T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF OLMAYAN EĞRİ UZAYLARINDA KONVEKSLİK VE HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

MUSTAFA GÜLEÇYÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Mustafa GÜLEÇYÜZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

POZİTİF OLMAYAN EĞRİ UZAYLARINDA KONVEKSLİK VE HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

Mustafa GÜLEÇYÜZ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 40 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDAL ÜNLÜYOL

Bu tezde, pozitif olmayan eğri uzaylarında Hermite-Hadamard Eşitsizliği incelenmiştir. Bunun için ilk olarak global pozitif olmayan eğri uzayı (NPC) tanıtılmıştır. İkinci olarak, bu uzayda Hermite-Hadamard eşitsizliği ifade ve ispat edilip, üçüncü olarak bu uzayda eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak ise bir kaç uygulama verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Metrik uzay, Global pozitif olmayan eğri uzayı.

ABSTRACT

CONVEX AND HERMİTE-HADAMARD INEQUALITY IN NON POSİTİVE CURVE SPACE

MUSTAFA GÜLEÇYÜZ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 40 PAGES

SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. ERDAL ÜNLÜYOL

In this thesis, It is researched the Hermite-Hadamard inequality in the non positive curvature space (NPC). For that, firstly we defined the non positive curvature spaces. Secondly, we proved the Hermite-Hadamard inequality in this space, then thirdly, we obtained some inequalities. Finally, we gave a few applications.

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, Metric space, global non positive curvature space.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasındaki emeklerinden dolayı danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL' a teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim babam, annem, oğlum ve eşim Çilem GÜLEÇYÜZ' e, ayrıca hocam Recep GÖKDUMAN' a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR TARAMASI

Konveks fonksiyonlar matematiğin bir çok alanında önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle optimizasyon problemlerinde kullanılmaktadır çünkü açık bir küme üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyonun bir tane minumumu vardır. Ayrıca uygun şartlar altında sonsuz boyutlu uzaylarda tanımlanan konveks fonksiyonlar da bu tarz özelliklere sahiptir. Özel olarak eğer f, $I = [a, b]$ üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyon ise, bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.0.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Konveks fonksiyonların eşitsizliklerle ilgili bu özelliğini verdikten sonra literatürde iyi bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliğinde de bahsedebiliriz. Aslında bu eşitsizliği (1.0.1) in biraz daha genelleştirilmesidir.

Pozitif olmayan eğri uzayları ile ilgili çalışmalar ilk olarak Hadamard'ın makaleleriyle başlar ve Cartan'ın çalışmaları ile devam eder fakat üst eğri sınırlı metrik uzayların teorisi Alexandrou ve Buseman'ın [24], [25], [29] çalışmalarıyla kurulmuştur ve "Pozitif Olmayan Eğri Uzayı(**N**on-**P**ositive **C**urvature Space-NPC)", bir (N, d) metrik uzayındaki yeteri kadar küçük geodezik üçgenlerin en azından bu üçgene karşılık gelen Öklid üçgeni kadar birbirine benzer olduğunu söylemektedir. Başka bir ifade ile eğer bir (N, d) metrik uzayı Bruhat ve Tits [28] in CN. eşitsizliğini sağlarsa, bu durumda keyfi $x \in X$ ve $\gamma \in X$ geodezik parçası için

$$\frac{1}{4}L(\gamma)^2 \leq \frac{1}{2}(d(x,\gamma_0)^2 + d(x,\gamma_1)^2) - d(x,\gamma_{\frac{1}{2}})^2$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ise bize γ nın x e yeterince yakın olduğunu gösterir. Burada $L(\gamma)$ γ nın uzunluğunu ifade eder.

Pozitif olmayan eğri uzayları için yapılan bu kısa özetten sonra, şimdi bu tezde neler yapıldığını açıklayalım.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, konveks fonksiyonların eşitsizliklerle önemli bir bağı olan Hermite-Hadamard eşitsizliğini pozitif olmayan eğri uzaylarında incelenmiş ve bazı genellemelere gidilmiştir. Daha sonra bazı teoremler ve lemmalar ispatlanmıştır. Bunu yaparken de literatürde var olan bu alandaki kaynaklar önce kronolojik sıraya göre tasnif edilmiş ve daha sonra konu bütünlüğüne göre açıklanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer
M1) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
M2) Her $x \in X$ için $d(x, x) \geq 0$,
M3) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,
M4) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine ise "metrik uzay" denir. Bazen kısaca $X \equiv (X, d)$ şeklinde de metrik uzay gösterilebilir.

Tanım 2.0.2 X bir metrik uzay olsun. Keyfi $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ için

$$\gamma : [a, b] \to X$$

şeklinde tanımlanan sürekli dönüşüme X metrik uzayında bir yol denir. $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$ ise, bu durumda x ve y, γ nın uç noktalarıdır. γ, x ve y noktalarını birleştirir.

Tanım 2.0.3 Bir $[a, b]$ kompakt aralığın alt bölüntüsü, a ve b'yi içeren $[a, b]$'nin bir sonlu σ-alt kümesidir. Eğer $n = card(\sigma)$ ise n'ye σ alt bölüntüsünün uzunluğu denir. σ'nın elemanına bu alt bölüntünün bir köşesi(tepesi) denir. Eğer σ, $(n + 1)$ uzunluğunun alt bölüntüsü ise bu durumda

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

şeklinde artan bir sırada köşeleri olan $(t_i)_i = \overline{0, n}$ sonlu bir dizisini elde ederiz. Sonuç olarak

$$\sigma = (t_i), i = \overline{0, n}$$

gösteriminin anlamı, σ bir alt bölüntü olmak üzere t_i'ler σ'nın köşeleridir. Onlar artan bir şekilde sıralıdır ve onlar ikili olarak ayrıktır. Ayrıca gereksiz hatırlatmalardan kaçınmak için gerekli yerlerde $a < b$ olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.0.4 X bir metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \to X$ bir yol olsun. Bu durumda

$$L_X(\gamma) \equiv L(\gamma) := \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$$

sayısına bir yolun uzunluğu denir. Burada supremum $[a, b]$ nin $\sigma = (t_i), i = \overline{0, n}$ alt bölüntüsünün kümesi üzerinde alınmıştır. Eğer bu yolun uzunluğu sonlu ise ona rektifiye edilebilirdir denir. Bir yolun uzunluğu genel olarak

$$0 \leq L(\gamma) \leq +\infty$$

$x = \gamma(a)$ ve $y = \gamma(b)$ olmak üzere $[a, b]$ nin $\gamma = \{a, b\}$ alt bölüntüsü göz önüne alırsak

$$|x - y| \quad \leq \quad L(\gamma) \tag{2.0.1}$$

eşitsizliği doğrudur. Böylece bir yolun uzunluğu, onun uç noktaları arasındaki uzunluk ile alttan sınırlıdır.

Tanım 2.0.5 X bir metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \to X$ bir yol ve $\sigma = (t_i)_i = \overline{0, n}$ ise $[a, b]$ nin keyfi alt bölüntüsü olsun. Bu durumda

$$V_\sigma(\gamma) \quad := \quad \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$$

ifadesine σ'ya göre γ nın total varyasyonu denir. Burada keyfi $\gamma : [a, b] \to X$ yolunun uzunluğu için aşağıdaki formülü yazabiliriz,

$$L(\gamma) \quad := \quad sup_\sigma V_\sigma(\gamma)$$

burada supremum $[a, b]$'nin σ alt bölüntü kümesi üzerinden alınmıştır.

Önerme 2.0.1 Bir $\gamma : [a, b] \to X$ yolunun uzunluğun sıfır olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul γ nın bir sabit yol olmasıdır, yani her $t \in [a, b]$ için

$$\gamma(t) = x_0$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

Örnek 2.0.1 X bir ayrık metrik uzay, yani her noktası izole olan metrik uzay olsun. Bu durumda X'deki keyfi yol sabittir ve böyle bir yolun uzunluğu sıfırdır.

Tanım 2.0.6 E bir vektör uzayı olsun. Bu durumda her $x, y \in E$ için

$$\gamma(t) \quad := \quad (1 - t)x + ty$$

şeklinde tanımlanan $\gamma : [0, 1] \to X$ yoluna x ve y'yi birleştiren afin yol denir. Aslında bir afin yol yoldur, yani süreklidir.

Önerme 2.0.2 E bir normlu vektör uzayı ve $\gamma : [0, 1] \to E$, her $x, y \in E$ noktalarını birleştiren bir afin yol olsun. Bu durumda

$$L(\gamma) := \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.0.2 Şimdi $\mathbb{R}$ de rektifiye edilemeyen bir yol örneği verelim. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış mutlak değer metriğini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\gamma(t) := \begin{cases} 0, & t = 0 \\ t\sin(\frac{1}{t}), & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ yolu rektifiye edilemez.

Tanım 2.0.7 $\gamma : [a,b] \to X$ ve $\gamma' : [c,d] \to X$ iki tane yol olsun. Bu durumda

$$\psi : [c,d] \to [a,b]$$

monotonik, surjektif ve

$$\gamma' = \gamma \circ \psi$$

sağlayan bir ψ dönüşümü mevcut ise γ' parametre değişimi γ dan elde edilir. Bu ψ'ye parametre değişimi denir.

Not 2.0.1 **i)** ψ dönüşümünün bir homeomorfizm olması gerekmez.

ii)$\mathbb{R}$'nin iki aralığı arasındaki monotonik ve surjektif dönüşüm sürekli olmak zorundadır. Dolayısıyla ψ süreklidir.

Önerme 2.0.3 Bir $\gamma' : [c,d] \to X$ parametre değişimiyle bir $\gamma : [a,b] \to X$ yolundan elde edilmiş bir yol olsun. Bu durumda

$$L(\gamma) = L(\gamma')$$

eşitliği sağlanır. Yani uzunluk parametre değişimi altında invaryanttır.

Lemma 2.0.1 $\gamma : [a,b] \to X$ bir yol γ ve γ', $\sigma \subset \sigma'$ bağıntısını sağlayan $[a,b]$ nin iki alt bölüntüsü olsun. Bu durumda

$$V_\sigma(\gamma) \leq V_{\sigma'}(\gamma)$$

eşitsizliği doğrudur.

Önerme 2.0.4 Her $\gamma : [a,b] \to X$ yolu için

$$L(\gamma) = \lim_{|\gamma| \to 0} V_\gamma(\gamma)$$

eşitliği doğrudur.

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun. Eğer $\gamma : I \to X$ keyfi bir yol ve I_0, I'nın bir kapalı alt aralığı ise, bu durumda γ'nın I_0'a kısıtlanışı olan

$$\gamma_{|_{I_0}} : I_0 \to X$$

dönüşümü bir yoldur. Şimdi yukarıdaki önermenin direk bir sonucunu verelim.

Önerme 2.0.5 $\gamma : [a, b] \to X$ bir yol olsun. Bu durumda her $c \in [a, b]$ için

$$L(\gamma) \;=\; L(\gamma_{|[0,c]}) + L(\gamma_{|[c,d]})$$

eşitliği doğrudur.

Önerme 2.0.6 Her $\gamma : [a, b] \to X$ bir yol ve her $t \in [a, b]$ için γ_t yolunu

$$\gamma_t \;:=\; \gamma_{|[0,t]}$$

şeklinde göstereceğiz. Buna göre her rektifiye $\gamma : [a, b] \to X$ yolu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı $t \to L(\gamma_t)$ dönüşümü artan ve süreklidir.

Tanım 2.0.8 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b \leq c$ olsun. Eğer $\gamma_1 : [a, c] \to X$ ve $\gamma_2 : [c, d] \to X$, $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ şartını sağlayan iki yol ise o zaman

$$(\gamma_1 \star \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq c \\ \gamma_2(t), & c \leq t \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\gamma_1 \star \gamma_2 : [a, b] \to X$ yolu tanımlabilir. Bu $\gamma_1 \star \gamma_2$ yoluna $\gamma_1 \star \gamma_2$'nin birleştirilmesi adı verilir. Ayrıca

$$L(\gamma_1 \star \gamma_2) \;=\; L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

özelliği sağlanır.

Önerme 2.0.7 $\mathcal{C}$, X metrik uzayında yolların bir kümesi ve $L : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ dönüşümü ise her yolun uzunluğu olsun. Bu durumda L, bu dönüşümlerin en küçüğü olan $\mathcal{L} : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ dönüşümü aşağıdaki iki özelliği sağlar.

i) Her $\gamma : [a, b] \to X$ yolu için

$$\mathcal{L}(\gamma) \;\geq\; |\gamma(a) - \gamma(b)|,$$

ii) Eğer γ, γ_1 ve γ_2 yollarının birleşimi olan bir yol ise, o zaman

$$\mathcal{L}(\gamma) \;=\; \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2).$$

Tanım 2.0.9 $\gamma : [a,b] \to X$ bir rektifiye edilebilir yol olsun. Bu durumda $a \leq u \leq v \leq b$ şartını sağlayan her $u, v \in \mathbb{R}$ için

$$v - u \ = \ L(\gamma_{|[u,v]})$$

eşitliği sağlanıyorsa γ'ya yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmiştir denir. Özel olarak, eğer $\gamma : [a,b] \to X$ yolu yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmiş ise o zaman

$$L(\gamma) = b - a$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 2.0.8 $\gamma : [a,b] \to X$ yolu yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmiş olsun. O zaman $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı $t \to L(\gamma_t)$ dönüşümü kesin artandır.

Sonuç 2.0.1 $\gamma : [a,b] \to X$ rektifiye edilebilir bir yol olsun. Bu durumda

$$\lambda : [0, L(\gamma)] \to X$$

yolu yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmiştir. Başka bir ifadeyle her rektifiye edilebilir $\gamma : [a,b] \to X$ yolu için $\lambda : [0, L(\gamma)] \to X$ yoluna γ ile ilişkili yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmiştir diyeceğiz.

Tanım 2.0.10 E bir topolojik uzay ve $x_0 \in E$ olsun. Eğer her $m < f(x_0)$ için x_0 ın E de her $x \in W$ olacak şekilde bir W komşuluğu vardır ve $m \leq f(x)$ oluyorsa $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dönüşümüne x_0 noktasında alttan yarı-süreklidir denir. Ayrıca eğer E'deki her noktada alttan yarı-sürekli ise f'ye E üzerinde alttan yarı-süreklidir denir.

Örnek 2.0.3 E bir topolojik uzay ve $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ dönüşümü $x_0 \in E$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda f, x_0 noktasında alttan yarı-süreklidir.

Teorem 2.0.1 $\mathcal{C}([a,b], X)$ tanım kümesi $[a,b]$ olan X deki yolların kümesi gösterilsin. Buradaki topoloji, her $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}([a,b], X)$ için

$$|\gamma_1 - \gamma_2| := \sup_{t \in [a,b]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$$

şeklinde tanımlanan metrikle ilişkilidir. Buradan $L : \mathcal{C}([a,b], X) \to \overline{\mathbb{R}}$ uzunluk fonksiyonu alttan yarı-süreklidir.

Sonuç 2.0.2 Keyfi $M \in \mathbb{R}$ için $L(\gamma) \leq M$ şartını sağlayan $\gamma : [a,b] \to X$ yolların kümesi $\mathcal{C}([a,b], X)$ nin bir kapalı alt kümesidir.

Tanım 2.0.11 X bir metrik uzay olsun. Eğer X'in her kapalı sınırlı alt kümesi kompakt ise bu X metrik uzayına düzgündür denir. Başka bir ifadeyle keyfi sonsuz sınırlı bir dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 2.0.12 $\gamma : [a, b] \to X$ bir yol olsun. Eğer γ sabit bir yol ya da yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmiş bir $\gamma : [c, d] \to X$ yolu var ve bu yol $\gamma : [a, b] \to [c, d]$ olmak üzere $\gamma = \gamma' \circ \psi$ olacak şekilde bu iki aralık arasında bir tek afin homeomorfizmi vardır. Böylece bu dönüşüm

$$\psi(X) = \frac{(d-c)x + (bc - ad)}{b-a}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.0.9 $\gamma : [0, 1] \to X$ yay uzunluğu ile orantılı olarak parametrikleştirilmiş bir yol olsun. Bu durumda γ bir $L(\gamma)$ Lipschitz dönüşümdür.

Tanım 2.0.13 X bir metrik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ olacak şekilde $\gamma : [a, b] \to X$ rektifiye edilebilir bir uzay mevcut ise bu X metrik uzayına rektifiye edilebilir yollar ile bağlantılıdır denir.

Tanım 2.0.14 X bir metrik uzay olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$|x - y| = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

şeklinde tanımlanan metrik uzayına bir uzunluk uzayı denir. Burada infimum x ve y'yi birleştiren γ yolların kümesi üzerinde alınmıştır. Bu uzunluk uzayının metriğine bir uzunluk metriği denir.

Sonuç 2.0.3 Herhangi bir uzunluk uzayı rektifiye edilebilir yollar ile bağlantılıdır.

Örnek 2.0.4 Öklidyen uzay, normlu vektör uzay, vb. uzaylar uzunluk uzayına örnek verilebilir.

Lemma 2.0.2 X bir uzunluk uzayı $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha + \beta \geq |x - y|$ olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için

$$|x - z| \leq \alpha \text{ ve } |z - y| \leq \beta + \epsilon$$

olacak şekilde bir $z \in X$ noktası mevcuttur.

Önerme 2.0.10 (X, d) metrik uzayı, rektifiye edilebilir yol ile bağlantılı olsun. Bu durumda d_l, X üzerinde bir metriktir ve her $x, y \in X$ için

$$|x - y|_d \leq d_l(x, y)$$

bağıntısı doğrudur.

Tanım 2.0.15 Rektifiye edilebilir bir yol ile bağlantılı (X, d) metrik uzayı Önerme 2.0.10 da bahsedilen d_l metriğine d ile ilişkili X'in uzunluk metriği adı verilir.

Önerme 2.0.11 (X, d) rektifiye edilebilir yollar ile bağlantılı bir metrik uzay olsun. Bu durumda $(X, d_l) \to (X, d)$ birim dönüşümü süreklidir.

Önerme 2.0.12 (X, d) bir metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \to (X, d)$ bir rektifiye edilebilir yol olsun. Bu durumda γ, d_l metriğine göre süreklidir. Başka bir ifadeyle $\gamma : [a, b] \to (X, d)$ dönüşümü aynı zamanda bir yoldur.

Önerme 2.0.13 (X, d) rektifiye edilebilir bağlantılı bir metrik uzay olsun. Bu durumda (X, d) nin bir uzunluk uzayı olabilmesi için gerekli ve yeter koşul $d_l = d$ olmasıdır.

Önerme 2.0.14 (X, d) bir metrik uzay, d_l uzunluk metriği ile bağlantılı ve $\gamma : [a, b] \to X$ (X, d_l) içinde bir yol olsun. Bu durumda γ da (X, d) bir yoldur ve

$$L_d(\gamma) = L_{d_l}(\gamma).$$

Sonuç 2.0.4 (X, d) rektifiye edilebilir bağlantılı bir metrik uzay olsun. Bu durumda (X, d_l) bir uzunluk uzayıdır.

Tanım 2.0.16 X bir metrik uzayı olsun. Her $t_1, t_2 \in X$ için

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |t_1 - t_2|$$

uzaklığını koruyan $\gamma : [a, b] \to X$ yoluna X metrik uzay uzayında geodezik yol veya kısaca geodezik denir. Uzaklığı koruyan $\gamma : [0, +\infty] \to X$ dönüşümüne geodezik ışın ve uzaklığı koruyan $\gamma : \mathbb{R} \to X$ dönüşümüne ise geodezik doğru denir.

Not 2.0.2 Geodezik yollar, ışınlar ve doğruların injektif olduğu ve kendi tanım kümesinin kapalı bir alt aralığına bir geodezik yolun kısıtlanışı da bir geodezik yoldur. Bunların ispatı tanımlarından açıktır.

Tanım 2.0.17 X bir metrik uzayı olsun. X'in içerisideki bir geodezik yolun görüntüsüne geodezik parça denir. X'in içerisindeki geodezik doğrunun görüntüsüne ise bir düz doğru denir.

Not 2.0.3 Eğer $\gamma : [a,b] \to X$ yolu x ve y noktalarını birleştiriyorsa, o zaman $\gamma([a,b])$ geodezik parçası bu iki noktayı birleştirir. Genel olarak, eğer x ve y metrik uzayın iki noktası ise bu durumda sıfır vardır, bir veya daha fazla geodezik parça onları birleştirir. Burada $[x,y]$ ile x ve y'yi birleştiren belirli bir $\gamma([a,b])$ geodezik parçasının olduğunu göstereceğiz.

Not 2.0.4 $[x_0, x_1]$ geodezik parçası üzerindeki noktalar, $[0,1]$ aralığı tarafından doğal bir şekilde parametrileştirilir. Bu parametreleştirmeyi x_t veya $(1-t)x_0 + tx_1$ ile göstereceğiz, ayrıca $[x_0, x_1]$ üzerinde bir nokta $t|x_0, x_1|$'den x_0 a olan uzaklıkta yer alır.

Lemma 2.0.3 $[x,y]$ bir X metrik uzayında keyfi bir geodezik parça ve $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to X$ ve $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to X$ görüntüleri $[x,y]$ de olan iki geodezik olsun. Bu durumda $\mathbb{R}$'nin bu $[a_1, b_1]$ ve $[a_2, b_2]$ aralıkları aynı uzunluğa sahiptir ve her $t \in [a_2, b_2]$ için

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t + \alpha)$$

olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısı mevcuttur. Ayrıca γ_1 ve γ_2 aynı uzunluğa sahiptir.

Not 2.0.5 Yukarıdaki lemmayı geodezik doğrular için de yapabiliriz. Yani iki $\gamma_1 : \mathbb{R} \to X$ ve $\gamma_2 : \mathbb{R} \to X$ geodezik doğrusunun aynı görüntüye sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t + \alpha)$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısının olmasıdır.

Tanım 2.0.18 X bir metrik uzayı olsun. Görüntüsü $[x,y]$ olan X'deki keyfi bir geodezik yolun uzunluğuna bir X metrik uzayında $[x,y]$ geodezik parçasının uzunluğu denir.

Önerme 2.0.15 X bir metrik uzay ve $\gamma : [a,b] \to X$ bir geodezik yol olsun. Bu durumda γ yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmiştir.

Önerme 2.0.16 X bir metrik uzay ve $\gamma : [a,b] \to X$ yay uzunluğu tarafından parametrikleştirilmi bir yol olsun. Bu durumda aşağıdaki üç özellik denktir:

i) γ bir geodeziktir,

ii) Her $u, v \in \mathbb{R}$ için $0 \leq u \leq v \leq b$ olmak üzere

$$|\gamma(a) - \gamma(v)| = |\gamma(a) - \gamma(u)| + |\gamma(u) - \gamma(v)|,$$

iii) $L(\gamma) = |\gamma(a) - \gamma(b)|$.

Tanım 2.0.19 Herhangi bir metrik uzayda x, y, z noktaları verilsin. Bu durumda bu üç nokta ikişer ikişer ayrık ve

$$|x - z| = |x - y| + |y - z|$$

eşitliği sağlanıyorsa, y noktası x ve z arasındadır denir.

Önerme 2.0.17 X bir metrik uzay, x, y, z ve t ise bu metrik uzayda ikişer ayrık noktalar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

$$y, \ x \text{ ve } z \text{ arasındadır ve } z \text{ de } x \text{ ve } t \text{ arasındadır.}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y, \ x \text{ ve } t \text{ arasındadır ve } z \text{ de, } y \text{ ve } t, \text{ arasındadır.}$$

Uyarı 2.0.1 Bazı durumlarda arasındalığın geçişkenliği genelde doğru değildir. Örneğin S^2 kümesi içindeki büyük bir çemberin üzerindeki noktaları düşünecek olursak, bu çember üzerindeki x, y, z ve t noktaları için y, x ve z arasında, z de y ve t arasında olsun. Bu durumda z de x ve t arasında değildir.

Önerme 2.0.18 X bir geodezik uzay ve $x, y, z \in X$ üç nokta olsun. Bu durumda y'nin x ve z arasında olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu üç noktanın ikişer olarak ayrık ve y'yi içeren bir $[x, z]$ geodezik parçanın olmasıdır.

Tanım 2.0.20 X bir metrik uzay olsun. Bu durumda X içinde verilen keyfi iki noktası için bu noktaları birleştiren bir geodezik yol var ise bu X metrik uzayına geodezik(uzay) denir.

Önerme 2.0.19 X bir geodezik uzay olsun. x, y elemanları X de keyfi iki nokta ve $\gamma : [a, b] \to X$ dönüşümü ise bu noktaları birleştiren bir geodezik olmak üzere

$$|a - b| = |x - y|$$

olup, γ da yay uzunluğu tarafından parametrikleştirildiği için

$$|a - b| = L(\gamma)$$

yazabiliriz. Böylece

$$|x - y| = L(\gamma)$$

elde ederiz. Bu ise geodezik uzayın bir uzunluk uzayı olduğunu gösterir.

Örnek 2.0.5 E^n, $n \geq 1$ Öklid uzayı bir geodezik uzaydır. Gerçekten E^n de keyfi iki noktayı birleştiren bir geodezik parça bu noktaları birleştiren bir afin parçadır.

Örnek 2.0.6 Bir normlu vektör uzayının keyfi konveks alt kümesi indirgenmiş olduğu metrikte bir geodezik uzaydır.

Tanım 2.0.21 Eğer X bir geodezik metrik uzay ve X deki keyfi geodezik parça bir düz doğru içinde ise bu X metrik uzayına düzdür denir. Bu tanıma göre E^n, $n \geq 1$ Öklid uzayı düzdür.

Tanım 2.0.22 X bir metrik uzay olsun. Bu durumda $x, y \in X$ için bu noktaları birleştiren bir tek geodezik parça var ise X'e tekşekilde geodeziktir denir.

Tanım 2.0.23 X tek biçimde geodezik uzay olsun. Bu durumda her $x, y \in A \subset X$ için $[x, y]$ geodezik parçası A da kalıyorsa, bu X'in bir alt uzayı olan A ya geodezik olarak konvekstir denir.

Not 2.0.6 Eğer A, X'in bir geodezik olarak alt kümesi ve $f : X \to X$ bir izometri ise bu durumda $f(A)$ da aynı zamanda geodezik olarak bir konveks alt kümedir.

Tanım 2.0.24 X tek biçimde geodezik uzay olsun. Bu durumda her $x, y \in A \subset X$ için x'den y'ye farklı olan $[x, y]$ geodezik parçası üzerindeki keyfi nokta A'nın içinde kalıyorsa bu $A \subset X$ alt kümesine kesin geodezik olarak konvekstir denir.

Tanım 2.0.25 X bir metrik uzay olsun. Bu durumda birbirinden farklı tüm $x, y \in X$ için bunların arasında kalan bir z noktası varsa bu x metrik uzayına Menger konvekslik veya Menger anlamında konvekslik denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 Global Pozitif Olmayan Eğri

Tanım 3.1.1 (N, d) bir tam metrik uzay ve N nin uzaklığı, N de verilen uç noktaların birleştirilmesiyle elde edilen doğrunun uzunluğunun infimumu yardımıyla hesaplanan bir geodezik uzunluk uzayı olsun. Eğer verilmiş olan $x \in X$ noktasından başlayan α ve β geodezik yayların uzunluk dönüşümü olan $t \to d(\alpha(t), \beta(t))$ bir konveks fonksiyon ise, bu taktirde bir geodezik uzunluk uzayına Busemann anlamında global pozitif olmayan eğri uzayı denir. Eğer $x_1, x_2 \in N$ için

$$d(x,z)^2 \leq \frac{1}{2}d(x,x_1)^2 + \frac{1}{2}d(x,x_2)^2 - \frac{1}{4}d(x_1,x_2)^2$$

olacak şekilde her bir $x \in N$ için $z \in N$ var ise bu durumda (N, d) ye bir global Pozitif Olmayan Eğri (NPC) uzayı denir. Bu global NPC uzayına aynı zamanda Hadamard Uzayları da denir. Eğer (N, d) bir global NPC ise bu durumda (N, d) Busemann anlamında global NPC uzayıdır. Bir global NPC uzayındaki her bir $x_1, x_2 \in N$ nokta çiftleri her $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ için $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$ şeklinde tanımlanan $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ uzunluğuna göre bir $\gamma : [0, 1] \to N$ eğrisinin oluşturduğu geodezik tarafından bağlanabilir. Ayrıca bu geodezik tek şekilde belirlidir. İlaveten yukarıdaki bu z noktası x_1 ve x_2 noktalarının orta noktası olup

$$d(x_1,z) = d(x_2,z) = \frac{1}{2}d(x_1,x_2)$$

özelliğine sahiptir. Şimdi NPC uzaylarına birkaç örnek verelim.

Örnek 3.1.1 Hilbert uzayları global NPC uzayıdır. Buradaki geodezik doğru parçalarıdır.

Örnek 3.1.2 Bir (N, g) Riemann manifoldunun global NPC olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul onun tam, basit bağlantılı ve pozitif olmayan bölüm eğrisi olmasıdır.

Tanım 3.1.2 Eğer her bir $\gamma : [0, 1] \to N$ geodeziği $\gamma([0, 1]) \subseteq C$ olacak şekilde C içindeki keyfi iki noktayı birleştiriyorsa $C \subseteq N$ altkümesine konveks denir.

Tanım 3.1.3 $\gamma : [0, 1] \to C$ bir geodezik olsun. $f : C \to R$ için $f \circ \gamma : [0, 1] \to R$ fonksiyonu her $t \in [0, 1]$ için

$$f(\gamma(t)) \leq (1-t)f(\gamma((0)) + tf(\gamma(1))$$

konveks oluyorsa bu taktirde $f : C \to R$ konveks fonksiyon adı verilir. Şimdi aşağıdaki lemma ile konveks bir fonksiyonu bir NPC uzayı içindeki bazı özelliklerini ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.1.1 (N,d) bir global NPC, $C \subseteq N$ bir konveks küme ve $\gamma : [0,1] \to C$ ise $\gamma(0)$ ile $\gamma(1)$ birleştiren bir geodezik olsun. Bu durumda

(**1**.) Her $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\gamma|_{[t_1,t_2]}(\lambda) = \gamma((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)$$

eğrisi $\gamma(t_1)$ ile $\gamma(t_2)$ yi bağlayan bir tek geodeziktir.

(**2**.) Keyfi $t_0 \in [0,1]$ için $\gamma(t_0)$ ile $\gamma(1-t_0)$ arasındaki orta nokta $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ şeklindedir.

(**3**.) Eğer $f : C \to \mathbb{R}$ konveks ise, bu taktirde

$$\int_0^1 f(\gamma(\beta))d\beta = \int_0^1 f(\gamma(1-\lambda))d\lambda.$$

İspat 3.1.1 (**1**.) $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} d(\gamma|_{[t_1,t_2]}(\lambda), \gamma(t_1)) &= d(\gamma((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2), \gamma(t_1)) \\ &= |t_1 - (1-\lambda)t_1 - \lambda t_2| d(\gamma(0), \gamma(1)) \\ &= \lambda |t_2 - t_1| d(\gamma(0), \gamma(1)) = \lambda d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(\gamma|_{[t_1,t_2]}(\lambda), \gamma(t_2)) &= d(\gamma((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2), \gamma(t_2)) \\ &= |t_2 - (1-\lambda)t_1 - \lambda t_2| d(\gamma(0), \gamma(1)) \\ &= (1-\lambda)|t_2 - t_1| d(\gamma(0), \gamma(1)) = (1-\lambda) d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \end{aligned}$$

olup iddia doğrudur.

(**2**.) Lemmanın öncülleri ve uygun tanımlar altında ispat açıktır.

(**3**.) İntegralde $\beta = (1-\lambda)$ değişken değişimi yapılırsa istenilen eşitlik elde edilir.

3.2 NPC Uzayında Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bir NPC uzayında Hermite-Hadamard Eşitsizliğini ispatlamak için ilk önce aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır. Bu lemma da a noktasını b noktasına bağlayan geodeziği kullanarak $[a,b]$ aralığında, bir f fonksiyonunun ortalama değeri elde edilecektir.

Lemma 3.2.1 f fonksiyonu $I = [a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b)d\lambda = \int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a)d\lambda$$

eşitlikleri doğrudur. Buradan Hermite-Hadamard Eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b)d\lambda \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

X bir vektör uzayı ve $a, b \in X$, $a \neq b$ olsun. Bu durumda a yı b ye birleştiren doğru parçasını

$$\alpha_{a,b} = \Big\{(1-\lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0,1]\Big\}$$

ile göstereceğiz. $\lambda_0 \in [0,1]$ için

$$\alpha_{a,b}(\lambda_0) = (1-\lambda_0)a + \lambda_0 b.$$

$f : \alpha_{a,b} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $g_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}$ de $g_{a,b}(\lambda) = f(\alpha_{a,b}(\lambda))$ şeklinde tanımlanan diğer bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin $\alpha_{a,b}$ üzerinde konveks olabilmesi için gerekli ve yeter koşul $g_{a,b}$ nin $[a,b]$ üzerinde konveks olmasıdır. Buradan $\alpha_{a,b} \subseteq X$ doğru parçası üzerinde tanımlanan keyfi konveks fonksiyon için

$$f\Big(\alpha_{a,b}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big) \leq \int_0^1 f(\alpha_{a,b}(\lambda))d\lambda \leq \alpha_{f(a)}, \alpha_{f(b)}\Big(\frac{1}{2}\Big) \tag{3.2.2}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Önerme 3.2.1 $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, $x, y \in X$ ve f de $\alpha_{a,b} \subset X$ doğru parçası üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (3.2.1) in bir sonucu olarak $1 \leq p < \infty$ için

$$\|\frac{x+y}{2}\|^p \leq \int_0^1 \|(1-\lambda)x + \lambda y\|^p d\lambda \leq \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} \tag{3.2.3}$$

normlu uzaylarda Hermite-Hadamard eşitsizliği yazılabilir. Bunu yaparken $f(x)\|x\|^p$ alınmıştır. Bu işlem Dragomir [9] tarafından ifade ve ispat edilmiştir. $p = 1$ için üçgen eşitsizliğinin bir genellemesi elde edilir. (3.2.3) ün sağ tarafı $(x, y) \in X^2$ çiftinin p normuna benzemektedir. [30].

Şu ana kadar ki yapılan işlemlerle artık bir global NPC uzayı olan N içinde H-H eşitsizliğinin elde edilmesi için gerekli teorik yapı hazırdır. Yani, verilen iki noktayı bağlayan bir tek geodiziğin varlığı ve konveks fonksiyonlar kavramının uygun bir eğri ve konvekslikle ilgili olduğu ortaya çıkmıştır. Global NPC uzaylarında ki bu kavramlardan dolayı, bu tarz uzaylar için H-H eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi elde edilebilir.

Teorem 3.2.1 (N,d) bir global NPC uzayı, $C \subseteq N$ bir konveks küme ve $f : C \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $\gamma : [0,1] \to C$ geodizik eğrisi için

$$f\big(\gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\big) \leq \int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda \leq \alpha_{f(\gamma(0)),f(\gamma(1))}\Big(\frac{1}{2}\Big) \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat 3.2.1 f konveks olduğu için ve her $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f\big(\gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\big) \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(\lambda)) + \Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(1-\lambda)) \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(0)) + \Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(1))$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan (3.2.4) eşitsizliğini $[0,1]$ üzerinde integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\big(\gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\big)d\lambda &\leq \int_0^1 \Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(\lambda)) + \Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(1-\lambda))\Big)d\lambda \\ &\leq \int_0^1 \Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(0)) + \Big(\frac{1}{2}\Big)f(\gamma(1))\Big)d\lambda \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

bulunur. (3.2.1) e göre

$$\int_0^1 f(\gamma(\lambda)d\lambda = f(\gamma(1-\lambda)d\lambda$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} f\big(\gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\big) &\leq \int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda \\ &\leq \alpha_{f(\gamma(0))f(\gamma(1))}\Big(\frac{1}{2}\Big) \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 3.2.2 1 (3.2.4) eşitsizliğinin sağ tarafı soldan daha güçlüdür, yani

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda - f\big(\gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\big) \\ &\leq \alpha_{f(\gamma(0))f(\gamma(1))}\Big(\frac{1}{2}\Big) - \int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Gerçekten de eğer γ a yı b ye bağlayan bir tek geodezik ve $m = m(a,b)$ a ve b noktaları arasındaki bir tek orta nokta ise, bu durumda

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 f(\gamma_{a,b}(\lambda))d\lambda &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(\gamma_{a,b}(\lambda))d\lambda + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(\gamma_{a,b}(\lambda))d\lambda \\ &= \int_0^1 f(\gamma_{a,m}(\lambda))d\lambda + \int_0^1 f(\gamma_{m,b}(\lambda))d\lambda \\ &\leq \frac{f(\gamma_{a,m}(0)) + f(\gamma_{a,m}(1))}{2} + \frac{f(\gamma_{m,b}(0)) + f(\gamma_{m,b}(1))}{2} \\ &= f\Big(\gamma_{a,b}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big) + \frac{f(\gamma_{a,b}(0)) + f(\gamma_{a,b}(1))}{2} \end{aligned}$$

olup, istenilen elde edilmiştir.

2 Eğer (N,d) bir global NPC uzayı ve $z \in N$ ise, bu durumda $d_z(x) = d(x,z)$ yeni a noktasından z ye uzaklığı olan bie konveks fonksiyonun basit bir örneğidir. İlaveten a nın karesi kesin konvekstir ve bir sonuç olarak, bir global NPC uzayındaki toplar konveks kümedir. Daha ayrıntılı bilgi için Bridson ve Haefliger' in [34] çalışmasına bakılabilir. Buradan verilmiş olan $z, x_0, x_1 \in N$ ve $p \geq 1$ için $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$f_z(t) = d^p(z, \gamma_{x_o,x_1}(t))$$

fonksiyonu konvekstir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} d^p(z, \gamma_{x_o,x_1}\left(\frac{1}{2}\right)) &\leq \int_0^1 d^p(z, \gamma_{x_o,x_1}(\lambda))d\lambda \\ &\leq \frac{d^p(z,x_o) + d^p(z,x_n)}{2} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlik global NPC uzayları kavramı içerisinde (3.2.3) eşitsizliğinin benzeridir. Diğer taraftan γ ve η geodezik olmak üzere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = d^2(\gamma(t), \eta(t))$$

fonksiyonunun konveksliğini kullanarak aşağıda $p = 2$ için (3.2.8) eşitsizliğinin özel bir durumu elde edilir.

Sonuç 3.2.1 (N,d) bir global NPC uzayı ve $\gamma_{x_0x_1}$ ile $\eta_{y_0y_1}$ N de iki geodezik olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d^2(\eta_{y_o,y_1}\left(\frac{1}{2}\right), \gamma_{x_o,x_1}\left(\frac{1}{2}\right)) &\leq \int_0^1 d^2(\eta_{y_o,y_1}(\lambda), \gamma_{x_o,x_1}(\lambda))d\lambda \\ &\leq \frac{d^2(y_0,x_0) + d^2(y_1,x_1)}{2} - \frac{1}{6}[d(y_0,y_1) - d(x_0,x_1)]^2 \\ &\leq \frac{d^2(y_0,x_0) + d^2(y_1,x_1)}{2} \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak her $t \in [0,1]$ için $\eta_{y_o,y_1}(t) = z$ ise

$$\begin{aligned} d^2(z, \gamma_{x_o,x_1}(\lambda)) &\leq \int_0^1 d^2(z, \gamma_{x_o,x_1}(\lambda))d\lambda \\ &\leq \frac{d^2(z,x_0) + d^2(z,x_1)}{2} - \frac{1}{6}d^2(x_0,x_1) \\ &\leq \frac{d^2(z,x_0) + d^2(z,x_1)}{2} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat 3.2.2 $\lambda \in [0,1]$ için keyfi bir global NPC uzayındaki geodezik kıyaslamaya göre [32]

$$\begin{aligned} d^2(\eta_{y_o,y_1}(\lambda), \gamma_{x_o,x_1}(\lambda)) &\leq (1-\lambda)d^2(y_o,x_o) + \lambda d^2(y_1,x_1) \\ &- \lambda(1-\lambda)[d(y_o,y_1) - d(x_o,x_1)]^2 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

bu durumda (3.2.10) eşitsizliği global NPC uzayları için H-H eşitsizliği ve (3.2.11) in bir sonucudur.

Önerme 3.2.3 H bir Hilbert uzayı ve $x, y \in H$ için $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$\left\|(1-\lambda)x + \lambda y\right\|^2 = (1-\lambda)\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu biliyoruz. Ayrıca $p > 1$ için bir p düzgün E konveks Banach uzayında her $x, y \in E$,$\lambda \in [0,1]$

$$W_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$$

ve bir c pozitif sabit için

$$\left\|(1-\lambda)x + \lambda y\right\|^p \leq (1-\lambda)\|x\|^p + \lambda\|y\|^p - W_p(\lambda)c\|x-y\|^p$$

eşitsizliği doğrudur [33]. Buradan her $p > 1$ için (3.2.3) ün aşağıdaki genelleştirilmesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \|\frac{x+y}{2}\|^p &\leq \int_0^1 \|(1-\lambda)x + \lambda y\|^p d\lambda \\ &\leq \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - \frac{2c}{(p+1)(p+2)}\|x-y\|^p \\ &= \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Aşağıdaki önerme ile (3.2.4) nin farklı bir genellemesini vereceğiz.

Önerme 3.2.4 (N, d) bir global NPC uzayı $C \subseteq N$ konveks bir küme ve $f : C \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\gamma : [0,1] \to C$ geodeziği için

$$\begin{aligned} f(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)) &\leq \frac{1}{2}\left[f(\gamma\left(\frac{2}{3}\right)) + f(\gamma\left(\frac{1}{3}\right))\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(\gamma\left(\frac{1}{4}\right)) + f(\gamma\left(\frac{3}{4}\right))\right] \\ &\leq \int_0^1 f(\gamma(t))dt \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(\gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{f(\gamma(0) + f(\gamma(1)}{2}\right] \\ &\leq \alpha_{f(\gamma(0)),f(\gamma(1))}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat 3.2.3 Birinci ve ikinci eşitsizlikleri ispat etmek için f nin konveksliğini ve

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\Big),\ \frac{1}{3}=\frac{5}{6}\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\frac{3}{4},\ \frac{2}{3}=\frac{1}{6}\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\frac{3}{4}$$

eşitliklerini kullanmak yeterlidir. Diğer taraftan (3.2.3) H-H Eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} f(\gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)) &\leq \int_0^1 f(\gamma_{[0,\frac{1}{2}]}(\lambda))d\lambda \\ &\leq \alpha_{f(\gamma(0),f(\gamma(\frac{1}{2})}\Big(\frac{1}{2}\Big) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)) &\leq \int_0^1 f(\gamma_{[\frac{1}{2},1]}(\lambda))d\lambda \\ &\leq \alpha_{f(\gamma(\frac{1}{2}),f(\gamma(1)}\Big(\frac{1}{2}\Big) \end{aligned}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Burada integrallerde değişken değişimi, toplama ve diğer gerekli işlemleri yaparak ispat tamamlanır. Şimdi önceki sonucu aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Teorem 3.2.2 (N,d) bir global NPC uzayı $C\subseteq N$ konveks bir küme ve $f:C\to\mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve k,p de pozitif tamsayı olmak üzere, her $\gamma:[0,1]\to C$ geodeziği için

$$\begin{aligned} f(\gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)) &\leq \frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} f\Big(\gamma\Big(\frac{2i+1}{2k^p}\Big)\Big) \\ &\leq \int_0^1 f(\gamma(t))dt \\ &\leq \frac{1}{2k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1}\Big[f\Big(\gamma\Big(\frac{i+1}{k^p}\Big)\Big)+f\Big(\gamma\Big(\frac{i}{k^p}\Big)\Big)\Big] \\ &\leq \alpha_{f(\gamma(0))f(\gamma(1))}\Big(\frac{1}{2}\Big). \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

İspat 3.2.4 Teoremde verilenlere göre, H-H eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} f\Big(\gamma\Big(\frac{2i+1}{2k^p}\Big)\Big) &\leq \int_0^1 f(\gamma_{[\frac{i}{k^p},\frac{i+1}{k^p}]}(t))dt \\ &\leq \frac{f\Big(\gamma\Big(\frac{i}{k^p}\Big)\Big)+f(\gamma\Big(\frac{i+1}{k^p}\Big)\Big)}{2}. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

üstteki bu eşitsizliği $i=0,1,...,k^p-1$ üzerinden toplamını alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k^p-1} f\Big(\gamma\Big(\frac{2i+1}{2k^p}\Big)\Big) &\leq k^p\int_0^1 f(\gamma(t))dt \\ &\leq \sum_{i=0}^{k^p-1}\frac{f\Big(\gamma\Big(\frac{i}{k^p}\Big)\Big)+f(\gamma\Big(\frac{i+1}{k^p}\Big)\Big)}{2} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

böylece

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} f\left(\gamma\left(\frac{2i+1}{2k^p}\right)\right) &\leq \int_0^1 f(\gamma(t))dt \\
&\leq \frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} \frac{f\left(\gamma\left(\frac{i}{k^p}\right)\right) + f(\gamma\left(\frac{i+1}{k^p}\right))}{2} \qquad (3.2.16)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $f \circ \gamma$ nın konveksliğinden

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} f\left(\gamma\left(\frac{2i+1}{2k^p}\right)\right) &\geq f\left[\gamma\left(\frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} f\left(\gamma\left(\frac{2i+1}{2k^p}\right)\right)\right)\right] \\
&= f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad (3.2.17)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} \frac{f\left(\gamma\left(\frac{i}{k^p}\right)\right) + f\left(\gamma\left(\frac{i+1}{k^p}\right)\right)}{2} &= \frac{1}{2k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1}\left[f\left(\gamma\left(\frac{i+1}{k^p}\right)\right) + f\left(\gamma\left(\frac{i}{k^p}\right)\right)\right] \\
&= \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2} \qquad (3.2.18)
\end{aligned}
$$

ifadelerini yazabiliriz. Böylece (3.2.16), (3.2.17) ve (3.2.18) den (3.2.13) eşitsizliğini ispat etmiş oluruz. Önceki teoremde $k^p = 2$ alınırsa Önerme 3.2.4 elde edilir.

Teorem 3.2.3 (N, d) bir global NPC uzayı $C \subseteq N$ konveks bir küme ve $f : C \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde her geodezik $\gamma : [0,1] \to C$ ve $\gamma \in [0,1]$ için

$$
f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq l(\lambda) \leq \int_0^1 f(\gamma(t))dt \leq L(\lambda) \leq \alpha_{f(\gamma(0)),f(\gamma(1))}\left(\frac{1}{2}\right)
$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$
l(\lambda) = \lambda f\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) + (1-\lambda) f\left(\gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\right)
$$

ve

$$
L(\lambda) = \frac{1}{2}[f(\gamma(\lambda)) + f(\gamma(0)) + (1-\lambda) f(\gamma(1))].
$$

İspat 3.2.5 İddiaya göre f, C üzerinde bir konveks fonksiyon olduğundan Teorem 3.2.4 eşitsizliğinden $\lambda \neq 0$ için γ geodeziği $\gamma(0)$ ı $\gamma(\lambda)$ ya birleştireceğinden

$$
\begin{aligned}
f\left(\gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) &\leq \int_0^1 f(\gamma_{[0,\lambda]}(t))dt \\
&\leq \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2} \qquad (3.2.19)
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned} f\left(\gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\right) &\leq \int_0^1 f(\gamma|_{[\lambda,1]}(t))dt \\ &\leq \frac{f(\gamma(\lambda))+f(\gamma(1))}{2} \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (3.2.19) eşitsizliğini λ ile (3.2.20) eşitsizliğini ise $(1-\lambda)$ ile çarpıp bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$l(\lambda) \leq \lambda \int_0^1 f(\gamma|_{[0,\lambda]}(t))dt + (1-\lambda)\int_0^1 f(\gamma|_{[\lambda,1]}(t))dt = \int_0^1 f(\gamma(t))dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan f konveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)) &= f\left(\gamma\left(\lambda\frac{\lambda}{2}+(1-\lambda)\frac{(1+\lambda)}{2}\right)\right) \\ &\leq l(\lambda) \\ &= \int_0^1 f(\gamma(t))dt \\ &= L(\lambda) \\ &= \alpha_{f(\gamma(0)),f(\gamma(1))}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.2.5 Yukarıdaki teoremden elde edilen bu sonuçtan teoremin şartları aynı olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} f(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)) &\leq sup_{\lambda\in[0,1]} l(\lambda) \\ &\leq \int_0^1 f(\gamma(t))dt \\ &\leq inf_{\lambda\in[0,1]} L(\lambda) \\ &\leq \alpha_{f(\gamma(0)),f(\gamma(1))}\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

3.3 NPC Uzayında H-H Eşitsizliğinin Genelleştirilmesi

Bu kısımda ilk önce klasik anlamda bir lemma ifade edilecek, daha sonra ise NPC uzayında genelleştirilecektir.

Lemma 3.3.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \\ &\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right) \\ &\leq \frac{1}{16}\left(2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+7f(a)+7f(b)\right) \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

(N,d) bir global NPC uzayı , $C \subseteq N$ konveks bir küme, $f : C \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $\gamma : [0,1] \to C$ ise $\gamma(0)$ ı $\gamma(1)$ e bağlayan bir geodezik olsun. Buradaki amacımız NPC uzayındaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini genelleştirmek. Bunu yapmak için önce her $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için

$$x_n = \frac{1}{2}\left[f\left(\gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)+f\left(\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$

ve

$$y_n = \frac{2}{n+1}f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\left[1-\frac{2}{n+1}\right]\frac{f(\gamma(0))+f(\gamma(1))}{2}$$

dizilerini tanımlayalım.

Sonuç 3.3.1 $\mathbb{R}$ deki alışılmış uzaklığa göre özel bir durumda

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right)$$

ve

$$y_{15} = \frac{1}{16}\left(2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+7f(a)+7f(b)\right)$$

olacaktır.

Önerme 3.3.1 x_n ve y_n yukarıdaki şekilde tanımlanan diziler olsun. Bu durumda
(**1**.) $\{x_n\}_{n\geq 2}$ ve $\{y_n\}_{n\geq 2}$ azalmayan dizilerdir,
(**2**.) $n \geq 2$ için

$$f\left(\gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq x_n \leq y_n \leq \frac{f(\gamma(0))+f(\gamma(1))}{2},$$

bağıntıları doğrudur.

İspat 3.3.1 (**1.**) $\{x_n\}_{n\geq 2}$ dizisinin monotonluğu ve f nin konveksliğinden

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\gamma\left(\left[1-\frac{1}{n(n-1)}\right]\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n-1)}\frac{n}{n+1}\right)$$

ve

$$\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)=\gamma\left(\left[1-\frac{1}{n(n-1)}\right]\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n(n-1)}\frac{1}{n+1}\right)$$

bağıntıları doğrudur. Diğer taraftan $\{y_n\}_{n\geq 2}$ NPC uzayındaki Hermite-Hamadard eşitsizliğinin bir sonucu olarak azalmayandır. Dolayısıyla (**1.**) in ispatı yapılmış olur.

(**2.**) birinci eşitsizlik f nin konveksliğinin ve keyfi $t_0 \in [0,1]$ için $\gamma(t_0)$ ve $\gamma(1-t_0)$ ın arasındaki orta nokta $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ olmasının bir sonucudur. Daha sonra özel olarak eğer $t_0=\frac{1}{n}$ olarak kabul edilirse,

$$f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)\leq\frac{1}{2}\left[f\left(\gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)+f\left(\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi ikinci eşitsizliği ispat etmek için doğru olan $\{x_n\}_{n\geq 2}$ dizisinin azalmayan oluşu ve f nin konveksliğinden

$$\gamma\left(\frac{1}{n+1}\right)=\gamma\left(\left[1-\frac{2}{(n+1)}\right]0+\frac{2}{(n+1)}\frac{1}{2}\right),$$

$$\gamma\left(\frac{n}{n+1}\right)=\gamma\left(\left[1-\frac{2}{(n+1)}\right]+\frac{2}{(n+1)}\frac{1}{2}\right)$$

ispatın geri kalanı ise NPC uzayları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinde açıktır. Yukarıdaki şekilde tanımlanan dizilere göre NPC uzayındaki H-H eşitsizliğini

$$f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)=x_3\leq x_3\leq x_4\leq\int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda\leq y_3\leq\frac{f(\gamma(0))+f(\gamma(1))}{2}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Aşağıdaki teorem yukarıda bahsedilen diziler ve Önerme (3.3.1) yardımıyla elde edilmiştir.

Teorem 3.3.1 (N,d) bir global NPC uzayı, $C\subseteq N$ bir konveks küme $f: C\to\mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun ve $n\geq 3$ olsun. Bu taktirde tüm geodezik $\gamma:[0,1]\to C$ için

$$\begin{aligned}f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) &\leq x_3\leq x_4\leq\int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda\\ &\leq z_2\leq ...\leq z_n\leq ...\\ &= \frac{f(\gamma(0))+f(\gamma(1))}{2}\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

Önerme 3.3.2 Şimde $n \geq 2$ için

$$z_n = \frac{1}{2}\Big(x_n + f(\gamma(0)) + f(\gamma(1)) \Big)$$

ve

$$w_n = \frac{1}{2}\Big(y_n + f(\gamma(0)) + f(\gamma(1)) \Big)$$

dizilerini göz önüne alalım. Bu taktirde

i $\{z_n\}_{n\geq 2}$ ve $\{w_n\}_{n\geq 2}$ azalmayan dizilerdir,

ii $n \geq 2$ için $z_n \leq w_n$,

ii $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2} \right] &= z_2 \leq ... \leq z_n \leq ... \\ &= \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2} \end{aligned}$$

$n \geq 3$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2} \right] &= w_2 \leq ... \leq w_n \leq ... \\ &= \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2}. \end{aligned}$$

İspat 3.3.2 $z_n = y_3 = z_n = w_3$ ve Önerme 3.3.1 den ispat açıktır. Önerme 3.3.1 bize Heinz ve Heron ortalamaları arasında kıyaslamaya izin vermektedir. Leach ve Sholonder [18]

$$\sqrt[3]{G^2 A} \;<\; L \tag{3.3.1}$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir. Özel olarak (3.3.1) ve aritmetik-geometrik eşitsizliğinin bir uygulaması olarak

$$G < \sqrt[3]{G^2 A} < L$$

elde ederiz. Burada önceki önermeyi uygularsak

$$G < H_{\frac{1}{3}}(\alpha, \beta) < \sqrt[3]{G^2 A} < L$$

şeklinde yeni bir genelleştirme elde ederiz.

3.4 Uygulamalar

$(N,d)=(\mathbb{R},|.|)$ olsun. Buradaki reel sayıların global NPC uzayındaki uzaklığı alışılmış metriktir, yani $d(x,y)=|x-y|$. Eğer $\gamma_{a,b}(t)=(1-t)a+b$, yani a yı b ye bağlayan bir tek geodezik ve $f:[a,b]\to R$ bir konveks fonksiyon ise, bu taktirde

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+(n-1)b}{n}\right)+f\left(\frac{(n-1)a+b}{n}\right)\right]\\
y_n &= \frac{2}{n+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left[1-\frac{2}{n+1}\right]\frac{f(a)+f(b)}{2}\\
z_n &= \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\\
w_n &= \frac{1}{2}\left(y_n+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Önerme 3.4.1 $f:[a,b]\to R$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1 Keyfi $n\geq 3$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq x_3\leq x_4\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\\
&\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\\
&= y_3\leq ...\leq y_n\leq ...\leq \frac{f(a)+f(b)}{2},
\end{aligned}
$$

2 Keyfi $n\geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq x_3\leq x_4\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\\
&\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\\
&= z_3\leq ...\leq z_n\leq ...\leq \frac{f(a)+f(b)}{2},
\end{aligned}
$$

3 Keyfi $n\geq 3$ için

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq x_3\leq x_4\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\\
&\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\\
&= w_3\leq ...\leq w_n\leq ...\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}
$$

Teorem 3.4.1 (N, d) bir global NPC uzayı, $C \subseteq N$ bir konveks küme ve $f : C \to R$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $n \geq 2$ ve her $\gamma : [0,1] \to C$ geodiziği için

$$\begin{aligned} f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) &\leq x_3 \leq x_4 \leq \int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda \\ &\leq z_2 \leq ... \leq z_n \leq ... \\ &= \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2} \end{aligned}$$

ve $m \geq 3$

$$\begin{aligned} f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) &\leq x_3 \leq x_4 \leq \int_0^1 f(\gamma(\lambda))d\lambda \\ &\leq w_2 \leq ... \leq w_n \leq ... \\ &= \frac{f(\gamma(0)) + f(\gamma(1))}{2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Sonuç 3.4.1 Yukarıda tanımlanan $\{y_n\}_{n\geq 2}$ ve $\{z_n\}_{n\geq 2}$ dizileri ile Zabandan [23] tarafından yapılan çalışmadaki genelleştirme karşılaştırılabilir. Yani Zabanda tarafından elde edilen dizi,

$$t_n(f, a, b) = \frac{1}{2^n}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^n-1} f\left(\left(1 - \frac{i}{2^n}\right)a + \frac{i}{2^n}b\right)\right]$$

şeklindedir. Buradan $t_1(f, a, b) = y_3 = z_2$ olduğu açıktır. Bu taktirde bu dizilerin her birinin monotonluğundan $t_1(f, a, b)$ bie alt sınırıdır ve sonsuz olarak her $m \geq 1$ ve $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq x_3 \leq x_4 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq t_m(f, a, b) \leq ... \leq t_1(f, a, b) \\ &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a) + f(b)}{2}\right] = y_3 \leq ... \leq y_n \leq ... \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

şeklinde H-H eşitsizliğinin bir genelleştirilmesi elde edilir.

Örnek 3.4.1 İki pozitif a ve b sayıları için aşağıdaki klasik ortalamaları verelim.
Aritmetik ortalama

$$A = A(a, b) = \frac{a+b}{2},$$

Heinz ortalama

$$F_\lambda = F_\lambda(a, b) = (1 - \lambda)\sqrt{ab} + \lambda\frac{a+b}{2}, \quad \lambda \in [0, 1],$$

Heron ortalama

$$H_\lambda = H_\lambda(a,b) = \frac{a^\lambda b^{1-\lambda} + a^{1-\lambda} b^\lambda}{2}, \; \lambda \in [0,1],$$

Geometrik ortalama

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab},$$

Logaritmik ortalama,

$$L = L(a,b) = \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} (a \neq b) \;\; L(a,a) = a.$$

Önerme 3.4.2 $\alpha, \beta > 0$ için

$$G(\alpha,\beta) \leq F_{\frac{1}{n}}(\alpha,\beta) \leq H_{1-\frac{2}{n+1}}(\alpha,\beta) \leq A(\alpha,\beta)$$

özel olarak eğer $\alpha \neq \beta$ ise

$$\begin{aligned} G(\alpha,\beta) &< H_{\frac{1}{3}}(\alpha,\beta) < H_{\frac{1}{4}}(\alpha,\beta) < L(\alpha,\beta) < \left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\right)^2 \\ &< H_{1-\frac{2}{n+1}}(\alpha,\beta) < A(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\alpha,\beta) &< H_{\frac{1}{3}}(\alpha,\beta) < H_{\frac{1}{4}}(\alpha,\beta) < L(\alpha,\beta) < \left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\right)^2 \\ &< \frac{1}{2}(H_{\frac{1}{n}}(\alpha,\beta) + A(\alpha,\beta) < A(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\alpha,\beta) &< H_{\frac{1}{3}}(\alpha,\beta) < H_{\frac{1}{4}}(\alpha,\beta) < L(\alpha,\beta) < \left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\right)^2 \\ &< H_{1-\frac{1}{n+1}}(\alpha,\beta) < A(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

İspat 3.4.1 Önerme 3.4.1 ve 3.4.2 de $f(t) = e^t$ ve $\alpha = e^a$, $\beta = e^b$ olarak seçilirse ispat açıktır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, pozitif olmayan eğri uzaylarında Hermite-Hadamard eşitsizliği, bazı özellikleri ve bir kaç da uygulama yapılmıştır. bunları yaparken de temel kaynak olarak C. Conde nin [7] ve [35] çalışmaları esas alınmıştır. Sonuç olarak

(**1**.) Analizin önemli bir konusu olan konvekslik teorisinin, pozitif olmayan eğri uzaylarına taşınması,

(**2**.) Konvekslik ve eşitsizlik arasındaki en önemli bağlardan biri olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin eğri uzaylarına taşınması,

(**3**.) Bu eğri uzayında Hermite-Hadamard eşitsizliği yardımıyla yeni eşitsizliklerinin bulunması verilebilir.

Literatürde var olan ve bir konu bütünlüğü içerisinde hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışması, Pozitif Olmayan Eğri Uzayları' nda konvekslik ve Hermite-Hadamard Eşitsizliği alanında çalışmak isteyen bilim insanlarına Türkçe bir kaynak olacaktır. Burada uygulanan teknikler yardımıyla uygun teoriler altında diğer konvekslik çeşitleri ve önemli eşitsizlikler bu uzaya taşınabileceğini öneriyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Abramovich S., Barić J., Pečarić J. (2008). Fejer and Hermite-Hadamard type inequalities for superquadratic functions, J. Math. Anal. Appl. 344, no. 2, 1048-1056.

[2] Barnett N.S., Cerone P., Dragomir S. S. (2003). Some new inequalies for Hermite-Hadamard divergence in information theory, Stochastic analysis and applications vol. 3, 7-19, Nova Sci. Publ., Hauppauge, New York.

[3] Bessenyei M. (2008). Hermite-Hadamard-type inequalities for generalized convex functions, J. Inequal. Pure Appl. Math. 9, no. 3, Art. 63, 52pp.

[4] Bhatia R. (2008). The logaritmic mean, Resonance 13, no. 6, 583-594.

[5] Carlson B. C. (1972). The logaritmic mean, Amer. Math. Monthly 79, no. 6, 615-618.

[6] Cerone P., Dragomir S. S. (2011). Mathematical inequalities. A perspective, CRC Press, Boca Raton.

[7] Conde C. (2012). A version of the Hermite-Hadamard inequality in a nonpositive curvature space, Banach J. Math. Anal. 6, no. 2, 159-167.

[8] Dragomir S. S. (2006). Bounds for the normalised Jensen Functional, Bull. Austral. Math. Soc. 74, no. 3, 471-478.

[9] Dragomir S. S. (2011). Hermite-Hadamard's type inequalities for operator convex functions, Appl. Math. Comput. 218, no.3, 766-772.

[10] Dragomir S. S., Pearce C. E. M. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities, RGMIA Monographs, Victoria University, Available at http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermite-hadamard.html.

[11] El Farasi A. (2010). Simple proof and refinement of Hermite-Hadamard inequality. J. Math. Inequal. 4, no. 3, 365-369.

[12] Hadamard J. (1893). Étude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (French), J. Math. Pures et Appl. 58, 171-215.

[13] Házy A., Páles Z. (2009). On a certain stability of the Hermite-Hadamard inequality, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 465, no. 2102, 571-583

[14] Jost J. (1997). Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects, Lectures in Mathematics ETH zürich, Birkhäuser verlag. Basel.

[15] Kikianty E. (2010). Hermite-Hadamard inequality in the geometry of Banach spaces, PhD thesis, Victoria University, Available at eprints.vu.edu.au/15793/1/ EderKikiantyThesis.pdf.

[16] Klaričić M., Neuman E., Pečarić J., Šimić V. (2005). Hermite-Hadamard's inequalities for multivariate g-convex functions, Math. Inequal. Appl. 8, no. 2, 305-316.

[17] Lang S. (1999). Fundamentals of differential geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

[18] Leach E. B., Sholander M. C. (1983). Extended mean values. II, J. Math. Anal. Appl. 92, no. 1, 207-223.

[19] Mihăilescu M., Niculescu C. P. (2007). An extension of the Hermite-Hadamard inequality through subharmonic functions, Glasg. Math. J. 49,no. 3, 509-514.

[20] Mitroi F. -C. (2010). About the precision in Jensen-Steffensen inequality, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 37, no. 4, 73-84.

[21] Niculescu C. P., Persson L. -E. (2006). Convex functions and their applications. A contemporary approach, Springer, New York.

[22] Wu S. (2009). On the weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality and its applications, Rocky Mountain J. Math. 39, no. 5, 1741-1749.

[23] Zabandan G. (2009). A new refinement of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions, J. Inequal. Pure Appl. Math. 10, no. 2, Art. 45, 7 pp.

[24] Alexandrov A. (1951). A theorem on triangles in a metric space and some of its applications, Trudy Mat. Inst. Steklov. 38, 5-23.

[25] Alexandrov A. (1957). Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometric, Schriften Forschungsinst. Math. 1, 33-84.

[26] Bessenyei M., Páles Z. (2004). On generalized higher-order convexity and Hermite-Hadamard type inequalities, Acta Sci. Math. (Szeged) 70, no. 1-2, 13-24.

[27] Bridson M. R., Haefliger A. (1999). Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren Math. Wiss., vol. 319, Springer-Verlag.

[28] Bruhat F., Tits J. (1972). Groupes réductifs sur un corps local (French) Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. no. 41, 5-251.

[29] Busemann H. (1955). The geometry of geodesics, Academic Press.

[30] Kikianty E., Dragomir S. S. (2010). Hermite-Hadamard's inequality and the p-HH-norm on the Cartesian product of two copies of a normed space, Math. Inequal. Appl. 13, no. 1, 1-32.

[31] Moslehian M. S. Matrix Hermite-Hadamard type inequalities, Houston J. Math. (to appear).

[32] Sturm K-T. (2003). Probability measures on metric spaces of non-positive curvature, Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002), 357-390 , Contemp. Math. Soc., Providence, RI.

[33] Xu H. k. (1991). Inequalities in Banach spaces with applications, Nonlinear Anal. 16, no. 12, 1127-1138.

[34] Bridson M. R., Haefliger A. (1999) . Metric Spaces of Non-positive Curvature, Grundlehren Math. Wiss. 319, Springer-Verlag.

[35] Conde C. (2018). Refinements of the Hermite-Hadamard inequality in NPC global spaces. Annales Mathematicae Silesianae. 32, 133-144.