T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENEL LİNEER MODEL VE KISITLAMALI MODELLERİ ALTINDA PARAMETRE FONKSİYONLARININ TAHMİNLERİNİN EŞİTLİKLERİ ÜZERİNE

YILDIZ SÖNMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

YILDIZ SÖNMEZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GENEL LİNEER MODEL VE KISITLAMALI MODELLERİ ALTINDA PARAMETRE FONKSİYONLARININ TAHMİNLERİNİN EŞİTLİKLERİ ÜZERİNE

YILDIZ SÖNMEZ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 66 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve genel bilgiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde genel lineer model ve onun kısıtlamalı modelleri altında parametre fonksiyonlarının alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) gözönüne alınmıştır. Ayrıca genel model altındaki tahmin ediciler ile onun kısıtlamalı modeli altındaki tahmin edicilerin eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmistir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris, Rank, Genelleştirilmiş İnvers, Lineer Model, Kısıtlamalı Model, Kovaryans Matrisi, Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici.

ABSTRACT

ON EQUALITIES OF ESTIMATIONS OF PARAMETRIC FUNCTIONS UNDER THE GENERAL LINEAR MODEL AND ITS RESTRICTED MODELS

YILDIZ SÖNMEZ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 66 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in five parts. In the first chapter, an introduction is given by mentioning the purpose of the study. In the second part, the basic definitions, theorems and general information that will be required in our study are expressed. In the third section, the ordinary least squares estimator (OLSE), the best linear unbiased estimator (BLUE) of parametric functions under a general linear model and its restricted models are considered. Also, some necessary and sufficient conditions are investigated for equalities of estimators of parametric functions under a general linear model and of estimations of parametric functions under its restricted models. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Rank, Generalized Inverse, Linear Model, Constrained Linear Model, Covariance Matrix, Ordinary Least Squares Estimator, Best Linear Unbiased Estimator.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve tüm çalışmalarım boyunca her zaman üstün bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Cismi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Cismi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Cismi
$\boldsymbol{K_n^m}, \boldsymbol{K^{mxn}}$	: K Cismi Üzerinde Tanımlı $m \times n$ Boyutlu Tüm Matrislerin Kümesi
I_n	: $n \times n$ Boyutlu Birim Matris
$\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{A^T}$	: A Matrsinin Tranzpozu
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Ek Matrisi
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A Matrisinin Determinantı
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A Matrisinin İnversi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Rankı
$\boldsymbol{A}^{\perp}$	: A Matrisinin Ortogonal Komplementi
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Sıfır Uzayı
$\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Ranj (Sütun) Uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$	: A Matrisinin Genelleştirilmiş İnversi (İç İnversi)
$\boldsymbol{A}^{+}$	: A Matrisinin Moore-Penrose İnversi
$\boldsymbol{OLSE}(\boldsymbol{\beta})$	: β Parametresinin Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi
$\boldsymbol{BLUE}(\boldsymbol{\beta})$	: β Parametresinin En İyi Lineer Yansız Tahmin Edicisi
$\lVert\boldsymbol{u}\rVert$	: u Vektörünün Öklid Normu
$\boldsymbol{boy}(\mathbf{u})$	: u Vektörünün Boyutu
$\boldsymbol{min}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$	: a ve b Sayılarının Minimumu
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{V})$	: a Ortalamalı ve V Varyanslı Normal Dağılım
$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial z}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$	: $f(z)$ Fonksiyonunun Türevi
$\boldsymbol{\sigma^2 V}$	: Kovaryans Matrisi
$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X})$	: X Değişkeninin Kovaryansı
$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$	: X ve Y Değişkenleri Arasındaki Kovaryans
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$	: X Değişkeninin Beklenen Değeri
$\boldsymbol{var}(\boldsymbol{X})$	: X Değişkeninin Varyansı

1. GİRİŞ

Matrisler ve matris inversleri üzerine inşa edilen lineer modeler ve çeşitli uygulamaları bugün teorik matematik, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda oldukça önemli hale gelmiştir. Matris hesabı ise uzun yıllardan beri bilinmekte ve kullanılmaktadır. Matris kavramı ilk kez İngiliz matematikçi Sylvester tarafından 1850 yılında kullanmıştır. 1853 yılında yine bir ingiliz bilgini olan Hamilton '*Lineer and Vector Functions'* isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış ama matris ismini henüz kullanmamıştır. Bir diğer ingiliz matematikçi Cayley ise 1858 yılında zamanında meşhur olan *'Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonra Fransız Laguerre ve Flman Frobenius matrislerle ilgili bazı yeni kavramlar ve teoremler üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Singüler bir matrisin inversi fikri ise ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak ta ki 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında ise, önceki yıllarda yapılan çalışmalardan tamamen bağımsız olarak, Penrose (1955, 1956) biraz daha farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aşağı yukarı aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından Rao (1965) tarafından tanımlanan ve geliştirilen Pseuda invers ise Moore ve Penrose tarafından verilen kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Rao, daha sonraki çalışmalarında lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olan ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha da zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g-invers) olarak adlandırılmış ve bunun çeşitli uygulamaları Rao (1965)' nun çeşitli çalışmalarında yer almıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili önemli gelişmeler ve bunların uygulamaları 1971 yılında basılan *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* isimli kitapta verilmiştir.

Matris denildiğinde ilke akla gelen bir matrisin rankı ve inversi kavramlarıdır. Matris rankı ile ilgili bilinen bir gerçek şudur: Aynı mertebeden iki A ve B matrisinin benzer olması, yani $UAV = B$ olacak şekilde iki tersinir U ve V matrisinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart A ve B matrislerinin ranklarının eşit olmasıdır. Bir matrisin sütunlarının ya da satırlarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, verilen matrisin elementer matris işlemler yardımıyla satır veya sütun eşelon formlara indirgenmesidir. Herhangi bir matris ifadesi için, bu ifade ile ilgili çeşitli rank eşitlikleri kurulabilir ve bu rank eşitliklerinden yararlanılarak verilen ifadenin bazı temel özellikleri ortaya konulabilir. Pek çok rank formülleri ise çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri yardımıyla türetilebilir. Bu formüllerden en sık kullanılanları ve bu tez de de sık sık başvurulacak olan bazı rank eşitlikleri aşağıda sıralanmıştır:

i. $r\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$

ii. $r\begin{bmatrix} I_m & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix},$

iii. $r\begin{bmatrix} A & AB \\ BA & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A - ABA & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$

Son zamanlarda yapılan çalışmalarda blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri kullanılarak pekçok yeni ve önemli rank eşitlikleri verilmiş ve bu rank eşitliklerinden birçok önemli sonuç türetilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı önemli tanımlar ve teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1 K keyfi bir cisim olsun. K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane lineer denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ 1 \le i \le m$$

şeklinde tanımlanır. Burada, x_j, $1 \le j \le n$ ler bilinmeyenler, a_{ij}, $1 \le i \le m$ ler bilinen katsayılar ve b_i ler ise reel sayılardır. Bu denklem sistemi daha açık olarak

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots.. + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots.. + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots.. + a_{mn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots.. + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots.. + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots.. + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılır (Hacısalihoğlu,1977).

Tanım 2.2

i. K cisim olsun. $m,n \in \mathbb{N}$ ve $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile gösterilsin.

$$f : A \to K \ , \ (i, j) \to f(i, j) = a_{ij}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu takdirde $a_{ij} \in K$ olacak şekilde seçilen $m.$n tane elemanın oluşturduğu bir tabloya K cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde matris denir. Eğer $K = \mathbb{R}$, yani reel sayılar kümesi olarak alınırsa bu takdirde matrise bir reel matris, $K = \mathbb{C}$, yani kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa bu takdirde matrise bir kompleks matris adı verilir (Branson R., 1999). Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

matrisi kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı A matrisinin $i-$yinci satır ve $j-$yinci sütununa karşılık gelen elemanıdır. K cismi üzerinde seçilen bütün $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrislerin kümesi $K^{m \times n}$ veya K_n^m ile gösterilir.

ii. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ aynı boyutlu iki matris olsun. Eğer her bir (i, j) için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrislerine birbirine eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir.

iii. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrisinin her bir a_{ij} elemanı sıfır ise, bu takdirde A matrisine bir sıfır matris denir ve $A = 0$ ile gösterilir.

iv. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ aynı boyutlu matrisler olmak üzere $A + B$ matrisi

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

v. K cismi üzerinde $k \in K$ bir skaler sayı olmak üzere $kA \in K_n^m$ matrisi

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

vi. $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times p}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{p \times n}$ olmak üzere A ve B matrislerinin çarpımı

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Açıkca görüleceği üzere çarpımın tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı eşit olmalıdır. Bu şartlar altında çarpım matrisi $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.3

i. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde eğer $m = n$ ise bu durumda A matrisine bir kare matris denir. Bu durumda A matrisindeki $a_{11},\ a_{22},.........,a_{nn}$ elemanlarına da bu matrisin köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii. Köşegen elemanları 1 ve diğer tüm elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve birim matris I_n şeklinde gösterilir.

iii. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde aynı numaralı satır ve sütunların yer değiştirilmesi ile elde edilen $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu denir. Bu durumda uygun boyuttan matrisler için $(A+B)^T = A^T + B^T$ ve $(A.B)^T = B^T A^T$ eşitlikleri sağlanır.

iv. A bir kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris adı verilir.

Teorem 2.1 A, B ve C bir K cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ boyutlu matrisleri ve $k_1, k_2 \in K$ skaler sayısı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

i. $(A+B)+C = A+(B+C)$

ii. $A+0=0$

iii. $A+(-A)=0$

iv. $A+B=B+A$

v. $k_1(A+B)=k_1A+k_2A$

vi. $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$

vii. $(k_1k_2)A=k_1(k_2)A$

viii. $1A=A$ ve $0A=0$

Tanım 2.4 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri için $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skaler sayıları bulunuyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır, aksi halde lineer bağımsızdır denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.5 A matrisi $m\times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$vektörü için $Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. Bu durumda A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen bütün vektörlerin oluşturduğu kümeye A matrisinin sütun uzayı veya ranj uzayı denir ve $\Re(A)$ ile gösterilir. $\Re(A)$, A matrisinin sütunları tarafından gerilir ve sütun uzayı

$$\Re(A) = \{y \in \mathbb{R}^{m\times 1} : y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$$

ile ifade edilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.6 A matrisinin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$ in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\Re(A')$ olarak gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 A matrisi $m \times n$ boyutlu ve C matrisi, A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C matrisinin satır uzayı aynıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.7 Bir matrisinin sütun uzayının boyutuna matrisin sütun rankı ve satır uzayının boyutuna da matrisin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırların sayısına ise matrisin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.3 A matrisi $m \times n$ boyutlu matris olsun. A matrisinin satır rankı, sütun rankına eşittir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.4 Uygun boyutlu A, B ve C matrisleri için aşağıdaki ifadeler doğrudur (Hacısalihoğlu H.H., 1977):

i. $\Re(A:B) = \Re(A) + \Re(B)$,

ii. $\Re(AB) \subseteq \Re(A)$,

iii. $\Re(AA') = \Re(A)$,

iv. $\Re(C) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow C$ matrisi AB biçimindedir.

v. $boy(\Re(A)) = r(A)$,

vi. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ için $r(A) \le \min\{m, n\}$,

vii. Bir matrisin bazı satır ya da sütunlarının silinmesiyle elde edilen alt matrisin rankı, orijinal matrisin rankını geçemez,

viii. $r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$.

Teorem 2.5 A_1 ve A_2 tersi olan matrisler ise, bu durumda herhangi bir A_3 matrisi için A_3, A_1A_3 , A_3A_2 ve $A_1A_3A_2$ matrisleri aynı ranka sahiptir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.8 Eğer $P^2 = P$ olacak şekilde bir P matrisi varsa P matrisine idempotent matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.9 A matrisinin sıfır uzayı

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Eğer $AB = I$ ise, B matrisine A matrisinin sağ inversi denir ve bu invers B^{-R} ile gösterilir. A matrisine ise B matrisinin sol inversi denir ve bu invers A^{-L} ile gösterilir. A matrisinin sağ inversi ancak A matrisi tam satır ranklı olduğu zaman mevcut olacaktır. Benzer şekilde B matrisinin sol inversi B matrisi tam sütun ranklı olduğunda mevcut olacaktır. Buna göre sağ invers veya sol invers tek olmayabilir. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ üçgensel matris olmak üzere, rank şartları gösterir ki, $m > n$ olduğunda sağ invers olmayabilir ve $m < n$ olduğunda da sol invers mevcut olmayabilir. Bu nedenle her iki inversin de mevcut olması için gerek ve yeter şart A matrisinin bir kare matris ve tam ranklı olmasıdır. Bu durumda matrisin sağ inversi ile sol inversi birbirine eşit olacaktır ve bu matrise, nonsingüler A matrisinin inversi denir ve A^{-1} ile gösterilir. O halde A matrisinin mevcut ve tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisi nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dır. Eğer A ve B matrislerinin her ikisi de nonsingüler ve aynı boyutlu ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olacaktır.

Herhangi bir A matrisi için $ABA = A$ ise bu takdirde B matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi denir ve A matrisinin genelleştirilmiş inversi A^{-} şeklinde gösterilir. Öte yandan eğer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ise bu takdirde $A^{-} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ olacaktır. Bu durumda her matrisin en az bir genelleştirilmiş tersi mevcuttur denilebilir. Aynı şekilde herhangi bir simetrik matrisin en az bir simetrik genelleştirilmiş tersi mevcut olacaktır. Ancak genel olarak, bir A matrisinin A^{-} genelleştirilmiş inversi tek değildir. A^{-} matrisinin tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin nonsingüler olmasıdır ve bu durumda $A^{-} = A^{-1}$ olacaktır. Herhangi bir A matrisi için,

i. $ABA = A$

ii. $BAB = B$

iii. $(AB)' = AB$

iv. $(BA)' = BA$

koşullarını sağlayan, B matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi (inversi) denir ve A^{+} ile gösterilir. Bu durumda bir matrisin Moore-Penrose inversi tektir. Eğer A matrisi tersi alınabilir bir matris ise bu durumda $A^{+} = A^{-1}$ dir.

Teorem 2.6 A, B ve C uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

i. $\left(A^{+}\right)^{+} = A$

ii. AA^{+} ve $A^{+}A$ idempotenttir.

iii. $r(A) = r\left(A^{+}\right) = r\left(AA^{+}\right) = r\left(A^{+}A\right),$

iv. $A'AA^{+} = A' = A^{+}AA'$ ve $A'\left(A^{+}\right)' A^{+} = A^{+} = A^{+}\left(A^{+}\right)' A',$

v. $A = 0 \Leftrightarrow A^{+} = 0,\ AB = 0 \Leftrightarrow B^{+}A^{+} = 0$ ve $A^{+}B = 0 \Leftrightarrow A'B = 0,$

vi. $r(A) = r\left(A^{-}A\right) = r\left(AA^{-}\right) \le r\left(A^{-}\right),$

vii. $BA^{-}C,\ A$ matrisinin genelleştirilmiş tersinin seçimine göre değişmez kalır ancak ve ancak $\Re(B') \subseteq \Re(A')$ ve $\Re(C) \subseteq \Re(A)$ dır.

viii. $A^{-}A$ ve AA^{-} matrislerinin her ikisi de idempotent matrislerdir. Eğer A matrisi simetrik ve idempotent matris ise bu takdirde $I - A$ matrisi de simetrik ve idempotent bir matris olacaktır.

Tanım 2.10 $A = (a_{ij})$ matrisi $n \times n$ boyutlu bir kare matris olmak üzere A matrisinin determinantı $|A|$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

i. $n = 1$ için $|A| = a_{11},$

ii. $n = 2$ için $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$

iii. $n > 2$ için

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i}\,|A_{1i}|$$

dir, burada A_{1i}, $(1,i)$. minördür.

Teorem 2.7 A matrisi köşegen elemanları $a_{11},.......,a_{nn}$ olan $n\times n$ boyutlu matris olmak üzere, A matrisi üst üçgensel veya alt üçgensel ya da köşegen bir matris ise bu durumda $|A| = a_{11}a_{12}........a_{nn}$ olacaktır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Sonuç 2.1

i. A matrisi tersinir bir matris olmak üzere $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$ dir.

ii. I birim matris olmak üzere $|I| = 1$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.8 A ve B aynı mertebeden kare matrisler olmak üzere $|AB| = |A||B|$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.11 $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için, $Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$ ifadesine, y_i elemanlarının bir kuadratik formu ve A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. Bu durumda $y'Ay$ kuadratik formu, simetrik bir A matrisi tarafından karakterize edilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Böyle bir matris için aşağıdakiler söylenebilir.

i. Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.

ii. Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif tanımlıdır.

iii. Eğer $\forall y$ için $y'Ay \geq 0$ ise A nonnegatif tanımlıdır.

Sonuç 2.2 Eğer $f(z) = z'Az$ bir kuadratik form, z bir $m \times 1$ tipinde vektör ve A matrisi $m \times m$ tipinde herhangi bir simetrik matris ise, bu takdirde

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = 2Az$$

olacaktır.

Teorem 2.9 A matrisinin nonnegatif tanımlı ve r ranklı bir matris olabilmesi için gerek ve yeter şart $A = RR'$ olacak şekilde r ranklı bir R matrisinin mevcut olmasıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

3. GENEL LİNEER MODEL VE KISITLAMALI MODELDE TAHMİN

3.1 Lineer Modelin Oluşumu

Y gözlemlerin $n \times 1$ mertebeli bir vektörü (rasgele vektör), X $n \times$ p $(n <$ p$)$ mertebeli bir bilinen katsayı matrisi, β $p\times 1$ mertebeli bir bilinmeyen parametre vektörü ve $E(\varepsilon)=0$, $Cov(\varepsilon)=\Sigma$ olmak üzere ε $n \times 1$ tipinde rasgele değişkenlerin gözlenebilir olmayan bir vektörü olsun. Bu durumda bu değişkenler arasında

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

biçiminde varsayılan bir bağıntıya bir lineer model veya lineer regresyon modeli denir. Bu model bazı özel durumlara sahiptir. Bu özel durumlar, ε rasgele vektörünün dağılımına ve kovaryans matrisine ya da X matrisinin yapısına ve rankına bağlı olarak ortaya çıkar. Aksi belirtilmedikçe, $r(X) = p$ olduğunu kabul edilecektir, başka bir deyişle modelimizdeki X katsayı matrisi tam sütun ranklı bir matris olacaktır, ε hata vektörünün dağılımı hakkında ise üç durum göz önüne alınabilir:

1. Durum: $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$

2. Durum: ε bilinmeyen bir dağılıma sahip olup $E(\varepsilon)$=0 ve $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ dır.

3. Durum: $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V$ dir, burada V bilinen pozitif definit bir matristir.

Birinci durumda her bir ε_i rasgele değişkeni 0 ortalamalı, bilinmeyen σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip olup ε_i , $i = 1,2,3,\dots,N$, ler kendi aralarında bağımsızdır. İkinci durumda, her bir ε_i nin beklenen değeri sıfır ise, ε_i ler ilişkisiz ve ε_i ler bilinmeyen ortak σ^2 varyansına sahiptirler. Birinci ve üçüncü durumdaki varsayımlar altındaki modele bir Gauss-Markov modeli denir. İkinci durumdaki modele ise bazen en küçük kareler modeli adı verilir. Ayrıca eğer hata terimi bir normal dağılıma sahip ise bu durumda modellere hipotez modelleri de denilmektedir.

$Y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelinde $X\beta$ vektörüne modelin deterministik kısmı, Y ve ε vektörlerine ise modelin stokastik kısmı adı verilir. Y vektörü bağımlı değişken, tepki değişkeni veya açıklanan değişken adı verilen bir rastgele değişken ile ilgili gözlemler vektörüdür. X matrisine tasarım matrisi, açıklayıcı değişkenlerin matrisi, bağımlı değişkenlerin gözlem matrisi gibi isimler verilmektedir, ε vektörüne ise hata vektörü denilmektedir. Gerçek yaşamda olayların lineer modeller yardımıyla modellenmesi çalışmalarında $Y,\ X\ ,\beta$ ve ε değişkenleri değişik şekillerde anlamlandırılmaktadır. Örneğin bazı modellerde Y üretim miktarı, bazılarında boy uzunluğu, bazılarında ağırlık ve bazılarında da bir ekonomik değişken olabilir.

β_0 hızı ile hareketine başlayan β_1 ivmesiyle doğrusal hareket eden bir cismin zamana bağlı olarak aldığı yol $S = \beta_0 + \beta_1 t$ formülü ile verilebilir. Bu şekilde hareket eden bir cismin hızını ve ivmesini bilmek ve daha sonra belli bir zamanda aldığı yol miktarını belirlemek istediğimizi farzedelim. Bu durumda keyfi olarak seçtiğimiz $t_i\ , i = 1,2,\ldots,N,$ zamanlarında yol uzunluklarını gözlemlemeye kalkıştığımızda ölçümlerde yapılacak olan hatalardan dolayı $S_i\ , i = 1,2,\ldots N,$ gözlemleri için $S_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \varepsilon_i$ gibi bir model düşünmemiz daha uygun görünmektedir. Bu durumda

$$Y = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}_{N\times 1} ,\quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{t}_1 \\ 1 & \mathrm{t}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{t}_N \end{bmatrix}_{N\times 2} ,\quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N\times 1} ,\quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

gösterimleri altında yukarıda belirtilenler,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde bir lineer model olarak ifade edilmektedir. Bu modelde eğer Y gözlem vektöründeki gözlemleri veren açıklayıcı ya da bağımlı değişkeni Y harfi, X matrisinin ikinci sütunundaki gözlemler ile ilgili bağımsız değişkeni X harfi ve hatayı da ε harfi ile gösterirsek bu değişkenler arasındaki bağıntı

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

olarak da ifade edilebilir.

Bir diğer örnek olarak, belli bir cins meyvedeki meyve suyu miktarını bu meyvenin ağırlığına bağlı olarak incelemek istediğimiz varsayalım. Gerçekte bir meyvedeki meyve suyu miktarı sadece meyvenin ağırlığına bağlı değildir, ama ağırlık ile meyvedeki meyve su miktarı arasında bir fonksiyonel bağıntının varlığını kabul ederek, gözlemlerin bunu doğrulayıp doğrulamadığını, gözlemlerden çıkarılan bir bağıntının bulunmasını ve bunların neticesinde de ağırlığa bağlı olarak meyvedeki meyve su miktarını tahmin etmek isteyebiliriz.

Bu örnekte açıklayıcı değişken olan meyvenin ağırlığı ve açıklanan değişken olan meyve suyu miktarı birer rasgele değişken olacaktır. Bu durumda eğer ağırlığı X ile ve meyve suyu miktarını da Y ile gösterirsek X ve Y değişkenlerinin bir ortak dağılımı söz konusu olacaktır. Bu durumda $E\left(Y \middle| X = x\right) = g\left(x\right)$ ifadesine Y nin X üzerindeki bir regresyon denklemi denildiğini ve X ve Y değişkenlerinin ortak dağılımının normal dağılım olması durumunda bunun

$$E\left(Y \middle| X = x\right) = g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

şeklinde verildiğini hatırlatalım. Bu takdirde $\left(X, Y\right)$ iki boyutlu rastgele değişkeninin ortak dağılımından N birimlik örneklem, (X_i, Y_i) , $i = 1,2, \ldots, N,$ olmak üzere

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \,,\, i = 1,2, \ldots, N, \;\; \varepsilon_i \sim \left(0, \sigma^2 I\right)$$

veya

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{N\times 1}, \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{X}_1 \\ 1 & \mathrm{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{X}_N \end{bmatrix}_{N\times 2}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N\times 1}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

matris gösterimleri altında

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

modeline basit lineer regresyon modeli adı verilir. Öte yandan X ve Y rasgele değişkenleri arasında bir ortak dağılım düşünülmeden sadece Y bağımlı değişkeni ile ilgili gözlemlere dayalı olarak,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \; i = 1, 2, \ldots\ldots, N,$$

biçiminde bir ifade söz konusu olduğunda ise modele basit lineer model denir.

Öte yandan meyvenin ağırlığı olan X değişkeni ile meyvedeki meyve suyu miktarı olan Y değişkeninin ortak dağılımı normal dağılım olmayabilir. Bizim buradaki amacımız X değişkeninin gözlenen değerlerine bağlı olarak Y değişkeninin gözlenen değerini tahmin etmek olduğuna göre

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \; i = 1, 2, \ldots\ldots, N,$$

biçiminde bir lineer modeli ele almak çok daha uygun olacaktır. Bu durumda ε hata terimi, birinci örnekteki yol uzunluğunun ölçülmesi sırasında oluşan hataya benzer bir hata içermekle birlikte, X değişkeninin belli bir değeri için Y değişkenindeki rastgeleliği ve ayrıca modelin belirlemesindeki hatayı da içerecektir.

Bir lineer modelde eğer açıklayıcı değişken sayısı birden fazla ise bu modele bir çoklu lineer model (multiple linear model) denir. Bir lineer modelde eğer bağımlı değişken sayısı birden çok ise bu durumda da modele birçok değişkenli model (multivariate model) adı verilir. Sıcaklık ve basıncın, sertlik üzerindeki etkisinin bir fonksiyon biçimindeki bir bağıntı ile ifade edilip edilemeyeceği, bu bağıntının biçiminin ne olacağı veya sıcaklık ile basınç değişkenlerinin sertliği ne derece de etkileyip etkilemediği gibi sorunlar ilk olarak metalürji biliminin sorunları gibi gözükmektedir. Metalürji biliminin kanunlarına göre sıcaklık ve basıncın sertlik üzerindeki etkisi tam olarak belirlenmiş olabilir veya bağıntı biçimsel olarak belirlenmiş ancak içinde bilinmeyen katsayılar mevcut ya da aralarında bir bağıntı var ama ne olduğu belirlenmemiş olabilir. İlk durumda istatistikçinin yapacağı fazla bir şey kalmamıştır. Belki de sadece belirlenmiş olan modelin geçerliliğinin sınanmasında yardımcı olabilir. İkinci ve üçüncü durumlarda ise istatistikçiye önemli görevler düşmektedir. Amaç belirlendikten sonra, örneğin bu amaç hangi sıcaklık ve basınç altında malzemenin sertliği maksimum seviyede olmaktadır şeklinde olabilir, gözlemlerin alınacağı en uygun deney tasarımının seçilmesi ve daha sonra bir istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması istatistik biliminin önemli bir sorunudur.

Bir diğer örnek olarak belirli bir sebze türünün verimini incelemek istediğimizi varsayalım. Şüphesiz verim, toprak ve hava ile ilgili birçok tabiat özelliğinin yanında sulama, gübreleme, toprağı işleme gibi bazı dış etkenlere de bağlıdır. Bu nedenle modelleme sırasında, çok karmaşık olan gerçek hayattaki ilişkilerden bazılarını ihmal ederek, verim miktarı (Y) için, toplam yağış miktarı (X_1), sıcaklık ortalaması (X_2), gübre miktarı (X_3) ve birim metrekaredeki bitki sayısı (X_4) değişkenlerine bağlı olarak,

$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + X_4\beta_4 + \varepsilon$$

biçiminde bir modelin geçerli olduğu varsayılacaktır. Bu durumda gerek model geçerliliğinin sınanması ve gerekse geçerli bir modelde açıklayıcı değişkenlerin etkilerinin yani parametrelerin tahmin edilmesi amacıyla yapılacak araştırmada veri toplama işlemi uygulamada pek de kolay olmayacaktır. Bu durumda modeldeki yağış miktarı ve sıcaklık ortalaması ile ilgili açıklayıcı değişkenler birer rasgele değişken olmasına rağmen gübre miktarı ile ilgili açıklayıcı değişken bir deterministik değişken olarak görülebilir. Bu nedenle açıklayıcı değişkenlerin birer rasgele değişken olup olmamasına bakılmaksızın, bundan sonra açıklayıcı değişkenler ile ilgili X matrisini gözlem değerlerinin bir matrisi veya başka bir deyişle sabitlerin bir matrisi olarak düşünmek daha makul olacaktır.

3.2 Basit Lineer Modellerde Parametre Tahmini

Şimdi bir denemenin n kez tekrarlandığını ve aşağıdaki verinin elde edildiğini varsayalım.

Gözlem Numarası	y tepkimesi	$X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_p$ açıklayıcı değişkenleri
1	y_1	$\boldsymbol{x}_{11} \quad \boldsymbol{x}_{12} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{1p}$
2	y_2	$\boldsymbol{x}_{21} \quad \boldsymbol{x}_{22} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$
n	y_n	$\boldsymbol{x}_{n1} \quad \boldsymbol{x}_{n2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{np}$

Bu durumda modelin

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

olduğunu kabul edersek ve gözlemlerin n- lilerinin aynı modele işleyeceği de kabul edilirse bu durumda onlar arasında

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_p x_{1p} + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_p x_{2p} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_p x_{np} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntı sağlanır. Bu takdirde bu n tane denklemden oluşan sistem matris formunda

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Genel olarak, p sayıda bağımsız değişkene sahip basit lineer model

$$y = X\beta + \varepsilon$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n})'$ inceleme değişkeni üzerinde n sayıda gözlemden oluşan $n \times 1$ tipinde bir vektördür.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

p sayıda açıklayıcı değişkenin her birisi üzerinde n sayıda gözlemin bir $n \times p$ matrisidir. $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)'$ regresyon katsayılarının bir $p \times 1$ vektörü olup $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)'$ ise rasgele hata bileşenlerinin veya hata teriminin $n \times 1$ tipinde bir vektörüdür. Eğer regresyon sabiti mevcut ise, X in birinci sütunu $(1,1, \dots ,1)'$ olur. İstatistiksel sonuçları ortaya koymak için $y = X\beta + \varepsilon$ modelinde bazı ilave varsayımlara ihtiyaç duyulur. Bu varsayımlar regresyon katsayıları için tahmin edicinin istatistiksel özelliklerini vermek için kullanılır ve aşağıdaki gibi sıralanabilir:

(i) $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0.$

(ii) $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n.$

(iii) $r(X) = p$

(iv) X stokastik (rasgele) olmayan bir matristir.

(v) $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n).$

Regresyon katsayı vektörünün tahmini için bir genel yöntem, uygun şekilde seçilen bir M fonksiyonu için,

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} M(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} M\left(y_i - x_{i1}\beta_1 - x_{i2}\beta_2 - \cdots - x_{ip}\beta_p\right)$$

ifadesini minimumlaştırmaktır. Böyle bir M fonksiyonunun seçiminin bazı örnekleri $M(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$, $M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ veya daha genel olarak $M(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|^p$ şeklindedir. Bu durumda parametrelerin tahmini için $M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ ile ilgili olan en küçük kareler yöntemi göz önüne alınacaktır. Tüm β vektörlerinin kümesini B ile gösterelim. Eğer özel bir ek bilgi verilmezse, B kümesi $k-$boyutlu reel öklid uzayında olacaktır. Amacımız ε_i hatalarının karelerinin toplamını, yani, verilen y ve X için,

$$S(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\varepsilon'\varepsilon=(y-X\beta)'(y-X\beta)$$

ifadesini minimum yapan B de bir $b'=(b_1,b_2,\dots,b_p)$ vektörü bulmaktır. Bu takdirde $S(\beta)$ reel değerli, konveks ve türevlenebilir bir fonksiyon olduğunda, bir minimum daima mevcut olacaktır. Bunun için

$$S(\beta)=y'y+\beta'X'X\beta-2\beta'X'y$$

yazılır ve $S(\beta)$ nın β ya göre türevleri alınırsa Sonuç 2.2 ye göre

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial\beta}=2X'X\beta-2X'y$$

$$\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial\beta^2}=2X'X$$

yazılabilir. Bu durumda normal denklemimiz

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial\beta}=0\ \Rightarrow X'X\beta=X'y$$

şeklindedir. Öte yandan $r(X)=p$ olduğu kabul edildiğinden dolayı $X'X$ matris pozitif tanımlı olur, ki bu durumda normal denklemin yegane çözümü

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$$

dir ki bu β nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) olarak adlandırılır. X matrisinin tam ranklı olmadığı durumda ise, $(X'X)^{-}$ matrisi $X'X$ matrisinin bir genelleştirilmiş inversi ve ω keyfi bir vektör olmak üzere

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-}X'y+[I-(X'X)^{-}X'X]\omega$$

olacaktır.

X matrisinin tam sütun ranklı olduğu kabulü altında bilinen bir V pozitif definit matrisi için $E(\varepsilon)=0$ ve $Cov(\varepsilon)=\sigma^2V$ olarak dikkate alındığında elde edilen normal denklemlere karşılık gelen $X'V^{-1}X\beta=X'V^{-1}y$ normal denkleminin yegane çözümü olan

$$\tilde{\beta}=(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$$

tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler edicisi olarak adlandırılır.

Teorem 3.1

i. $\hat{y} = X\hat{\beta}$; y vektörünün deneysel tahmin edicisi olsun. Bu takdirde $\hat{y}$; $X'X\beta = X'y$ nin tüm β çözümleri için aynı değere sahip olacaktır.

ii. $S(\beta)$; $X'X\beta = X'y$ nin herhangi bir çözümü için minimuma ulaşır (Rao, 1973).

İspat. i. b paramatresi

$$b = (X'X)^{-} X'y + \left[I - (X'X)^{-} X'X\right]\omega$$

daki herhangi bir eleman olsun. Bu takdirde $X(X'X)^{-} X'X = X$ olduğundan,

$$Xb = X(X'X)^{-} X'y + X\left[I - (X'X)^{-} X'X\right]\omega = X(X'X)^{-} X'y$$

olur ki bu ifade ω ya bağlı değildir. Bu ise, $\hat{y}$ nın $X'Xb = X'y$ nin her b çözümü için aynı değere sahip olacağını gösterir.

iii. Herhangi β için,

$$\begin{aligned}
S(\beta) &= [y - Xb + X(b-\beta)]'[y - Xb + X(b-\beta)] \\
&= (y - Xb)'(y - Xb) + (b-\beta)'X'X(b-\beta) + 2(b-\beta)'X'(y - Xb) \\
&= (y - Xb)'(y - Xb) + (b-\beta)'X'X(b-\beta) \\
&\geq (y - Xb)'(y - Xb) = S(b) \\
&= y'y - 2y'Xb + b'X'Xb \\
&= y'y - b'X'Xb \\
&= y'y - \widehat{y}'\hat{y}
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Eğer $y = X\beta + \varepsilon$ modeli için, $\widehat{\beta}$ tahmini β nın herhangi bir tahmin edicisi ise, bu takdirde uydurulan değerler $\hat{y} = X\hat{\beta}$ olarak tanımlanır. Bu durumda $\hat{\beta}$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $\hat{\beta}$ nın tahmin hatası

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'y - \beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

şeklindedir.

(ii) Yanlılık: X in rasgele olmadığı kabul edildiğinden ve $E(\varepsilon) = 0$ olduğundan,

$$E(\widehat{\beta} - \beta) = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) = 0$$

olacaktır. Yani alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi aslında β nın bir yansız tahmin edicisi olacaktır.

(iii) $\hat{\beta}$ nın kovaryans matrisi $Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$ olacaktır.

Teorem 3.2 (Gauss – Markov Teoremi) Alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi aynı zamanda β nın en iyi lineer yansız tahmin edicisidir (Rao, 1973).

İspat. β nın OLSE si y nin bir lineer fonksiyonu olan

$$b = \left(X'X\right)^{-1} X'y$$

olsun. Ayrıca a nın elemanları keyfi sabitler olmak üzere, $l'\beta$ lineer parametrik fonksiyonunun bir $b^* = a'y$ keyfi lineer tahmin edicisini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$E\left(b^*\right) = E\left(a'y\right) = a'X\beta$$

yazılabilir ve bu nedenle

$$E\left(b^*\right) = a'X\beta = l'\beta \Rightarrow a'X = l'$$

olduğunda, b^* aynı zamanda $l'\beta$ için bir yansız tahmin edicidir. Biz çalışmalarımızda sadece lineer ve yansız olan tahmin edicileri ele almak istediğimizden kendimizi $a'X = l'$ için olan tahmin edicilere sınırlayabiliriz. Öte yandan

$$Var\left(a'y\right) = a'Var\left(y\right)a = \sigma^2 a'a$$

ve

$$Var\left(l'b\right) = l'Var\left(b\right)l = \sigma^2 a'X\left(X'X\right)^{-1} X'a$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda

$$Var(a'y) - Var(l'b) = \sigma^2[a'a - a'X(X'X)^{-1}X'a]$$

$$= \sigma^2 a'(I - H)a$$

eşitliği göz önüne alınırsa $\left(I - H\right)$ matrisi bir pozitif yarı tanımlı matris olduğundan

$$Var\left(a'y\right) - Var\left(l'b\right) \geq 0$$

dır. Bu durum, eğer b^* herhangi bir lineer yansız tahmin edici ise, bu takdirde varyansının b nin varyansından daha küçük olmaması gerektiğini ortaya koyar. Sonuç olarak "en iyi b" sıfatı b nin lineer yansız tahmin ediciler arasında etkin olduğu belirtmek üzere, b en iyi lineer yansız tahmin edicidir.

3.3 Genel Lineer Model Altında Parametre Tahmini

Genel lineer modeller altında değişik tahmin edicilerin karakterize edilmesinde matris rank metotlarının kullanılması oldukça önem arzetmektedir.

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2 V, \tag{3.1}$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım, burada $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametredir. (3.1) modeli genellikle

$$M = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} \tag{3.2}$$

şeklinde gösterilir. Burada (3.1) modelinin tutarlı olduğu yani bir çözüme sahip olduğu varsayılacaktır. Bunun için 1 olasılıkla

$$y \in \Re[X, V] \tag{3.3}$$

olmalıdır. Eğer V matrisi singüler bir matris ise (3.1) modeline singüler lineer model veya singüler Gauss-Markov modeli de denir. β ve $X\beta$ parametrelerinin (3.2) ile verilen genel lineer modeli altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki gibi verilebilir:

i. β parametresinin (3.2) genel lineer modeli altındaki OLSE tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = argmin(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta)'(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta) \tag{3.4}$$

dir. Bu durumda $X\beta$ nın (3.2) genel lineer modeli altındaki OLSE tahmin edicisi ise

$$OLSE_M(X\beta) = \widehat{X\beta} = X.OLSE_M(\beta) = X.\hat{\beta}$$

olacaktır.

ii. $X\beta$ nın (3.2) genel lineer modeli altındaki BLUE tahmin edicisi, $BLUE_M(X\beta)$ ile gösterilir, bir Gy lineer tahmin edicisi olarak tanımlanır. Öyle ki E(Gy) = $X\beta$ ve $X\beta$ nin (3.2) modeli altındaki diğer herhangi bir yansız lineer tahmin edicisi Ly ise bu takdirde $Cov(Ly) - Cov(Gy)$ farkı nonnegatif definittir.

P_A, Q_A ve F_A matrisleri sırasıyla

$$P_A = AA^+, Q_A = I - P_A = I - AA^+ \text{ ve } F_A = I - P_{A'} = I - A^+A$$

ortoganal izdüşümlerini göstersin.

(3.4) bağıntısı ile ilgili normal denklem $X'X\beta$=$X'y$ şeklinde olup bu denklemin çözümü aşağıdaki iyi bilinen sonuçtur.

Lemma 3.1 (3.2) modeli altında β ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE tahmin edicileri $v \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ keyfi bir vektör olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$OLSE_M(\beta) = (X'X)^{+}X'y + (I - X^{+}XX)v = X^{+}y + F_X v \tag{3.5}$$

$$OLSE_M(X\beta) = XOLSE_M(\beta) = XX^{+}y = P_X\, y. \tag{3.6}$$

Öte yandan (3.2) modeli altında $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicisi aşağıdaki lemma da verilmiştir (Rao, 1973).

Lemma 3.2 Bir Gy tahmin edicisinin (3.2) modeli altında $X\beta$ nın bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart G matrisinin

$$G[X, VE_X] = [X, 0] \tag{3.7}$$

lineer matris denklemini sağlamasıdır (Marsaglia ve Styan, 1974).

Bu denklem tutarlıdır, başka bir deyişle, $\mathfrak{R}([X, 0]) \subseteq \mathfrak{R}([X, VE_X])$, veya buna denk olarak,

$$[X\ ,0][X, VE_X]^{+}[X, VE_X] = [X, 0]$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durumda (3.7) denkleminin genel çözümü, $P_{X\|V}$ ile gösterilir, $U \in \mathbb{R}^{nxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{X\|V} = [X, 0][X, VE_X]^{+} + UE_{[X, VE_X]}, \tag{3.8}$$

ve $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_M(X\beta) = P_{X\|V}y \tag{3.9}$$

şeklindedir. Ayrıca $\{P_{X\|V}\}$ ve $\{BLUE_M(X\beta)\}$ ile sırasıyla tüm $P_{X\|V}$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicilerinin ailesini gösterelim.

Lineer modellerle ilgili çalışmalarda (3.2) modelindeki X matrisinin tam sütun ranklı matris ve V kovaryans matrisinin de pozitif definit matris olduğu durum en sık rastlanılan durumdur. Bu durumda, (3.2) modeli altında, β ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki standart formda tek türlü olarak yazılabilir:

$$OLSE_M(\beta) = (X'X)^{-1}X'y\,, \qquad OLSE_M(X\beta) = X(X'X)^{-1}X'y, \tag{3.10}$$

$$BLUE_M(\beta) = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y\,,\; BLUE_M(X\beta) = X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y. \quad (3.11)$$

Burada (3.2) altında β ve $X\beta$ için verilen bu tahmin edicilerin dördü de yansızdır.

Eğer $X = [X_1, X_2]$ blok parçalanmış matrisindeki X_1 ve X_2 alt matrisleri ortogonal ise, başka bir deyişle $X_1'X_2 = 0$ ise, bu takdirde (3.10) ifadesindeki $(X'X)^{-1}X'$ ve $X(X'X)^{-1}X'$ matrisleri sırasıyla

$$(X'X)^{-1}X' = \begin{bmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1' \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'\end{bmatrix}$$

ve

$$X(X'X)^{-1}X' = X_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1 + X_2(X'_2X_2)^{-1}X'_2 \quad (3.12)$$

olarak yazılabilir. Buna paralel olarak (3.10) daki $OLSE_M(\beta)$ ve $OLSE_M(X\beta)$ tahmin edicileri de sırasıyla

$$OLSE_M(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1'y \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OLSE_M(\beta) \\ OLSE_M(\beta)\end{bmatrix} \quad (3.13)$$

ve

$$OLSE_M(X\beta) = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y + X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y \quad (3.14)$$

olarak yazılabilir.

Öte yandan eğer $X = [X_1, X_2]$ blok parçalı matrisindeki X_1 ve X_2 alt matrisleri V^{-1}- orthogonal, yani $X_1'V^{-1}X_2 = 0$ ise, bu takdirde (3.11) deki $(X'V^{-1}X)^{-1}\,X'V^{-1}$ ve $X(X'V^{-1}X)^{-1}\,X'V^{-1}$ matrisleri sırasıyla

$$(X'V^{-1}X)^{-1}\,X'V^{-1} = \begin{bmatrix}(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1} \\ (X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1}\end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ve

$$X(X'V^{-1}X)^{-1}\,X'V^{-1} = X_1(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1} + X_2(X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1} \quad (3.16)$$

şeklinde parçalanabilir. Buna paralel olarak (3.11) ifadesinde verilen $BLUE_M(\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla

$$BLUE_M(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1}y \\ (X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1}y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}BLUE_{M_1}(\beta_1) \\ BLUE_{M_2}(\beta_2)\end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

ve

$$BLUE_M(X\beta) = X_1(X_1'V^{-1}X_1)^{-1}X_1'V^{-1}y + X_2(X_2'V^{-1}X_2)^{-1}X_2'V^{-1}y$$

$$= BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2) \quad (3.18)$$

şeklinde ayrıştırılabilir.

(3.17) ve (3.18) ifadelerinin sağ taraflarındaki gösterim

$$(X_i'V^{-1}X_i)^{-1}X_i'V^{-1}y \text{ ve } X_i(X_i'V^{-1}X_i)^{-1}X_i'V^{-1}y$$

tahmin edicilerinin (3.3) modeli altında β_i ve $X_i\beta_i$, i =1,2 parametrelerinin BLUE tahmin edicilerinin sembolik gösterimi anlamındadır, bununla birlikte bu tahmin ediciler (3.1) modeli altında β_i ve $X_i\beta_i$, i =1,2 parametrelerinin BLUE tahmin edicileri olamaz.

Kolaylıkla gösterilebilir ki (3.13), (3.14), (3.17) ve (3.18) eşitliklerinde verilen ayrışımlar, ortogonallik varsayımları altında $OLSE_M(\beta)$, $OLSE_M(X\beta)$, $BLUE_M(\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicilerinin hesaplanmasına dönüştürülebilir. Ayrıca bu ayrışımlar bu tahmin edicilerin çeşitli istatistiksel özelliklerinin türetilmesinde de kullanılabilir. Örneğin, (3.13), (3.14), (3.17) ve (3.18) ifadelerinde verilen $OLSE_{M_i}(\beta)$, $OLSE_{M_i}(X_i\beta_i)$, $BLUE_{M_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicileri $X_1'X_2 = 0$ veya $X_1'V^{-1}X_2 = 0$, i =1,2 varsayımları altında β_i ve $X_i\beta_i$ için yansız tahmin edicilerdir. OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin bu ayrışımı dikkate alınarak, (3.2) ifadesinde verilen M genel lineer model altında da OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin muhtemel ifadelerini gözönüne almak ilginç olacaktır.

(3.6) ve (3.9) de verilen Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren $OLSE_M(X\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicilerini gözönüne alalım. (3.13), (3.14), (3.17) ve (3.18) ifadelerinin (3.6) ve (3.9) daki tahmin ediciler için kullanılması bazı kritik matris işlemleri içerecektir. Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren değişik matris ifadelerini sadeleştirmek için Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren bir dizi değişik rank formüllerine ihtiyaç duyulmaktadır. Parçalı matrisler için aşağıdaki rank formülleri Marsaglia & Styan (1974) tarafından verilmiştir.

Lemma 3.3 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{1\times k}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

i. $r[A, B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A)$,

ii. $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$,

iii. $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C)$,

iv. $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r\begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ CF_A & D - CA^+B \end{pmatrix}$,

v. Eğer $\Re(B) \subseteq \Re(A)$ ve $\Re(C') \subseteq \Re(A')$ ise bu takdirde

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^+B)$$

eşitlikleri vardır. Özel olarak

vi. $r[A, B] = r(A) \Leftrightarrow E_A B = 0 \Leftrightarrow \Re(B) \subseteq \Re(A)$,

vii. $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow CF_A = 0 \Leftrightarrow \Re(C') \subseteq \Re(A')$,

viii. $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \Re(B) \subseteq \Re(A),\ \Re(C') \subseteq \Re(A')$ ve $D = CA^+B$

ix. $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(B) + r(C) \Leftrightarrow BU_1 + U_2C = A$ lineer matris denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilirdir.

ifadeleri yazılabilir. Diğer taraftan

$$r\left(B - AA^+B\right) \geq r\left(B\right) + r\left(AA^+B\right) = r\left(B\right) - r\left(A'B\right) \quad (3.19)$$

olduğu kolaylıkala gösterilebilir. Bu nedenle

$$r\left[A, B\right] \geq r\left(A\right) + r\left(B\right) - r\left(A'B\right) \quad (3.20)$$

eşitsizliği yazılabilir. Üstelik

$$\Re(B) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow AA^+B = B$$

$$\Leftrightarrow r[A, B] = r(A),$$

$$\Re(A_1) = \Re(A_2)$$

ve

$$\Re(B_1) = \Re(B_2) \Rightarrow r[A_1, B_1] = r[A_2, B_2]$$

ifadeleri de verilebilir (Marsaglia ve Styan, 1974).

Lemma 3.4 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi verilmiş olsun ve $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisleri A matrisinin dış inversleri, yani $Z_i A Z_i = Z_i,\ i = 1,2,3,$ olsun. Ayrıca $\Re(Z_i) \subseteq \Re(Z_1)$ ve $\Re(Z_i') \subseteq \Re(Z_1')$ içermelerinin sağlandığı varsayılsın. Bu takdirde

$$r(Z_1 - Z_2 - Z_3) = r(Z_1) - r(Z_2) - r(Z_3) + r(Z_2 A Z_3) + r(Z_3 A Z_2) \quad (3.21)$$

eşitliği sağlanır (Rao, 1973).

İspat: Elementer blok matris işlemleri altında bir matrisin rankının değişmediğini daha önce ifade emiştik. Bu nedenle elementer blok matris işlemleri uygulanırsa

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_1 - Z_2 - Z_3 \end{bmatrix}$$

$$= r\left(Z_1 - Z_2 - Z_3\right) + r\left(Z_1\right) + r\left(Z_2\right) + r\left(Z_3\right) \quad (3.22a)$$

eşitliğinin yazılabileceği kolaylıkla gösterilebilir. Diğer taraftan Lemma 3.4 de verilen şartlar altında elementer matris blok matris işlemleri ile

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & Z_1 A Z_2 & Z_1 A Z_3 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & 0 & -Z_2 A Z_3 & 0 \\ 0 & -Z_3 A Z_2 & 0 & 0 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r\left(Z_1\right) + r\left(Z_2 A Z_3\right) + r\left(Z_3 A Z_2\right) \quad (3.22b)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan (3.22a) ve (3.22b) eşitlikleri birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 3.6 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ve $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$\max_{Z \in R^{k\times 1}} r\left(A - BZC\right) = \min\left\{ r\left[A, B\right], r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.23)$$

$$\min_{Z \in R^{k\times 1}} r\left(A - BZC\right) = r\left[A, B\right] + r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

eşitlikleri sağlanır. Bir özel durum olarak

$$BZC = A \text{ tutarlıdır } \Leftrightarrow r\left[A, B\right] = r\left(B\right) \text{ ve } r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(C) \tag{3.25}$$

ifadesi yazılabilir (Rao, 1973).

3.4 Genel Lineer Modelde Parametre Fonksiyonlarının Tahminlerinin Eşitliği

Bu kısımda genel lineer model altında parametre fonksiyonlarının tahmini incelenecektir. Bunun için, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ keyfi ranklı non-negatif definit bilinen bir matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametre olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta,\ cov(y) = \sigma^2 \mathrm{V},$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayılsın ve bu model kısaca

$$M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} \tag{3.26}$$

şeklinde gösterilsin. Bu model altında $K \in \mathbb{R}^{k\times p}$ olmak üzere $K\beta$ şeklindeki bir lineer parametrik fonksiyonun tahminini göz önüne alınacaktır.

Tanım 3.1 Eğer $E(Ly + c) = K\beta$ yani $LX\beta + c = K\beta$ olacak şekilde bir L matrisi ve c vektörü bulunabilirse $K\beta$ parametre vektörüne (3.26) modeli altında tahmin edilebilir denir. Bu durumda $Ly + c$ lineer tahmin edicisi $K\beta$ için yansız lineer tahmin edicidir denir.

Benzer şekilde eğer $E(Ly) = K\beta$ yani $LX\beta = K\beta$ olacak şekilde bir L matrisi bulunabilirse $K\beta$ parametre vektörüne (3.26) modeli altında homojen olarak tahmin edilebilir denir. Bu durumda Ly lineer tahmin edicisi $K\beta$ için bir homojen olarak yansız lineer tahmin edicidir denir (Tian ve Ark., 2008).

Lemma 3.5 (3.26) da verilen modelin tutarlı olduğunu varsayalım ve $L_1y + c_1$ ve $L_2y + c_2$ lineer tahmin edicileri $K\beta$ için yansız lineer tahmin ediciler olsun, yani $E(L_1y + c_1) = E(L_2y + c_2) = K\beta$ olsun. Bu takdirde $L_1y + c_1 = L_2y + c_2$ tahmin edicilerinin 1 olasılıkla eşit olması için gerek ve yeter koşul $L_1V = L_2V$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Tian, 2010).

Verilen bir $K\beta$ parametre vektörü için onun tahmin edilebilirliği ile ilgili olarak iki problem hemen akla gelir. Birincisi $K\beta$ (homojen olarak) tahmin edilebilir olması çin gerek ve yeter şartların belirlenmesi. Ikincisi ise eğer $K\beta$ (homojen olarak) tahmin edilebilir ise $E(Ly + c) = K\beta$ (veya $E(Ly) = K\beta$) olacak şekildeki L matrisi ve c vektörünün genel ifadelerinin verilmesi. Eğer β parametre vektörü serbest değişken olarak alınırsa $LX\beta = K\beta$ eşitliği $LX = K$ ve $c = 0$ olmasına denk olacaktır. Bu ise $K\beta$ nın tahmin edilebilir olabilmesi için gerek ve yeter şartın $\Re(K') \subseteq \Re(X')$ olduğu anlamına gelir. Bu durumda L matrisinin genel ifadesi U keyfi bir matris olmak üzere $L = KX^+ + U(I - XX^+)$ ile verilir.

Teorem 3.3 (3.26) da verilen modelin tutarlı olduğunu yani $y \in \Re(X{:}\,V)$ olduğunu farz edelim. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

a. $Ly + c$ lineer tahmin edicisi $K\beta$ için yansız lineer tahmin edicidir.

b. L, K ve c matrisleri için

$$r\begin{pmatrix} X & V & y \\ K - LX & 0 & c \end{pmatrix} = r(X{:}\,V)$$

rank eşitliği sağlanır.

c. L, K ve c matrisleri için

$$\Re(\,[LX - K{:}\,0]') \subset \Re(\,[X{:}\,V]') \text{ ve } [LX - K{:}\,0][X{:}\,V]^+y = c$$

durumları sağlanır.

d. L, K ve c matrisleri için

$$L[X{:}\,0]\ (I - [X{:}\,V]^+[X{:}\,V]) = [K{:}\,0]\ (I - [X{:}\,V]^+[X{:}\,V])$$

ve

$$[LX - K{:}\,0][X{:}\,V]^+y = c$$

eşitlikleri sağlanır (Isotalo ve Puntanen, 2009).

Daha önce de ifade edildiği gibi bir Gy lineer istatistiğinin $K\beta$ tahmin edilebilir parametre fonksiyonu için bir en iyi lineer yansız tahmin edici, yani BLUE, olması için $cov(Gy)$ kovaryans matrisinin bir minimum olması gereklidir. Bu durumda Gy lineer istatistiğinin $K\beta$ tahmin edilebilir parametre fonksiyonu için bir en iyi lineer yansız tahmin edici olabilmesi için gerek ve yeter koşul G matrisinin

$$G(X{:}\,VX^{\perp}) = (K{:}\,0) \tag{3.27}$$

matris denklemini sağlaması gerektiğini hatırlayalım (bakınız, e.g., Rao, 1973, p.282). Ayrıca $K\beta$ nın BLUE si için açık gösterimler (3.27) eşitliğinden elde edilebilir. Örneğin U matrisi $\Re(W) = \Re(X{:}\,V)$ olacak şekilde keyfi bir matris olmak üzere eğer $W = V + XUX'$ ise, bu takdirde $K\beta$ nın BLUE si

$$BLUE_{M_\beta}(K\beta) = \widetilde{K\beta} = K(X'W^{-}X)^{-}X'W^{-}y \tag{3.28}$$

şeklinde yazılabilir. Buna karşılık olarak $K\beta$ nın OLSE si

$$OLSE_{M_\beta}(K\beta) = \widehat{K\beta} = K\hat{\beta} = K(X'X)^{-}X'y \tag{3.29}$$

şeklinde yazılabilir, burada $\hat{\beta}$ vektörü $X'X\hat{\beta} = X'y$ normal denklemini sağlayan keyfi bir vektördür. $K\beta$ tahmin edilebilir ve $\widehat{K\beta}$ $(X'X)^{-}$ nin seçiminden bağımsız olduğundan $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ ifadesini

$$K\hat{\beta} = KX^{+}y$$

olarak da yazabiliriz. Ayrıca $K\hat{\beta}$ tahmini V kovaryans matrisinden bağımsız olduğundan $BLUE$ ye bir alternatif olarak pek çok şekilde ifade edilebilir. Bu nedenle $BLUE_{M_\beta}(K\beta)$ nın $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ ye eşit olması için V kovaryans matrisinin yapılarını gözönüne almak ilginç olacaktır. $X\beta$ beklenen değer vektörünün $BLUE_{M_\beta}(X\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(X\beta)$ tahmin edicilerinin eşitliği ile ilgilili teratürde çeşitli çalışmalar yapılmıştır (bkz. Puntanen and Styan, 1989). Bu hususta ilk yeter şart Anderson (1948) tarafından verilmiştir fakat bu alanda esas büyük atılım Rao (1967) ve Zyskind(1967) tarafından yapılmıştır. Rao (1967) $BLUE_{M_\beta}(X\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(X\beta)$ tahmin edicilerinin eşit olması için gerek ve yeter şart olarak V kovaryans matrisinin, $a \in \mathbb{R}$, Θ ve Ω simetrik matrisler, V nonnegatif definit olmak üzere V nin yapısının

$$V = a^2 I + X\Theta X' + X^{\perp}\Omega(X^{\perp})' \tag{3.30}$$

şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra Rao (1968) bu şartın yine Λ ve Δ simetrik matrisler, V nonnegatif definit olmak üzere V nin yapısının

$$V = X\Lambda X' + X^{\perp}\Delta(X^{\perp})' \tag{3.31}$$

ifadesine denk olduğunu göstermiştir.

Bununla beraber verilen tahmin edilebilir $K\beta$ parametre fonksiyonunun $BLUE_{M_\beta}(K\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ larının eşitliği konusu çok az çalışılmıştır. Eğer $BLUE_{M_\beta}(X\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(X\beta)$ tahmin edicileri eşit bu takdirde $BLUE_{M_\beta}(K\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ tahmin edicilerinin de eşit olacağını belirtelim. Ancak $BLUE_{M_\beta}(K\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ tahmin edicileri eşit olduğu halde $BLUE_{M_\beta}(X\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(X\beta)$ tahmin edicilerinin eşit olmadığı durumlar da olabilir. Rao ve Mitra (1971b) $BLUE_{M_\beta}(K\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ tahmin edicileri eşit olabilmesi için gerek ve yeter şartın $a \in \mathbb{R}$, Σ, Ω ve Γ simetrik matrisler, $K\Gamma(\mathrm{X}^\perp)' = 0$, V nonnegative definit olmak üzere V nin yapısının

$$V = a^2 I + X\Sigma\mathrm{X}' + \mathrm{X}^\perp\Omega(\mathrm{X}^\perp)' + \mathrm{X}\Gamma(\mathrm{X}^\perp)' + \mathrm{X}^\perp\Gamma'\mathrm{X}' \quad (3.32)$$

şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra Groß ve Ark. (2001) $BLUE_{M_\beta}(K\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ tahmin edicilerinin eşit olabilmesi için bazı gerek ve yeter şartlar vermişlerdir öyle ki $\psi \in \mathbb{R}_{n,n}$, $\Sigma = P_C\Phi P_C + Q_X\Phi Q_X$, $C = X(X'X)^- K'K(X'X)^- X'$ ve $\Phi \in \mathbb{R}_{n,n}$ bir nonnegatif definit matris olmak üzere V nin yapısının

$$V = \left[\Sigma^{1/2} + (\mathrm{P}_X - \mathrm{P}_C)\psi\right]\left[\Sigma^{1/2} + (\mathrm{P}_X - \mathrm{P}_C)\psi\right]' \quad (3.33)$$

şeklinde olduğunu ifade etmiştir. Bununla beraber (3.33) verilen yapı (3.32) de verilenden çok daha karmaşıktır.

Bu kısımda $BLUE_{M_\beta}(K\beta)$ ve $OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ tahmin edicilerinin eşit olması için bazı diğer şartlar ve V nin çeşitli yapıları ele alınacaktır. Elde edilecek sonuçlarımız orjinal modelin yeniden özel bir parametrizasyonunun özellikleri üzerine kurulmuştur.

$M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$ modelini yeniden gözönüne alalım ve X_* matrisi de $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X_*)$ olacak şekilde keyfi bir matris olsun. Bu takdirde $X = X_* A$ olacak şekilde bir A matrisi mevcuttur. Ayrıca $\gamma = A\beta$ olarak alınırsa, bu takdirde

$$M_\gamma = \{y, X_*\gamma, \sigma^2 V\} \quad (3.34)$$

modelinin $M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$ modeline denk olduğu söylenir ve M_β modelinin yeniden parametreleştirlmiş modeli olarak adlandırılır. Yeniden parametreleştirlmiş model M_β modeline $BLUE_{M_\beta}(X\beta) = BLUE_{M_\gamma}(X_*\gamma)$ anlamında denktir.

$K\beta,\ K \in \mathbb{R}^{k\times p}$, parametrik fonksiyonu $M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$ modeli tahmin edilebilir olsun. $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ olduğundan β parametre vektörünü $\gamma = (\gamma_1', \gamma_2')'$ olmak üzere aşağıdaki gibi parçalayabiliriz:

$$\beta = (K\colon K^\perp)\gamma = K\gamma_1 + K\gamma_2\ .$$

Bu durumda $\Re(X) = \Re(X(K\colon K^\perp))$ olduğundan M_β modeli

$$M_\gamma = \{y, X(K\colon K^\perp)\gamma, \sigma^2 V\} = \{y, XK\gamma_1 + XK^\perp\gamma_2, \sigma^2 V\} \tag{3.35}$$

yeniden parametrelendirilmiş modeline denk olacaktır. M_γ daki model matrisini

$$X_* = (X_{1*}\colon X_{2*}) = (XK\colon XK^\perp) \tag{3.36}$$

ile gösterelim. Ayrıca $(XK\colon XK^\perp)$ model matrisi $\Re(XK) \cap \Re(XK^\perp) = \{0\}$ sütun uzay özelliğini de sağlasın. Bu nedenle M_γ modeli altında hem $XK\gamma_1$ ve hem de $XK^\perp\gamma_2$ parametrik fonksiyonları tahmin edilebilir fonksiyonlardır. M_γ modeli M_β modeline denk olduğundan M_β altındaki BLUE ve OLSE lerin eşitliği M_γ modeli altındaki BLUE ve OLSE lerin eşitliği ile ilişkili olacaktır. Aşağıdaki lemma bu sınıflandırmayı vernmektedir.

Lemma 3.7 $K\beta$ parametrik fonksiyonu $M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$ modeli tahmin edilebilir ve $M_\gamma = \{y, XK\gamma_1 + XK^\perp\gamma_2, \sigma^2 V\}$ yeniden parametrelendirilmiş modeli verilmiş olsun. Bu takdirde

$$BLUE_{M_\beta}(K\beta) = OLSE_{M_\beta}(K\beta) \Leftrightarrow BLUE_{M_\gamma}(K\beta) = OLSE_{M_\gamma}(K\beta) \tag{3.37}$$

olacaktır (Isotalo ve Puntanen, 2009).

İspat. $BLUE_{M_\beta}(K\beta) = OLSE_{M_\beta}(K\beta)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$K'X^+(X\colon VK^\perp) = (K'\colon 0) \tag{3.38}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. $P_X = P_{X_*}$ ve $X^\perp = X_*^\perp$ odduğunu ve dolayısıyla $AX = K'$ olacak şekilde bir A matrisinin mevcut olduğunu belirtelim. (3.38) eşitliği soldan ve sağdan sırasıyla $(K')^+$ ve $\begin{pmatrix} K & K^\perp & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ matrisleriyle çarpılırsa

$$(K')^+K'X^+(XK\colon XK^\perp\colon VK^\perp) = ((K')^+K'K\colon 0\colon 0) \tag{3.39a}$$

$$(K')^+A\,P_{X_*}(XK\colon XK^\perp\colon VK^\perp) = (K\colon 0\colon 0) \tag{3.39b}$$

$$(K: 0)X_*^+(XK: XK^{\perp}: VK^{\perp}) = (K: 0: 0) \tag{3.39c}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradaki (3.39c) eşitliği $BLUE_{M_\gamma}(K\gamma_1) = OLSE_{M_\gamma}(K\gamma_1)$ olduğunu gösterir. Tersi durum ise (3.39c) eşitliğini soldan ve sağdan sırasıyla K' ve $\begin{pmatrix} K^+ & 0 \\ (K^{\perp})^+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ çarptıktan sonra benzer şekilde gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Marsaglia ve Styan (1974) tarafından verilen rank kuralları ve

$$r(Q_{XK^{\perp}}XK = r(K) \tag{3.40}$$

rank eşitliği göz önüne alınırsa

$$Q_{XK^{\perp}}XKa = Q_{XK^{\perp}}XKb \Longrightarrow Ka = Kb \tag{3.41}$$

olacağı görülür. Bu nedenle kolayca gösterilebilir ki $BLUE_{M_\gamma}(K\gamma_1) = OLSE_{M_\gamma}(K\gamma_1)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$BLUE_{M_\gamma}(Q_{XK^{\perp}}XK\gamma_1) = OLSE_{M_\gamma}(Q_{XK^{\perp}}XK\gamma_1) \tag{3.42}$$

eşitliğinin yani

$$(Q_{XK^{\perp}}XK: 0)X_*^+(XK: XK^{\perp}: VK^{\perp}) = (Q_{XK^{\perp}}XK: 0: 0) \tag{3.43}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca $Q_{XK^{\perp}}X_*^+ = (Q_{XK^{\perp}}XK: 0)$ olduğundan ve P_{X_*} dik izdüşümü $P_{X_*} = P_{Q_{XK^{\perp}}XK} + P_{XK^{\perp}}$ şeklinde parçalanabileceğinden

$$\begin{aligned} (Q_{XK^{\perp}}XK: 0)X_*^+ &= Q_{XK^{\perp}}(P_{Q_{XK^{\perp}}XK} + P_{XK^{\perp}}) \\ &= P_{Q_{XK^{\perp}}}XK = P_{Q_{XK^{\perp}}XK}Q_{XK^{\perp}} \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir ve böylece (3.43) eşitliğinin

$$P_{Q_{XK^{\perp}}XK}(Q_{XK^{\perp}}XK: XK^{\perp}: VK^{\perp}) = (Q_{XK^{\perp}}XK: 0: 0) \tag{3.45}$$

eşitliğine denk olduğu görülür. Böylece (3.45) eşitliği ve Lemma 3.6 dikkate alınarak aşağıdaki temel teorem verilebilir.

Teorem 3.4 $K\beta$ parametrik fonksiyonu $M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$ modeli tahmin edilebilir ve $M_\gamma = \{y, XK\gamma_1 + XK^{\perp}\gamma_2, \sigma^2 V\}$ yeniden parametrelendirilmiş modeli verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

a. $BLUE_{M_\beta}(K\beta) = OLSE_{M_\beta}(K\beta)$,

b. $BLUE_{M_\gamma}(K\beta) = OLSE_{M_\gamma}(K\beta)$,

c. $K'X'Q_{XK^\perp}VX^\perp = 0$,

d. $\Re(VQ_{XK^\perp}XK) \subset \Re(X)$

e. Λ, Δ ve Γ keyfi matrisler, V nonnegative definit olmak üzere V matrisi

$$V = X\Lambda X' + X^\perp\Delta(X^\perp)' + XK^\perp\Gamma(X^\perp)' + X^\perp\Gamma'(XK^\perp)'$$

olarak yazılabilir.

f. $a \in \mathbb{R}, \Sigma, \Omega$ ve Γ keyfi matrisler, V nonnegative definit olmak üzere V matrisi

$$V = a^2 I + X\Sigma X' + X^\perp\Omega(X^\perp)' + XK^\perp\Gamma(X^\perp)' + X^\perp\Gamma'(XK^\perp)'$$

olarak yazılabilir.

g. Θ ve Δ keyfi matrisler, V nonnegative definit olmak üzere $Q_{XK^\perp}VQ_{XK^\perp}$

$$Q_{XK^\perp}VQ_{XK^\perp} = Q_{XK^\perp}XK\Theta K'X'Q_{XK^\perp} + X^\perp\Delta(X^\perp)'$$

olarak yazılabilir (Isotalo ve Puntanen, 2009).

İspat. a., b., ve c. şıklarının denkliği (3.45) eşitliği ve Lemma 3.6 dan kolaylıkla görülebilir. Öte yandan c. ve d. nin denkliği ise açıktır. V matrisi nin yapılarını ispatlamak için $\tilde{X}_{1*} = Q_{X_{2*}}X_{1*} = Q_{XK^\perp}XK$ alalım ve V kovaryans matrisi de $V = LL'$ olarak yazalım. Bu durumda $\Re\left(\tilde{X}_{1*} : X_{2*} : X^\perp\right) = \mathbb{R}_n$ olacağından $L = \tilde{X}_{1*}A_1 + X_{2*}A_2 + X^\perp A_3$ olacak şekilde $A = (A_1 : A_2 : A_3)$ matrisi mevcut olup

$$\begin{aligned} V = {} & \tilde{X}_{1*}A_1A_1'\tilde{X}_{1*}' + X_{2*}A_2A_2'\tilde{X}_{2*}' + X^\perp A_3A_3'(X^\perp)' \\ & + \tilde{X}_{1*}A_1A_2'\tilde{X}_{2*}' + \tilde{X}_{1*}A_1A_3'(X^\perp)' + X_{2*}A_2A_1'\tilde{X}_{1*}' \\ & + X_{2*}A_2A_3'(X^\perp)' + X^\perp A_3A_1'\tilde{X}_{1*}' + X^\perp A_3A_2'\tilde{X}_{2*}' \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar. Bu takdirde c. şıkkı sağlanır, yani $\tilde{X}_{1*}'VX^\perp = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{X}_{1*}'\tilde{X}_{1*}A_1A_3'(X^\perp)'X^\perp = 0$ olmasıdır ki bu da $\tilde{X}_{1*}A_1A_3'(X^\perp)' = 0$ eşitliğine denktir. Böylece $B = (A_1 : A_2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} V = {} & \left(\tilde{X}_{1*} : X_{2*}\right)BB'\left(\tilde{X}_{1*} : X_{2*}\right)' + X^\perp A_3A_3'(X^\perp)' \\ & + X_{2*}A_2A_3'(X^\perp)' + X^\perp A_3A_2'\tilde{X}_{2*}' \end{aligned} \tag{3.46}$$

yazılabilir. Öte yandan $\Re(\tilde{X}_{1*} : X_{2*}) = \Re(X)$ olduğundan $(\tilde{X}_{1*} : X_{2*}) = XC$ olacak şekilde bir C matrisi mevcuttur ve dolayısıyla V kovaryans matrisi $\Lambda = CBB'C'$, $\Delta = A_3A_3'$ ve $\Gamma = A_2A_3'$ olmak üzere

$$V = X\Lambda X' + X^{\perp}\Delta(X^{\perp})' + XK^{\perp}\Gamma(X^{\perp})' + X^{\perp}\Gamma'(XK^{\perp})' \quad (3.47)$$

formuna sahiptir. Ayrıca $P_X + P_{X^{\perp}} = I$ eşitliği sağlandığından (3.47) eşitliği

$$\Sigma = \Lambda - a^2(X'X)^{-} \text{ ve } \Omega = \Delta - a^2[(X^{\perp})'X^{\perp}]^{-}$$

olmak üzere

$$V = a^2I + X\Sigma X' + X^{\perp}\Omega(X^{\perp})' + XK^{\perp}\Gamma(X^{\perp})' + X^{\perp}\Gamma'(XK^{\perp})' \quad (3.48)$$

olarak ifade edilebilir. Öte yandan $Q_{X_{2*}}\tilde{X}_{1*} = \tilde{X}_{1*}$ ve $Q_{X_{2*}}\tilde{X}_{1*}^{\perp} = X_1^{\perp}$ olduğundan (3.46) soldan ve sağdan $Q_{X_{2*}} = Q_{XK^{\perp}}$ ile çarpılırsa $\Theta = BB'$ ve $\Delta = A_3A_3'$ olmak üzere

$$Q_{X_{2*}}VQ_{X_{2*}} = \tilde{X}_{1*}\Theta\tilde{X}_{1*}' + X^{\perp}\Delta(X^{\perp})' \quad (3.49)$$

elde edilir. Eğer bu eşitlik sağlanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{1*}'Q_{X_{2*}}VQ_{X_{2*}}X^{\perp} &= \tilde{X}_{1*}'VX^{\perp} \\ &= \tilde{X}_{1*}'[\tilde{X}_{1*}\Theta\tilde{X}_{1*}' + X^{\perp}\Delta(X^{\perp})']X^{\perp} = 0 \quad (3.50)\end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 3.1 Verilen bir tahmin edilebilir parametrik fonksiyonun OLSE tahmin edicisinin BLUE tahmin edicisine eşit olduğu ancak $X\beta$ beklenti vektörünün OLSE tahmin edicisinin BLUE tahmin edicisine eşit olmadığı bir örnek verelim. Bunun için

$$y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon$$

modelini gözönüne alalım, burada X ve Z matrisleri $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)'$, $E(\gamma) = 0$, $cov(\gamma) = w^2I_2$, $cov(\gamma, \varepsilon) = 0$ ve $cov(\varepsilon) = \sigma^2I_6$ olmak üzere

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak verilmiş olsun (Isolata ve Puntanen, 2009). Bu durumda

$$cov(y) = cov(Z\gamma + \varepsilon) = w^2ZZ' + \sigma^2I_6 = V$$

alınırsa yukarıdaki model bir genel Gauss-Markov modeli olarak

$$M = \{y, X\beta, V\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Fakat keyfi bilinen bir a sabiti için $w^2 = \sigma^2 a$ olmadıkça $BLUE_M(X\beta)$ gerçek olarak elde edilemez. Çünkü V kovaryans matrisi w^2 ve σ^2 bilinmeyen parametrelerine bağlıdır. Ayrıca

$$X'VX^{\perp} = w^2 X'ZZ'X^{\perp} \neq 0$$

olduğundan $OLSE_M(X\beta)$ tahmin edicisi w^2 ve σ^2 herhangi verilen değerleri için $BLUE_M(X\beta)$ ile çakışmayacaktır. Bununla beraber $k' = \frac{1}{3}(1\,,1,1)'$ olmak üzere

$$\mu = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = k'\beta$$

ortalamasının tahmini göz önüne alınırsa bu takdirde

$$OLSE_M(k'\beta) = BLUE_M(k'\beta)$$

eşitliği verilen her w^2 ve σ^2 değeri için sağlanır. Bunu göstermek için $k^{\perp}$ matrisinin herhangi bir seçimi

$$k^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa, bu takdirde $J = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{9}{2}Xkk'X' + (P_{Xk^{\perp}} + Q_X)ZZ'(P_{Xk^{\perp}} + Q_X) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}JJ' & \frac{1}{2}JJ' \\ \frac{1}{2}JJ' & \frac{1}{2}JJ' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}JJ' & -\frac{1}{2}JJ' \\ -\frac{1}{2}JJ' & \frac{1}{2}JJ' \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} JJ' & 0 \\ 0 & JJ' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece V kovaryans matrisi

$$\begin{aligned} V &= w^2 ZZ' + \sigma^2 I_6 = w^2 \begin{pmatrix} JJ' & 0 \\ 0 & JJ' \end{pmatrix} + \sigma^2 I_6 \\ &= \frac{9}{2}Xkk'X' + (P_{Xk^{\perp}} + Q_X)ZZ'(P_{Xk^{\perp}} + Q_X) + \sigma^2 I_6 \end{aligned}$$

$$= X\Sigma X' + Q_X\Omega Q_X + Xk^{\perp}\Gamma Q_X + Q_X\Gamma'(Xk^{\perp})' + \sigma^2 I_6$$

şeklinde yazılabir, burada

$$\Sigma = \frac{9}{2}w^2kk' + w^2k^{\perp}(Xk^{\perp})'ZZ'((Xk^{\perp})^{+})'k^{\perp}(Xk^{\perp})',$$

ve

$$\Omega = \mathrm{ZZ}' \text{ ve } \Gamma = w^2k^{\perp}(Xk^{\perp})'ZZ'$$

dir. Böylece Teorem 3.4 ün f. şıkkı dikkate alınırsa bu son eşitlikten verilen her w^2 ve σ^2 değeri için $k'\beta$ parametresinin OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliği onaylanmış olur.

3.5 Genel Lineer Model ve Kısıtlamalı Modelleri Altında Tahminlerin Eşitliği

Bu kısımda genel lineer model ve onun kısıtlamalı modelleri altında parameter fonksiyonlarının tahminlerinin eşitlik durumları incelenecektir. Bunun için, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parameter olmak üzere

$$y = X\beta+\varepsilon,\ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2V, \tag{3.51}$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım.

Ayrıca bilinmeyen β parametre vektörü üzerine $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ bilinenler matrisi ve $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere tutarlı bir

$$A\beta = b \tag{3.52}$$

lineer matris denklemi formunda ekstra bir bilginin verildiğini varsayalım. Bu tip kısıtlamalar örneğin parametre vektörü hakkındaki lineer hipotez testlerinin incelenmesinde karşımıza çıkabilir. (3.52) ile birlikte (3.51) modeline bir kısıtlamalı model veya eşitlik kısıtlamalı model adı verilir.

(3.52) modeli ve buna karşılık gelen kısıtlamalı model genellikle

$$M = M_{\beta} = \{y, X\beta, \sigma^2V\} \tag{3.53}$$

$$M_r = \{y, X\beta \mid A\beta = b, \sigma^2V\} \tag{3.54}$$

kapalı formlarında gösterilir. Kısıtlamalı lineer modeler özellikle istatistikte oldukça sık kullanılır. Bununla beraber (3.54) modeli altında β parametre vektörünün tahmin edilmesi (3.53) modeli altında β parametre vektörünün tahmin edilmesinden çok daha karmaşıktır. Genel lineer modellerin incelenmesinde (3.54) modeli genellikle çeşitli dönüşümler yardımıyle açık bir kısıtlamalı modele dönüştürülebili. Bu husustaki en popüler dönüşümler Lagrange çarpanları ve (3.52) deki denkleme bir çözüm olacak şekilde yeniden parametreleştirme yapmaktır.

$r(X) = p$ ve $r(A) = m$ olması durumunda (3.54) modeli altında β parametre vektörünün alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi(OLSE)

$$OLSE_{M_r}(\beta) = (X'X)^{-1}X'y + (X'X)^{-1}[A(X'X)^{-1}A']^{-1}(A(X'X)^{-1}X'y - b)$$

şeklinde verilir (bkz. Amemiya, 1985).

Bu kısımda $K \in \mathbb{R}^{k\times p}$ olmak üzere verilen bir tahmin edilebilir $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.53) ve (3.54) de verilen genel lineer modeller altındaki tahmin edicileri arasındaki ilişki incelenecektir. Özellikle bu tahmin edicilerin birbirine denk olabilmesi için bazı belirleyici şartlar ele alınacaktır. Daha önce de ifade edildiği gibi, eğer $r(X) < p$, yani, model matrisi eksik ranklı ise, bu durumda β parametre vektörünün ve $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin ifade edilmesinde genelleştirilmiş inversler işin içine girecektir.

$K \in \mathbb{R}^{k\times p}$ olmak üzere verilen bir $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.53) ve (3.54) de verilen genel lineer modeller altında tahmin edilebilir olması için daha önce de ifade edildiği gibi $E(Ly + c) = K\beta$ olacak şekilde L ve c matrisleri bulunmalıdır. Bu durumda (3.53) de verilen genel lineer model altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart $\Re(K') \subseteq \Re(X')$ olmasıdır. Benzer şekilde (3.54) de verilen genel lineer model altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun tahmin edilebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Re(K') \subseteq \Re(X' \colon A')$ olmasıdır. Buradan kolayca görülebilir ki $K\beta$ parametre fonksiyonu (3.53) lineer modeli altında tahmin edilebilir ise (3.54) lineer modeli altında da tahmin edilebilir olacaktır. $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.53) ve (3.54) de verilen genel lineer modeller altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicileri farklı kriterlere göre tanımlandığından bunların aynı olmaları gerekmez. Bu nedenle $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE ve BLUE tahmin edicilerini karşılaştırmak ve özel olarak bunların eşit olmaları için bazı gerek ve yeter şartlar vermek oldukça önemlidir.

(3.52) tutarlı matris denkleminin genel çözümü u keyfi vektörü için

$$\beta = A^{+}b + F_{A}u \tag{3.55}$$

şeklinde olacaktır. Burada $F_{A} = I - P_{A'} = I - A^{+}A$ dır. Bu durumda eğer β nın bu değeri (3.51) modelinde yerine yazlırsa, bu takdirde $z = y - XA^{+}b$ olmak üzere yeniden parametreleştirilmiş

$$z = X_{A}u + \varepsilon \tag{3.56}$$

lineer modeli elde edilir. Bu nedenle (3.54) modeli altındaki tahminler (3.56) dan türetilebilir. $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.53) ve (3.54) de verilen genel lineer modeller altındaki OLSE tahminleri aşağıdaki lemma da verilmiştir.

Lemma 3.8

a. M modeli (3.53) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.53) modeli altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde M modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE tahmin edicisi

$$OLSE_{M}(K\beta) = KX^{+}y \tag{3.57}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

b. M_{r} modeli (3.54) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde M_{r} modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE tahmin edicisi $K_{A} = KF_{A}$ ve $X_{A} = XF_{A}$ olmak üzere

$$OLSE_{M_{r}}(K\beta) = \left(KA^{+} - K_{A}{X_{A}}^{+}XA^{+}\right)b + K_{A}{X_{A}}^{+}y \tag{3.58}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir (Tian, 2010).

İspat. a. şıkkının ispatı daha önceden verilmişti. $AX = B$ matris denkleminin tutarlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul biliyoruz ki $AA^{+}B = B$ olmasıdır. Bu durumda denklemin genel çözümü C keyfi bir matris olmak üzere $X = A^{+}B + F_{A}C$ parametrik formunda yazılabilir. Özel olarak $AX = 0$ denkleminin nonnegative tanımlı genel çözümü ise $X = F_{A}CC'F_{A}$ olarak verilebilir. Öte yandan (3.56) daki u parametre vektörünün OLSE tahmin edicisi v keyfi bir vektör olmak üzere $\hat{u} = X_A{}^+ z + F_{X_A} v$ olarak yazılabilir. Bu ifade (3.55) de yerine yazılırsa

$$OLSE_{M_r}(\beta) = A^+ b + F_A X_A{}^+ z + F_A F_{X_A} u$$
$$= \left(A^+ - F_A X_A{}^+ X A^+\right) b + F_A X_A{}^+ y + F_A F_{X_A} u$$

olduğu görülür. Bu ise Lemmanın ispatını tamamlar.

Lemma 3.9 M modeli (3.53) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ parametre fonksiyonu (3.53) modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde M modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_M(K\beta) = P_{K:X:\Sigma}\, y \tag{3.59}$$

şeklinde yazılabilir, burada $P_{K:X:\Sigma}$

$$G(X{:}\,VE_X) = (K{:}\,0) \tag{3.60}$$

matris denkleminin bir çözümüdür. Bu durumda (3.60) ın genel çözümü U matrisi keyfi olmak üzere

$$P_{K:X:\Sigma} = (K{:}\,0)(X{:}\,VE_X)^+ + UE_{(X:VE_X)} \tag{3.61}$$

parametrik formunda yazılabilir. Ayrıca

a. $r(X{:}\,VE_X) = r(X{:}\,V)$ ve $\Re(X{:}\,VE_X) = \Re(X{:}\,V)$ dir.

b. $P_{K:X:\Sigma}V$ çarpımı $P_{K:X:\Sigma}V = (K{:}\,0)(X{:}\,VE_X)^+ V$ olarak tek türlü yazılabilir.

Bu durumda (3.59) ifadesine ilaveten $BLUE_M(K\beta)$ nın iyi bilinen bir gösterimi olarak U matrisi keyfi simetrikbir matris ve

$$r(T) = r(X{:}\,V),\ T = V + XUX'$$

olmak üzere

$$BLUE_M(K\beta) = K(X'T^+X)^+ X'T^+ y \tag{3.62}$$

şeklinde yazılabilir (Tian, 2010).

Lemma 3.10 M_r modeli (3.54) deki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde M_r modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun BLUE tahmin edicisi $K_A = KF_A$ ve $X_A = XF_A$ ve

$$P_{K_A:X_A:\Sigma} = (K_A\colon 0)\left(X_A\colon VE_{X_A}\right)^+ + UE_{X_A:VE_{X_A}}$$

olmak üzere

$$BLUE_{M_r}(K\beta) = \left(I - P_{K_A:X_A:\Sigma}\right)XA^+b + P_{K_A:X_A:\Sigma}y \tag{3.63}$$

şeklinde yazılabilir bu durumda

$$r\left(X_A\colon VE_{X_A}\right) = r(X_A\colon V) \text{ ve } \Re\left(X_A\colon VE_{X_A}\right) = \Re(X_A\colon V)$$

olup $P_{K_A:X_A:\Sigma}V$ çarpımı

$$P_{K_A:X_A:\Sigma}V = (K_A\colon 0)\left(X_A\colon VE_{X_A}\right)^+ V$$

şeklinde tek türlü yazılır (Tian, 2010).

İspat. Lemma 3.9 dan (3.56) modeli altında $K_A u$ parameter vektörünün BLUE tahmin edicisinin $BLUE_M(K_A u) = P_{K_A:X_A:\Sigma}z$ şeklinde olduğu kolayca görülür. Bu ifade (3.55) eşitliğinde yerine yazılırsa (3.63) de istenildiği gibi

$$\begin{aligned} BLUE_{M_r}(K\beta) &= KA^+b + BLUE_{M_r}(K_A u) \\ &= KA^+b + P_{K_A:X_A:\Sigma}(y - \mathrm{X}A^+b) \end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.8, Lemma 3.9 ve lemma 3.10 da OLSE ve BLUE tahmin edicileri için verilen ifadelerden kolaylıkla görülebilir ki OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliğinin karakterize edilmesi için matrisler ve genelleştirilmiş inverslerini içieren matris denklemlerinin eşitliğinin karakterize edilmesi gerekmektedir. Bunula ilgili olarak daha önce verilen rank eşitlikleri uygulanarak $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.53) ve (3.54) de verilen genel lineer modeller altındaki OLSE ve BLUE tahminleri ile ilgili aşağıdaki altı eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şartlar verilebilir.

i. $OLSE_M(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$,

ii. $OLSE_M(K\beta) = OLSE_{M_r}(K\beta)$,

iii. $OLSE_M(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$,

iv. $OLSE_{M_r}(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$,

v. $OLSE_{M_r}(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$,

vi. $BLUE_M(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$.

Şimdi bunlarla ilgili olarak aşağıdaki altı teoremi verebiliriz.

Teorem 3.5 M modeli (3.53) deki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_M(K\beta)$ ve $BLUE_M(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.57) ve (3.59) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

a. $OLSE_M(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. K, X ve Σ matrisleri için $KX^+\Sigma \mathrm{E}_X = 0$ matris denklemi sağlanır.

c. $\Re[(KX^+V)'] \subseteq \Re(X)$ dir.

d. $\Re\begin{bmatrix} X'VE_X \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X'X \\ K \end{bmatrix}$ dir.

e. $r\begin{bmatrix} X'V & X'X \\ X' & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X'V & X'X \\ X' & 0 \end{bmatrix} = 2r(X)$ dir.

f. $\Re\begin{bmatrix} K' \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X'X & 0 \\ VX & X \end{bmatrix}$ dir.

g. $\mathrm{E}_X(\mathrm{VX}: 0)\mathrm{F}_{(X'X:K')} = 0$ dir.

h. $\mathrm{XU}_1 + \mathrm{U}_2(X'X: K') = (VX: 0)$ matris denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilirdir.

i. V matrisi bir C matrisi için $V = (I - J'J)CC'(I - J'J)$ olarak parçalanabilir, burada $J = KX^+ - (K: 0)(X: VE_X)^+$ dir (Tian, 2010).

İspat. $OLSE_M(K\beta)$ ve $BLUE_M(K\beta)$ tahmin edicileri (3.53) deki model altında $K\beta$ parametre fonksiyonu için yansız tahmin edicilerdir. Bu nedenle Lemma 3.7 ye göre 1 olasılıkla $OLSE_M(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$KX^+\mathrm{V} = (K: 0)(X: \mathrm{VE}_X)^+\mathrm{V}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r(KX^+\mathrm{V} - (K: 0)(X: \mathrm{VE}_X)^+\mathrm{V})$$

$$= r(K(X'X)^+\mathrm{X'V} - (K: 0)(X: \mathrm{VE}_X)^+\mathrm{V})$$

$$= r\left[(K: (K: 0))\begin{pmatrix} X'X & 0 \\ 0 & (X: \mathrm{VE}_X) \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathrm{X'V} \\ \mathrm{V} \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'V \\ 0 & -(X:V\mathrm{E}_X) & V \\ K & (K:0) & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(X:V\mathrm{E}_X)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & -X'X & 0 & X'V \\ 0 & -X & -V\mathrm{E}_X & V \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(X:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'V\mathrm{E}_X & 0 \\ 0 & -X & 0 & V \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(X:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & X'V\mathrm{E}_X \\ K & 0 \end{bmatrix} - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} VX & 0 & X \\ X'X & K' & 0 \end{bmatrix} - 2r(X)$$

$$= r(E_X(VX:0)F_{(X'X:K')})$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı sıfıra eşitlenerek d., e., f. ve g. şıklarının sağlandığı görülür. g. ve h. şıklarının denkliği ise açık bir şekilde görülebilir. Ayrıca (3.57) eşitliğini (3.60) da yerine yazarak ve $KX^{+}X = K$ nın $KX^{+}V\mathrm{E}_X = 0$ matris denklemini sağladığı dolayısıyla c. de istenildiği gibi $\Re[(KX^{+}V)'] \subseteq \Re(X)$ olduğu elde edilir. Öte yandan $KX^{+}V = (K:0)(X:V\mathrm{E}_X)^{+}V$ denkleminin çözümü i. şıkkının çözümünün elde edildiğini gösterir.

Teorem 3.6 M modeli (3.53) deki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_M(K\beta)$ ve $OLSE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.57) ve (3.58) ifadelerinde verildikleri gibi olsun.

1. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

a. $OLSE_M(K\beta) = OLSE_{M_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{bmatrix} X'X & X'XF_A & X'V \\ F_AX'X & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} = r(XF_A) + r(X)$ dir.

c. $N = \begin{pmatrix} X'X & X'XF_A \\ F_AX'X & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\Re\begin{bmatrix} X'V \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re(N),\ \ \Re\begin{bmatrix} K' \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re(N) \text{ ve } (K:0)N^{+}\begin{bmatrix} X'V \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

durumları sağlanır.

d. V matrisi keyfi bir C matrisi için $V = F_J CC' F_J$ olarak parçalanabilir, burada $J = KX^{+} - K_A X_A{}^{+}$ dir.

2. V matrisi pzitif definit olduğunda $OLSE_M(K\beta) = OLSE_{M_r}(K\beta)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Re(K') \subseteq \Re(X'XF_A)$ olmasıdır (Tian, 2010).

İspat. M modeli (3.53) deki gibi verilsin. Bu takdirde $OLSE_M(K\beta)$ ve $OLSE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicileri $K\beta$ parametre fonksiyonunun yansız tahmin edilcileri olduğundan 1 olasılıkla $OLSE_M(K\beta) = OLSE_{M_r}(K\beta)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $KX^{+}V = K_A X_A{}^{+} V$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& r(KX^{+}\mathrm{V} - K_A X_A{}^{+} V) \\
&= r(K(X'X)^{+}\mathrm{X}'\mathrm{V} - KF_A(F_A X' X F_A)^{+}(\mathrm{X}F_A)'\mathrm{V}) \\
&= r\left[(K\colon F_A)\begin{pmatrix} X'X & 0 \\ 0 & F_A X' X F_A \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} \mathrm{X}'\mathrm{V} \\ (\mathrm{X}F_A)'V \end{pmatrix}\right] \\
&= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & \mathrm{X}'\mathrm{V} \\ 0 & (\mathrm{X}F_A)'\mathrm{X}F_A & (\mathrm{X}F_A)'\mathrm{V} \\ K & \mathrm{K}F_A & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(\mathrm{X}F_A) \\
&= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & \mathrm{X}'\mathrm{V} \\ -(\mathrm{X}F_A)'X & -(\mathrm{X}F_A)'\mathrm{X}F_A & 0 \\ K & \mathrm{K}F_A & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(\mathrm{X}F_A) \\
&= r\begin{bmatrix} X'X & \mathrm{X}'\mathrm{X}F_A & \mathrm{X}'\mathrm{V} \\ F_A X' X & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(\mathrm{X}F_A)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenerek a. ve b. şıklarının denkliği görülür. b. ve c. şıklarının denkliği ise açık bir şekilde görülebilir. Öte yandan $KX^{+}V = K_A X_A{}^{+} V$ denkleminin çözümü d. şıkkının çözümün elde edildiğini gösterir. Ayrıca 2. deki sonuç ise 1. den direct olarak görülebilir.

Teorem 3.7 M modeli (3.53) deki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_M(K\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.57) ve (3.63) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Tian, 2010):

a. $OLSE_M(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{bmatrix} VX & 0 & X \\ 0 & 0 & A \\ X'X & K' & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(X)$ dir.

c. $F_{(X:A)'}\begin{pmatrix} VX & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_{(X'X:K')} = 0$ eşitliği sağlanır.

d. $\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2(X'X:K') = \begin{bmatrix} VX & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilirdir.

İspat. M modeli (3.53) deki gibi verilsin. Bu takdirde $OLSE_M(K\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ parametre fonksiyonu için yansızdır. Bu nedenle

$$OLSE_M(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$$

eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $KX^+V = P_{K_A:X_A:\Sigma}V$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r(KX^+V - P_{K_A:X_A:\Sigma}V\ )$$

$$= r(K(X'X)^+\mathrm{X'V} - (KF_A:0)\left(XF_A:VE_{XF_A}\right)^+\mathrm{V})$$

$$= r\left[(K:(KF_A:0)\begin{pmatrix} X'X & 0 \\ 0 & -(XF_A:VE_{XF_A}) \end{pmatrix}^+\begin{pmatrix} \mathrm{X'V} \\ V \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & \mathrm{X'V} \\ 0 & -(XF_A:VE_{XF_A}) & \mathrm{V} \\ K & \mathrm{K}F_A & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r\left(\mathrm{X}F_A:VE_{XF_A}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & -\mathrm{X'X}F_A & 0 & X'V \\ 0 & -\mathrm{X}F_A & -VE_{XF_A} & V \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(\mathrm{X}F_A:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'VE_{XF_A} & 0 \\ 0 & -\mathrm{X}F_A & 0 & V \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(\mathrm{X}F_A:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & X'VE_{XF_A} \\ K & 0 \end{bmatrix} - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} X'X & K' & 0 \\ VX & 0 & XF_A \end{bmatrix} - r(XF_A) - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} VX & 0 & \mathrm{X} \\ 0 & 0 & \mathrm{A} \\ X'X & \mathrm{K}' & 0 \end{bmatrix} - r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} - r(\mathrm{X})$$

elde edilir. Sağ taraf sıfıra eşitlenirse a. ve b. nin denkliğinin sağlandığı görülür. b. ile c. ve b. ile d. nin denkliği de daha önceki verilen lemmalardan kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.8 M modeli (3.53) deki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_{M_r}(K\beta)$ ve $BLUE_M(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.58) ve (3.59) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Tian, 2010):

a. $OLSE_{M_r}(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{bmatrix} X'X & 0 & X'V & 0 & A' \\ X & X & 0 & V & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(X:V) + r(X) + r(A)$ dir.

İspat. M modeli (3.53) deki gibi verilsin. Bu takdirde $OLSE_{M_r}(K\beta)$ ve $BLUE_M(K\beta)$ tahmin edicileri $K\beta$ parametre fonksiyonu için yansız tahmin edicilerdir. Bu nedenle $OLSE_{M_r}(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter koşul $K_A {X_A}^{+} V = P_{K:X:\Sigma} V$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r(K_A {X_A}^{+} V - P_{K:X:\Sigma} V\ )$$

$$= r(KF_A(F_A X' X F_A)^{+}(F_A)'\mathrm{V} - (K:0)(X:VE_X)^{+}\mathrm{V})$$

$$= r\left[(KF_A:(K:0))\begin{pmatrix} (XF_A)'XF_A & 0 \\ 0 & -(X:VE_X) \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} (XF_A)'\mathrm{V} \\ V \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} (XF_A)'XF_A & 0 & (XF_A)'\mathrm{V} \\ 0 & -(X:VE_X) & \mathrm{V} \\ \mathrm{K}F_A & (\mathrm{K}:0) & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A) - r(\mathrm{X}:VE_X)$$

$$= r\begin{bmatrix} (XF_A)'XF_A & 0 & 0 & (XF_A)'V \\ \mathrm{X}F_A & -\mathrm{X} & -VE_X & V \\ 0 & K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(\mathrm{X}F_A) - r(\mathrm{X}:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & (XF_A)'X & (XF_A)'VE_X & 0 \\ \mathrm{X}F_A & -\mathrm{X} & 0 & V \\ 0 & K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(\mathrm{X}F_A) - r(\mathrm{X}:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & X'X & X'V & 0 & V' \\ X & X & 0 & V & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} - r(X{:}V) - r(X) - r(A)$$

elde edilir. Bu durumda eğer sağ taraf sıfıra eşitlenirse a. ve b. şıklarının denkliğinin sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.9 M modeli (3.53) deki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $BLUE_M(K\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.59) ve (3.63) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian, 2010):

a. $BLUE_M(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{bmatrix} V & 0 & X \\ 0 & 0 & A \\ X' & K' & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(X{:}V)$ dir.

c. $\Re\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K' \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} V & X \\ 0 & A \\ X' & 0 \end{bmatrix}$ dir.

İspat. M modeli (3.53) deki gibi verilsin. Bu takdirde $BLUE_{M_r}(K\beta)$ ve $BLUE_M(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ parametre fonksiyonu için yansızdır. Bu nedenle

$$BLUE_{M_r}(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$$

eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_{K:X:\Sigma}V = P_{K_A:X_A:\Sigma}V$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r(P_{K:X:\Sigma}V - P_{K_A:X_A:\Sigma}V)$$

$$= r(((K{:}0)(X{:}VE_X)^{+}V - (KF_A{:}0)(XF_A{:}VE_{XF_A})^{+}\mathrm{V})$$

$$= r\left[((K{:}0){:}(KF_A{:}0))\begin{pmatrix} (X{:}VE_X) & 0 \\ 0 & -(XF_A{:}VE_{XF_A}) \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} \mathrm{V} \\ V \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} ((X{:}VE_X) & 0 & \mathrm{V} \\ 0 & -(XF_A{:}VE_{XF_A}) & \mathrm{V} \\ (K{:}0) & (KF_A{:}0) & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A{:}VE_{XF_A}) - r(\mathrm{X}{:}VE_X)$$

$$= r\begin{bmatrix} X & VE_X & -XF_A & 0 & V \\ 0 & 0 & -XF_A & -VE_{XF_A}V & \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(\mathrm{X}F_A : V) - r(\mathrm{X} : V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X & VE_X & 0 & VE_{XF_A} & 0 \\ 0 & 0 & -XF_A & 0 & V \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(\mathrm{X}F_A : V) - r(\mathrm{X} : V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X & VE_{XF_A} \\ \mathrm{K} & 0 \end{bmatrix} - r(\mathrm{X} : V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X' & K' & 0 \\ V & 0 & XF_A \end{bmatrix} - r(XF_A) - r(\mathrm{X} : V)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & X' & \mathrm{K}' \\ X0 & V & 0 \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} - r(\mathrm{X} : V)$$

elde edilir. Bu durumda eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenirse a. ve b. şıklarının denkliğinin sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.10 M modeli (3.53) deki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_{M_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.58) ve (3.63) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Tian, 2010):

a. $OLSE_{M_r}(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{bmatrix} VXF_A & 0 & XF_A \\ F_AX'XF_A & F_AK' & 0 \end{bmatrix} = 2r(XF_A)$ dir.

c. $r\begin{bmatrix} X'X & 0 & K' & X' \\ VX & X & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(A)$ dir.

d. $XF_A\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2(F_AX'XF_A : F_AK') = (VXF_A : 0)$ denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilir.

İspat. M modeli (3.53) deki gibi verilsin. Bu takdirde $OLSE_{M_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ parametre fonksiyonu için yansızdır. Bu nedenle

$$OLSE_{M_r}(K\beta) = BLUE_{M_r}(K\beta)$$

eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

$$K_AX_A{}^{+}V = (K_A : 0)(X_A : E_{X_A})^{+}V$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r(K_A {X_A}^+ V - (K_A:0)(X_A:E_{X_A})^+ V)$$

$$= r\left[(KF_A(F_A X' X F_A)^+ (XF_A)' V - (KF_A:0)(XF_A:VE_{XF_A})^+ \mathrm{V}\right]$$

$$= r\left[(KF_A:(KF_A:0)\begin{pmatrix} F_A X' X F_A & 0 \\ 0 & -(XF_A:VE_{XF_A}) \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} (XF_A)' V \\ V \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} F_A X' X F_A & 0 & F_A X' \mathrm{V} \\ 0 & -(XF_A:VE_{XF_A}) & \mathrm{V} \\ KF_A & (KF_A:0) & 0 \end{bmatrix} - r\left(XF_A:VE_{XF_A}\right) - r(\mathrm{X}F_A)$$

$$= r\begin{bmatrix} VXF_A & XF_A & 0 \\ F_A X' X F_A & 0 & F_A K' \end{bmatrix} - 2r(XF_A)$$

$$= r\begin{bmatrix} VX & X & 0 & 0 \\ X'X & 0 & K' & A' \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} - r(A)$$

elde edilir. Sağ taraf sıfıra eşitlenirse a. b. ve c. şıklarının denkliğinin sağlandığı görülür. Öte yandan b. ve d. şıklarının denkliği ise kolaylıkla gösterilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

3.6 $X\beta$ Ortalama Vektörünün OLSE ve BLUE Tahminlerinin Eşitliği

Lemma 3.8, Lemma 3.9 ve Lemma 3.10 kullanılarak (3.53) ve (3.54) de verilen modelleri altında $X\beta$ ortalama vektörünün OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki gibi türetilebilir:

$$OLSE_M(X\beta) = P_X y, \tag{3.64}$$

$$OLSE_{M_r}(X\beta) = E_{XF_A} X A^+ b + P_{XF_A} y, \tag{3.65}$$

$$BLUE_M(X\beta) = P_{X:\Sigma} y, \tag{3.66}$$

$$BLUE_{M_r}(X\beta) = (I - P_{XF_A:\Sigma}) X A^+ b + P_{XF_A:\Sigma} y, \tag{3.67}$$

burada U_1 ve U_2 matrisleri keyfi olmak üzere $P_{X:\Sigma}$ ve $P_{XF_A:\Sigma}$ izdüşümleri

$$P_{X:\Sigma} = (X:0)(X:VE_X)^+ + U_1 V E_{(X:V)}$$

$$P_{XF_A:\Sigma} = (XF_A:0)\left(XF_A:VE_{XF_A}\right)^+ + U_1 V E_{(XF_A:V)}$$

şeklinde olacaktır. Bu kısımda OLSE ve BLUE tahmin edicileri için (3.64)-(3.67) eşitliklerinde verilen ifadelerin denkliği için Teorem 3.5 – Teorem 3.10 a paralel olarak aşağıdaki teoremler verilecektir.

Teorem 3.11 $OLSE_M(X\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.64) ve (3.66) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

a. $OLSE_M(X\beta) = BLUE_M(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $\Re[VX] \subseteq \Re(X)$ dir.

c. $P_X V = V P_X$ dir.

d. V kovaryans matrisi U_1 ve U_2 uygun mertebeden matrisler olmak üzere

$$V = \mathrm{X}\mathrm{U}_1\mathrm{U}_1{}'X' + E_X\mathrm{U}_2\mathrm{U}_2{}'E_X \tag{3.68}$$

formunda ifade edilebilir (Tian, 2010).

Bir genel lineer model altında OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin denkliği oldukça önemlidir. Bu nedenle özellikle bu tahmin edicilerin denklği üzerine pek çok çalışma mevcuttur. İstatistiksel literatürde formunda verilen bir kovaryans matrisine Rao Kovaryans yapısı adı verilir.

Teorem 3.12 $OLSE_M(X\beta)$ ve $OLSE_{M_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.64) ve (3.65) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

a. $OLSE_M(X\beta) = OLSE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $\Re\begin{bmatrix} X'V \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} X'X \\ A \end{pmatrix}$ dir.

c. $\Re[X'V] \subseteq \Re(X'XF_A)$ dir.

d. $E_{X'XF_A}X'V = 0$ dir.

e. V kovaryans matrisi $G = E_{X'XF_A}$ve H uygun mertebeden matrisler olmak üzere $V = F_G HH' F_G$ formunda ifade edilebilir (Tian, 2010).

Teorem 3.13 $OLSE_M(X\beta)$ ve$BLUE_{M_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.64) ve (3.67) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

a. $OLSE_M(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $\Re\begin{bmatrix} VX \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix}$ dir.

c. $\Re[VX] \subseteq \Re(XF_A)$ dir.

d. $E_{XF_A}VX = 0$ dir (Tian, 2010).

Teorem 3.14 $OLSE_{M_r}(X\beta)$ ve $BLUE_M(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.65) ve (3.66) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktirler:

a. $OLSE_{M_r}(X\beta) = BLUE_M(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{pmatrix} X & V \\ A & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} + r(X\colon V) - r(X)$ ve $r\begin{pmatrix} VX & X \\ A & 0 \end{pmatrix} = r(X) + r(A)$ dir.

c. $r\left(E_{XF_A}V\right) = r(E_XV)$ ve $E_XVXF_A = 0$ dir (Tian, 2010).

Teorem 3.15 $OLSE_{M_r}(X\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.65) ve (3.67) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktirler:

a. $OLSE_{M_r}(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $\Re[VXF_A] \subseteq \Re(XF_A)$ dir.

c. $r\begin{pmatrix} VX & X \\ 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} + r(X\colon A) - r(X)$ dir.

d. $VXF_A = XF_AV$ dir.

e. V kovaryans matrisi U_1 ve U_2 uygun mertebeden matrisler olmak üzere

$$V = XF_AU_1U_1'F_AX' + E_{XF_A}U_2U_2'E_{XF_A}$$

formunda ifade edilebilir (Tian, 2010).

Teorem 3.16 $BLUE_M(X\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.66) ve (3.67) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktirler:

a. $BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{pmatrix} X & V \\ A & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} + r(X\colon A) - r(X)$ dir.

c. $r\left(E_{XF_A}V\right) = r(E_XV)$ dir (Tian, 2010).

Yukarıda verilen teoremlerden aşağıdaki sonuçların sağlandığı türetilebilir:

Sonuç 3.1 $OLSE_M(X\beta), OLSE_{M_r}(X\beta), BLUE_M(X\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.64)-(3.67) eşitliklerinde verildikleri gibi olsunlar ve ayrıca $\Re(A')\cap\Re(X') = \{0\}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

a. $OLSE_M(X\beta) = OLSE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği sağlanır.

b. $BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği sağlanır (Tian, 2010).

Sonuç 3.2 $OLSE_M(X\beta)$, $OLSE_{M_r}(X\beta)$, $BLUE_M(X\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(X\beta)$ tahmin edicilerinin (3.64) - (3.67) eşitliklerinde verildikleri gibi olsun ve ayrıca $\Re(X) \subseteq \Re(V)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

a. $OLSE_M(X\beta) = OLSE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

$\Leftrightarrow BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

$\Leftrightarrow \Re(A')\cap\Re(X') = \{0\}$ eşitliği sağlanır.

b. $OLSE_M(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

$\Leftrightarrow \Re(A')\cap\Re(X') = \{0\}$ ve $\Re(VX) \subseteq \Re(\mathrm{X})$ sağlanır (Tian, 2010).

Sonuç 3.3 $OLSE_M(X\beta), OLSE_{M_r}(X\beta), BLUE_M(X\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(X\beta)$ tahmin edicileri (3.64)-(3.67) eşitliklerinde verildikleri gibi olsunlar ve ayrıca $r(X) = p$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

a. $OLSE_M(X\beta) = OLSE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

$\Leftrightarrow AX^+V = 0$ eşitliği sağlanır.

b. $OLSE_M(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

$\Leftrightarrow AX^+V = 0$ ve $\Re(VX) \subseteq \Re(\mathrm{X})$ ifadeleri sağlanır.

c. $BLUE_M(X\beta) = BLUE_{M_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

$\Leftrightarrow \Re((A{:}\,0)') \subseteq \Re((\mathrm{X}{:}\,\mathrm{V})')$ sağlanır (Tian, 2010).

3.7 β Parametre Vektörünün OLSE ve BLUE Tahminlerinin Eşitliği

$r(X) = p$ ve $K = I_p$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (3.53) ve (3.54) eşitliklerinde verilen modeller altında β parametre vektörünün OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki gibi türetilebilir:

$$OLSE_M(\beta) = X^+y, \tag{3.69}$$

$$OLSE_{M_r}(X\beta) = (A^+ - F_A(XF_A)^+XA^+b + F_A(XF_A)^+y, \tag{3.70}$$

$$BLUE_M(X\beta) = P_{I_p:X:\Sigma}y, \tag{3.71}$$

$$BLUE_{M_r}(X\beta) = (I_p - P_{F_A:XF_A:\Sigma})XA^+b + P_{F_A:XF_A:\Sigma}y, \tag{3.72}$$

dir, burada U_1 ve U_2 matrisleri keyfi olmak üzere $P_{I_p:X:\Sigma}$ ve $P_{F_A:XF_A:\Sigma}$ izdüşümleri

$$P_{I_p:X:\Sigma} = \left(I_p: 0\right)(X: VE_X)^+ + U_1VE_{(X:V)}$$

$$P_{F_A:XF_A:\Sigma} = (F_A: 0)\left(XF_A: VE_{XF_A}\right)^+ + U_1VE_{(XF_A:V)}$$

şeklinde olacaktır. Ayrıca $r(X) = p$ ve $r(V) = n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 3.5 – Teorem 3.10 dan aşağıdaki sonuçlar türetilebilir.

Teorem 3.17 $OLSE_M(\beta)$, $OLSE_{M_r}(\beta)$, $BLUE_M(\beta)$ ve $BLUE_{M_r}(\beta)$ tahmin edicileri (3.69) - (3.72) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu durumda

a. $OLSE_M(\beta) = BLUE_M(\beta) \Leftrightarrow \Re(VX) \subseteq \Re(\mathrm{X})$ dır.

b. $OLSE_M(\beta) = OLSE_{M_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(X') \cap \Re(\mathrm{A}') = \{0\}$ dır.

c. $OLSE_M(\beta) = BLUE_{M_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(VXF_A) \subseteq \Re(\mathrm{X}F_A)$ dır.

d. $OLSE_{M_r}(\beta) = BLUE_M(\beta) \Leftrightarrow \Re(VXF_A) \subseteq \Re(\mathrm{X}F_A)$ dır.

e. $BLUE_{M_r}(\beta) = BLUE_M(\beta) \Leftrightarrow A = 0$ dır.

f. $OLSE_{M_r}(\beta) = BLUE_{M_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(VXF_A) \subseteq \Re(\mathrm{X}F_A)$ dır (Tian, 2010).

3.8 Tahmin Ediciler Arasındaki Uzaklık İçin Bir Sınır

Bu kısımda genel lineer model ve bazı kısıtlamalı modelleri altında parametre fonksiyonlarının tahminleri arasındaki Öklid uzaklığı için bir sınır elde edilecektir. Bunun için, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ keyfi ranklı bilinen bir non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametre olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2 V,$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım. Ayrıca bilinmeyen β parametre vektörü üzerine $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ bilinenler matrisi ve $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere tutarlı bir $A\beta = b$ lineer matris denklemi formunda ekstra bir bilginin verildiğini varsayalım. Bu ekstra bilgi ile birlikte

$$M = M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} \tag{3.74}$$

$$M_r = \{y, X\beta \mid A\beta = b, \sigma^2 V\} \tag{3.75}$$

modellerini gözönüne alalım. Nonnegatif definit bir A matrisi için $A^{1/2}$ matrisi $\left(A^{1/2}\right)^2 = A$ olacak şekildeki bir matrisi göstersin. Ayrıca verilen bir a vektörü için a vektörünün öklid normunu $\|a\|$ ile gösterelim. Daha önce belirtildiği gibi $K \in \mathbb{R}^{k\times p}$ olmak üzere $\mathcal{K} = K\beta$ parametre fonksiyonu (3.74) modeli altında tahmin edilebilir olsun yani, $\Re(K') \subseteq \Re(X')$ olsun.

Bu kısımdaki amacımız $\widehat{\mathcal{K}} = BLUE_M(K\beta)$ ve $\widehat{\mathcal{K}_r} = BLUE_{M_r}(K\beta)$ tahmin edicileri arasındaki öklid uzaklığını sınırlandırmaktır. Tahmin ediciler arasındaki öklid uzaklığı sınırlandırmak özellikle jeodezik verilerin incelenmesinde kullanılmaktadır. M genel lineer modelinde istatistiksel ilerleme için invers parçalı matris metodunun bir uygulaması olarak G_1, G_3 ve G_4 matrisleri aşağıdaki eşitlikler sağlanacak şekilde verilmiş olsun:

$$X'G_1(X:V) = 0,\ VG_1X = 0,\ (V - VG_1V)Q_X = 0 \tag{3.76}$$

$$XG_3(X:VQ_X) = (X:0) \tag{3.77}$$

$$XG_4X' = V - VQ_X(Q_XVQ_X)^-Q_XV \tag{3.78}$$

yani $\left((G_1':G_3')':(G_3:-G_4')'\right)$ parçalı matrisi $\left((V:X)':(X':0)'\right)$ matrisinin bir genelleştirilmiş inversi olsun (Bkz. Rao, 1971, 1972). Bu takdirde M genel lineer modelinde

$$\widehat{\mathcal{K}} = KG_3y\,,\ cov(\widehat{\mathcal{K}}) = \sigma^2 KG_4K' \text{ ve } \quad SSE = y'G_1y$$

yazılabilir. $A_1\beta = b_1$ kısıtlaması M genel lineer modelinde $A\beta = b$ kısıtlamalarının tahmin edilebilir bir parçası olsun, yani $\Re(A_1') = \Re(A') \cap \Re(X')$ ve $b_1 = A_1A^-b$ olsun. Bu durumda $A_1\beta = b_1$ kısıtlaması $L = I - A_0A_0^-$, $A_0 = A(I - X^-X)$ olmak üzere $LA\beta = Lb$ olarak yazılabilir. Çünkü $\Re((A'(AX')^{\perp})^{\perp}) = \Re(A') \cap \Re(X')$ eşitliği dikkate alınırsa $A_1 = LA$ olduğu görülür. Şimdi aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.11 $M_r = \{y, X\beta \mid A\beta = b, \sigma^2 V\}$ kısıtlamalı modelinin tutarlı olması için gerek ve yeter şart M modelinin tutarlı olması, yani $y \in \Re(X\colon V)$ dir ve $S = A_1 G_4 A_1'$ ve $\widehat{Q_1} = A_1 G_3 y$ M modeli altında $Q_1 = A_1\beta$ nın BLUE tahmin edicisi olmak üzere

$$\widehat{Q_1} - b_1 \in \Re(S) \tag{3.79}$$

dir (Pordzik, 2012).

Eğer M_r modeli tutarlı ise bu takdirde ve $C = KG_4A_1'$ olmak üzere

$$\widehat{\mathcal{K}_r} = \widehat{\mathcal{K}} - CS^{-}(\widehat{Q_1} - b_1) \text{ ve } cov(\widehat{\mathcal{K}_r}) = cov(\widehat{\mathcal{K}}) - \sigma^2 CS^{-}C' \tag{3.80}$$

olacaktır. Ayrıca eğer SSE_r ve SSE sırasıyla M_r ve M modelleri altında hata kareleri toplamları ise bu takdirde

$$SSE_r = SSE + (\widehat{Q_1} - b_1)'S^{-}(\widehat{Q_1} - b_1) \tag{3.81}$$

olacaktır. Ayrıca M_r modeli altında $\mathcal{K}$ nın tahmini ile ilgilenildiğinde başlangıç kısıtlamalarına bazı ilave dönüşümler uygulanabilir. Yani $A_1\beta = b_1$ kısıtlaması $A\beta = b$ kısıtlamasının $\mathcal{K} = K\beta$ ya göre esaslı kısmı olarak adlandırılır. M_r modeli altında lineer kısıtlamaların dönüştürülmesiyle ilgili olarak Baksalary ve Pordzik (1992)

$$\{y, X\beta \mid DA\beta = Db, \sigma^2 V\}$$

alt kısıtlamalı modeli altında $\mathcal{K}$ nın BLUE tahmin edicisinin M_r modeli altında $\mathcal{K}$ nın BLUE tahmin edicisi olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $\Re(C') \subseteq \Re(SB')$ olduğunu göstermişlerdir. Burada B matrisi

$$\Re(A_1'B') = \Re(D'A') \cap \Re(X')$$

olacak şekilde bir matristir. Bu nedenle $A\beta = b$ nın $\mathcal{K}$ ya göre bir esas kısmı denildiğinde yukarıdaki koşulu sağlayan $DA\beta = Db$ kısıtlamalarının bir minimal kümesi anlaşılır ve B matrisi

$$\Re(C') = \Re(SB') \tag{3.82}$$

olacak şekilde bir matris olmak üzere $DA_1\beta = Db_1$ şeklinde yazılabilir. Burada CS^{-} matrisi B matrisinin bir gösterimi olarak seçilebilir.

Teorem 3.18 $\widehat{\mathcal{K}}$ ve $\widehat{\mathcal{K}_r}$ tahmin edicileri $\mathcal{K} = K\beta$ parametre fonlsiyonunun sırasıyla $M = M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$ ve $M_r = \{y, X\beta \mid A\beta = b, \sigma^2 V\}$ modelleri altındaki BLUE tahmin edicileri olsun. Bu takdirde

$$\left\|\widehat{\mathcal{K}} - \widehat{\mathcal{K}_r}\right\|^2 \leq \lambda(SSE_r^* - SSE) \tag{3.83}$$

dir, burada λ değeri $\sigma^{-2}\left[cov\left(\widehat{\mathcal{K}}\right) - cov\left(\widehat{\mathcal{K}_r}\right)\right]$ matrisinin en büyük özdeğeri SSE ve SSE_r^* sırasıyla $M = M_\beta = \{y, X\beta, \sigma^2 V\}$ ve $M_r^* = \{y, X\beta \mid DA_1\beta = Db_1, \sigma^2 V\}$ modelleri altındaki hata kareleri toplamı olmak üzere $DA_1\beta = Db_1$ ise $A\beta = b$ nin $\mathcal{K}$ ya göre kısıtlanışlarının bir esas kısmıdır (Pordzik, 2012).

İspat. Lemma 3.11 den $\widehat{\mathcal{K}} - \widehat{\mathcal{K}_r} = CS^-(\widehat{Q_1} - b_1) \in \Re(CS^-C')$ ve dolayısıyla

$$\left\|\widehat{\mathcal{K}} - \widehat{\mathcal{K}_r}\right\|^2 \leq \left\|(CS^-C')^{1/2}\right\|_s^2 \left\|(CS^-C')^{1/2}(CS^-C')^- CS^-(\widehat{Q_1} - b_1)\right\|^2$$

elde edilir. Spektral norm tanımı ve ifadenin S matrisinin g-inversinin herhangi bir seçimine göre değişmez olacağı dikkate alınırsa bu eşitsizlik λ değeri $CS^-C' = \sigma^{-2}\left[cov\left(\widehat{\mathcal{K}}\right) - cov\left(\widehat{\mathcal{K}_r}\right)\right]$ matrisinin en büyük öz değeri olmak üzere

$$\left\|\widehat{\mathcal{K}} - \widehat{\mathcal{K}_r}\right\|^2 \leq \lambda(\widehat{Q_1} - b_1)'(S^+)^{1/2} P_{(S^+)^{1/2}C'} (S^+)^{1/2}(\widehat{Q_1} - b_1)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca (3.81) deki sonuç M_r^* modeline uyarlandığında B matrisi (3.82) deki gibi olmak üzere

$$SSE_r^* = SSE + (\widehat{Q_1} - b_1)'B'(BSB')^- B(\widehat{Q_1} - b_1) \tag{3.84}$$

elde edilir. Bu durumda M_r modelinin tutarlılığından

$$SS^+(\widehat{Q_1} - b_1) = (\widehat{Q_1} - b_1)$$

ve bu nedenle de

$$SSE_r^* - SSE = (\widehat{Q_1} - b_1)' (S^+)^{1/2} P_{(S^+)^{1/2}C'} (S^+)^{1/2}(\widehat{Q_1} - b_1) \tag{3.85}$$

olduğu görülür. Böylece (3.82) ifadesi ile sağlanan $P_{(S^+)^{1/2}C'} = P_{(S^+)^{1/2}SB'}$ eşitliği kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki ispata göre SSE_r^* ifadesi $A\beta = b$ nin bir esas kısmının seçimine göre değişmezdir ve bu esas kısıtlamalat daha önce de belirtildiği gibi $CS^-(A_1\beta - b_1) = 0$ ile gösterilebilir. Burada iki durum verilebilir:

(i) (3.83) deki sınırın sıfır olması için gerek ve yeter koşul $\widehat{\mathcal{K}}$ nın $\mathcal{K}$ için M_r modeli altında BLUE tahmin edici olmasıdır. Bu durumun ispatı için S_r ile M_r kısıtlamalı modelinin tutarlı olduğu y vektörlerinin kümesini gösterelim. Bu takdirde

$$\{\widehat{Q_1} - b_1 : y \in S_r\} = \Re(S) \tag{3.86}$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (3.85) dikkate alınırsa $SSE_r^* = SSE$ olması için gerek ve yeter koşulun $BS = 0$ olduğu görülür. Bu son eşitlik ise $C = 0$ olması anlamına gelir ki, bu ise her $y \in S_r$ için $\widehat{\mathcal{K}} = \widehat{\mathcal{K}_r}$ olması için gerek ve yeter şarttır. Diğer taraftan $\lambda = 0$ ve $C = 0$ ın denkliği açıktır.

(ii) SSE_r^* ve SSE hata kareleri toplamlarının çakışması için gerek ve yeter şart tüm tahmin edilebilir kısıtlamaların M_r kısıtlamalı modelindeki $\mathcal{K}$ tahminine göre esaslı olmasıdır. Bunun için öncelikle (3.81) ve (3.84) eşitliklerine göre

$$SSE_r - SSE_r^* = (\widehat{Q_1} - b_1)'(S^- - B'(BSB')^- B)(\widehat{Q_1} - b_1) \tag{3.87}$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca (3.86) ya göre her $y \in S_r$ için $\widehat{Q_1} - b_1 = S\alpha$ olacak şekilde en az bir α vektörü mevcut olup (3.87) eşitliğinin sağ tarafı $\alpha' S^{1/2} Q_{S^{1/2}B'} S^{1/2}\alpha$ olarak yazılabilir. Bu ise $SSE_r \geq SSE_r^*$ olduğunu gösterir. Burada eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $r(S) = r(SB')$ olmasıdır. (3.82) den kolayca görülebilir ki $SSE_r = SSE_r^*$ olması için gerek ve yeter şart $r(S) = r(C)$ olmasıdır ki bu da $A_1\beta - b_1$ in $A\beta - b$ nin $\mathcal{K}$ tahminine göre esaslı kısmı olduğu anlamına gelir. Bu durum y nin beklenen değerinin yani $K = X$ in tahmin edilmesinde ilginç olacaktır.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında (3.53) modeli altındaki $K\beta$ parametre vektörünün alışılmış en küçük kareler ve en iyi lineer yansız tahmin edicilerinin ve (3.54) modeli altındaki alışılmış en küçük kareler (OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicilerinin (BLUE) ifadeleri elde edilip bu tahmin edicilerin birbirine eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Bu şartlar altında

i. (3.53) ve (3.54) modelleri altında $K\beta$ parametre vektörünün ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri (OLSE) verilerek alışılmış en küçük kareler tahmin edicileri ile ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri (OLSE) arasındaki ilişkiler ya da en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) ile ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri (OLSE) arasındaki ilişkiler incelenebilir. Bu çalışmada elde edilen sonuçların ayrıca daha genel durumlara da uygulanabilirliği beklenebilir. Parçalı lineer modeller altında ağırlıklı en küçük kareler (OLSE) tahmin edicilerinin toplam ayrışımları araştırılabilir.

ii. i. durumunda $K\beta$ parametre vektörü için yapılan incelemeler özel durumlar olarak $X\beta$ beklenen değer vektörü ve β parametresi için de ayrıca araştırılabilir.

iii. $M = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ parçalı genel lineer modeli ile bu modelden türetilen $M_i = \{y, X_i\beta_i, \sigma^2 V\}$, $i = 1,2,$ şeklindeki iki küçük alt modelleri için

$$OLSE_M(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{M_2}(X_2\beta_2),$$

$$BLUE_M(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = OLSE_{M_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{M_2}(X_2\beta_2),$$

$$OLSE_M(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2),$$

ve

$$BLUE_M(X_1\beta_1 + X_2\beta_2) = BLUE_{M_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$$

toplam ayrışımlarının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şartlar araştırılabilir.

iv. Çalışmada elde edilen sonuçların uygulanabileceği bir veri grubu bulunarak teorik olarak elde edilen bulguların uygulaması yapılabilir.

v. Teorik olarak elde edilen sonuçlar çeşitli algoritmalar hazırlayarak bilgisayar ortamında daha kusursuz ve daha çabuk bir şekilde elde edilebilir.

5. KAYNAKLAR

Anderson, TW. (1948). On the theory of testing serial correlation. Skandinavisk Aktuarietidskrift. 31:88–116.

Amemiya, T. (1985). Advanced econometrics. Basil Blackwell, Oxford.

Baksalary, J.K. (1984). A study of the equivalence between Gauss- Markoff model and its augmentation by nuisance parameters. Math. Operationsforsch stat. ser. Stat. 15:3-35.

Baksalary, J.K. & Pordzik, P.R. (1992). Implied linear restrictions in the general Gauss-Markov model. J. Stat. Plan Inference. 23: 132-143.

Groß, J. (2004). The general Gauss–Markov model with possibly singular dispersion matrix. Stat. Pap. 45:311–336.

Groß, J. & Trenkler, G. (1998). On the equality linear statistics in General Markov model. In: Mukherjee SP, Basu SK, Sinha BK (eds) Frontiers of Statistics. Narosa Publishing House, New Delhi, pp. 189–194.

Groß, J, Trenkler G, Werner HJ. (2001). The equality of linear transforms of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator. *Sankhya Ser* A 63:118–127.

Isotalo, J. & Puntanen, S. (2009). A note on the equality of the OLSE and the BLUE of the parametric function in the general Gauss–Markov model. Stat. Papers, 50:185-193.

Marsaglia, G. & Stvan, GPH. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear and Multilinear Algebra,* 2, 269-292.

Moore, EH. (1920). On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix. (Abstract) Bulletin of American Mathematical Society, 26, 394-395.

Moore, EH. (1935). General Analysis. Memoirs of the American Philosophical Society, I. American Philosophical Society, Philadelphia, Pennsylvania, 1935.

Nurhonen, M. & Puntanen, S. (1992). A property of partitioned generalized reression. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, 21, 1579-1583.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 51:406–413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 52: 17- 19.

Pordzik, P.R. (2012). A bound for the Euclidian distance between restricted and unrestricted estimators of parametric functions in the general linear model. Stat. Papers, 53:299-304.

Puntanen S, Styan GPH. (1989). The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator [with comments by Oscar Kempthorne & by Shayle R. Searle and with “Reply” by the authors]. Am Stat 43:153–164

Puntanen, S., Styan, GPH. & Tian, Y. (2005). Three rank formulas associated with the covariance matrices of the BLUE and the OLSE in the general linear model. *Econometric Theor.*, 21, 659-664.

Qian, H. & Tian, Y. (2006). Partially superfluous observations. *Econometric Theor.,* 22, 529-536.

Rao, CR. (1965). Linear Statistical Inference and Its Applications. Wiley, New York.

Rao, CR. (1967). Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals. In: Le Cam LM, Neyman J (eds) Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability: Berkeley, California, 1965/1966, vol 1. University of California Press, Berkeley, pp. 355–372.

Rao CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. *Sankhya Ser* A 30:245–252

Rao, CR. (1971). Unified theory of linear estimation. *Sankhya Ser,* A 33: 371-394.

Rao, CR. (1972). A nte on the IPM method in the unified theory of linear estimation. *Sankhya Ser,* A 34: 371-394.

Rao CR. (1973) Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular disperison matrix. *Journal of Multivariate Anal*. 3: 276-292.

Rao, CR. (1976). Estimation of parameters in a linear model. Ann. Stat. 4:1023–1037.

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971a). Further contributions to the theroy of generalized inverse of matrices and its applications. *Sankhya, Ser*. A 33,289-300.

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971b). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications.New York: Wiley.*

Tian, Y. (2002). The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices. *Southeast Asian Bull. Math*, 25,745-755.

Tian, Y. (2010). On equalities of estimatios of parametric functions under a general linear model and its restricted models. Metrika, 72:313-330.

Tian, Y. & Wiens, DP. (2006). On equality and proportionality of ordinary of least-squares, weighted least-squares and best linear unbiased estimators in the general linear model. *Statist. Probab. Lett*,76,1265-1272.

Tian, Y. & Puntanen, S. (2009). On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models, Linear Algebra and Its Applications. 430, pp. 2622–2641.

Tian, Y., Beisiegel, M. Dagenais, E. & Haines, C. (2008). On the natural restrictions in the singular Gauss–Markov model. Stat. Papers. 49:553-564.

Zyskind, G. (1967). On canonical forms, nonnegative covariance matrices, and best and simple least squares estimators in linear models. Ann. Stat. 38:1092–1110.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Yıldız SÖNMEZ
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	× T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2016
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	