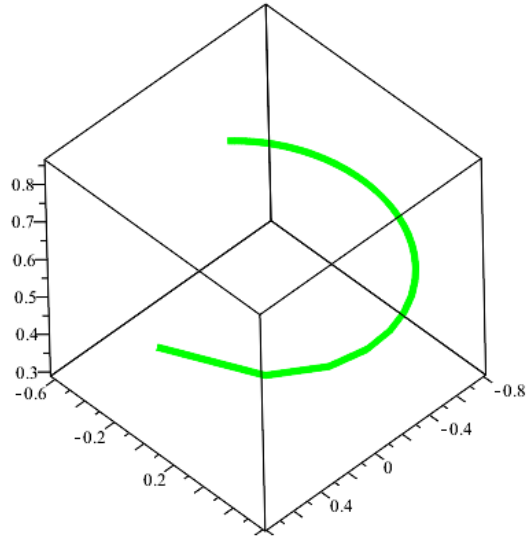


(a) β_{1-esas} eğrisi

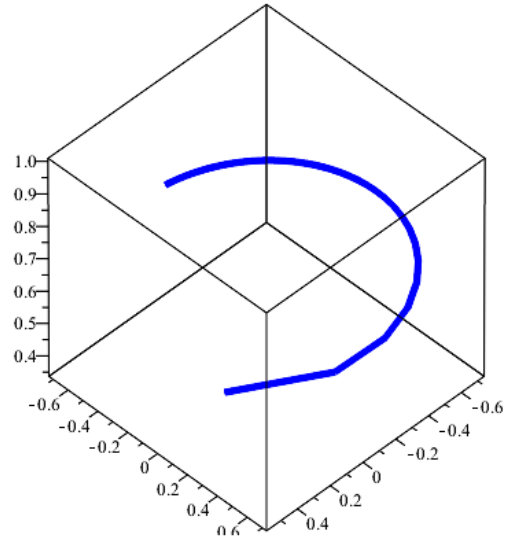


(b) β_1 eğrisi

Şekil 3.2 Eğrilerin teğet ve aslinormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri

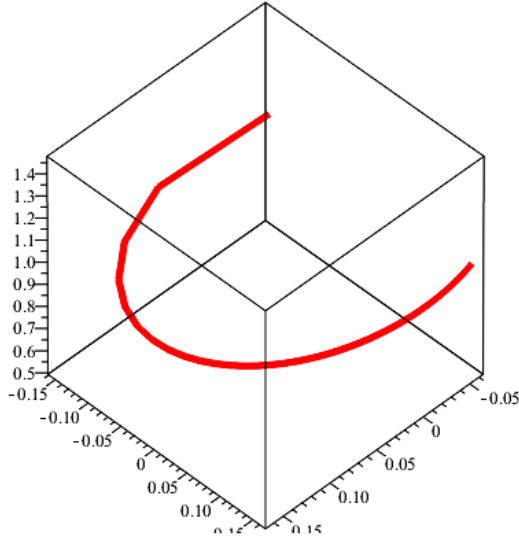


(a) β_{2-esas} eğrisi

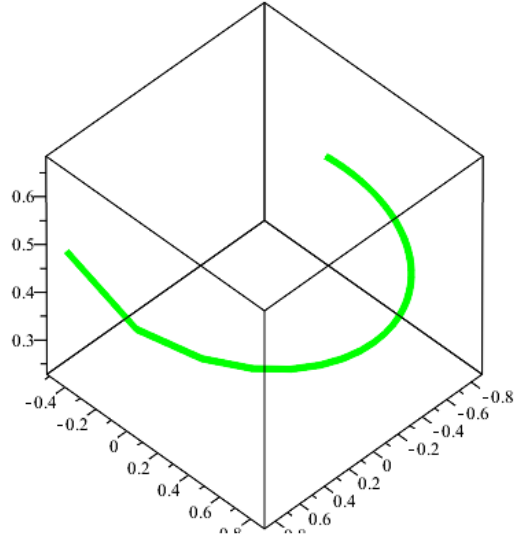


(b) β_2 eğrisi

Şekil 3.3 Eğrilerin aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri

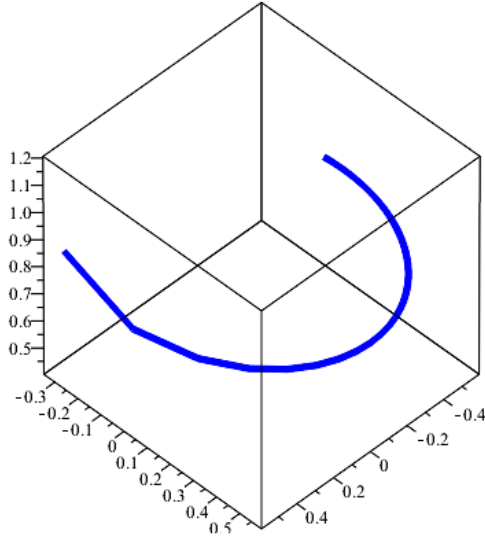


(a) β_{3-esas} eğrisi

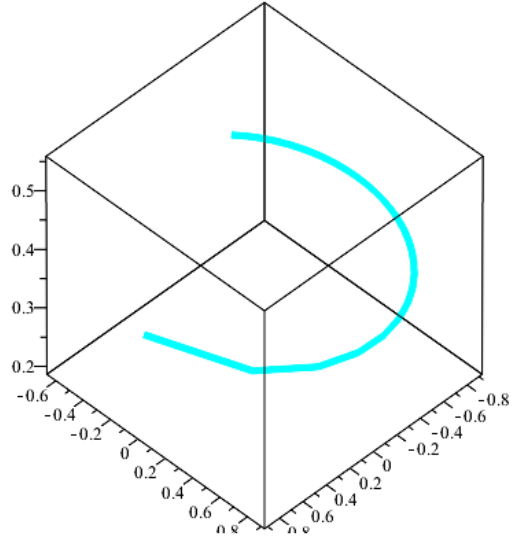


(b) β_3 eğrisi

Şekil 3.4 Eğrilerin teğet ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri



(a) β_{4-esas} eğrisi



(b) β_4 eğrisi

Şekil 3.5 Eğrilerin teğet, aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri

Örnek 3.1.22 $\bar{\beta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(s), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(s), \frac{1}{\sqrt{2}} s \right)$ Helis eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$T = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$N = (-\cos(s), -\sin(s), 0),$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

şeklinde bulunur. Bu eğrinin Frenet vektörlerinden oluşan Smarandache eğrileri (2.3.2) bağıntısına göre

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{1-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + N), \\ \bar{\beta}_{2-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N + B), \\ \bar{\beta}_{3-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + B), \\ \bar{\beta}_{4-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T + N + B) \end{aligned} \quad (3.1.55)$$

şeklinde tanımlanır. $\bar{\beta}$ eğrisinin Evolütü (2.2.1) bağıntısından

$$\beta^* = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s) - \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \sin(s), -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s) + \tan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \cos(s), \frac{\sqrt{2}}{2}s, \right)$$

şeklinde yazılır. $\bar{\beta}^*$ eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$T^* = \left(\begin{array}{c} \frac{-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \sqrt{2} \sin(s) + 2 \cos(s) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \right)}{2\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 1}}, \\ \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \sqrt{2} \cos(s) - 2 \sin(s) \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \right)}{2\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 1}}, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 1} \end{array} \right),$$

$$N^* = \left(\frac{\sqrt{2} \sin(s) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right)}{2\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 1}}, \frac{-\sqrt{2} \cos(s) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right)}{2\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 1}}, \frac{-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \sqrt{2}}{2\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 1}} \right),$$

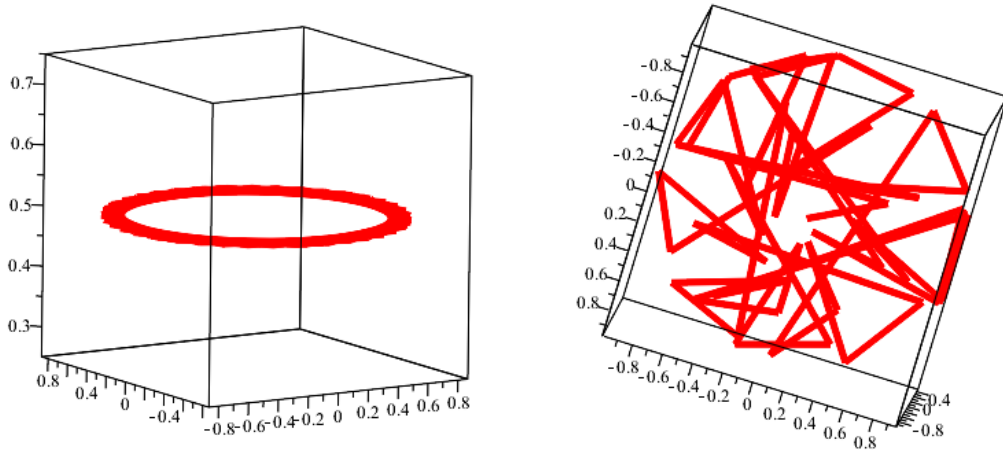
$$B^* = \begin{pmatrix} \frac{-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \sqrt{2} \sin(s) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 2\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \cos(s) - 2\cos(s)\right)}{2\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) - 2}, \\ \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \sqrt{2} \cos(s) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) - 2\left(\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right)\right)^2 \sin(s) + 2\sin(s)\right)}{2\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) - 2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) \end{pmatrix},$$

$$\kappa^* = \frac{\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right)}{2\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right) + 1}}, \tau^* = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 10\right)$$

şeklinde hesaplanır. Bu eğrinin Frenet elemanlarının oluşturduğu Smarandache eğrileri (2.3.2) bağıntısına göre

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_1^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + N^*), \\ \overline{\beta}_2^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + B^*), \\ \overline{\beta}_3^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + B^*), \\ \overline{\beta}_4^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T^* + N^* + B^*) \end{aligned} \quad (3.1.56)$$

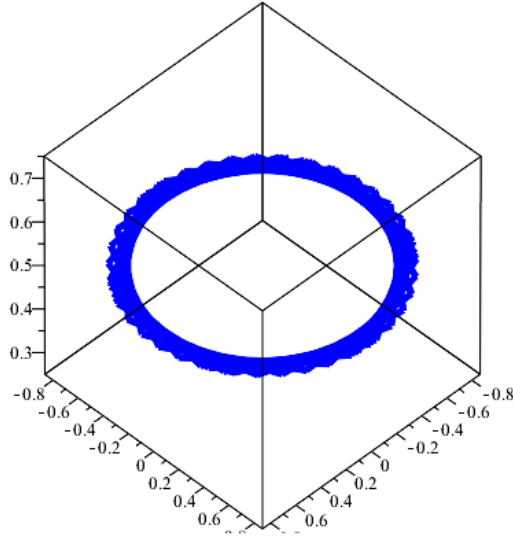
şeklinde tanımlanır. (3.1.55) ve (3.1.56) numaralı bağıntılarda bulunan Smarandache eğrilerinin grafikleri Şekil 3.6, Şekil 3.7, Şekil 3.8, Şekil 3.9 de verilmiştir.



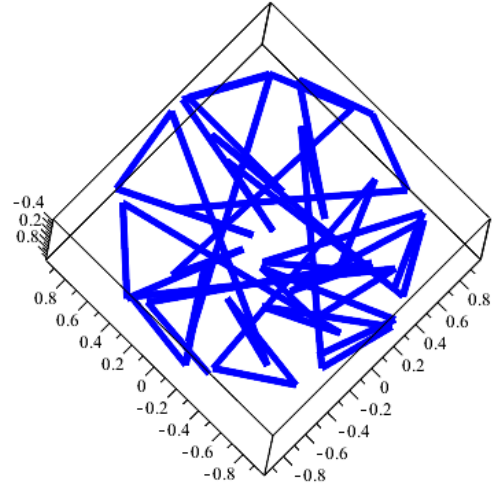
(a) $\overline{\beta}_{1-esas}$ eğrisi

(b) $\overline{\beta}_1^*$ eğrisi

Şekil 3.6 Eğrilerin teğet ve aslinormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri

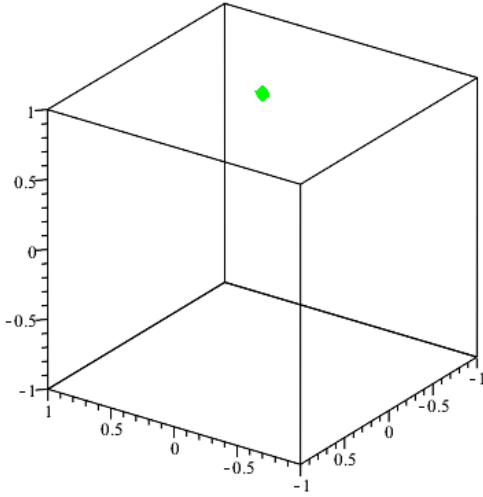


(a) $\overline{\beta}_{2-esas}$ eğrisi

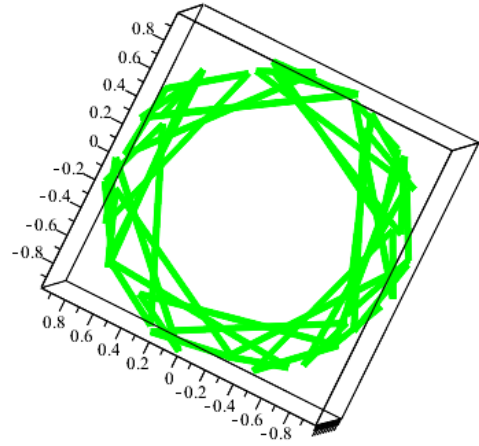


(b) $\overline{\beta}_2^*$ eğrisi

Şekil 3.7 Eğrilerin aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri

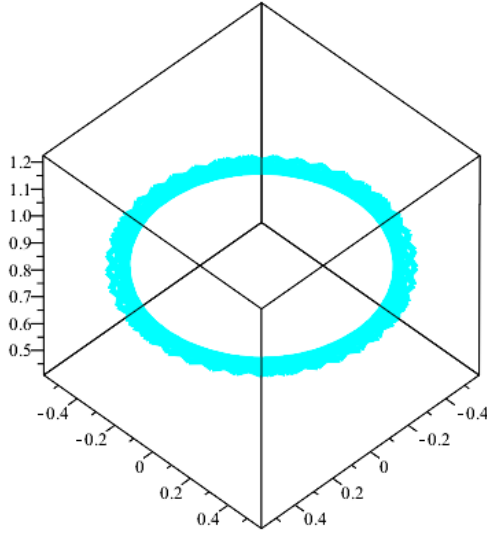


(a) $\overline{\beta}_{3-esas}$ eğrisi

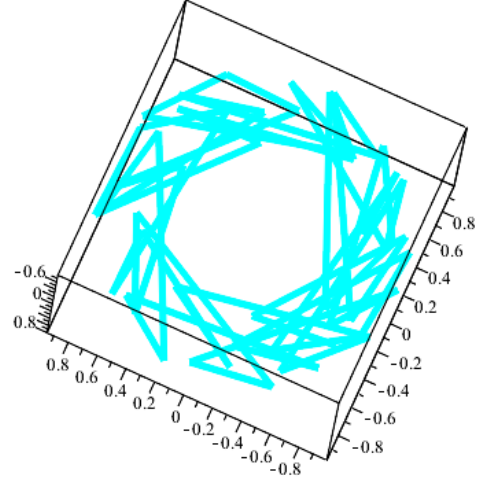


(b) $\overline{\beta}_3^*$ eğrisi

Şekil 3.8 Eğrilerin teğet ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri



(a) $\overline{\beta}_{4-esas}$ eğrisi



(b) $\overline{\beta}_{4^*}$ eğrisi

Şekil 3.9 Eğrilerin teğet, aslinormal ve binormal vektörlerinin toplamıyla elde edilen Smarandache eğrileri

3.2 Evolüt Eğrilerine Ait Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri

Bu bölümde, ζ eğrisine ait ζ^* evolüt eğrisinin teğet, aslinormal ve binormal vektörlerinin birim küre yüzeyinde çizdiği eğrilerin Sabban çatıları tanımlanarak bu çatılar konum vektörü olarak alındığında oluşan Smarandache eğrileri incelendi. Bulunan sonuçların evolüt eğrisinin Frenet aparatları cinsinden ifadeleri verildi. Çizilen küresel eğrilerin Sabban çatıları, küresel Frenet formülleri ve geodezik eğrilikleri (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4) e göre benzer olarak sırasıyla

(T^*) teğetler göstergesi;

$$\begin{cases} T^* = T^*, & T_1^* = N^*, & T_2^* = B^*, \\ T^{*'} = T_1^*, & T_1^{*'} = -T^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_2^*, & T_2^{*'} = -\frac{\tau^*}{\kappa^*} T_1^*, \\ \kappa_g = \langle T_1^{*'}, T_2^* \rangle = \frac{\tau^*}{\kappa^*}, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

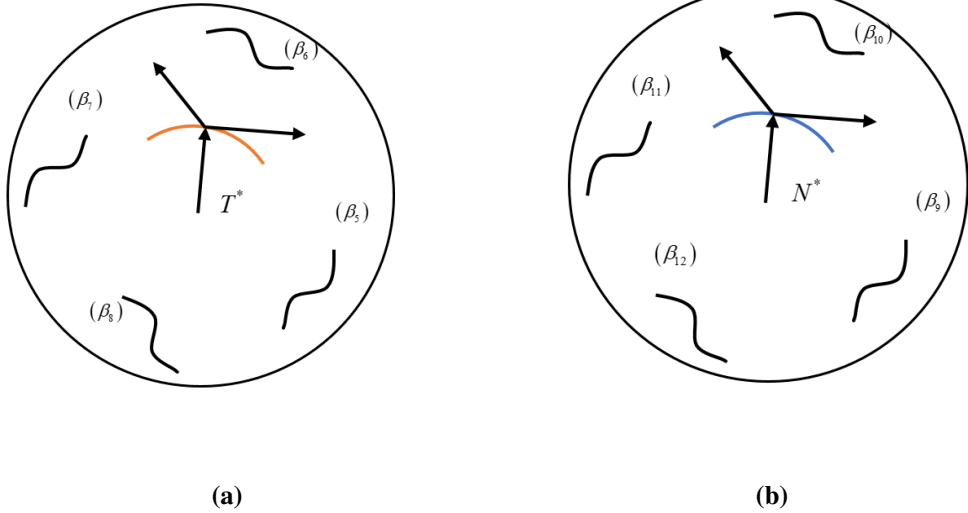
(N^*) aslinormaller göstergesi ;

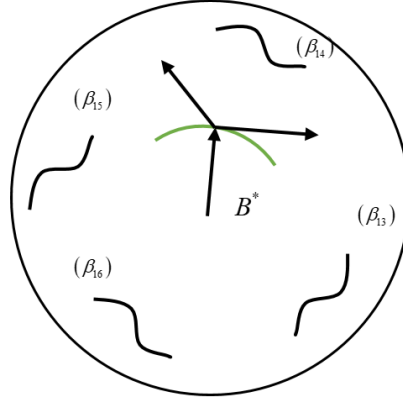
$$\begin{cases} N^* = N^*, & N_1^* = -\cos \varpi^* T^* + \sin \varpi^* B^*, & N_2^* = \sin \varpi^* T^* + \cos \varpi^* B^*, \\ N^{*'} = N_1^*, & N_1^{*'} = -N^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} N_2^*, & N_2^{*'} = -\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} T_N^*, \\ \kappa_g = \langle T'_{N^*}, N_2^* \rangle = \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

(B^*) binormaller göstergesi;

$$\begin{cases} B^* = B^*, & B_1^* = -N^*, & B_2^* = T^*, \\ B^{*'} = B_1^*, & B_1^{*'} = -B^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_2^*, & B_2^{*'} = -\frac{\kappa^*}{\tau^*} B_1^*, \\ \kappa_g = \langle B_1^{*'}, B_2^* \rangle = \frac{\kappa^*}{\tau^*}, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

şeklinde bulunur. Bu göstergelere ait görseller Şekil 3.10 da verilmiştir.





(c)

Şekil 3.10 T^* , N^* , B^* göstergelerinin oluşturduğu Smarandache eğrileri

Tanım 3.2.1 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin T^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{T^*, T_1^*, T_2^*\}$ olsun.

$$\beta_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T_1^*) \quad (3.2.4)$$

ifadesiyle verilen, teğet vektörün çizdiği eğriye $T^*T_1^*$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.2 β_5 eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_5} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} \lambda_1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*} \lambda_2 + 2\lambda_3 \right) \quad (3.2.5)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right), \lambda_2 = -2 - 3\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\ \lambda_3 = 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \end{cases} \quad (3.2.6)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.4) eğrisinin s_{β_5} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_5} \frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-T^* + T_1^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_2^* \right) \quad (3.2.7)$$

bulunur. Bulunan eşitliğin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_5}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade (3.2.7) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_5}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_5}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(-T^* + T_1^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_2^* \right) \quad (3.2.8)$$

olur. (3.2.4) ve (3.2.8) ifadelerinden elde edilen $\beta_5 \wedge T_{\beta_5}$ vektörü

$$\beta_5 \wedge T_{\beta_5}(s) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} T^* - \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_1^* + 2T_2^* \right) \quad (3.2.9)$$

biçiminde yazılır. (3.2.1) bağıntısı (3.2.4), (3.2.8) ve (3.2.9) bağıntılarında yerine yazılırsa

β_5 eğrisine ait Sabban çatısının Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \beta_5(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + N^*), \\ T_{\beta_5}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(-T^* + N^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} B^* \right), \\ \beta_5 \wedge T_{\beta_5}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*} T^* - \frac{\tau^*}{\kappa^*} N^* + 2B^* \right) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

şeklinde olur. (3.2.8) ifadesinin türevi alınırsa

$$T'_{\beta_5}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2} \left(\lambda_1 T^* + \lambda_2 T_1^* + \lambda_3 T_2^* \right) \quad (3.2.11)$$

olur. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right), & \lambda_2 = -2 - 3\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\ \lambda_3 = 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. Burada (3.2.1) yerine yazılırsa $T'_{\beta_5}(s)$ türev vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\beta_5}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2} \left(\lambda_1 T^* + \lambda_2 N^* + \lambda_3 B^* \right)$$

şeklinde olur. $\kappa_g^{\beta_5}$ geodezik eğriliği bulunur.

Sonuç 3.2.3 (3.2.4) eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_5} = \frac{1}{\left(2 + \tan^2 \varpi\right)^{\frac{5}{2}}} \left(-\tan \varpi \bar{\lambda}_1 - \tan \varpi \bar{\lambda}_2 + 2\bar{\lambda}_3 \right) \quad (3.2.12)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = -2 - (\tan \varpi)^2 + (\tan \varpi)' (\tan \varpi), \\ \bar{\lambda}_2 = -2 - 3(\tan \varpi)^2 - (\tan \varpi)^4 - (\tan \varpi)' (\tan \varpi), \\ \bar{\lambda}_3 = -2(\tan \varpi) - (\tan \varpi)^3 - (\tan \varpi)' \end{cases} \quad (3.2.13)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.4) eşitliğinde sırasıyla (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarından karşılıkları yazılırsa β_5 vektörünün esas eğriye bağlı ifadesi

$$\beta_5(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-T + \cos \varpi N - \sin \varpi B \right) \quad (3.2.14)$$

olur. (3.2.14) ifadesinin türevi alınırsa $T_{\beta_5}(s)$

$$T_{\beta_5}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \tan^2 \varpi}} \left(-T - \sec \varpi N \right) \quad (3.2.15)$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = -2 - (\tan \varpi)^2 + (\tan \varpi)' (\tan \varpi), \\ \bar{\lambda}_2 = -2 - 3(\tan \varpi)^2 - (\tan \varpi)^4 - (\tan \varpi)' (\tan \varpi), \\ \bar{\lambda}_3 = -2(\tan \varpi) - (\tan \varpi)^3 - (\tan \varpi)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_5}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_5}(s) = & \frac{-\bar{\lambda}_2 \sqrt{2}}{\left(2 + (\tan \varpi)^2\right)^2} T + \frac{\left(\bar{\lambda}_1 \cos \varpi + \bar{\lambda}_3 \sin \varpi\right) \sqrt{2}}{\left(2 + (\tan \varpi)^2\right)^2} N \\ & + \frac{\left(\bar{\lambda}_3 \cos \varpi - \bar{\lambda}_1 \sin \varpi\right) \sqrt{2}}{\left(2 + (\tan \varpi)^2\right)^2} B \end{aligned}$$

olur. (3.2.14) ve (3.2.15) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_5 \wedge T_{\beta_5}$ vektörü

$$\beta_5 \wedge T_{\beta_5}(s) = \frac{\tan \varpi}{\sqrt{4 + 2 \tan^2(\varpi + c)}} T + \frac{\sin \varpi}{\sqrt{4 + 2 \tan^2 \varpi}} N + \frac{\tan \varpi \sin \varpi + 2 \cos \varpi}{\sqrt{4 + 2 \tan^2(\varpi + c)}} B$$

biçiminde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_5}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_5} = \frac{1}{\left(2 + (\tan \varpi)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(-\tan \varpi \bar{\lambda}_1 - \tan \varpi \bar{\lambda}_2 + 2\bar{\lambda}_3\right)$$

olur.

Tanım 3.2.4 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin T^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{T^*, T_1^*, T_2^*\}$ olsun.

$$\beta_6(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + T_2^*) \quad (3.2.16)$$

ifadesiyle verilen, teğet vektörün çizdiği eğriye $T^*(T_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.5 β_6 eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_6} = \frac{\kappa^* + \tau^*}{\kappa^* - \tau^*} \quad (3.2.17)$$

denklemleriyle verilir.

İspat (3.2.16) eğrisinin s_{β_6} yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_6} \frac{ds_{\beta_6}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) T_1^* \quad (3.2.18)$$

bulunur. Bulunan eşitliğin normu alınır $\frac{ds_{\beta_6}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_6}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (3.2.18) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_6}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_6}(s) = T_1^* \quad (3.2.19)$$

olur. (3.2.16) ve (3.2.19) ifadelerinden elde edilen $\beta_6 \wedge T_{\beta_6}$ vektörü

$$\beta_6 \wedge T_{\beta_6}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T^* + T_2^*) \quad (3.2.20)$$

biçiminde yazılır.(3.2.1) bağıntısı (3.2.16), (3.2.19) ve (3.2.20) bağıntılarında yerine yazılırsa β_6 eğrisine ait Sabban çatısının Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \beta_6(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*), \\ T_{\beta_6}(s) &= N^*, \\ \beta_6 \wedge T_{\beta_6}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-T^* + B^*) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

şekline olur. (3.2.19) ifadesinin türevi alınır

$$T'_{\beta_6}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*})} \left(-T^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_2^* \right) \quad (3.2.22)$$

olur. Bu vektöre (3.2.1) den karşılıkları yazılırsa $T'_{\beta_6}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_6}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*})} \left(-T^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} B^* \right)$$

şeklinde bulunur. $\kappa_g^{\beta_6}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_6} = \frac{(\kappa^* + \tau^*)}{(\kappa^* - \tau^*)}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2.6 (3.2.16) eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_6} = \frac{\sin \varpi - \cos \varpi}{\sin \varpi + \cos \varpi} \quad (3.2.23)$$

denklemleriyle verilir.

İspat (3.2.16) eşitliğinde sırasıyla (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarından karşılığı yazılırsa β_6 vektörünün esas eğriye bağlı ifadesi

$$\beta_6(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sin \varpi + \cos \varpi) N + (\cos \varpi - \sin \varpi) B \right) \quad (3.2.24)$$

olur. (3.2.24) ifadesinin türevi alınır

$$T_{\beta_6}(s) = -T \quad (3.2.25)$$

olur. (3.2.25) ifadesinin türevi alınır

$$T'_{\beta_6}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sin \varpi + \cos \varpi} N$$

bulunur. (3.2.24) ve (3.2.25) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_6 \wedge T_{\beta_6}$ vektörü

$$\beta_6 \wedge T_{\beta_6}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sin \varpi - \cos \varpi) N + (\cos \varpi + \sin \varpi) B \right)$$

biçiminde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_6}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_6} = \frac{\sin \varpi - \cos \varpi}{\sin \varpi + \cos \varpi}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.2.7 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin T^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{T^*, T_1^*, T_2^*\}$ olsun.

$$\beta_7(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1^* + T_2^*) \quad (3.2.26)$$

ifadesiyle verilen, teğet vektörün çizdiği eğriye $T_1^*(T_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.8 β_7 eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_7} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\tau^*}{\kappa^*} + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right), & \varepsilon_2 = -1 - 3\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \\ \varepsilon_3 = -\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.26) eğrisinin s_{β_7} yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_7} \frac{ds_{\beta_7}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-T^* - \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_1^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_2^* \right) \quad (3.2.27)$$

bulunur. Bulunan eşitliğin normu alınır $\frac{ds_{\beta_7}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_7}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade (3.2.27) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_7}(s)$

$$T_{\beta_7}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(-T^* - \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_1^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*} T_2^* \right) \quad (3.2.28)$$

olur. (3.2.26) ve (3.2.28) ifadelerinden elde edilen $\beta_7 \wedge T_{\beta_7}$ vektörü,

$$\beta_7 \wedge T_{\beta_7}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} T^* - T_1^* + T_2^* \right) \quad (3.2.29)$$

biçiminde yazılır.(3.2.1) bağıntısı (3.2.26), (3.2.28) ve (3.2.29) bağıntılarında yerine yazılırsa β_7 eğrisine ait Sabban çatısının Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_7(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*),$$

$$T_{\beta_7}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(-T^* - \frac{\tau^*}{\kappa^*}N^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}B^* \right), \quad (3.2.30)$$

$$\beta_7 \wedge T_{\beta_7}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}T^* - N^* + B^* \right)$$

şeklinde olur. (3.2.28) ifadesinin türevi alınır

$$T'_{\beta_7}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2} \left(\varepsilon_1 T^* + \varepsilon_2 T_1^* + \varepsilon_3 T_2^* \right) \quad (3.2.31)$$

olur. Burada $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\tau^*}{\kappa^*} + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right), \varepsilon_2 = -1 - 3\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \\ \varepsilon_3 = -\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \end{cases} \quad (3.2.32)$$

şeklinde birer katsayıdır.Bu ifadeye (3.2.1) bağıntısından karşılıkları yazılırsa $T'_{\beta_7}(s)$ vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\beta_7}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2} \left(\varepsilon_1 T^* + \varepsilon_2 N^* + \varepsilon_3 B^* \right)$$

şeklinde olur. $\kappa_g^{\beta_7}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_7} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2.9 β_7 eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_7} = \frac{1}{\left(1 + 2 \tan^2 \varpi\right)^{\frac{5}{2}}} \left(-2 \tan \varpi \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \right) \quad (3.2.33)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_1 = \tan \varpi - \tan^3 \varpi + 2 \tan' \varpi \tan \varpi, \\ \bar{\varepsilon}_2 = -1 - 3 \tan^2 \varpi - 2 \tan^4 \varpi + \tan' \varpi, \\ \bar{\varepsilon}_3 = \tan^2 \varpi - 2 \tan^4 \varpi - \tan' \varpi \end{cases} \quad (3.2.34)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.26) eşitliğinde (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarından eşitlikleri yerine yazılırsa β_7 vektörünün esas eğriye bağlı ifadesi

$$\beta_7(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-T + \sin \varpi N + \cos \varpi B \right) \quad (3.2.35)$$

olur. (3.2.35) ifadesinin türevi alınırsa $T_{\beta_7}(s)$

$$T_{\beta_7}(s) = \frac{\tan \varpi}{\sqrt{1 + 2 \tan^2 \varpi}} T + \frac{\tan \varpi \sin \varpi - \cos \varpi}{\sqrt{1 + 2 \tan^2 \varpi}} N + \frac{2 \sin \varpi}{\sqrt{1 + 2 \tan^2 \varpi}} B \quad (3.2.36)$$

olur. (3.2.36) bağıntısının türevi alınırsa

$$T'_{\beta_7}(s) = \frac{-\bar{\varepsilon}_2 \sqrt{2}}{(1 + \tan^2 \varpi)^2} T + \frac{(\bar{\varepsilon}_1 \cos \varpi + \bar{\varepsilon}_3 \sin \varpi) \sqrt{2}}{(1 + \tan^2 \varpi)^2} N + \frac{(\bar{\varepsilon}_3 \cos \varpi - \bar{\varepsilon}_1 \sin \varpi) \sqrt{2}}{(1 + \tan^2 \varpi)^2} B$$

olur. Burada $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_1 = \tan \varpi - \tan^3 \varpi + 2 \tan' \varpi \tan \varpi, \\ \bar{\varepsilon}_2 = -1 - 3 \tan^2 \varpi - 2 \tan^4 \varpi + \tan' \varpi, \\ \bar{\varepsilon}_3 = \tan^2 \varpi - 2 \tan^4 \varpi - \tan' \varpi \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır. (3.2.35) ve (3.2.36) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_7 \wedge T_{\beta_7}$ ifadesi

$$\beta_7 \wedge T_{\beta_7}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + 4 \tan^2 \varpi}} T + \frac{3\sqrt{2} \sin \varpi}{\sqrt{2 + 4 \tan^2 \varpi}} N + \frac{(\cos \varpi \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \tan \varpi \sin \varpi)}{\sqrt{2 + 4 \tan^2 \varpi}} B$$

bulunur. $\kappa_g^{\beta_7}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_7} = \frac{1}{(1 + 2 \tan^2 \varpi)^{\frac{5}{2}}} \left(2 - \tan \varpi \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 \right)$$

bulunur.

Tanım 3.2.10 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin T^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{T^*, T_1^*, T_2^*\}$ olsun.

$$\beta_8(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + T_1^* + T_2^*) \quad (3.2.37)$$

ifadesiyle verilen, teğet vektörün çizdiği eğriye $T^*T_1^*(T_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.11 β_8 eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_8} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left(\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right)\phi_1 - \left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)\phi_2 + \left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)\phi_3\right) \quad (3.2.38)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \phi_1 = -2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right) \\ \phi_2 = -2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \\ \phi_3 = 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'\left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \end{cases} \quad (3.2.39)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat β_8 eğrisinin s_{β_8} yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_8} \frac{ds_{\beta_8}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-T^* + \left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)T_1^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}T_2^*\right) \quad (3.2.40)$$

bulunur. (3.2.40) bağıntısının normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_8}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_8}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)}$$

olur. Bu ifade (3.2.40) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_8}(s)$

$$T_{\beta_8}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)}}\left(-T^* + \left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)T_1^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}T_2^*\right) \quad (3.2.41)$$

bulunur. (3.2.37) ve (3.2.41) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_8 \wedge T_{\beta_8}$ vektörü,

$$\beta_8 \wedge T_{\beta_8}(s) = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}}\left(\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right)T^* - \left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)T_1^* + \left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)T_2^*\right) \quad (3.2.42)$$

şeklinde ifade edilir. (3.2.37), (3.2.41) ve (3.2.42) bağıntılarında (3.2.1) bağıntısında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa β_8 eğrisine ait Sabban çatısının Evolüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\beta_8(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*),$$

$$T_{\beta_8}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)}} \left(-T^* + \left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)N^* + \frac{\tau^*}{\kappa^*}B^* \right), \quad (3.2.43)$$

$$\beta_8 \wedge T_{\beta_8}(s) = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}} \left(\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right)T^* - \left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)N^* + \left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)B^* \right)$$

şeklinde bulunur. (3.2.41) ifadesinin türevi alınırsa

$$T'_{\beta_8}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2} \left(\phi_1 T^* + \phi_2 T_1^* + \phi_3 T_2^* \right) \quad (3.2.44)$$

olur. Burada ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

$$\begin{cases} \phi_1 = -2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right), \\ \phi_2 = -2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 - \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right), \\ \phi_3 = 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) - 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^4 + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)' \left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right) \end{cases} \quad (3.2.45)$$

şeklinde birer katsayıdır. Bu vektöre (3.2.1) bağıntısında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa $T'_{\beta_8}(s)$ vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$T'_{\beta_8}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\left(1 - \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^2} \left(\phi_1 T^* + \phi_2 N^* + \phi_3 B^* \right)$$

biçiminde olur. $\kappa_g^{\beta_8}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_8} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*} + \left(\frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\left(2\frac{\tau^*}{\kappa^*} - 1\right)\phi_1 - \left(1 + \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)\phi_2 + \left(2 - \frac{\tau^*}{\kappa^*}\right)\phi_3 \right)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2.12 β_8 eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_8} = \frac{-(2 \tan \varpi - 1)\bar{\phi}_1 - (1 - \tan \varpi)\bar{\phi}_2 + (2 \tan \varpi)\bar{\phi}_3}{4\sqrt{2}\left(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.2.46)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1 = -2 - 4 \tan \varpi - \tan^2 \varpi - 2 \tan^3 \varpi - \tan' \varpi (2 \tan \varpi - 1), \\ \bar{\phi}_2 = -2 - 2 \tan \varpi - 4 \tan^2 \varpi - \tan^3 \varpi - 2 \tan^4 \varpi + \tan' \varpi (1 - \tan \varpi), \\ \bar{\phi}_3 = -2 \tan \varpi - 4 \tan^2 \varpi - 4 \tan^3 \varpi - 2 \tan^4 \varpi - \tan' \varpi (2 + \tan \varpi) \end{cases} \quad (3.2.47)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.37) bağıntısında (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarından karşılıkları yazılırsa β_8 eğrisinin esas eğriye bağlı ifadesi

$$\beta_8(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-T + (\cos \varpi + \sin \varpi) N + (\cos \varpi - \sin \varpi) B \right) \quad (3.2.48)$$

bulunur. (3.2.48) ifadesinin türevi alınırsa $T_{\beta_8}(s)$

$$\begin{aligned} T_{\beta_8}(s) &= \frac{\tan \varpi - 1}{\sqrt{2(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)}} T + \frac{\tan \varpi \sin \varpi - \cos \varpi}{\sqrt{2(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)}} N \\ &\quad + \frac{2 \sin \varpi}{\sqrt{2(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)}} B \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

şeklinde bulunur. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1 = -2 - 4 \tan \varpi - \tan^2 \varpi - 2 \tan^3 \varpi - \tan' \varpi (2 \tan \varpi - 1), \\ \bar{\phi}_2 = -2 - 2 \tan \varpi - 4 \tan^2 \varpi - \tan^3 \varpi - 2 \tan^4 \varpi + \tan' \varpi (1 - \tan \varpi), \\ \bar{\phi}_3 = -2 \tan \varpi - 4 \tan^2 \varpi - 4 \tan^3 \varpi - 2 \tan^4 \varpi - \tan' \varpi (2 + \tan \varpi) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_8}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_8}(s) &= \frac{-\bar{\phi}_2 \sqrt{3}}{4(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)^2} T + \frac{(\bar{\phi}_1 \cos \varpi + \bar{\phi}_3 \sin \varpi) \sqrt{3}}{4(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)^2} N \\ &\quad + \frac{(\bar{\phi}_3 \cos \varpi - \bar{\phi}_1 \sin \varpi) \sqrt{3}}{4(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)^2} B \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.48) ve (3.2.49) bağıntıları alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_8 \wedge T_{\beta_8}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_8 \wedge T_{\beta_8}(s) &= \frac{1 + \tan \varpi}{\sqrt{6(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)}} T + \frac{4 \sin \varpi - \cos \varpi - \tan \varpi \sin \varpi}{\sqrt{6(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)}} N \\ &+ \frac{2 \tan \varpi \sin \varpi + 2 \cos \varpi}{\sqrt{6(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)}} B \end{aligned}$$

bulunur. $\kappa_g^{\beta_8}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_8} = \frac{(1 - 2 \tan \varpi) \bar{\phi}_1 + (\tan \varpi - 1) \bar{\phi}_2 + (2 \tan \varpi) \bar{\phi}_3}{4\sqrt{2}(1 - \tan \varpi + \tan^2 \varpi)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.13 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin N^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{N^*, N_1^*, N_2^*\}$ olsun.

$$\beta_9(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + N_1^*) \quad (3.2.50)$$

ifadesiyle verilen eğriye $N^* N_1^*$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.14 β_9 eğrisinin $\kappa_g^{\beta_9}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_9} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} \chi_1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} \chi_2 + 2\chi_3 \right) \quad (3.2.51)$$

denklemlerle verilir. Burada

$$\begin{cases} \chi_1 = -2 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right), \\ \chi_2 = -2 - 3\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right), \\ \chi_3 = 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \end{cases} \quad (3.2.52)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat β_9 eğrisinin yay parametresine s_{β_9} göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_9} \frac{ds_{\beta_9}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-N^* + N_1^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} N_2^* \right) \quad (3.2.53)$$

bulunur. Bulunan eşitliğin normu hesaplanırsa $\frac{ds_{\beta_9}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_9}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2}$$

olur. Bulunan bu ifade (3.2.53) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_9}(s)$

$$T_{\beta_9}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2}} \left(-N^* + N_1^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} N_2^* \right) \quad (3.2.54)$$

olur. (3.2.54) ifadesinin türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \chi_1 = -2 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) \\ \chi_2 = -2 - 3\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) \\ \chi_3 = 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_9}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_9} = \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^2} \left(\chi_1 N^* + \chi_2 N_1^* + \chi_3 N_2^* \right) \quad (3.2.55)$$

bulunur. (3.2.50) ve (3.2.54) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_9 \wedge T_{\beta_9}$ vektörü,

$$\beta_9 \wedge T_{\beta_9}(s) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2}} \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} N^* - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} N_1^* + 2N_2^* \right) \quad (3.2.56)$$

şeklinde ifade edilir.(3.2.2) bağıntısı (3.2.50), (3.2.54), (3.2.55) ve (3.2.56) bağıntılarında yerine yazılırsa β_9 eğrisine ait Sabban çatısının ve T'_{β_9} türev vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_9(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos \varpi^* T^* + N^* + \sin \varpi^* B^*),$$

$$\begin{aligned} T_{\beta_9}(s) &= \frac{\varpi^{*'} \sin \varpi^* - \|W^*\| \cos \varpi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + (\varpi^{*'})^2}} T^* + \frac{\|W^*\|}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + (\varpi^{*'})^2}} N^* \\ &+ \frac{\varpi^{*'} \cos \varpi^* + \|W^*\| \sin \varpi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + (\varpi^{*'})^2}} B^*, \end{aligned}$$

$$\beta_9 \wedge T_{\beta_9}(s) = \frac{\varpi^{*'} \cos \varpi^* + 2\|W^*\| \sin \varpi^*}{\sqrt{4\|W^*\|^2 + 2(\varpi^{*'})^2}} T^* - \frac{\varpi^{*'}}{\sqrt{4\|W^*\|^2 + 2(\varpi^{*'})^2}} N^* + \frac{2\|W^*\| \cos \varpi^* - \varpi^{*'} \sin \varpi^*}{\sqrt{4\|W^*\|^2 + 2(\varpi^{*'})^2}} B^*,$$

$$T'_{\beta_9}(s) = \frac{\|W^*\|^4 \sqrt{2}(\chi_3 \sin \varpi^* - \chi_2 \cos \varpi^*)}{(2\|W^*\|^2 + (\varpi^{*'})^2)^2} T^* + \frac{\chi_1 \|W^*\|^4 \sqrt{2}}{(2\|W^*\|^2 + (\varpi^{*'})^2)^2} N^* + \frac{\|W^*\|^4 \sqrt{2}(\chi_2 \sin \varpi^* + \cos \varpi^* \chi_3)}{(2\|W^*\|^2 + (\varpi^{*'})^2)^2} B^*$$

olur. $\kappa_g^{\beta_9}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_9} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} \chi_1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} \chi_2 + 2\chi_3 \right)$$

biçiminde olur.

Sonuç 3.2.15 β_9 eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_9} = \frac{1}{(2 + \eta^2)^{\frac{5}{2}}} \left(-\eta \bar{\chi}_1 + \eta \bar{\chi}_2 + 2\bar{\chi}_3 \right) \quad (3.2.57)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\eta = \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} = \frac{\kappa \tau^2 \sin \varpi - \kappa' \tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi},$$

$$\bar{\chi}_1 = -2 - \eta^2 + \eta' \eta, \bar{\chi}_2 = -2 - 3\eta^2 - \eta^4 - \eta', \bar{\chi}_3 = 2\eta + \eta^3 + \eta' \quad (3.2.58)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.50) bağıntısına (3.2.2), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarından karşılıkları yazılırsa β_9 vektörünün esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi

$$\beta_9(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-T - B \right) \quad (3.2.59)$$

olur. (3.2.59) bağıntısının türevi alınırsa $T_{\beta_9}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_9}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \eta^2}} \left(T - N + \eta B \right) \quad (3.2.60)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\eta = \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} = \frac{\kappa\tau^2 \sin \varpi - \kappa'\tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi} \quad (3.2.61)$$

şeklinde katsayıdır. Bu ifadenin türevi alınırsa katsayılar

$$\bar{\chi}_1 = -2 - \eta^2 + \eta'\eta, \bar{\chi}_2 = -2 - 3\eta^2 - \eta^4 - \eta', \bar{\chi}_3 = 2\eta + \eta^3 + \eta'$$

olmak üzere $T'_{\beta_9}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_9}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2 + \eta^2)^2} \left(-\bar{\chi}_1 T - \bar{\chi}_2 N + \bar{\chi}_3 B \right)$$

şeklinindedir. (3.2.59) ve (3.2.60) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$\beta_9 \wedge T_{\beta_9}$ vektörü

$$\beta_9 \wedge T_{\beta_9}(s) = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\eta^2}} \left(-\eta T + \eta N + 2B \right)$$

şeklinde yazılır. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_9}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_9} = \frac{1}{(2 + \eta^2)^{\frac{5}{2}}} \left(-\eta\bar{\chi}_1 + \eta\bar{\chi}_2 + 2\bar{\chi}_3 \right)$$

biçiminde olur.

Tanım 3.2.16 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin N^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{N^*, N_1^*, N_2^*\}$ olsun.

$$\beta_{10}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + N_2^*) \quad (3.2.62)$$

şeklinde ifade edilen eğriye $N^*(N_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.17 β_{10} eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{10}} = \frac{\|W^*\| + \varpi^{*'}}{\|W^*\| - \varpi^{*'}} \quad (3.2.63)$$

şeklinde verilir.

İspat β_{10} eğrisinin $s_{\beta_{10}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{10}} \frac{ds_{\beta_{10}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) N_1^* \quad (3.2.64)$$

bulunur. (3.2.64) bağıntısının normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{10}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{10}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)$$

bulunur. Bulunan eşitlik (3.2.64) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_{10}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{10}}(s) = N_1^* \quad (3.2.65)$$

şeklinde bulunur. (3.2.65) bağıntısının türevi alınırsa $T'_{\beta_{10}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{10}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)} \left(-N^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} N_2^*\right) \quad (3.2.66)$$

olur. (3.2.62) ve (3.2.65) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{10} \wedge T_{\beta_{10}}$ vektörü

$$\beta_{10} \wedge T_{\beta_{10}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-N^* + N_2^*) \quad (3.2.67)$$

olur. (3.2.2) bağıntısı (3.2.62), (3.2.65), (3.2.66) ve (3.2.67) bağıntılarında yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa β_{10} eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{10}}$ türev vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned} \beta_{10}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \varpi^* T^* + N^* + \cos \varpi^* B^*), \\ T_{\beta_{10}}(s) &= -\cos \varpi^* T^* + \sin \varpi^* B^*, \\ \beta_{10} \wedge T_{\beta_{10}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \varpi^* T^* - N^* + \cos \varpi^* B^*), \\ T'_{\beta_{10}}(s) &= \frac{\varpi^{*'} \sin \varpi^* \sqrt{2}}{\|W^*\| - \varpi^{*'}} T^* - \frac{\|W^*\| \sqrt{2}}{\|W^*\| - \varpi^{*'}} N^* + \frac{\varpi^{*'} \cos \varpi^* \sqrt{2}}{\|W^*\| - \varpi^{*'}} B^* \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. $\kappa_g^{\beta_{10}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{10}} = \frac{\|W^*\| + \varpi^{*'}}{\|W^*\| - \varpi^{*'}}$$

şeklinde dir.

Sonuç 3.2.18 β_{10} eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatları

cinsinden ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{10}} = \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \quad (3.2.68)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\eta = \frac{\kappa\tau^2 \sin \varpi - \kappa'\tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi}$$

şeklinde katsayıdır.

İspat (3.2.62) bağıntısında (3.2.2), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarından karşılıkları yerine yazılırsa β_{10} vektörünün esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı ifadesi

$$\beta_{10}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-T + B) \quad (3.2.69)$$

bulunur. (3.2.69) bağıntısının türevi alınırsa $T_{\beta_{10}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{10}}(s) = -N \quad (3.2.70)$$

bulunur. (3.2.69) ve (3.2.70) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{10} \wedge T_{\beta_{10}}$ vektörü

$$\beta_{10} \wedge T_{\beta_{10}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

şeklinde ifade edilir. (3.2.70) ifadesinin türevi alınırsa $T'_{\beta_{10}}$ türev vektörü

$$\eta = \frac{\kappa\tau^2 \sin \varpi - \kappa'\tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi}$$

olmak üzere

$$T'_{\beta_{10}}(s) = -\frac{\sqrt{2}}{1 - \eta}(T + \eta B)$$

biçiminde elde edilir. $\kappa_g^{\beta_{10}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{10}} = \frac{1 + \eta}{1 - \eta}$$

olur.

Tanım 3.2.19 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin N^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{N^*, N_1^*, N_2^*\}$ olsun.

$$\beta_{11}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_1^* + N_2^*) \quad (3.2.71)$$

şeklinde ifade edilen, teğet vektörünün çizdiği eğriye $N_1^*(N_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.20 β_{11} eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{11}} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\delta_1 - \delta_2 + \delta_3\right) \quad (3.2.72)$$

denklemiyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right), \\ \varepsilon_2 = -1 - 3\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)', \\ \varepsilon_3 = -\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \end{cases} \quad (3.2.73)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat β_{11} eğrisinin $s_{\beta_{11}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{11}} \frac{ds_{\beta_{11}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-N^* - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}N_1^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}N_2^*\right)$$

olur. (3.2.13) bağıntısının normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{11}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{11}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2}$$

bulunur ve bu ifade (3.2.13) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_{11}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{11}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2}} \left(-N^* - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}N_1^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}N_2^*\right) \quad (3.2.74)$$

olur. (3.2.74) bağıntısının türevi alınırsa

$$T'_{\beta_{11}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^2} \left(\varepsilon_1 N^* + \varepsilon_2 N_1^* + \varepsilon_3 N_2^*\right) \quad (3.2.75)$$

bulunur. Burada $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right), \\ \varepsilon_2 = -1 - 3\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)', \\ \varepsilon_3 = -\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.(3.2.71) ve (3.2.74) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar

yapılırsa $\beta_{11} \wedge T_{\beta_{11}}$ vektörü

$$\beta_{11} \wedge T_{\beta_{11}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2}} \left(2\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}N^* - N_1^* + N_2^*\right) \quad (3.2.76)$$

şeklinde ifade edilir.(3.2.2) bağıntısında bulunan eşitlikler (3.2.71), (3.2.74), (3.2.75) ve (3.2.76) bağıntılarında yerine yazılırsa β_{11} eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{11}}$ türev vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_{11}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sin \varpi^* - \cos \varpi^*) T^* + (\sin \varpi^* + \cos \varpi^*) B^* \right),$$

$$T_{\beta_{11}}(s) = \frac{\varpi^{*'}(\sin \varpi^* + \cos \varpi^*)}{\sqrt{W^{*2} + 2(\varpi^{*'})^2}} T^* - \frac{W^*}{\sqrt{W^{*2} + 2(\varpi^{*'})^2}} N^* \\ + \frac{\varpi^{*'}(\cos \varpi^* - \sin \varpi^*)}{\sqrt{W^{*2} + 2(\varpi^{*'})^2}} B^*,$$

$$\beta_{11} \wedge T_{\beta_{11}}(s) = \frac{\cos \varpi^* + \sin \varpi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + 4(\varpi^{*'})^2}} T^* + \frac{2\varpi^{*'}}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + 4(\varpi^{*'})^2}} N^* \\ + \frac{\cos \varpi^* - \sin \varpi^*}{\sqrt{2\|W^*\|^2 + 4(\varpi^{*'})^2}} B^*,$$

$$T'_{\beta_{11}}(s) = \frac{\|W^*\|^4 \sqrt{2}(\varepsilon_3 \sin \varpi^* - \varepsilon_2 \cos \varpi^*)}{(\|W^*\|^2 + 2(\varpi^{*'})^2)^2} T^* + \frac{\varepsilon_1 \|W^*\|^4 \sqrt{2}}{(\|W^*\|^2 + 2(\varpi^{*'})^2)^2} N^* \\ + \frac{\|W^*\|^4 \sqrt{2}(\varepsilon_2 \sin \varpi^* + \varepsilon_3 \cos \varpi^*)}{(\|W^*\|^2 + 2(\varpi^{*'})^2)^2} B^*$$

olur. $\kappa_g^{\beta_{11}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{11}} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2 \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2.21 β_{11} eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{11}} = \frac{1}{(1 + 2\eta^2)^{\frac{5}{2}}} (2\eta \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3) \quad (3.2.77)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\eta = \frac{\kappa\tau^2 \sin \varpi - \kappa'\tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi},$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \eta + 2\eta^3 + 2\eta'\eta, \bar{\varepsilon}_2 = -1 - 3\eta^2 - 2\eta^4 - \eta', \bar{\varepsilon}_3 = -\eta^2 - 2\eta^4 + \eta' \quad (3.2.78)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.71) bağıntısında (3.2.2), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntısında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa β_{11} vektörünün esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı ifadesi

$$\beta_{11}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-N + B) \quad (3.2.79)$$

olur. (3.2.79) bağıntısının türevi alınır

$$\eta = \frac{\kappa\tau^2 \sin \varpi - \kappa'\tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi}$$

olmak üzere $T_{\beta_{11}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{11}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta^2}}(T + \eta N + \eta B) \quad (3.2.80)$$

bulunur. (3.2.80) bağıntısının türevi alınır

$$T'_{\beta_{11}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(1 + 2\eta^2)^2}(-\bar{\varepsilon}_1 T - \bar{\varepsilon}_2 N + \bar{\varepsilon}_3 B)$$

bulunur. Burada $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$ ifadeleri

$$\bar{\varepsilon}_1 = \eta + 2\eta^3 + 2\eta'\eta, \bar{\varepsilon}_2 = -1 - 3\eta^2 - 2\eta^4 - \eta', \bar{\varepsilon}_3 = -\eta^2 - 2\eta^4 + \eta'$$

şeklinde birer katsayıdır.(3.2.79) ve (3.2.80) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{11} \wedge T_{\beta_{11}}$ vektörü

$$\beta_{11} \wedge T_{\beta_{11}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\eta^2}}(-2\eta T + N + B)$$

bulunur. $\kappa_g^{\beta_{11}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{11}} = \frac{1}{(1 + 2\eta^2)^{\frac{5}{2}}}(2\eta\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.2.22 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin N^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{N^*, N_1^*, N_2^*\}$ olsun.

$$\beta_{12}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(N^* + N_1^* + N_2^*) \quad (3.2.81)$$

şeklinde ifade edilen vektörün çizdiği eğriye $N^*N_1^*(N_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.23 β_{12} eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{12}} = \frac{(2\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} - 1)\rho_1 + (-1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|})\rho_2 + (2 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|})\rho_3}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + (\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|})^2\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.2.82)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \rho_1 = -2 + 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'(2\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} - 1), \\ \rho_2 = -2 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) - 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 \\ \quad - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'(1 + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}), \\ \rho_3 = 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) - 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'(2 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}) \end{cases} \quad (3.2.83)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat β_{12} eğrisinin $s_{\beta_{12}}$ yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_{12}} \frac{ds_{\beta_{12}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-N^* + \left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)N_1^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}N_2^* \right) \quad (3.2.84)$$

olur. Bu eşitliğin normu alınır $\frac{ds_{\beta_{12}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{12}}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)}$$

bulunur. Bu ifade (3.2.84) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_{12}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{12}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)}} \left(-N^* + \left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)N_1^* + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}N_2^* \right) \quad (3.2.85)$$

biçiminde olur.(3.2.85) bağıntısının türevi alınır katsayılar,

$$\begin{cases} \rho_1 = -2 + 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'(2\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} - 1) \\ \rho_2 = -2 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) - 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 \\ \quad - \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'(1 + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}), \\ \rho_3 = 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right) - 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2 + 4\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^3 - 2\left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^4 + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)'(2 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{12}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{12}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^2} (\rho_1 N^* + \rho_2 N_1^* + \rho_3 N_2^*) \quad (3.2.86)$$

bulunur. (3.2.81) ve (3.2.85) ifadeleri alınır gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{12} \wedge T_{\beta_{12}}$ ifadesi,

$$\beta_{12} \wedge T_{\beta_{12}}(s) = \frac{\left(2\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} - 1\right)N^* - \left(1 + \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)N_1^* + \left(2 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)N_2^*}{\sqrt{6}\sqrt{1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2}} \quad (3.2.87)$$

şeklinde ifade edilir.(3.2.2) bağıntısında bulunan eşitlikler (3.2.81), (3.2.85), (3.2.86) ve (3.2.87) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa β_{12} eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{12}}$ vektörünün Evolüt eğrisinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi,

$$\beta_{12}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left((\sin \varpi^* - \cos \varpi^*)T^* + N^* + (\sin \varpi^* + \cos \varpi^*)B^* \right),$$

$$T_{\beta_{12}}(s) = \frac{\varpi^{*'} \sin \varpi^* - (\|W^*\| - \varpi^{*'}) \cos \varpi^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varpi^{*'} + 2(\varpi^{*'})^2)}} T^* - \frac{\|W^*\|}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varpi^{*'} + 2(\varpi^{*'})^2)}} N^* \\ + \frac{\varpi^{*'} \cos \varpi^* + (\|W^*\| - \varpi^{*'}) \sin \varpi^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varpi^{*'} + 2(\varpi^{*'})^2)}} B^*,$$

$$\beta_{12} \wedge T_{\beta_{12}}(s) = \frac{(2\|W^*\| - \varpi^{*'}) \sin \varpi^* + (\|W^*\| + \varpi^{*'}) \cos \varpi^*}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varpi^{*'} + 6(\varpi^{*'})^2}} T^* + \frac{2\varpi^{*'} - \|W^*\|}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varpi^{*'} + 6(\varpi^{*'})^2}} N^* \\ + \frac{(2\|W^*\| - \varpi^{*'}) \cos \varpi^* - (\|W^*\| + \varpi^{*'}) \sin \varpi^*}{\sqrt{6\|W^*\|^2 - 6\|W^*\|\varpi^{*'} + 6(\varpi^{*'})^2}} B^*,$$

$$T'_{\beta_{12}}(s) = \frac{\|W^*\|^4 \sqrt{3}(\rho_3 \sin \varpi^* - \rho_2 \cos \varpi^*)}{4(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varpi^{*'} + (\varpi^{*'})^2)^2} T^* + \frac{\rho_1 \|W^*\|^4 \sqrt{3}}{4(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varpi^{*'} + (\varpi^{*'})^2)^2} N^* \\ + \frac{\|W^*\|^4 \sqrt{3}(\rho_2 \sin \varpi^* + \rho_3 \cos \varpi^*)}{4(\|W^*\|^2 - \|W^*\|\varpi^{*'} + (\varpi^{*'})^2)^2} B^*$$

denklemlerine dönüşür. Geodezik eğrilik tanımından $\kappa_g^{\beta_{12}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{12}} = \frac{\left(2\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} - 1\right)\rho_1 + \left(-1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)\rho_2 + \left(2 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)\rho_3}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|} + \left(\frac{\varpi^{*'}}{\|W^*\|}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2.24 β_{12} eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{12}} = \frac{(2\eta - 1)\bar{\rho}_1 - (1 + \eta)\bar{\rho}_2 + (2 - \eta)\bar{\rho}_3}{4\sqrt{2}(1 - \eta + \eta^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.2.88)$$

denklemlerle verilir. Burada

$$\eta = \frac{\kappa\tau^2 \sin \varpi - \kappa'\tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \bar{\rho}_1 = -2 + 4\eta - 4\eta^2 + 2\eta^3 + 2\eta'(2\eta - 1), \\ \bar{\rho}_2 = -2 + 2\eta - 4\eta^2 + 2\eta^3 - 2\eta^4 - \eta'(1 + \eta), \\ \bar{\rho}_3 = 2\eta - 4\eta^2 + 4\eta^3 - 2\eta^4 + \eta'(2 - \eta) \end{cases} \quad (3.2.89)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.81) bağıntısında (3.2.2), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarında bulunan eşitlikler yerine yazılırsa β_{11} vektörünün esas eğriye bağlı ifadesi

$$\beta_{12}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-T - N + B \right) \quad (3.2.90)$$

olur. (3.2.90) bağıntısının türevi alınır

$$\eta = \frac{\kappa\tau^2 \sin \varpi - \kappa'\tau \cos \varpi}{\kappa^3 \cos^2 \varpi}$$

olmak üzere $T_{\beta_{12}}(s)$ teğet vektörü

$$T_{\beta_{12}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \eta + \eta^2)} \left(T + (\eta - 1)N + \eta B \right) \quad (3.2.91)$$

bulunur. (3.2.91) bağıntısının türevi alınır

$$\begin{cases} \bar{\rho}_1 = -2 + 4\eta - 4\eta^2 + 2\eta^3 + 2\eta'(2\eta - 1), \\ \bar{\rho}_2 = -2 + 2\eta - 4\eta^2 + 2\eta^3 - 2\eta^4 - \eta'(1 + \eta), \\ \bar{\rho}_3 = 2\eta - 4\eta^2 + 4\eta^3 - 2\eta^4 + \eta'(2 - \eta) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{12}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{12}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4(1 - \eta + \eta^2)^2} \left(-\bar{\rho}_1 T - \bar{\rho}_2 N + \bar{\rho}_3 B \right)$$

bulunur. (3.2.90) ve (3.2.91) ifadeleri alınır ve bu ifadelerle gerekli işlemler yapılırsa $\beta_{12} \wedge T_{\beta_{12}}$ vektörü

$$\beta_{12} \wedge T_{\beta_{12}}(s) = \frac{(1-2\eta)}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}} T + \frac{(1+\eta)}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}} N + \frac{(2-\eta)}{\sqrt{6-6\eta+6\eta^2}} B$$

yazılır. $\kappa_g^{\beta_{12}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{12}} = \frac{(2\eta-1)\bar{\rho}_1 - (1+\eta)\bar{\rho}_2 + (2-\eta)\bar{\rho}_3}{4\sqrt{2}(1-\eta+\eta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde olur.

Tanım 3.2.25 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin B^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{B^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun.

$$\beta_{13}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + B_1^*) \quad (3.2.92)$$

şeklinde ifade edilen vektörün çizdiği eğriye $B^*B_1^*$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.26 β_{13} eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{13}} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\varpi_1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\varpi_2 + 2\varpi_3\right) \quad (3.2.93)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \varpi_1 = -2 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right), \varpi_2 = -2 - 3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \varpi_3 = 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases} \quad (3.2.94)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat β_{13} eğrisinin $s_{\beta_{13}}$ yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_{13}} \frac{ds_{\beta_{13}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* + B_1^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_2^*) \quad (3.2.95)$$

olur. (3.2.95) bağıntısının normu alınır $\frac{ds_{\beta_{13}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{13}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}$$

bulunur. Bulunan ifade (3.2.95) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_{13}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{13}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(-B^* + B_1^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_2^*\right) \quad (3.2.96)$$

şeklinde bulunur. (3.2.96) bağıntısının türevi alınırsa katsayılar,

$$\begin{cases} \varpi_1 = -2 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right), \varpi_2 = -2 - 3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \varpi_3 = 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{13}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{13}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2} (\varpi_1 B^* + \varpi_2 B_1^* + \varpi_3 B_2^*) \quad (3.2.97)$$

dır. (3.2.92) ve (3.2.96) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılrsa $\beta_{13} \wedge T_{\beta_{13}}$ ifadesi,

$$\beta_{13} \wedge T_{\beta_{13}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*} B^* - \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_1^* + 2B_2^*\right) \quad (3.2.98)$$

olur. (3.2.3) bağıntısında bulunan eşitlikler (3.2.92), (3.2.96), (3.2.97) ve (3.2.98) bağıntılarında bulunan karşılıklarına yazılırsa β_{13} eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{13}}$ türev vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \beta_{13}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-N^* + B^*\right) \\ T_{\beta_{13}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*} T^* - N^* - B^*\right) \\ \beta_{13} \wedge T_{\beta_{13}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{4 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(2T^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} N^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B^*\right) \\ T'_{\beta_{13}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\left(2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2} \left(\varpi_3 T^* - \varpi_2 N^* + \varpi_1 B^*\right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. $\kappa_g^{\beta_{13}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{13}} = \frac{1}{\left(2 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*} \varpi_1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} \varpi_2 + 2\varpi_3\right)$$

olur.

Sonuç 3.2.27 β_{13} eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrisinin Frenet aparatlarına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{13}} = \frac{1}{\left(2 + (\cot \varpi)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(-\cot \varpi \bar{\varpi}_1 + \cot \varpi \bar{\varpi}_2 + 2\bar{\varpi}_3\right) \quad (3.2.99)$$

olur. Burada

$$\begin{cases} \bar{\varpi}_1 = -2 - \cot^2 \varpi + (\cot \varpi)' \cot \varpi, \\ \bar{\varpi}_2 = -2 - 3 \cot^2 \varpi - \cot^4 \varpi - (\cot \varpi)' \cot \varpi, \\ \bar{\varpi}_3 = -2 \cot \varpi - \cot^3 \varpi - 2(\cot \varpi)' \end{cases} \quad (3.2.100)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.92) bağıntısında (3.2.3), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa β_{13} vektörünün esas eğrinin Frenet elemanlarına bağlı ifadesi

$$\beta_{13}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(T + \sin \varpi N + \cos \varpi B\right) \quad (3.2.101)$$

olur. (3.2.101) bağıntısının türevi alınırsa $T_{\beta_{13}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{13}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + \cot^2 \varpi}} \left(T - \csc \varpi N\right) \quad (3.2.102)$$

bulunur. (3.2.102) bağıntısının türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\varpi}_1 = -2 - \cot^2 \varpi + \cot' \varpi \cot \varpi, \\ \bar{\varpi}_2 = -2 - 3 \cot^2 \varpi - \cot^4 \varpi - \cot' \varpi \cot \varpi, \\ \bar{\varpi}_3 = -2 \cot \varpi - \cot^3 \varpi - 2 \cot' \varpi \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{13}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{13}}(s) &= \frac{\varpi_2 \sqrt{2}}{\left(1 + 2 \cot^2 \varpi\right)^2} T + \frac{\left(\bar{\varpi}_3 \cos \varpi + \bar{\varpi}_1 \sin \varpi\right) \sqrt{2}}{\left(1 + 2 \cot^2 \varpi\right)^2} N \\ &\quad + \frac{\left(\bar{\varpi}_1 \cos \varpi - \bar{\varpi}_3 \sin \varpi\right) \sqrt{2}}{\left(1 + 2 \cot^2 \varpi\right)^2} B \end{aligned}$$

olur. (3.2.101) ve (3.2.102) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_{13} \wedge T_{\beta_{13}}$ vektörü

$$\beta_{13} \wedge T_{\beta_{13}} = \frac{-\cot \varpi}{\sqrt{2+4\cot^2 \varpi}} T + \frac{\cos \varpi}{\sqrt{2+4\cot^2 \varpi}} N - \frac{2\sin \varpi + \cot \varpi \cos \varpi}{\sqrt{2+4\cot^2 \varpi}} B$$

şeklinde yazılır. $\kappa_g^{\beta_{13}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{13}} = \frac{1}{\left(2 + (\cot \varpi)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(-\cot \varpi \overline{\omega}_1 + \cot \varpi \overline{\omega}_2 + 2\overline{\omega}_3\right)$$

bulunur.

Tanım 3.2.28 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin B^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{B^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun.

$$\beta_{14}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^* + B_2^*) \quad (3.2.103)$$

şeklinde ifade edilen vektörün çizdiği eğriye $B^*(B_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.29 $B^*(B_2^*)$ -Smarandache eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{14}} = \frac{(\tau^* + \kappa^*)}{(\tau^* - \kappa^*)} \quad (3.2.104)$$

denklemleriyle verilir.

İspat β_{14} eğrisinin $s_{\beta_{14}}$ yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_{14}} \frac{ds_{\beta_{14}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) B_1^* \quad (3.2.105)$$

bulunur. (3.2.105) bağıntısının normu alınır $\frac{ds_{\beta_{14}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{14}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)$$

olur. Bulunan ifade (3.2.105) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_{14}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{14}}(s) = B_1^* \quad (3.2.106)$$

bulunur. (3.2.106) bağıntısının türevi alınır $T'_{\beta_{14}}(s)$ vektörü

$$T'_{\beta_{14}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)} \left(-B^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_2^*\right) \quad (3.2.107)$$

bulunur. (3.2.103) ve (3.2.106) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_{14} \wedge T_{\beta_{14}}$ vektörü,

$$\beta_{14} \wedge T_{\beta_{14}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^* + B_2^*) \quad (3.2.108)$$

bulunur. (3.2.3) bağıntısında bulunan eşitlikler (3.2.103), (3.2.106), (3.2.107) ve (3.2.108) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa β_{14} eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{14}}$ türev vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \beta_{14}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*), \\ T_{\beta_{14}}(s) &= -N^*, \\ \beta_{14} \wedge T_{\beta_{14}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* - B^*), \\ T'_{\beta_{14}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*})} \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*} T^* - B^* \right) \end{aligned}$$

olur. $\kappa_g^{\beta_{14}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{14}} = \langle T'_{\beta_{14}}, \beta_{14} \wedge T_{\beta_{14}} \rangle = \frac{(\tau^* + \kappa^*)}{(\tau^* - \kappa^*)}$$

bulunur.

Sonuç 3.2.30 β_{14} eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{14}} = \frac{1 - \cot \varpi}{1 + \cot \varpi} \quad (3.2.109)$$

denklemlerle verilir.

İspat (3.2.103) bağıntısında (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarında bulunan ifadeler yerine yazılırsa β_{14} vektörünün esas eğriye bağlı ifadesi

$$\beta_{14}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sin \varpi + \cos \varpi) N + (\cos \varpi - \sin \varpi) B \right) \quad (3.2.110)$$

olur. (3.2.110) ifadesinin türevi alınırsa $T_{\beta_{14}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{14}}(s) = T \quad (3.2.111)$$

eşitliğiyle bulunur. Tekrar türev alınırsa $T'_{\beta_{14}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{14}}(s) = -\frac{\sqrt{2}}{(1 + \cot \varpi) \sin \varpi} N$$

olur. (3.2.110) ve (3.2.111) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{14} \wedge T_{\beta_{14}}$ vektörü

$$\beta_{14} \wedge T_{\beta_{14}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\cos \varpi - \sin \varpi) N - (\cos \varpi + \sin \varpi) B \right)$$

biçiminde yazılır. $\kappa_g^{\beta_{14}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{14}} = \frac{1 - \cot \varpi}{1 + \cot \varpi}$$

bulunur.

Tanım 3.2.31 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin B^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{B^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun.

$$\beta_{15}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1^* + B_2^*) \quad (3.2.112)$$

şeklinde ifade edilen vektörün çizdiği eğriye $B_1^*(B_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.32 β_{15} eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{15}} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*}\psi_1 - \psi_2 + \psi_3\right) \quad (3.2.113)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{\kappa^*}{\tau^*} + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right), \psi_2 = -1 - 3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \\ \psi_3 = -\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases} \quad (3.2.114)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat β_{15} eğrisinin $s_{\beta_{15}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{15}} \frac{ds_{\beta_{15}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-B^* - \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_1^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_2^*\right) \quad (3.2.115)$$

bulunur. (3.2.115) bağıntısının normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{15}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{15}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}$$

olur. Bulunan ifade (3.2.115) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_{15}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{15}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(-B^* - \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_1^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} B_2^*\right) \quad (3.2.116)$$

olur. (3.2.116) bağıntısının türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{\kappa^*}{\tau^*} + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right), \psi_2 = -1 - 3\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \\ \psi_3 = -\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \end{cases} \quad (3.2.117)$$

olmak üzere $T'_{\beta_{15}}$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{15}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2} (\psi_1 B^* + \psi_2 B_1^* + \psi_3 B_2^*) \quad (3.2.118)$$

bulunur. (3.2.112) ve (3.2.116) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{15} \wedge T_{\beta_{15}}$ vektörü,

$$\beta_{15} \wedge T_{\beta_{15}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} B^* - B_1^* + B_2^*\right) \quad (3.2.119)$$

şeklinde ifade edilir. (3.2.3) bağıntısında bulunan eşitlikler (3.2.112), (3.2.116), (3.2.118) ve (3.2.119) bağıntılarında yerine yazılırsa β_{15} eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{15}}$ türev vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \beta_{15}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* - N^*), \\ T_{\beta_{15}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*} T^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*} N^* - B^*\right), \\ \beta_{15} \wedge T_{\beta_{15}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2 + 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(T^* + N^* + 2\frac{\kappa^*}{\tau^*} B^*\right), \\ T'_{\beta_{15}}(s) &= \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2} (\psi_3 T^* - \psi_2 N^* + \psi_1 B^*) \end{aligned}$$

olur. $\kappa_g^{\beta_{15}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{15}} = \frac{1}{\left(1 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} \psi_1 - \psi_2 + \psi_3\right)$$

olur.

Sonuç 3.2.33 β_{15} eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğriye bağlı ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{15}} = \frac{1}{\left(1 + 2 \cot^2 \varpi\right)^{\frac{5}{2}}} \left(-2 \cot \varpi \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_3\right) \quad (3.2.120)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\psi}_1 = -\cot \varpi - \cot^3 \varpi + 2(\cot \varpi)' \cot \varpi, \\ \bar{\psi}_2 = -1 - 3 \cot^2 \varpi - 2 \cot^4 \varpi + (\cot \varpi)' \\ \bar{\psi}_3 = -\cot^2 \varpi - 2 \cot^4 \varpi - (\cot \varpi)' \end{cases} \quad (3.2.121)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.112) bağıntısında (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarında bulunan eşitlikler yerine yazılırsa β_{15} vektörünün esas eğriye bağlı ifadesi

$$\beta_{15}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(T + \cos \varpi N - \sin \varpi B\right) \quad (3.2.122)$$

şeklinde yazılır. (3.2.122) bağıntısının türevi alınırsa $T_{\beta_{15}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{15}}(s) = \frac{\cot \varpi}{\sqrt{1 + 2 \cot^2 \varpi}} T - \frac{\csc \varpi}{\sqrt{1 + 2 \cot^2 \varpi}} N \quad (3.2.123)$$

bulunur. (3.2.123) bağıntısının türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\psi}_1 = -\cot \varpi - \cot^3 \varpi + 2(\cot \varpi)' \cot \varpi, \\ \bar{\psi}_2 = -1 - 3 \cot^2 \varpi - 2 \cot^4 \varpi + (\cot \varpi)' \\ \bar{\psi}_3 = -\cot^2 \varpi - 2 \cot^4 \varpi - (\cot \varpi)' \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{15}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{15}}(s) = & \frac{\psi_2 \sqrt{2}}{(2 + \cot^2 \varpi)^2} T + \frac{(\bar{\psi}_3 \cos \varpi + \bar{\psi}_1 \sin \varpi) \sqrt{2}}{(2 + \cot^2 \varpi)^2} N \\ & + \frac{(\bar{\psi}_1 \cos \varpi - \bar{\psi}_3 \sin \varpi) \sqrt{2}}{(2 + \cot^2 \varpi)^2} B \end{aligned}$$

olur. (3.2.122) ve (3.2.123) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{15} \wedge T_{\beta_{15}}$ vektörü

$$\begin{aligned} \beta_{15} \wedge T_{\beta_{15}}(s) = & -\frac{1}{\sqrt{2 + 4 \cot^2 \varpi}} T - \frac{\cos \varpi}{\sqrt{2 + 4 \cot^2 \varpi}} N \\ & - \frac{\csc \varpi + \cot \varpi \cos \varpi}{\sqrt{2 + 4 \cot^2 \varpi}} B \end{aligned}$$

olur. $\kappa_g^{\beta_{15}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{15}} = \frac{1}{\left(1 + 2 \cot^2 \varpi\right)^{\frac{5}{2}}} \left(-2 \cot \varpi \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_3\right)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.2.34 $\zeta^* : I \rightarrow S^2$ eğrisinin B^* vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğriye ait Sabban çatısı $\{B^*, B_1^*, B_2^*\}$ olsun.

$$\beta_{16}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(B^* + B_1^* + B_2^*) \quad (3.2.124)$$

şeklinde ifade edilen vektörün çizdiği eğriye $B^*B_1^*(B_2^*)$ -Smarandache eğrisi denir.

Teorem 3.2.35 β_{16} eğrisinin geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{16}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} - 1\right)\zeta_1 - \left(1 + \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)\zeta_2 + \left(2 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)\zeta_3\right) \quad (3.2.125)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\begin{cases} \zeta_1 = -2 + 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} - 1\right) \\ \zeta_2 = -2 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) - 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(1 + \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \zeta_3 = 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) - 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(2 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \end{cases} \quad (3.2.126)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat β_{16} eğrisinin $s_{\beta_{16}}$ yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{16}} \frac{ds_{\beta_{16}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-B^* + \left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)B_1^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*}B_2^*\right) \quad (3.2.127)$$

olur ve bu ifadenin normu alınırsa $\frac{ds_{\beta_{16}}}{ds}$ ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{16}}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)}$$

bulunur. Bulunan ifade (3.2.127) bağıntısında yerine yazılırsa $T_{\beta_{16}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{16}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)}} \left(-B^* + \left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)B_1^* + \frac{\kappa^*}{\tau^*}B_2^*\right) \quad (3.2.128)$$

eşitliğiyle elde edilir. Tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \zeta_1 = -2 + 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} - 1\right) \\ \zeta_2 = -2 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) - 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 - \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(1 + \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \\ \zeta_3 = 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) - 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2 + 4\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^3 - 2\left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^4 + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)' \left(2 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{16}}(s)$ türev vektörü

$$T'_{\beta_{16}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2} (\zeta_1 B^* + \zeta_2 B_1^* + \zeta_3 B_2^*) \quad (3.2.129)$$

biçiminde bulunur. (3.2.124) ve (3.2.128) ifadeleri alınır ve gerekli işlemler yapılırsa $\beta_{16} \wedge T_{\beta_{16}}$ vektörü

$$\beta_{16} \wedge T_{\beta_{16}}(s) = \frac{\left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} - 1\right)B^* - \left(1 + \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)B_1^* + \left(2 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)B_2^*}{\sqrt{6}\sqrt{1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \quad (3.2.130)$$

şeklinde yazılır. (3.2.3) bağıntısında bulunan eşitlikler (3.2.124), (3.2.128), (3.2.129) ve (3.2.130) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa β_{16} eğrisine ait Sabban çatısının ve $T'_{\beta_{16}}$ vektörünün Evolüt eğrisine bağlı ifadesi,

$$\begin{aligned} \beta_{16} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* - N^* + B^*), \\ T_{\beta_{16}} &= \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)}} \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}T^* - \left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)N^* - B^*\right), \\ \beta_{16} \wedge T_{\beta_{16}} &= \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2}} \left(\left(2 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)T^* + \left(1 + \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)N^* + \left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} - 1\right)B^*\right), \\ T'_{\beta_{16}} &= \frac{\sqrt{3}}{4\left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^2} (\zeta_3 T^* - \zeta_2 N^* + \zeta_1 B^*) \end{aligned}$$

olur. $\kappa_g^{\beta_{16}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{16}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\left(1 - \frac{\kappa^*}{\tau^*} + \left(\frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left(\left(2\frac{\kappa^*}{\tau^*} - 1\right)\zeta_1 - \left(1 + \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)\zeta_2 + \left(2 - \frac{\kappa^*}{\tau^*}\right)\zeta_3\right)$$

biçiminde olur.

Sonuç 3.2.36 β_{16} eğrisinin geodezik eğriliğinin esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı

ifadesi

$$\kappa_g^{\beta_{16}} = \frac{\left(1 - 2 \cot \varpi\right) \bar{\zeta}_1 + \left(\cot \varpi - 1\right) \bar{\zeta}_2 + \left(2 + \cot \varpi\right) \bar{\zeta}_3}{4\sqrt{2}\left(1 + \cot \varpi + \cot^2 \varpi\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.2.131)$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_1 = -2 - 4 \cot \varpi - \cot^2 \varpi - 2 \cot^3 \varpi + \left(\cot \varpi\right)'(2 \cot \varpi + 1) \\ \bar{\zeta}_2 = -2 - 2 \cot \varpi - 4 \cot^2 \varpi - \cot^3 \varpi - 2 \cot^4 \varpi + \left(\cot \varpi\right)'(1 - \cot \varpi) \\ \bar{\zeta}_3 = -2 \cot \varpi - 4 \cot^2 \varpi - 4 \cot^3 \varpi - 2 \cot^4 \varpi - \left(\cot \varpi\right)'(2 + \cot \varpi) \end{cases} \quad (3.2.132)$$

şeklinde birer katsayıdır.

İspat (3.2.124) bağıntısında (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) bağıntılarında bulunan karşılıkları yerine yazılırsa β_{16} vektörünün esas eğrinin Frenet aparatlarına bağlı ifadesi

$$\beta_{16}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(T + \left(\sin \varpi + \cos \varpi \right) N + \left(\cos \varpi - \sin \varpi \right) B \right) \quad (3.2.133)$$

şeklinde olur. (3.2.133) bağıntısının türevi alınırsa $T_{\beta_{16}}(s)$ vektörü

$$T_{\beta_{16}}(s) = \frac{1 + \cot \varpi}{\sqrt{2}\left(1 + \cot \varpi + \cot^2 \varpi\right)} T - \frac{\cot \varpi \cos \varpi + \sin \varpi}{\sqrt{2}\left(1 + \cot \varpi + \cot^2 \varpi\right)} B$$

biçiminde bulunur. (3.2.24) bağıntısının türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_1 = -2 - 4 \cot \varpi - \cot^2 \varpi - 2 \cot^3 \varpi + \left(\cot \varpi\right)'(2 \cot \varpi + 1) \\ \bar{\zeta}_2 = -2 - 2 \cot \varpi - 4 \cot^2 \varpi - \cot^3 \varpi - 2 \cot^4 \varpi + \left(\cot \varpi\right)'(1 - \cot \varpi) \\ \bar{\zeta}_3 = -2 \cot \varpi - 4 \cot^2 \varpi - 4 \cot^3 \varpi - 2 \cot^4 \varpi - \left(\cot \varpi\right)'(2 + \cot \varpi) \end{cases}$$

olmak üzere $T'_{\beta_{16}}(s)$ türev vektörü

$$\begin{aligned} T'_{\beta_{16}}(s) &= \frac{\zeta_2 \sqrt{2}}{4\left(1 - \cot \varpi \cot^2 \varpi\right)^2} T + \frac{\left(\bar{\zeta}_3 \cos \varpi + \bar{\zeta}_1 \sin \varpi\right) \sqrt{2}}{4\left(1 - \cot \varpi \cot^2 \varpi\right)^2} N \\ &\quad + \frac{\left(\bar{\zeta}_1 \cos \varpi - \bar{\zeta}_3 \sin \varpi\right) \sqrt{2}}{4\left(1 - \cot \varpi \cot^2 \varpi\right)^2} B \end{aligned}$$

biçiminde olur. (3.2.133) ve (3.2.24) ifadeleri alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $\beta_{16} \wedge T_{\beta_{16}}$ vektörü

$$\beta_{16} \wedge T_{\beta_{16}}(s) = \frac{\cot \varpi + 1}{\sqrt{6 + 6 \cot \varpi + 6 \cot^2 \varpi}} T + \frac{\csc \varpi}{\sqrt{6 + 6 \cot \varpi + 6 \cot^2 \varpi}} N - \frac{2 \sin \varpi - 2 \cos \varpi - 2 \cot \varpi \cos \varpi}{\sqrt{6 + 6 \cot \varpi + 6 \cot^2 \varpi}} B$$

olur. $\kappa_g^{\beta_{16}}$ geodezik eğriliği

$$\kappa_g^{\beta_{16}} = \frac{\left(1 - 2 \cot \varpi\right) \bar{\zeta}_1 + \left(\cot \varpi - 1\right) \bar{\zeta}_2 + \left(2 + \cot \varpi\right) \bar{\zeta}_3}{4\sqrt{2}\left(1 + \cot \varpi + \cot^2 \varpi\right)^{\frac{5}{2}}}$$

biçiminde bulunur.

Örnek 3.2.37 Örnek (3.1.21) da verilen β eğrisinin küresel göstergelerine ait Sabban vektörleri

$$T_1 = \left(-1/2 \frac{\sqrt{2} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s)))}{\sqrt{(\cos(\ln(s)))^2 + (\sin(\ln(s)))^2}}, 1/2 \frac{\sqrt{2} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)))}{\sqrt{(\cos(\ln(s)))^2 + (\sin(\ln(s)))^2}}, 0 \right),$$

$$T_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))), -\frac{\sqrt{6}}{6} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))), \frac{\sqrt{6}}{3} \right),$$

$$N_1 = \left(\frac{-\sqrt{2} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)))}{2\sqrt{(\cos(\ln(s)))^2 + (\sin(\ln(s)))^2}}, \frac{-\sqrt{2} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s)))}{2\sqrt{(\cos(\ln(s)))^2 + (\sin(\ln(s)))^2}}, 0 \right),$$

$$N_2 = (0, 0, 1),$$

$$B_1 = \left(\frac{\sqrt{2} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s)))}{2\sqrt{(\cos(\ln(s)))^2 + (\sin(\ln(s)))^2}}, \frac{-\sqrt{2} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s)))}{2\sqrt{(\cos(\ln(s)))^2 + (\sin(\ln(s)))^2}}, 0 \right),$$

$$B_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (\cos(\ln(s)) - \sin(\ln(s))), \frac{\sqrt{3}}{3} (\sin(\ln(s)) + \cos(\ln(s))), \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

şeklinde bulunur. T - teğetler göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
\beta_{5-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + T_1), \\
\beta_{6-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 + T_2), \\
\beta_{7-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + T_2), \\
\beta_{8-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T + T_1 + T_2)
\end{aligned} \tag{3.2.134}$$

N -aslinormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
\beta_{9-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N + N_1), \\
\beta_{10-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N_1 + N_2), \\
\beta_{11-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N + N_2), \\
\beta_{12-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (N + N_1 + N_2)
\end{aligned} \tag{3.2.135}$$

B -binormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
\beta_{13-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B + B_1), \\
\beta_{14-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B_1 + B_2), \\
\beta_{15-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B + B_2), \\
\beta_{16-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (B + B_1 + B_2)
\end{aligned} \tag{3.2.136}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde β^* Evolüt eğrisinin Sabban vektörleri

$$T_1^* = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) + \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) - 2 \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)}{\sqrt{(\cos^2(\ln(s)) + \sin^2(\ln(s))) \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 3\sin^2\left(\frac{31}{3}\right) + 5\cos^2\left(\frac{31}{3}\right)\right)}}, \\ \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 2 \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)}{\sqrt{(\cos^2(\ln(s)) + \sin^2(\ln(s))) \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 3\sin^2\left(\frac{31}{3}\right) + 5\cos^2\left(\frac{31}{3}\right)\right)}}, 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2^* = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) - 2(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 \cos(\ln(s)) \\ -4(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 \sin(\ln(s)) + 3 \sin(\ln(s)) \end{pmatrix}}{6\sqrt{2} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 + 3}}, \\ \frac{-\sqrt{6} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 4(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 \cos(\ln(s)) \\ -2(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 \sin(\ln(s)) - 3 \cos(\ln(s)) \end{pmatrix}}{6\sqrt{2} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 + 3}}, \\ \frac{\sqrt{2} \left(2(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 \sqrt{3} + 6 \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 3\sqrt{3}\right)}{6\sqrt{2} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2(\cos\left(\frac{31}{3}\right))^2 + 3}} \end{pmatrix},$$

$$N_1^* = \begin{pmatrix} \frac{-\left(\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 2 \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)}{\sqrt{(\cos^2(\ln(s)) + \sin^2(\ln(s))) \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 3\sin^2\left(\frac{31}{3}\right) + 5\cos^2\left(\frac{31}{3}\right)\right)}}, \\ \frac{\left(\sin\left(\frac{31}{3}\right) \sqrt{3} \cos(\ln(s)) + \cos(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) - 2 \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)}{\sqrt{(\cos^2(\ln(s)) + \sin^2(\ln(s))) \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 3\sin^2\left(\frac{31}{3}\right) + 5\cos^2\left(\frac{31}{3}\right)\right)}}, \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$N_2^* = (0, 0, 1),$$

$$B_1^* = \begin{pmatrix} \frac{\left(\begin{array}{l} 2\sqrt{3} \sin(\ln(s)) \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 4 \cos(\ln(s)) \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \\ -2 \sin(\ln(s)) \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) - 3 \cos(\ln(s)) \end{array} \right)}{\sqrt{\left(-8\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos^3\left(\frac{31}{3}\right) + 20\cos^4\left(\frac{31}{3}\right) - 24\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 21\right)}}, \\ \frac{\left(-2\sqrt{3} \cos(\ln(s)) \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2 \cos(\ln(s)) \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) - 4 \sin(\ln(s)) \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 3 \sin(\ln(s))\right)}{\sqrt{\left(-8\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos^3\left(\frac{31}{3}\right) + 20\cos^4\left(\frac{31}{3}\right) - 24\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 21\right)}}, \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2^* = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2} \left(\begin{array}{l} 16\sqrt{3} \cos^4\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) + 8\sqrt{3} \cos^4\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 24\cos^3\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) \\ -6\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) + 6\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) - 18 \cos\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) \\ -18 \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) - 9\sqrt{3} \sin(\ln(s)) \end{array} \right)}{6\sqrt{-8\sqrt{3} \cos^3\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) + 8\cos^4\left(\frac{31}{3}\right) - 12\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 9\sqrt{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 3}}}, \\ \frac{\sqrt{2} \left(\begin{array}{l} 8\sqrt{3} \cos^4\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) - 16\sqrt{3} \cos^4\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) + 24\cos^3\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) \\ +6\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) + 6\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) \sin(\ln(s)) - 18 \cos\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos(\ln(s)) \\ +18 \sin(\ln(s)) \cos\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) - 9\sqrt{3} \cos(\ln(s)) \end{array} \right)}{6\sqrt{-8\sqrt{3} \cos^3\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) + 8\cos^4\left(\frac{31}{3}\right) - 12\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 9\sqrt{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 3}}}, \\ \frac{\sqrt{2} \left(8\sqrt{3} \cos^4\left(\frac{31}{3}\right) - 24\cos^3\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) - 12\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 9\sqrt{3}\right)}{6\sqrt{-8\sqrt{3} \cos^3\left(\frac{31}{3}\right) \sin\left(\frac{31}{3}\right) + 8\cos^4\left(\frac{31}{3}\right) - 12\cos^2\left(\frac{31}{3}\right) + 9\sqrt{2\sqrt{3} \sin\left(\frac{31}{3}\right) \cos\left(\frac{31}{3}\right) + 2\left(\cos\left(\frac{31}{3}\right)\right)^2 + 3}} \end{pmatrix},$$

şeklinde bulunur. T^* teğetler göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned} \beta_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + T_1^*), \\ \beta_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + T_2^*), \\ \beta_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1^* + T_2^*), \\ \beta_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T^* + T_1^* + T_2^*), \end{aligned} \tag{3.2.137}$$

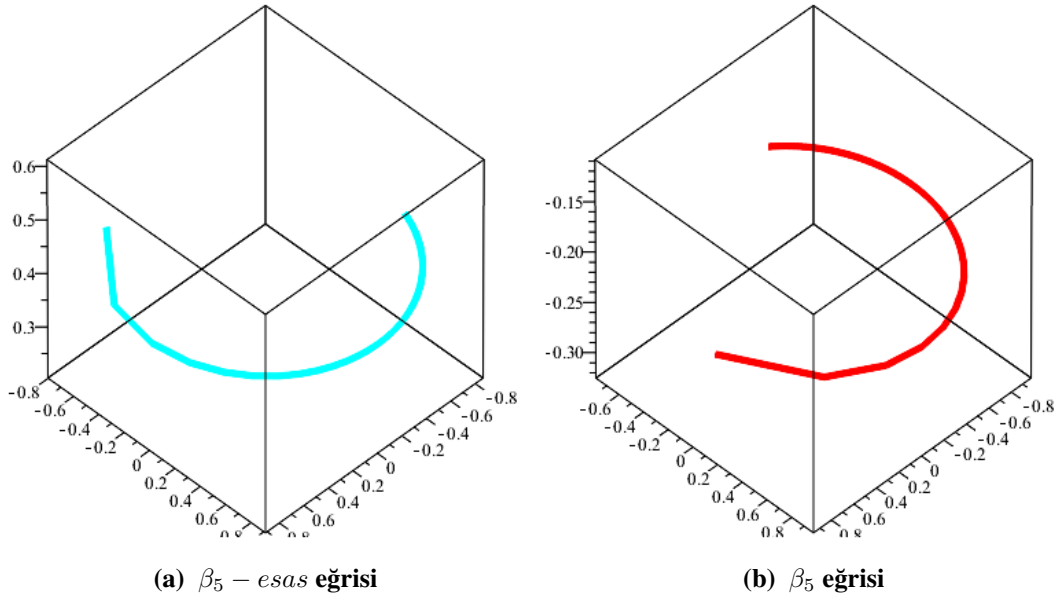
N^* aslinormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\beta_9 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + N_1^*), \\ \beta_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + N_2^*), \\ \beta_{11} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N_1^* + N_2^*), \\ \beta_{12} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (N^* + N_1^* + N_2^*),\end{aligned}\tag{3.2.138}$$

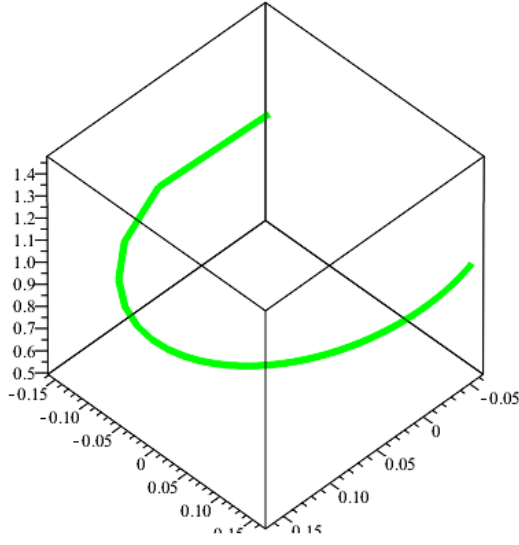
B^* binormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\beta_{13} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B^* + B_1^*), \\ \beta_{14} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B^* + B_2^*), \\ \beta_{15} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B_1^* + B_2^*), \\ \beta_{16} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (B^* + B_1^* + B_2^*),\end{aligned}\tag{3.2.139}$$

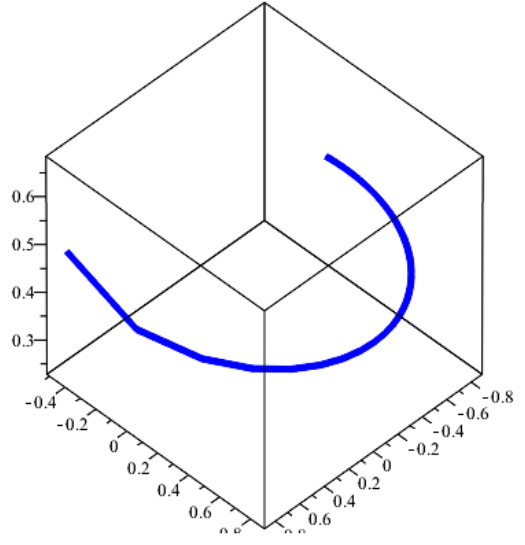
şeklinde tanımlanır. Tanımlanan bu eğrilere ait şekiller aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.11 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_5 - esas$ ve β_5 - Smarandache eğrileri

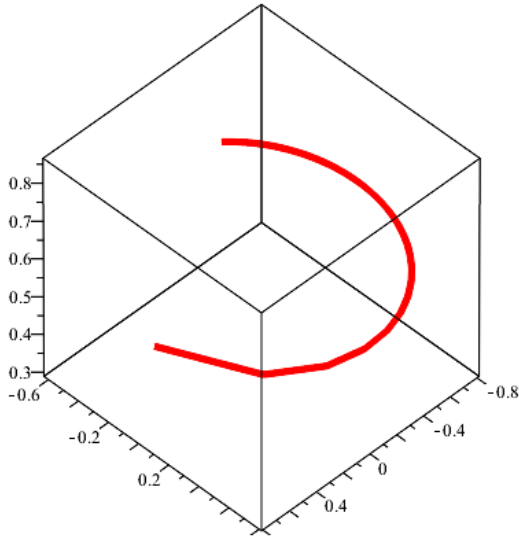


(a) $\beta_6 - esas$ eğrisi

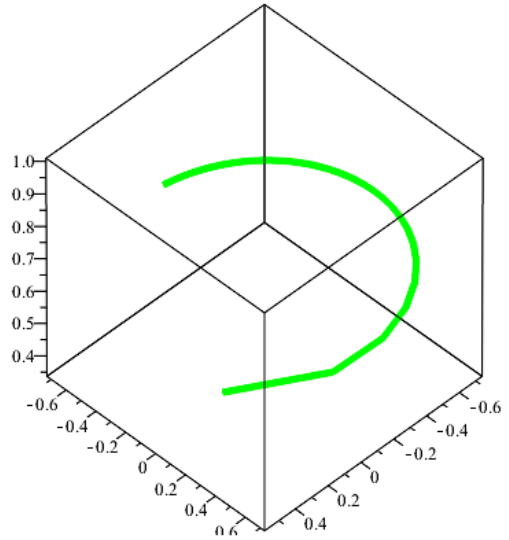


(b) β_6 eğrisi

Şekil 3.12 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatisından elde edilen $\beta_6 - esas$ ve β_6 - Smarandache eğrileri

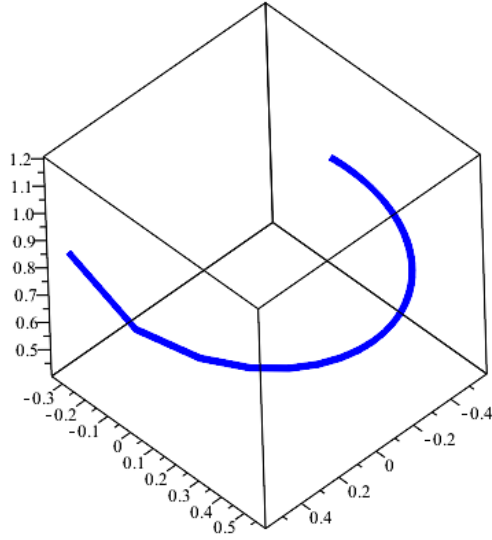


(a) $\beta_7 - esas$ eğrisi

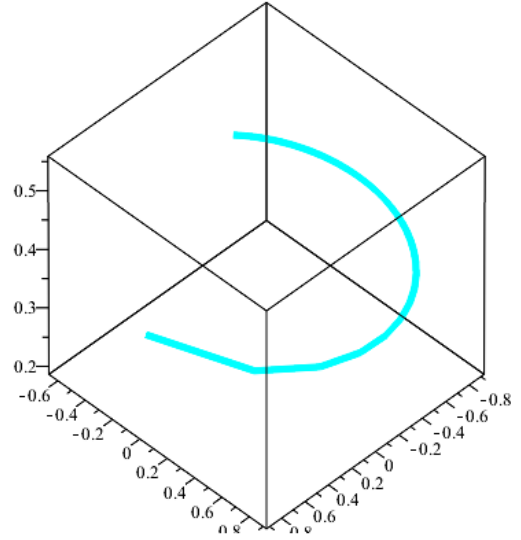


(b) β_7 eğrisi

Şekil 3.13 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatisından elde edilen $\beta_7 - esas$ ve β_7 - Smarandache eğrileri

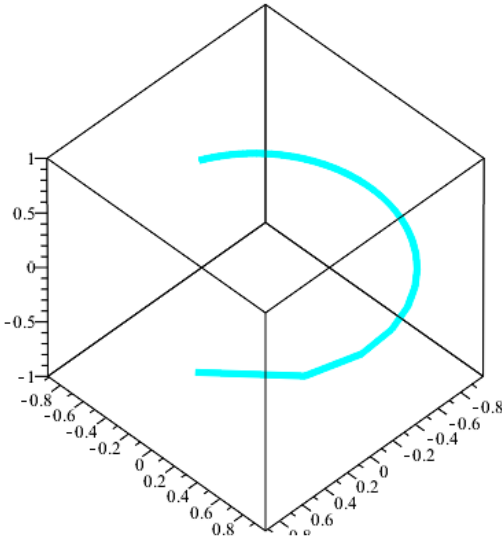


(a) $\beta_8 - esas$ eğrisi

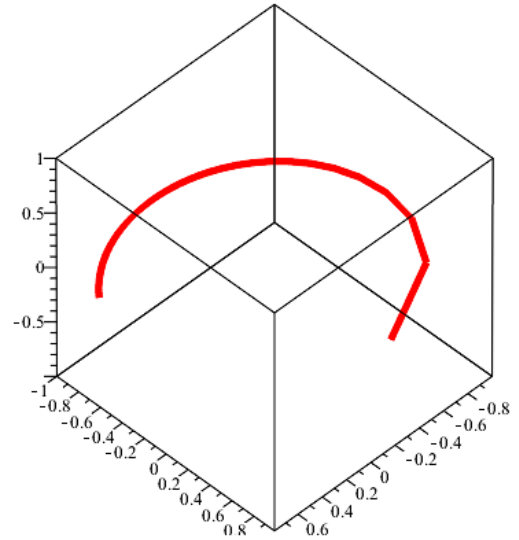


(b) β_8 eğrisi

Şekil 3.14 β ve β^* eğrilerinin teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_8 - esas$ ve β_8 - Smarandache eğrileri

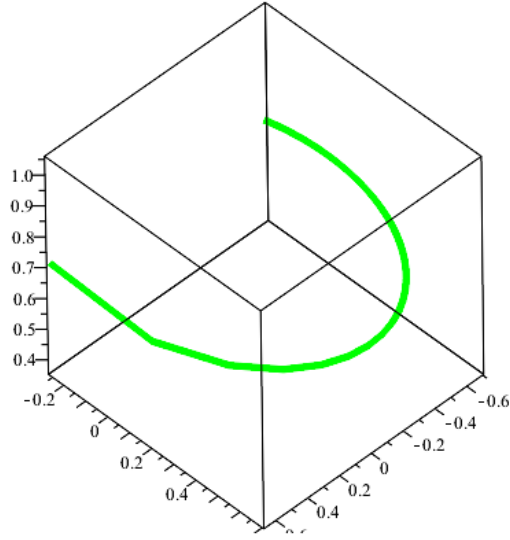


(a) $\beta_9 - esas$ eğrisi

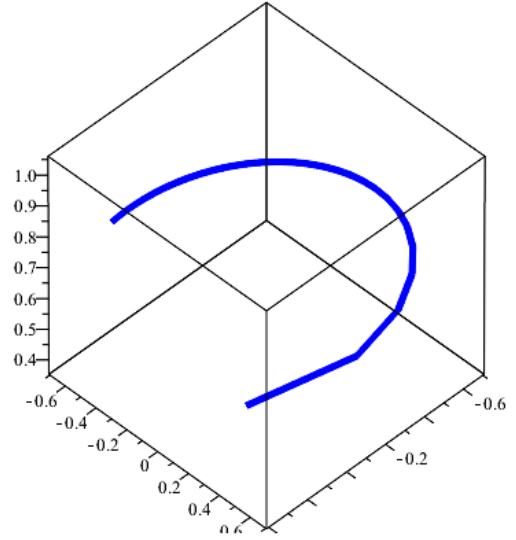


(b) β_9 eğrisi

Şekil 3.15 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_9 - esas$ ve β_9 - Smarandache eğrileri

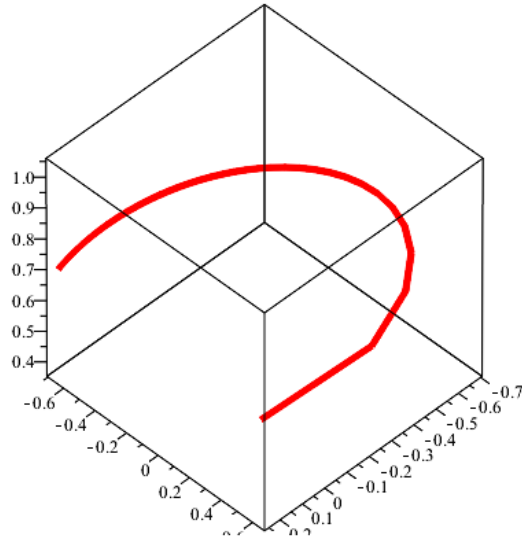


(a) $\beta_{10} - esas$ eğrisi

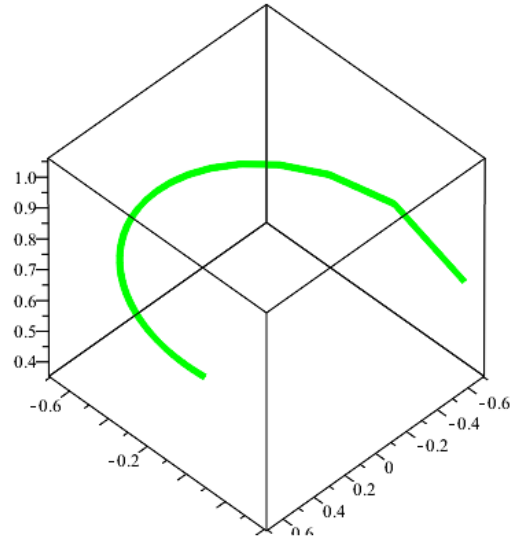


(b) β_{10} eğrisi

Şekil 3.16 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{10} - esas$ ve β_{10} - Smarandache eğrileri

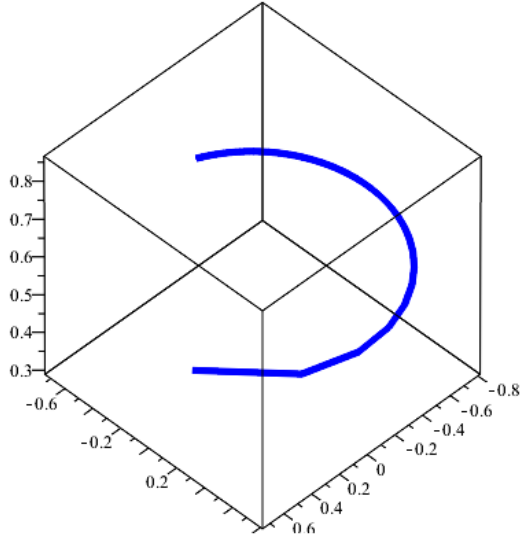


(a) $\beta_{11} - esas$ eğrisi

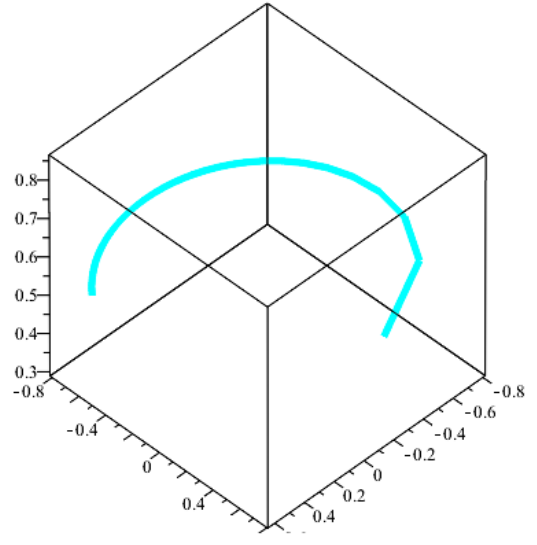


(b) β_{11} eğrisi

Şekil 3.17 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{11} - esas$ ve β_{11} - Smarandache eğrileri

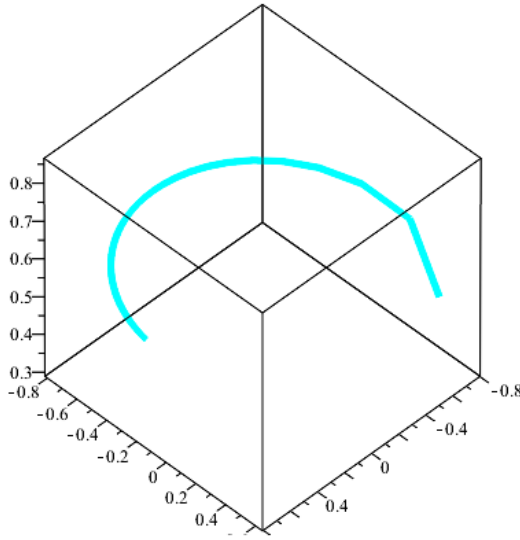


(a) $\beta_{12} - esas$ eğrisi

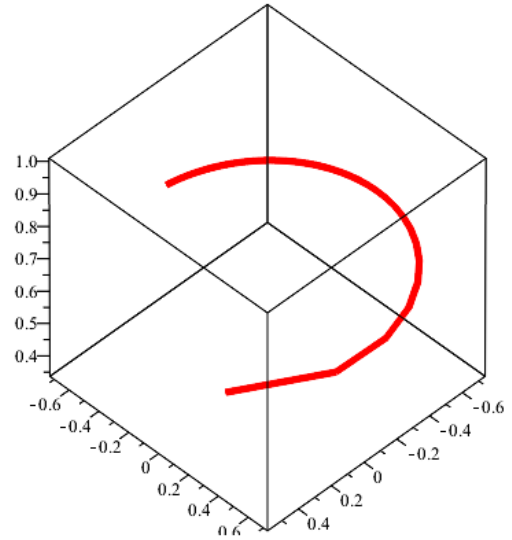


(b) β_{12} eğrisi

Şekil 3.18 β ve β^* eğrilerinin aslinormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{12} - esas$ ve β_{12} - Smarandache eğrileri

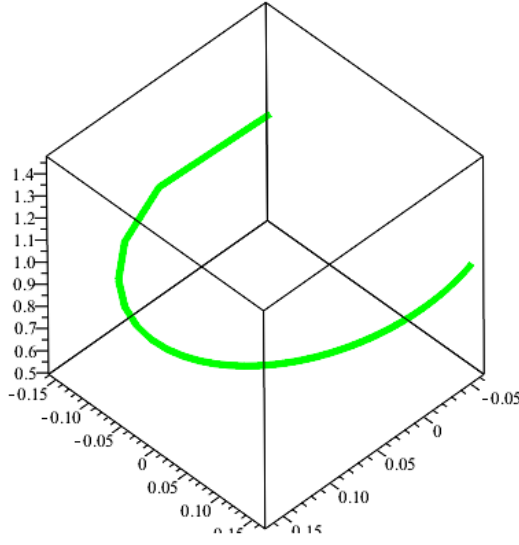


(a) $\beta_{13} - esas$ eğrisi

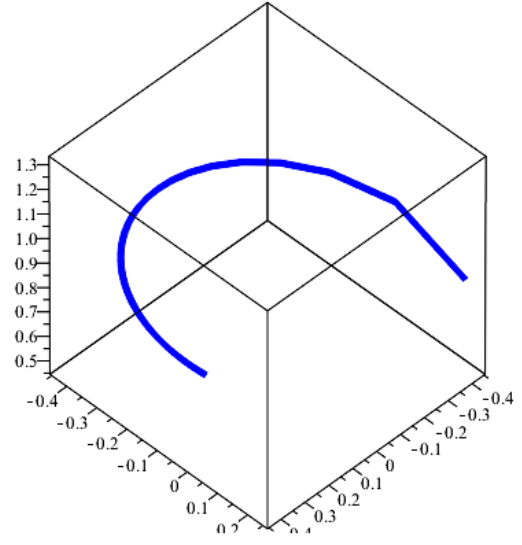


(b) β_{13} eğrisi

Şekil 3.19 β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{13} - esas$ ve β_{13} - Smarandache eğrileri

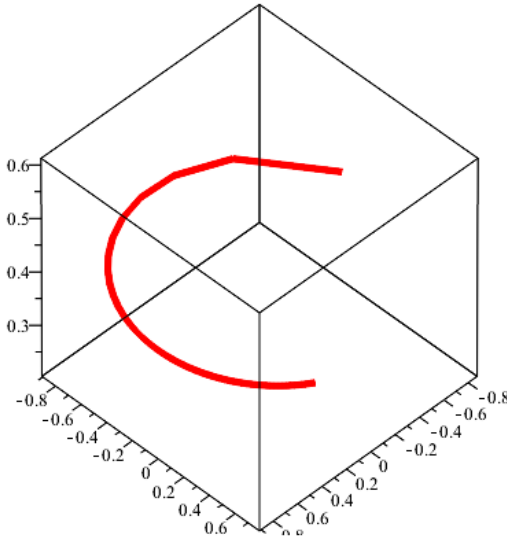


(a) $\beta_{14} - esas$ eğrisi

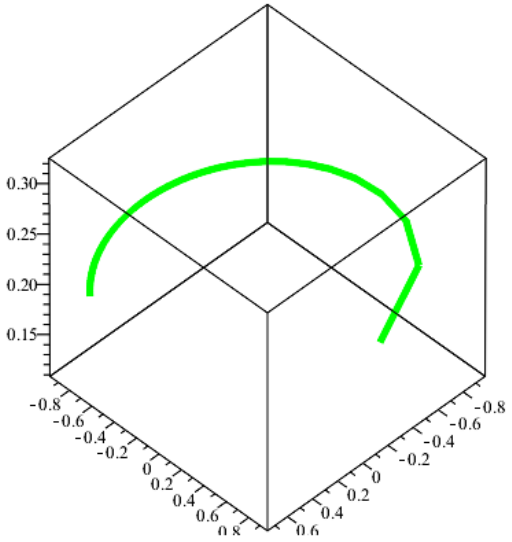


(b) β_{14} eğrisi

Şekil 3.20 β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{14} - esas$ ve β_{14} - Smarandache eğrileri

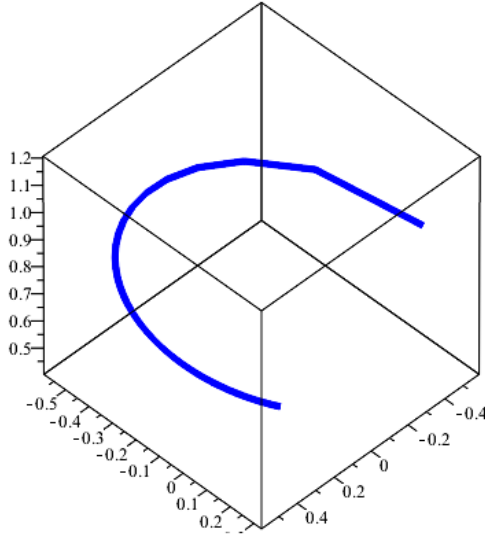


(a) $\beta_{15} - esas$ eğrisi

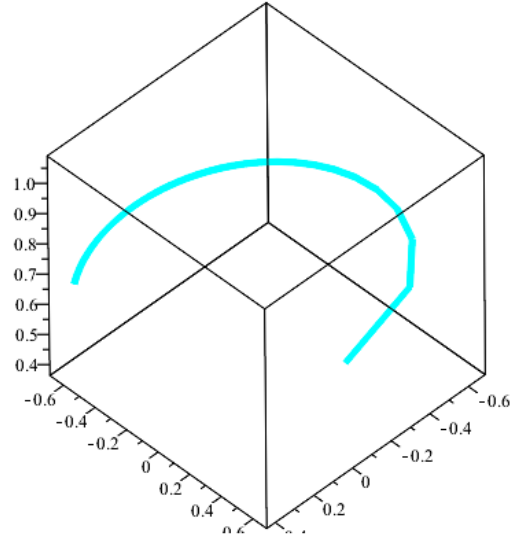


(b) β_{15} eğrisi

Şekil 3.21 β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{15} - esas$ ve β_{15} - Smarandache eğrileri



(a) $\beta_{16} - esas$ eğrisi



(b) β_{16} eğrisi

Şekil 3.22 β ve β^* eğrilerinin binormaller göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\beta_{16} - esas$ ve β_{16} - Smarandache eğrileri

Örnek 3.2.38 Örnek (3.1.22) verilen $\bar{\beta}$ eğrisinin küresel göstergelerine ait Sabban vektörleri

$$\begin{aligned}
 T_1 &= (-\cos(s), -\sin(s), 0), \\
 T_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s), -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \\
 N_1 &= (\sin(s), -\cos(s), 0), \\
 N_2 &= (0, 0, 1), \\
 B_1 &= (\cos(s), \sin(s), 0) \\
 B_2 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. T - teğetler göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
 \bar{\beta}_{5-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + T_1), \\
 \bar{\beta}_{6-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 + T_2), \\
 \bar{\beta}_{7-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T + T_2), \\
 \bar{\beta}_{8-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T + T_1 + T_2)
 \end{aligned} \tag{3.2.140}$$

N -aslinormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{9-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N + N_1), \\
\bar{\beta}_{10-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N_1 + N_2), \\
\bar{\beta}_{11-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N + N_2), \\
\bar{\beta}_{12-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (N + N_1 + N_2)
\end{aligned} \tag{3.2.141}$$

B -binormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{13-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B + B_1), \\
\bar{\beta}_{14-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B_1 + B_2), \\
\bar{\beta}_{15-esas} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B + B_2), \\
\bar{\beta}_{16-esas} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (B + B_1 + B_2)
\end{aligned} \tag{3.2.142}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $\bar{\beta}^*$ Evolüt eğrisinin Sabban vektörleri $\Upsilon(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} + 10$ olmak üzere

$$T_1^* = \left(\begin{array}{c} \frac{(1 - \cos^2(\Upsilon(s)))^2 (\sin(s) \sin^3(\Upsilon(s))) (1 - \cos^2(\Upsilon(s)))^{-\frac{3}{2}}}{\left(\begin{array}{c} 2\cos^4(\Upsilon(s)) (1 + \sin^2(\Upsilon(s))) + \sin^4(\Upsilon(s)) (1 + \cos^2(\Upsilon(s))) \\ + \cos^4(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 2\cos^2(\Upsilon(s)) (1 - 2\sin^2(\Upsilon(s))) + \\ \sin^2(\Upsilon(s)) (1 - 2\cos^2(\Upsilon(s))) - 4\cos^2(\Upsilon(s)) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{-(1 - \cos^2(\Upsilon(s)))^2 (\cos(s) \sin^3(\Upsilon(s))) (1 - \cos^2(\Upsilon(s)))^{-\frac{3}{2}}}{\left(\begin{array}{c} 2\cos^4(\Upsilon(s)) (1 + \sin^2(\Upsilon(s))) + \sin^4(\Upsilon(s)) (1 + \cos^2(\Upsilon(s))) \\ + \cos^4(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 2\cos^2(\Upsilon(s)) (1 - 2\sin^2(\Upsilon(s))) + \\ \sin^2(\Upsilon(s)) (1 - 2\cos^2(\Upsilon(s))) - 4\cos^2(\Upsilon(s)) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{-\sin^2(\Upsilon(s))}{\left(\begin{array}{c} 2\cos^4(\Upsilon(s)) (1 + \sin^2(\Upsilon(s))) + \sin^4(\Upsilon(s)) (1 + \cos^2(\Upsilon(s))) \\ + \cos^4(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 2\cos^2(\Upsilon(s)) (1 - 2\sin^2(\Upsilon(s))) + \\ \sin^2(\Upsilon(s)) (1 - 2\cos^2(\Upsilon(s))) - 4\cos^2(\Upsilon(s)) \end{array} \right)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right)$$

$$T_2^* = \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sqrt{2} \cos(s) \sin(\Upsilon(s)) + \sin(s) \cos(\Upsilon(s))), \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} \sin(s) \sin(\Upsilon(s)) + \cos(s) \cos(\Upsilon(s))), \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\Upsilon(s)) \end{array} \right),$$

$$N_2^* = \frac{(-\sqrt{2}\sin^2(\Upsilon(s)) \sin(s), \sqrt{2}\sin^2(\Upsilon(s)) \cos(s), -\sqrt{2}\sin^2(\Upsilon(s)))}{2\cos^2(\Upsilon(s)) - 1},$$

$$\frac{1}{\Gamma} N_1^* = \left(\begin{array}{l} \pm \sin(s) \sin^{11}(\Upsilon(s)) \cos(\Upsilon(s)) \\ -\sqrt{2} \cos(s) \sin^8(\Upsilon(s)) \cos^2(s) (\Upsilon(s)) (\cos^2(s) (\Upsilon(s)) - 2) \\ + \sin(s) \cos(\Upsilon(s)) \sin^7(\Upsilon(s)) (\cos^2(s) (\Upsilon(s)) - \sin^2(s) (\Upsilon(s))), \\ \mp \sin^9(\Upsilon(s)) \cos(s) \cos(\Upsilon(s)) (\cos(\Upsilon(s)) - 1) \\ -\sqrt{2} \sin(s) \sin^8(\Upsilon(s)) \cos^2(s) (\Upsilon(s)) (\cos^2(s) (\Upsilon(s)) + 1) \\ + \cos(s) \cos^3(\Upsilon(s)) \sin^7(\Upsilon(s)) (\cos^2(s) (\Upsilon(s)) + 1) \\ -\cos^2(s) (\Upsilon(s)) \sin^9(s) (\Upsilon(s)), \\ \pm \sin^{11}(\Upsilon(s)) \cos(\Upsilon(s)) - \sin^9(\Upsilon(s)) \cos(\Upsilon(s)) (1 - \cos(\Upsilon(s))) \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{\Delta} B_1^* = \left(\begin{array}{l} -\cos(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \left(\begin{array}{l} \cos(s) \cos^4(\Upsilon(s)) + 2 \cos(s) \cos^2(\Upsilon(s)) + \cos(s) \\ + \cos(\Upsilon(s)) \sin^3(\Upsilon(s)) \cos(s) \end{array} \right) \\ +\sqrt{2} \cos(s) \cos^3(\Upsilon(s)) (-2\cos^2(\Upsilon(s)) + \sin^2(\Upsilon(s))) \\ +\sqrt{2} \cos(s) \cos(\Upsilon(s)) (\cos^2(\Upsilon(s)) - \sin^2(\Upsilon(s))) \\ +2 \sin(s) \cos^2(\Upsilon(s)) \sin(\Upsilon(s)) (1 - \sin(\Upsilon(s))), \\ \pm \cos(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \sin(s) \sqrt{2} (-\cos^4(\Upsilon(s)) - 2\cos^2(\Upsilon(s)) + 1) \\ \pm \cos^2(\Upsilon(s)) \sin^5(\Upsilon(s)) \cos(s) \\ + \cos(s) \sqrt{2} \left(\begin{array}{l} \cos^6(\Upsilon(s)) + 2\cos^4(\Upsilon(s)) + \cos^2(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \\ + \cos^2(\Upsilon(s)) - \sin^2(\Upsilon(s)) \end{array} \right), \\ -\sin^3(\Upsilon(s)) \cos(\Upsilon(s)) (\mp \cos(\Upsilon(s)) + 2 \cos(\Upsilon(s))) \end{array} \right)$$

$$B_2^* = \left(\begin{array}{l} \frac{-2\cos^{14}(\Upsilon(s)) \sin(s) \sqrt{2} + 2\cos^7(\Upsilon(s)) \cos(s) \sin(\Upsilon(s))}{2\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^5(\Upsilon(s))}, \\ \frac{\cos^8(\Upsilon(s)) \cos(s) \sqrt{2} - \sqrt{2} \cos(s) \cos^2(\Upsilon(s))}{2\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^5(\Upsilon(s))}, \\ \frac{+2\cos^7(\Upsilon(s)) \sin(s) \sin(\Upsilon(s)) - 3\cos^6(\Upsilon(s)) \cos(s) \sqrt{2}}{2\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^5(\Upsilon(s))}, \\ \frac{-4\cos^5(\Upsilon(s)) \sin(s) \sin(\Upsilon(s))}{2\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^5(\Upsilon(s))}, \\ \frac{+3\cos^4(\Upsilon(s)) \cos(s) \sqrt{2} + 2\cos^3(\Upsilon(s)) \sin(s) \sin(\Upsilon(s))}{2\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^5(\Upsilon(s))}, \\ \frac{\sqrt{2} (\cos^6(\Upsilon(s)) - 3\cos^4(\Upsilon(s)) + 3\cos^2(\Upsilon(s)) - 1)}{\sin^5(\Upsilon(s))} \end{array} \right)$$

şeklinde bulunur. Burada Γ ve Δ ifadeleri

$$\begin{aligned}
\Gamma &= 2\cos^6(s) (\Upsilon(s)) \sin^4(s) (\Upsilon(s)) \\
&+ 2\cos^{10}(s) (\Upsilon(s)) - 4\cos^4(s) (\Upsilon(s)) \sin^4(s) (\Upsilon(s)) \\
&+ 2\cos^6(s) (\Upsilon(s)) + 4\cos^8(s) (\Upsilon(s)) \sin^2(s) (\Upsilon(s)) \\
&- 4\cos^8(s) (\Upsilon(s)) + 2\cos^2(s) (\Upsilon(s)) \sin^4(s) (\Upsilon(s)) \\
&+ 2\sin^4(s) (\Upsilon(s)) \cos^2(s) (\Upsilon(s)) - 2\sin^2(s) (\Upsilon(s)) \cos^4(s) (\Upsilon(s)) \\
&\mp 8\cos^6(s) (\Upsilon(s)) \sin^2(s) (\Upsilon(s)) \pm 4\cos^4(s) (\Upsilon(s)) \sin^4(s) (\Upsilon(s)) \\
&\pm 2\sin^2(s) (\Upsilon(s)) \cos^8(s) (\Upsilon(s)) + 4\cos^4(s) (\Upsilon(s)) \sin^2(s) (\Upsilon(s)) \\
&\mp 4\cos^2(s) (\Upsilon(s)) \sin^4(s) (\Upsilon(s)) \\
\Delta &= \left(\begin{aligned}
&12\cos^{10}(\Upsilon(s)) - 8\cos^8(\Upsilon(s)) + 2\cos^6(\Upsilon(s)) + 2\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) \\
&- 12\cos^4(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) + 4\cos^{10}(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 10\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) \\
&- 8\cos^8(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 4\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 2\cos^{14}(\Upsilon(s)) - 8\cos^{12}(\Upsilon(s)) \\
&+ 4\cos^{12}(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) - 16\cos^{10}(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 24\cos^8(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \\
&\pm 24\cos^8(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \mp 16\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \\
&\pm 16\cos^4(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) \pm 4\cos^4(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \\
&\mp 4\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) \mp 4\cos^4(\Upsilon(s)) \sin^6(\Upsilon(s)) \\
&\pm 8\cos^8(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) \mp 16\cos^{10}(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \\
&\pm 4\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^6(\Upsilon(s)) \mp 20\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) \\
&\pm 16\cos^{10}(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \mp 4\cos^4(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \\
&+ 2\cos^{10}(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) - 2\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^6(\Upsilon(s)) \\
&- 8\cos^8(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) + \cos^4(\Upsilon(s)) \sin^6(\Upsilon(s)) \\
&+ 12\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) + \cos^8(\Upsilon(s)) \sin^6(\Upsilon(s)) \\
&- 8\cos^4(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) + 2\cos^2(\Upsilon(s)) \sin^4(\Upsilon(s)) \\
&- 4\cos^6(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + \cos^4(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) \\
&+ \cos^{12}(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) - 4\cos^{10}(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s)) + 6\cos^8(\Upsilon(s)) \sin^2(\Upsilon(s))
\end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

şeklinde birer sayıdır.

T^* Teğetler göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_5^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + T_1^*), \\ \bar{\beta}_6^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1^* + T_2^*), \\ \bar{\beta}_7^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T^* + T_2^*), \\ \bar{\beta}_8^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} (T^* + T_1^* + T_2^*)\end{aligned}\quad (3.2.143)$$

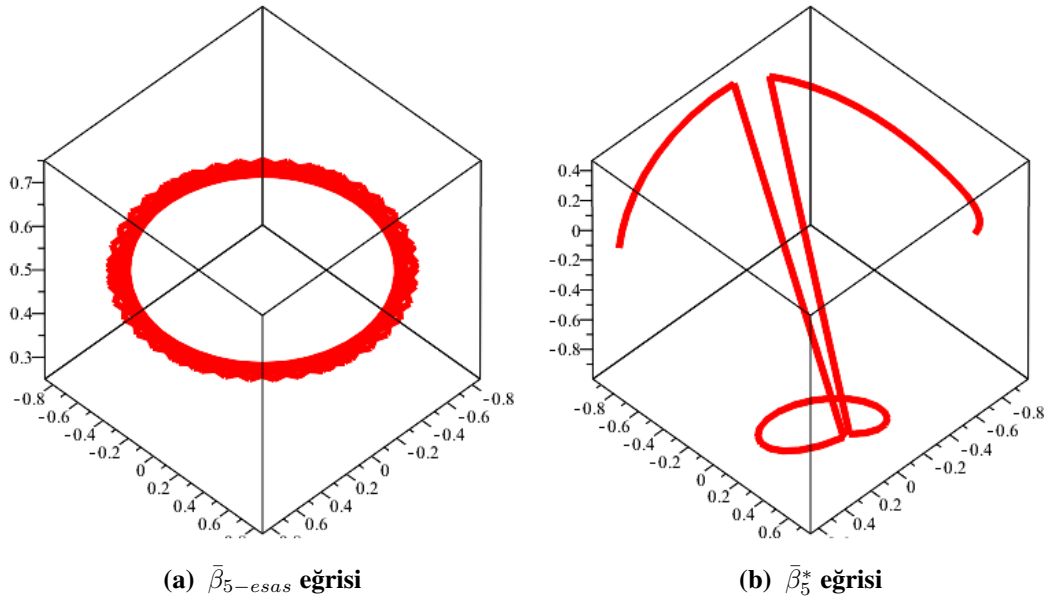
N^* aslinormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_9^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + N_1^*), \\ \bar{\beta}_{10}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N_1^* + N_2^*), \\ \bar{\beta}_{11}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + N_2^*), \\ \bar{\beta}_{12}^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} (N^* + N_1^* + N_2^*)\end{aligned}\quad (3.2.144)$$

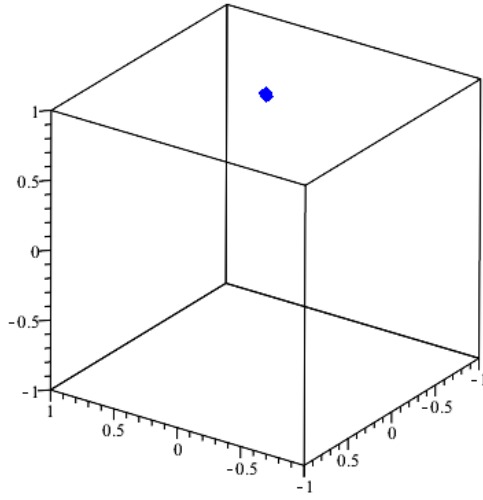
B^* binormaller göstergesinden elde edilen Smarandache eğrileri

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_{13}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B^* + B_1^*), \\ \bar{\beta}_{14}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B_1^* + B_2^*), \\ \bar{\beta}_{15}^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (B^* + B_2^*), \\ \bar{\beta}_{16}^* &= \frac{1}{\sqrt{3}} (B^* + B_1^* + B_2^*)\end{aligned}\quad (3.2.145)$$

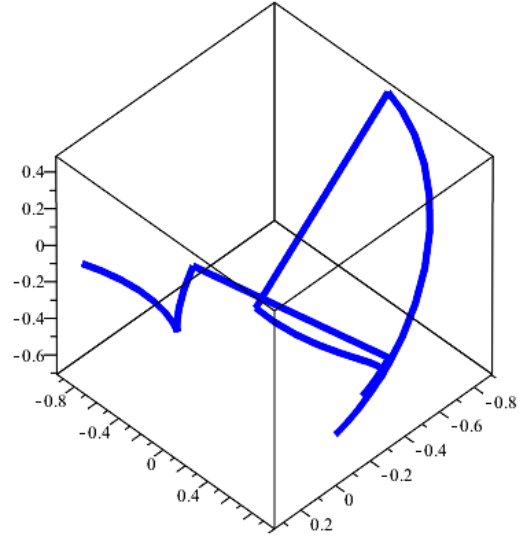
şeklinde tanımlanır. Tanımlanan bu eğrilere ait şekiller aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.23 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ teğetler göstergesinin Sabban çatusından elde edilen $\bar{\beta}_{5-esas}$ ve $\bar{\beta}_5^*$ - Smarandache eğrileri

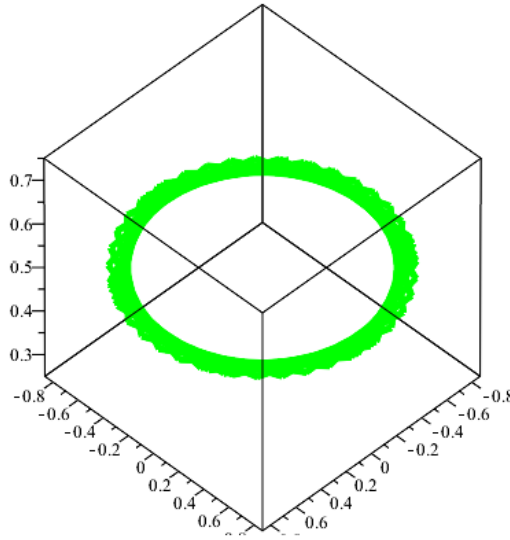


(a) $\bar{\beta}_{6-esas}$ eğrisi

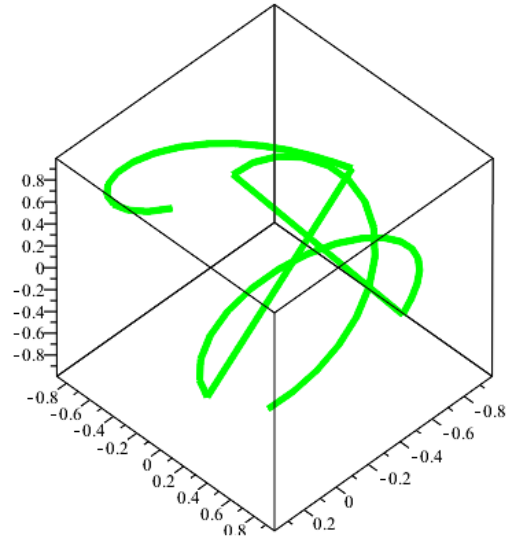


(b) $\bar{\beta}_6^*$ eğrisi

Şekil 3.24 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ tegetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{6-esas}$ ve $\bar{\beta}_6^*$ - Smarandache eğrileri

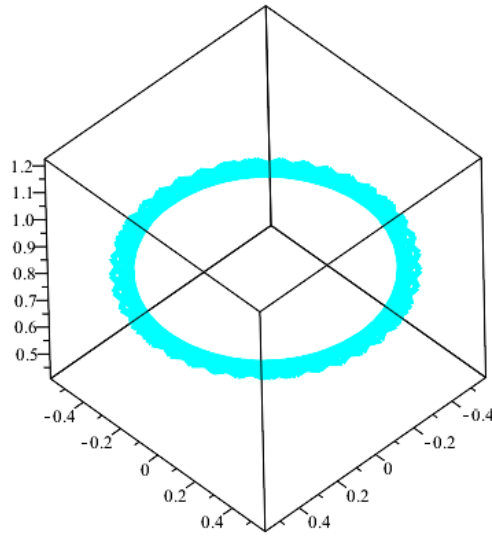


(a) $\bar{\beta}_{7-esas}$ eğrisi

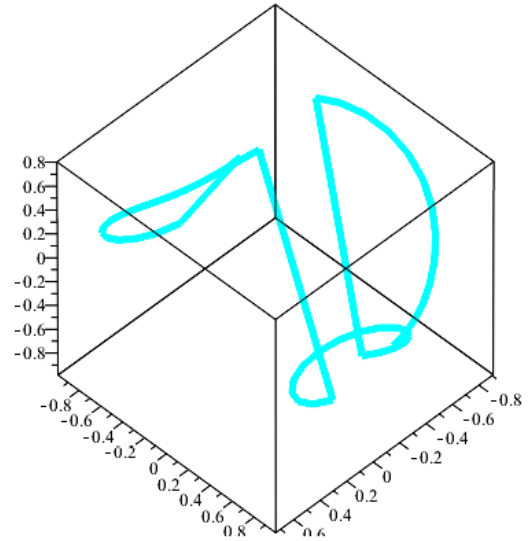


(b) $\bar{\beta}_7^*$ eğrisi

Şekil 3.25 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ tegetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{7-esas}$ ve $\bar{\beta}_7^*$ - Smarandache eğrileri

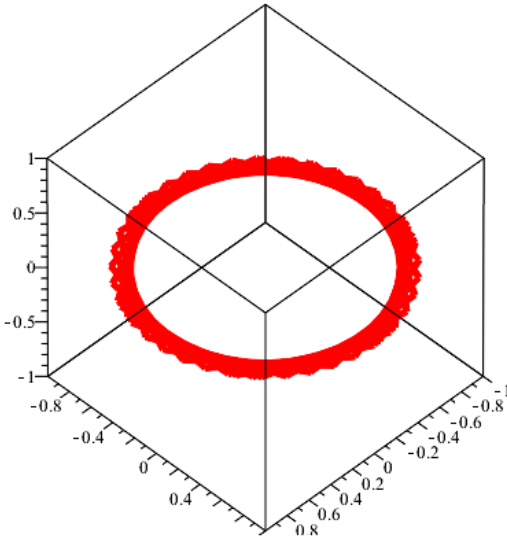


(a) $\bar{\beta}_{8-esas}$ eğrisi

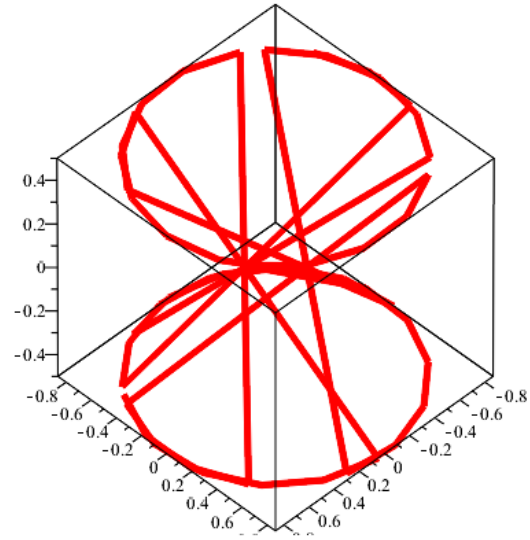


(b) $\bar{\beta}_8^*$ eğrisi

Şekil 3.26 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ teğetler göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{8-esas}$ ve $\bar{\beta}_8^*$ - Smarandache eğrileri

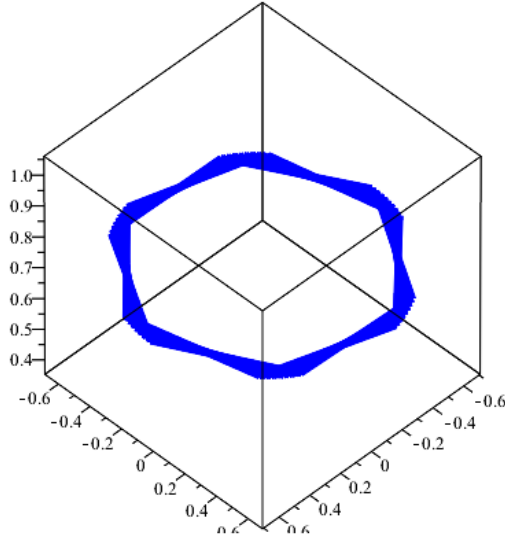


(a) $\bar{\beta}_{9-esas}$ eğrisi

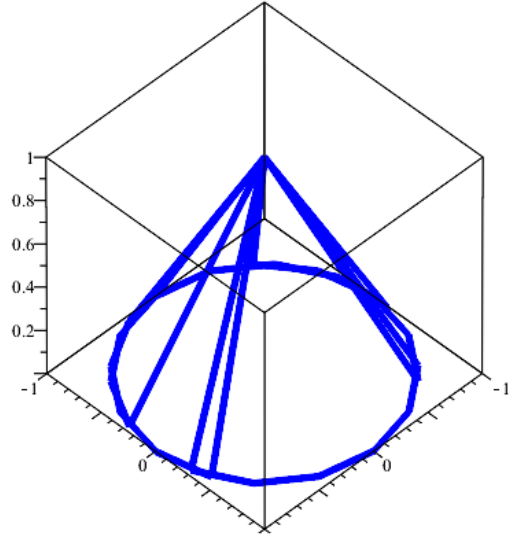


(b) $\bar{\beta}_9^*$ eğrisi

Şekil 3.27 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{9-esas}$ ve $\bar{\beta}_9^*$ - Smarandache eğrileri

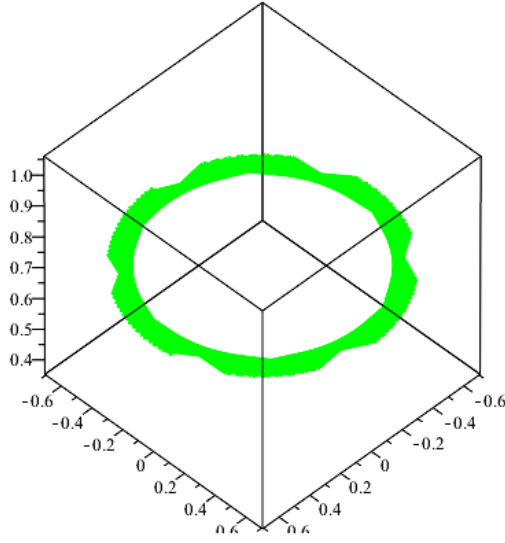


(a) $\bar{\beta}_{10-esas}$ eğrisi

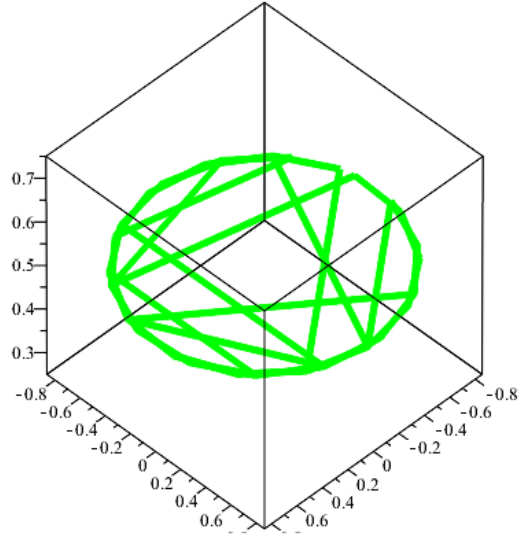


(b) $\bar{\beta}_{10}^*$ eğrisi

Şekil 3.28 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{10-esas}$ ve $\bar{\beta}_{10}^*$ - Smarandache eğrileri

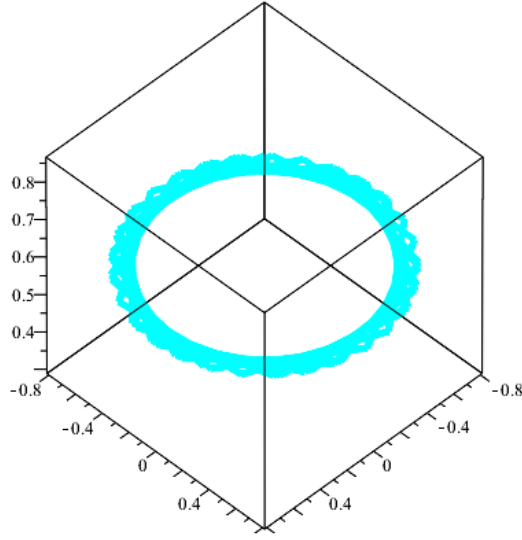


(a) $\bar{\beta}_{11-esas}$ eğrisi

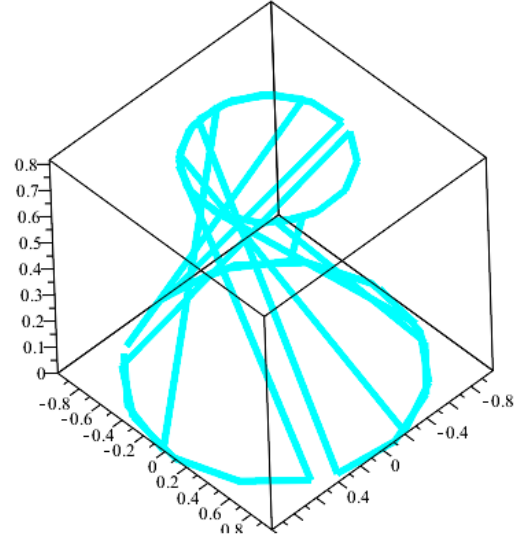


(b) $\bar{\beta}_{11}^*$ eğrisi

Şekil 3.29 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{11-esas}$ ve $\bar{\beta}_{11}^*$ - Smarandache eğrileri

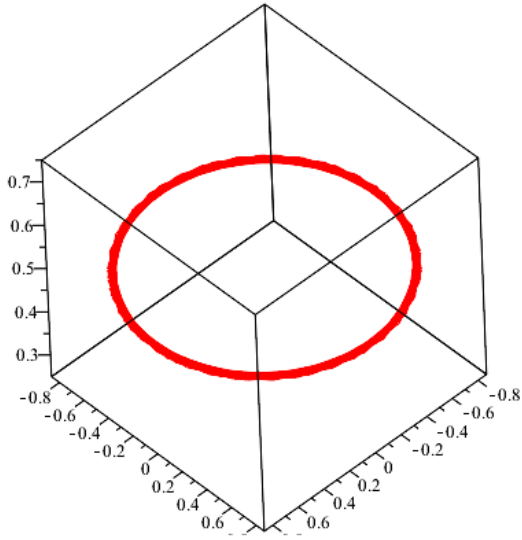


(a) $\bar{\beta}_{12-esas}$ eğrisi

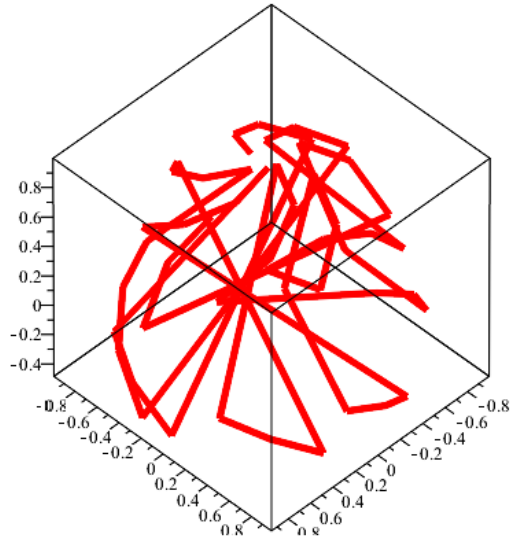


(b) $\bar{\beta}_{12}^*$ eğrisi

Şekil 3.30 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ aslinormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{12-esas}$ ve $\bar{\beta}_{12}^*$ - Smarandache eğrileri

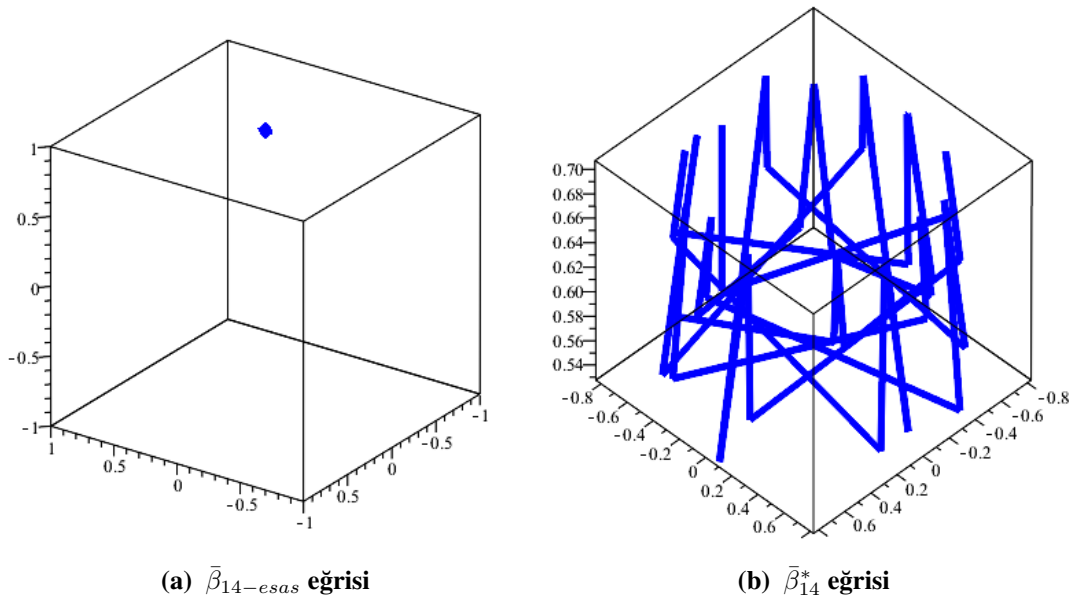


(a) $\bar{\beta}_{13-esas}$ eğrisi

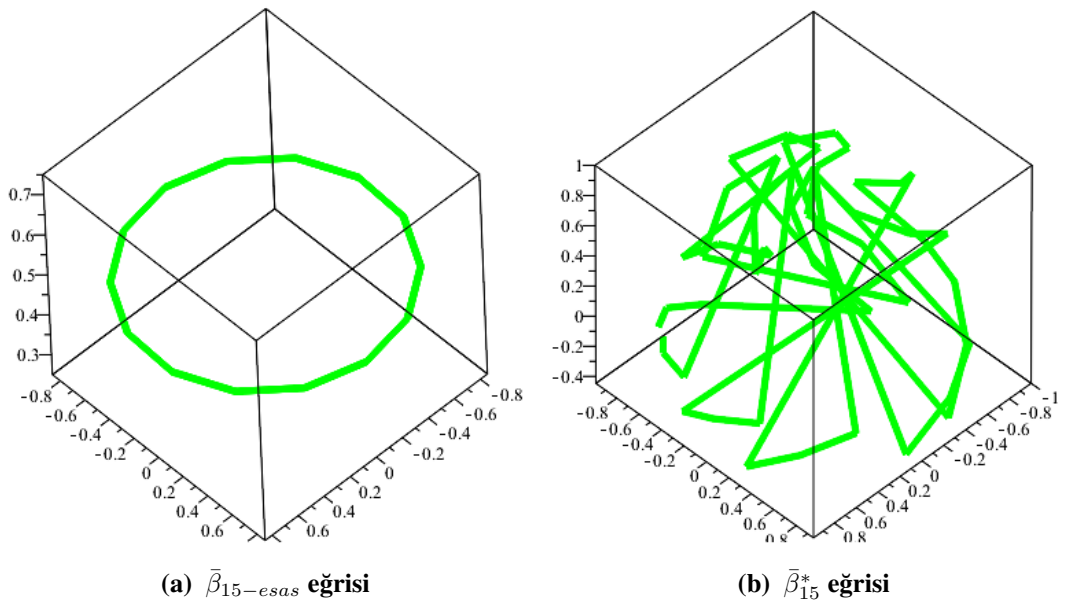


(b) $\bar{\beta}_{13}^*$ eğrisi

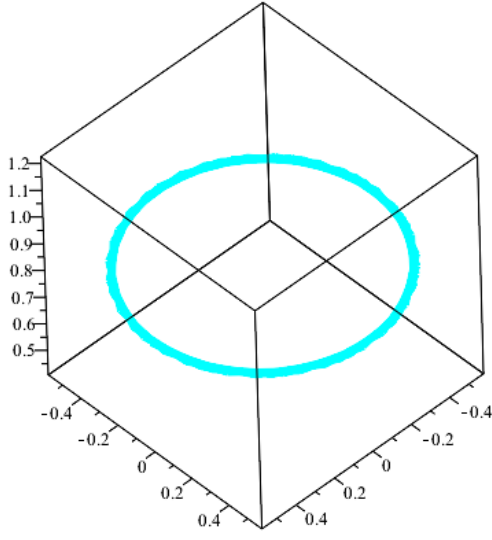
Şekil 3.31 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{13-esas}$ ve $\bar{\beta}_{13}^*$ - Smarandache eğrileri



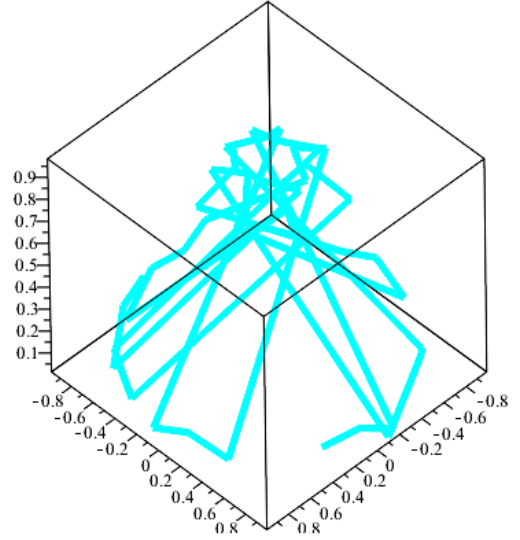
Şekil 3.32 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{14-esas}$ ve $\bar{\beta}_{14}^*$ - Smarandache eğrileri



Şekil 3.33 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{15-esas}$ ve $\bar{\beta}_{15}^*$ - Smarandache eğrileri



(a) $\bar{\beta}_{16-esas}$ eğrisi



(b) $\bar{\beta}_{16}^*$ eğrisi

Şekil 3.34 $\bar{\beta}$ ve $\bar{\beta}^*$ binormal göstergesinin Sabban çatısından elde edilen $\bar{\beta}_{16-esas}$ ve $\bar{\beta}_{16}^*$ - Smarandache eğrileri

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak bir eğrinin evolüt eğrisinin Frenet vektörlerinin oluşturduğu Smarandache eğrileri bulundu ve bulunan her bir eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri ayrı ayrı hesaplanarak esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifade edildi. İkinci olarak evolüt eğrisinin Frenet vektörlerinin birim küre üzerinde çizdikleri küresel gösterge eğrilerine ait Sabban çatıları oluşturuldu ve bu çatılardan Smarandache eğrileri tanımlandı ve her bir eğrinin geodezik eğrilikleri ayrı ayrı hesaplandı. Elde edilen bulgular esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifade edildi. Bu çalışmanın benzerleri olarak;

- i. Successor eğrileri, Viviani eğrisi, Adjoint eğrisi gibi özel eğrilerin evolüt eğrileri tanımlanabilir bu eğrilerden Smarandache eğrileri oluşturulup geometrik özellikleri incelenebilir. Elde edilen özellikler esas eğri ile ilişkilendirilerek aralarındaki bağıntı bulunabilir.
- ii. Yukarıda verilen her bir eğrinin evolüt eğrisine ait Frenet vektörlerinin oluşturduğu küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatıları tanımlanarak Smarandache eğrileri oluşturulabilir. Bu eğrilerin Sabban formülleri, geodezik eğrilikleri hesaplanabilir ve esas eğri ile ilişkileri araştırılabilir.
- iii. Söz konusu eğrilerin vektörel momentleri tanımlanabilir, elde edilen eğrilerden Smarandache eğrileri oluşturulup geometrik özellikler hesaplanabilir ve esas eğri ile ilişkilendirilebilir. Daha sonra bu eğrilerin evolütleri tanımlanarak vektörel momentleri ifade edilebilir ve Smarandache eğrileri oluşturularak Frenet formülleri ve eğrilikleri ayrı ayrı hesaplanabilir. Elde edilen eğrilerden Slant helis, Dairesel helis, Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çifti olan eğriler olup olmadığı araştırılabilir.
- iv. Söz konusu eğriler kullanılarak evolüt eğrilerinin, involüt eğrilerinin ve daha geneli olarak bağlantılı eğrilerden regle yüzeyler tanımlanabilir ve elde edilen yüzeylerin bazı geometrik özellikleri incelenebilir. (Minimal yüzey olma durumu gibi, açılabilir yüzey olma durumu gibi, yüzeyin kapalı olması durumunda integral invaryantlarının araştırılması gibi özelliklere bakılabilir.)

- v. Çatılar değiştirilerek; Bishop çatısı, Alternatif çatı, Modifiye çatı gibi çatılar kullanarak söz konusu çalışmalar tekrar yapılabilir.
- vi. Benzer çalışmalar Minkowski uzayı, Dual uzayı, Lorentz uzayı, Kuarterniyon uzayı gibi uzaylarda da yapılabilir.

5. KAYNAKLAR

- [1] Ali, A.T.(2010).Special Smarandache Curves in the Euclidian Space.*International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 30-36.
- [2] Bektaş, Ö. & Yüce, S. (2013). Special Smarandache curves according to Darboux frame in Euclidean 3-space. *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*, 3(1),48-59.
- [3] Bilici, M. (1999). involüt-evolüt eğrilerinin küresel göstergelerinin geodezik eğrilikleri ve tabii liftleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- [4] Çalışkan, A. & Şenyurt, S. (2015a). Smarandache curves in terms of Sabban frame of spherical indicatrix curves.*General Mathematics Notes* , 31(2),1-15.
- [5] Çalışkan, A. & Şenyurt, S. (2015b). N^*C^* - Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame.*International Journal of Mathematical Combinatorics* , 1,1-13.
- [6] Çalışkan, A. & Şenyurt, S. (2016). Smarandache curves in terms of Sabban frame of fixed pole curve.*Boletim da Sociedade parananse de Mathematica*, 3 srie. 34(2),53-62.
- [7] Hacısalihoğlu, H.H. (1983). Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No.7, Malatya.
- [8] Koenderink, J.,(1990). Solid Shape , Mit Press, Cambridge, MA.
- [9] Liu, H. & Wang, F. (2008). Mannheim partner curves in 3-space. *Journal of Geometry*, 88(1-2) , 120-126.
- [10] Orbay, K. & Kasap, E. (2009). On Mannheim partner curves in E^3 . *International Journal of Physical Sciences*, 4, (5),261-264.
- [11] Özdamar, D. (2012). Üç boyutlu uzayda Mannheim eğri çifti. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyon.
- [12] Özdemir,M.(2020).Diferansiyel Geometri,Altın Nokta Yayınevi,İzmir.
- [13] Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferansiyel Geometri. Nobel Yayınları, 440s.
- [14] Şenyurt, S. (2012). Natural lifts and the geodesic sprays for the spherical indicatrices of the Mannheim partner curves in E^3 . *International Journal of the Physical Sciences*, 7(23),2980-2993.

- [15] Şenyurt, S. & Özgüner, Z. (2013). Bertrand eğri çiftinin küresel göstergelerinin geodezik eğrilikleri ve tabii liftleri.*Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi* , 3(2),58-81.
- [16] Şenyurt, S. & Sivas, S. (2013). Smarandache eğrilerine ait bir uygulama.*Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi* , 3(1),46-60.
- [17] Şenyurt, S. & Sivas, S. (2014). İvolüt evolüt eğrilerine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.
- [18] Şenyurt, S. & Çalışkan, A. (2014). Mannheim eğri çiftine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.
- [19] Şenyurt, S. & Çelik, Ü. (2016). Bertrand eğri çiftine ait Frenet çatısına göre Smarandache eğrileri.Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.
- [20] Şenyurt, S. & Öztürk, B. (2020). Smarandache curves according to the Sabban frame belonging to spherical indicatrix curve of the Salkowski curve.*Tbilisi Math. J.* 13(3), 111 - 131
- [21] Taşköprü, K., (2013). 3- boyutlu Öklid uzayında Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- [22] Taşköprü, K. & Tosun, M. (2014). Smarandache curves according to Sabban frame on S^2 .*Boletim da Sociedade parananse de Mathematica* 3 srie, 32(1),51-59.
- [23] Turgut, M. & Yılmaz, S. (2008). Smarandache curves in Minkowski space-time. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3,51-55.