



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SUCCESSOR EĞRİLERİ VE EŞ UZAKLIKLI REGLE
YÜZEYLERİN DUAL İFADELERİ**

GÜLŞAH UZUN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Gülşah UZUN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SUCCESSOR EĞRİLERİ VE EŞ UZAKLIKLIL REGLE YÜZEYLERİN DUAL İFADELERİ

GÜLŞAH UZUN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 66 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT)

Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konun tarihsel süreçleri ve literatür çalışmalarına yer verildi. Genel bilgiler kısmında Öklid uzayında temel kavramlar ve successor eğrisinden bahsedildi. Çalışmamıza fikir veren kısım materyal ve yöntem bölümüdür. Bu bölümde dual sayılar kümesi ve ID – Modül yapısı tanıtıldı. Bu uzaya ait temel kavramlar açıklandı.

Araştırma bulguları bölümde ilk olarak successor eğrisinin vektörel moment vektörlerinden elde edilen dual ortonormal sistemleri oluşturuldu. Oluşturulan sistemlerin türevleri ile arasındaki ilişkiler hesaplandı. Daha sonra iki eğrinin üretici vektörleri paralel olduğunda, bu iki eğrinin successor eğrilerinin oluşturduğu eş uzaklıklı regle yüzeylerin dual ifadeleri verilip şekillerle tanım somut hale getirildi. Elde edilen yüzeylerin kapalı olması durumunda bu yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri incelendi. Verilen örnek ile çalışmamız desteklendi ve elde edilen yüzeylerin Maple programı ile şekilleri çizildi.

Anahtar Kelimeler: Successor eğrisi, Eş uzaklıklı regle yüzeyler, Gauss eğriliği, Dual paralel eş uzaklıklı regle yüzeyler.

ABSTRACT

SUCCESSOR CURVES AND EQUIDISTANT RULED SURFACES ON THE DUAL

GÜLŞAH UZUN

**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES**

MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION

SCIENCE TEACHER EDUCATION

PHD THESIS, 66 PAGES

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. SÜLEYMAN ŞENYURT)

This study consists of four parts. In the introduction, were given the aim of the subject, its historical processes and literature studies. In the general information section, are mentioned basic concepts in Euclidean space and Successor curve. The material and method section is the part that gives an idea to our work. In this section, information was given about dual space, dual expression of ruled surfaces and equidistant rules surfaces in dual spaces.

The research findings section forms the main part of our study. In this section, firstly are calculated the vector moments of the successor curve. Then, when the generating vectors of the two curves are parallel, the dual expressions of the equidistant ruled surfaces formed by the successor curves of these two curves are given and some characteristic properties of the obtained surfaces are examined. Our work was supported by the given example and the shapes of the surfaces obtained were drawn with the Maple program.

Keywords: Successor curve, Equidistant ruled surfaces, Dual parallel equidistant ruled surfaces.

TEŞEKKÜR

Çalıőmam boyunca her konuda bilgi ve fikirlerini esirgemeyen, sabrıyla sonsuz desteğini hissettiğim danıőman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT'a ve Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü akademik personellerine ayrı ayrı teşekkür ederim.

Ayrıca, bu tezin oluşmasında verdikleri desteklerden dolayı Ondokuz Mayıs Üniversitesi'nden Sayın Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL ve Sayın Prof. Dr. Ayhan TUTAR' a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Bu tezde yapmış olduğu yardım ve katkılardan dolayı doktora öğrencisi arkadaşım Kübra AKDAĞ'a ayrıca teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her anımda yanımda oldukları için annem Türkan KAYA, babam Hasan KAYA, abim Emrah KAYA'ya ve akademik hayatıma başlamamda beni cesaretlendiren, her daim desteğini sürdüren eşim Dr. Öğr. Üyesi Serkan UZUN ve kıymetli ailesine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ ...	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1 Temel Kavramlar	4
2.2 Successor Eğrisi.....	6
2.3 Regle Yüzeyler	6
3. MATERYAL ve YÖNTEM	10
3.1 <i>ID</i> – Modül	10
3.2 <i>ID</i> – Modülde Regle Yüzey.....	13
3.3 <i>ID</i> – Modülde Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler	15
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	18
4.1 Successor Eğrisinin Dual Ortonormal Sistemi	18
4.2 Dual Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler.....	20
4.3 Kapalı Dual Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin İntegral İnaryantları.....	32
4.4 Dual Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri	36
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	63
6. KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	66

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 M Yüzeyi	6
Şekil 2.2 \mathbb{R}^3 'te Regle Yüzey	7
Şekil 2.3 λ_x Açılım Açısı ve ℓ_x Açılım Uzunluğu	9
Şekil 3.1 ID – Modülde Açılış	11
Şekil 3.2 Doğrunun Doğrultu Vektörü ve Vektörel Momenti	12
Şekil 3.3 Study Prensibi	13
Şekil 3.4 ID – Modülde Regle Yüzey	13
Şekil 4.1 Dual Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler	20
Şekil 4.2 Successor Eğrileri ve Vektörel Momentleri	23
Şekil 4.3 $\alpha(t)$ Eğrisi ve onun $\bar{\alpha}(t)$ Successor Eğrisi	56
Şekil 4.4 $\beta(t)$ Eğrisi ve onun $\bar{\beta}(t)$ Successor Eğrisi	57
Şekil 4.5 $\bar{\alpha}(t)$ Eğrisine ait \mathbb{R}^3 teki Regle Yüzey ve Striksiyon Çizgisi	60
Şekil 4.6 $\bar{\beta}(t)$ Successor Eğrisine ait \mathbb{R}^3 teki Regle Yüzey ve Striksiyon Çizgisi	60
Şekil 4.7 \mathbb{R}^3 te Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler	61
Şekil 4.8 ID – Modülde Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin Dual İfadesi	61
Şekil 4.9 ID – Modülde Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler Arasındaki Uzaklık	62

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Öklid İç Çarpımı
E^3	: 3-Boyutlu Öklid Uzayı
$\ \cdot \ $: Norm
\vec{d}	: Steiner Dönme Vektörü
k_1	: α Eğrisinin Eğriliği
k_2	: α Eğrisinin Burulması
p	: β Eğrisinin Eğriliği
q	: β Eğrisinin Burulması
\wedge	: Vektörel Çarpım
\vec{W}	: Darboux Vektörü
S	: Şekil Operatörü
K	: Gauss Eğriliği
H	: Ortalama Eğrilik
ψ	: Regle Yüzey
p_x	: Dağılma Parametresi
ℓ_x	: Açılım Uzunluğu
λ_x	: Açılım Açısı
γ	: Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi

1. GİRİŞ

Geometrik cisimlerin diferensiyel ve integral hesabı kullanılarak incelenmesi olarak tanımlayabileceğimiz diferensiyel geometri, 18. ve 19. yüzyıllarda altın çağlarını yaşamıştır. Kurucusu olarak bilinen Carl Friedrich Gauss (1777-1855) eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrisini incelemiş, sonrasında Bernhard Riemann (1826-1866) manifold kavramını tanımlayarak Gauss'un çalışmalarını genelleştirmiştir. Gauss ve Riemann dışında Gaspard Monge (1746-1818), Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) gibi birçok matematikçi diferensiyel geometrinin gelişmesinde katkıda bulunmuştur.

Diferensiyel geometri, matematik alanında olduğu kadar diğer disiplinlerde de önemli bir yere sahiptir. Örneğin, kuantum fiziğinde, standart parçacık fiziği modelinin gelişimde, değişen basınç altında hücre zarı yapısının modellenmesinde, ekonometride, sayısal sinyal işlemlerindeki problemlerde, mimari panelleme ile ilgili çözümlerde, kütle çekimsel merceklemelerde ve kara delikler ile ilgili çalışmalarda kullanılmaktadır.

Eğrilik kavramı, 14. yüzyılda Nicole Oresme (1323-1382) tarafından, düzlükten ayrılmanın bir ölçütü olarak tanımlanmıştır. Newton (1643-1727) ve Leibniz (1646-1716) katkılarıyla gelişen Kalkülüs, eğrilik kavramını Öklid geometrisinde önemli hale getirmiştir. Bu gelişmeler neticesinde birçok özel eğri tanımlanmıştır. Örneğin Evolüt- involüt eğrileri, Bertrant eğri çiftleri, Bezier eğrileri, Salkowski eğrileri, Smarandache eğrileri gibi sayısız eğri türü mevcuttur. Eğrilerin astronomide, makine sanayisinde, denizcilikte kullanıldığı bilinmektedir. Özellikle eğrinin eğrilik merkezinin geometrik yeri ve eğrinin teğetlerine dik olan eğri olarak tanımlanan Evolüt- involüt eğri çifti, 17. Yüzyılda denizde boylam bulmak amacıyla daha iyi bir saat yapmak için kullanılmıştır.

Gauss'un astronomiye olan ilgisi onu yüzey kuramına yönlendirdi. Jeodezi ve geometri bilgisini birleştirerek yüzey geometrisine yöneldi. Yaptığı en büyük katkılardan biri '*Disquisitione generales cieca superficies curva*' da bahsettiği yüzey kavramıydı. 1827'de yayınlanan *Theorema Egregium*'da ise yüzeyi ($ds^2 = Edu + Fdudv + Gdv^2$) ikinci dereceden diferansiyel olarak belirliyor. Bunun sonucu olarak yüzeyin toplam eğriliğinin E , F , G ve bunların türevlerine bağlı

olduğunu yazmaktadır. Böylece Gauss eğriliği kavramı ortaya çıkmıştır. Günümüzde mimarlık gibi birçok alanda yaygın şekilde kullanılmaktadır. Tuğrul Yazar 2019 yılında yapmış olduğu çalışmada Gauss eğrilinin mimarlıktaki önemi vurgularken aynı yıl Yusuf Reşat Güner ve Gülen Çağdaş minimal yüzeylerin mimarlıktaki yerini ortaya koymuşlardır (Güner ve Çağdaş, 2019; Yazar, 2019).

Dual sayılar kavramı 1873 yılında William Kingdon Clifford tarafında tanımlanmış ve geliştirilmiştir. Eduard Study, karmaşık sayılardan yola çıkarak dual vektörleri oluşturmuştur ve birim dual küre ile yönlü doğrular arasındaki bağıntıyı ortaya koymuştur (Study, 1903). Baky, dual uzayda Blascke çatısını ve dual Serret-Frenet çatısını tanımlamıştır.

1795 yılında Monge, regle yüzeyi (ruled surface) doğrunun eğri boyunca hareket etmesiyle oluşan yüzeyler şeklinde tanımlanmıştır. Regle yüzeyler birçok kaynaktan mevcuttur. Valeontis B., 1986 yılında p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin tanımını vermiştir (Valeontis, 1986). Masal ve Kuruoğlu, p -eş uzaklıklı regle yüzeylerin bazı yeni özelliklerini ortaya koymuşlardır (Masal ve Kuruoğlu, 2000). Şenyurt ve As, q -eş uzaklıklı regle yüzeyleri tanımlamış ve bu yüzeyler üzerine çalışmışlardır (Şenyurt ve As, 2013). Özduran, z -eş uzaklıklı ve d -eş uzaklıklı regle yüzeyleri tanımlamış ve bu yüzeylerin özelliklerini ortaya koymuştur (Özduran, 2019).

Öklid uzayındaki bir regle yüzey, dual küresel eğrilere birebir karşılık geldiği için birçok araştırmacı bu konuya ilgi duymuş ve konu üzerine çalışmalar yapmışlardır. Şenyurt birim dual vektörlerin oluşturduğu kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları üzerine çalışmalar yapmış (Şenyurt, 1994). Güven ise birim dual küre üzerindeki bir eğrinin Frenet vektörlerinin oluşturduğu eğrilere dual uzayda karşılık gelen kapalı regle yüzeylerin integral invaryantlarının hesaplarını vermiştir (Güven, 2010). Gür, dual paralel eş uzaklıklı regle yüzeyleri tanımlamış ve birim dual küre üzerinde küresel gösterge eğrilere Öklid uzayında tekabül eden regle yüzeylerin integral invaryantları arasındaki bağıntıları bulmuştur (Gür, 2015).

Çalışmamıza temel oluşturan successor eğrisi ise ilk olarak Menninger tarafından tanımlanmıştır (Menninger, 2014). Daha sonra Masal succesor eğrisinin

konum vektörleri arasındaki ilişkileri incelemiş ve successor düzlemleri üzerine çalışmıştır (Masal, 2014).

Çalışmamızda ilk olarak birim hızlı bir eğrinin successor eğrisinin vektörel moment vektörleri hesaplanmış, successor eğrisinin Frenet vektörleri ve bu vektörlerin vektörel momentlerinden elde edilen dual ortonormal sistemleri oluşturulmuş ve oluşturulan bu dual ortonormal sistemlerin türevleri hesaplanmıştır. İki eğrinin teğet vektörlerinin paralel olması durumunda elde edilen iki successor eğrisinin oluşturduğu eş uzaklıklı regle yüzeylerin dual ifadeleri bulunmuş ve bu yüzeylerin striksiyon eğrileri ifade edilip bunlar arasındaki bağıntı hesaplanmıştır. Daha sonra iki eğrinin vektörel momentlerinden elde edilmiş olan dual ortonormal sistemlerin reel ve dual bileşenler arasındaki bağıntılar bulunmuş, dual successor eş uzaklıklı regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Dual successor eş uzaklıklı regle yüzeylerinin kapalı olması durumunda açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri arasındaki bağıntılar ile Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

V bir vektör uzayı olmak üzere

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için;

✓ Bilineerlik Aksiyomu:

$$\langle a \vec{x} + b \vec{y}, \vec{z} \rangle = a \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + b \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle,$$

$$\langle \vec{x}, a \vec{y} + b \vec{z} \rangle = a \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle,$$

✓ Simetri Aksiyomu;

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle,$$

✓ Pozitif Tanımlılık Aksiyomu;

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$$

aksiyomlarını sağlıyorsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir.

$\{x_1, x_2, x_3\}, \{y_1, y_2, y_3\} \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{X}, \vec{Y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklinde tanımlı iç çarpım fonksiyonuna standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{\vec{u}_1(t), \vec{u}_2(t), \vec{u}_3(t)\}$ ve eğriliği ve burulması sırasıyla $k_1(t)$ ve $k_2(t)$ ile gösterilsin.

a) t , eğrinin yay parametresi ise Frenet elemanları ve Frenet formülleri

$$\vec{u}_1(t) = \vec{\alpha}'(t), \quad \vec{u}_2(t) = \frac{\vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}''(t)\|}, \quad \vec{u}_3(t) = \vec{u}_1(t) \wedge \vec{u}_2(t),$$

$$k_1(t) = \|\vec{\alpha}'(t)\|, \quad k_2(t) = \left\langle \vec{u}_2'(t), \vec{u}_3(t) \right\rangle,$$

$$\vec{u}_1'(t) = \vec{k}_1(t) \vec{u}_2(t),$$

$$\vec{u}_2'(t) = -\vec{k}_1(t) \vec{u}_1(t) + \vec{k}_2(t) \vec{u}_3(t),$$

$$\vec{u}_3'(t) = -\vec{k}_2(t) \vec{u}_2(t)$$

b) t , eğrinin keyfi parametre ise Frenet elemanları ve Frenet formülleri,

$$\vec{u}_1(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \quad \vec{u}_2(t) = \vec{u}_1(t) \wedge \vec{u}_3(t), \quad \vec{u}_3(t) = \frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|},$$

$$k_1(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}''(t)\|^3}, \quad k_2(t) = \frac{\det(\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t))}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2}$$

$$\vec{u}_1'(t) = \|\vec{\alpha}'(t)\| \vec{k}_1(t) \vec{u}_2(t),$$

$$\vec{u}_2'(t) = -\|\vec{\alpha}'(t)\| \vec{k}_1(t) \vec{u}_1(t) + \|\vec{\alpha}'(t)\| \vec{k}_2(t) \vec{u}_3(t),$$

$$\vec{u}_3'(t) = -\|\vec{\alpha}'(t)\| \vec{k}_2(t) \vec{u}_2(t)$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu, 1983; O'neill, 2006).

Bir α eğrisinin Frenet vektörlerinin bir eksen etrafında yaptığı ani helis hareketinin yön ve doğrultusunu veren vektöre Darboux vektörü denir ve bu vektör

$$\vec{W}(t) = \vec{k}_1(t) \vec{u}_1(t) + \vec{k}_2(t) \vec{u}_3(t)$$

şeklinde yazılır. α kapalı eğrisi boyunca $d(t) = \oint_{(\alpha)} W(t) dt$ şeklinde tanımlı vektöre

Steiner dönme vektörü,

$$d \alpha(t) = \alpha_1(t) u_1(t) + \alpha_2(t) u_2(t) + \alpha_3(t) u_3(t)$$

olmak üzere

$$v(t) = \oint_{(\alpha)} d \alpha(t) dt$$

vektörüne de Steiner öteleme vektörü denir (Fenchel,1951; Hacısalihoğlu, 1983a).

2.2 Successor Eğrisi

Birim hızlı bir $\alpha = \alpha(t)$ eğrisi ve $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t)$ eğrisinin Frenet aparatları sırasıyla $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t), k_1(t), k_2(t)\}$ ve $\{\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \bar{u}_3(t), \bar{k}_1(t), \bar{k}_2(t)\}$ olsun. $\alpha(t)$ eğrisinin birim teğet vektörü $\bar{\alpha}(t)$ eğrisinin aslinormal vektörü oluyorsa $\bar{\alpha}(t)$ eğrisine $\alpha(t)$ eğrisinin successor eğrisi denir. Bu eğrilerin Frenet aparatları arasında

$$\bar{u}_1(t) = -\cos \theta u_2(t) + \sin \theta u_3(t),$$

$$\bar{u}_2(t) = u_1(t),$$

(2.1)

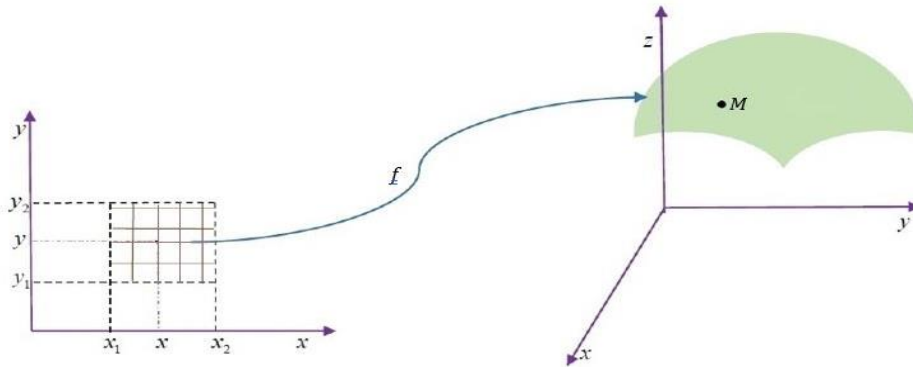
$$\bar{u}_3(t) = \sin \theta u_2(t) + \cos \theta u_3(t),$$

$$\bar{k}_1(t) = k_1(t) \cos \theta, \quad \bar{k}_2(t) = k_1(t) \sin \theta, \quad \theta(t) = \theta_0 + \int k_2(t) dt$$

bağıntısı vardır (Menninger, 2014).

2.3 Regle Yüzeyler

Koordinat sisteminin belirli bir A bölgesindeki her bir (x, y) ikilisinin f diffeomorfizmi altındaki görüntüsü $z = f(x, y)$ olsun. Bu ikililer A bölgesini tararken, $z = f(x, y)$ noktaları da uzayda bir yüzey oluşturur. Bu yüzey M ile gösterilecektir (O’neill, 2006; Sabuncuoğlu, 2006) (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 M Yüzeyi

M yüzeyinin birim normal vektörü $\vec{n}(t)$ ile gösterilsin. M yüzeyinin bir vektör alanı X olmak üzere $S(X) = D_X \vec{n}(t)$ şeklinde tanımlı lineer ve simetrik dönüşüme şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir (Hacısalıhoğlu, 1994). M yüzeyinin bir bazı $\{\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)\}$ ile gösterilirse şekil operatörünün matrisel ifadesi

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(\vec{x}_1(t)), \vec{x}_1(t) \rangle & \langle S(\vec{x}_1(t)), \vec{x}_2(t) \rangle \\ \langle S(\vec{x}_2(t)), \vec{x}_1(t) \rangle & \langle S(\vec{x}_2(t)), \vec{x}_2(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

bağıntısı ile verilir. Bu durumda yüzeyin Gauss eğriliği K ve harmonik eğriliği H ile gösterilirse

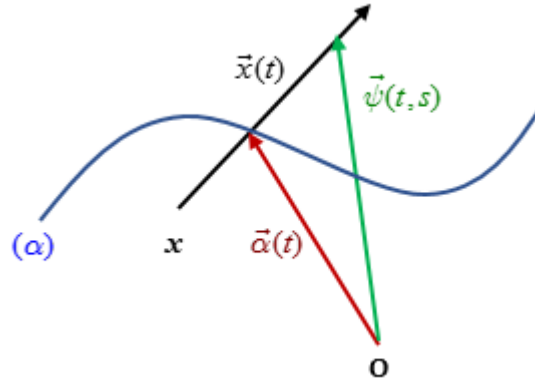
$$K = \det S, \quad H = \text{Tr} S \quad (2.3)$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

α eğrisi boyunca bir $\vec{x}(t)$ doğrusunun hareketiyle oluşan yüzeye regle yüzey denir ve parametrik denklemi

$$\psi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\psi}(t, s) = \vec{\alpha}(t) + s \vec{x}(t)$$

şeklinde yazılır (Hacısalıhoğlu, 1983) (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 \mathbb{R}^3 'te Regle Yüzey

$\vec{\psi}(t, s)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise açılabilir regle yüzey, $\forall t \in I$ için $\vec{\psi}(t + 2\pi, s) = \vec{\psi}(t, s)$ şeklinde periyodik ise kapalı regle yüzey olarak adlandırılır.

$\vec{\psi}(t, s)$ regle yüzeyindeki komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayağına striksiyon (boğaz) noktası, bu noktaların geometrik yerine regle yüzeyin striksiyon çizgisi denir ve striksiyon çizgisinin ifadesi

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{\alpha}(t) - \frac{\langle \vec{x}'(t), \vec{\alpha}'(t) \rangle}{\|\vec{x}'(t)\|^2} \vec{x}(t), \quad \vec{x}(t) \neq 0 \quad (2.4)$$

bağıntısı ile verilir (Hacısalihoglu, 1983).

$\vec{\psi}(t, s)$ regle yüzeyinin üzerindeki komşu iki ana doğru arasındaki en kısa mesafenin bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir. Dağılma parametresi p_x ile gösterilirse denklemi

$$p_x = \frac{\det(\vec{\alpha}'(t), \vec{x}(t), \vec{x}'(t))}{\|\vec{x}'(t)\|^2}, \quad \vec{x}(t) \neq 0 \quad (2.5)$$

bağıntısıyla verilir (Hacısalihoglu, 1983).

$\vec{\psi}(t, s)$ regle yüzeyinin ana doğrularını dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

$\vec{\psi}(t, s)$ kapalı regle yüzeyinin ana doğrularının dik yörüngeleri için aşağıdaki şekilde tanımlı ℓ_x fonksiyona regle yüzeyin açılım uzunluğu (adımı) denir. Adım uzunluğu

$$\ell_x = \oint_{(\alpha)} \langle d\vec{\alpha}(t), \vec{x}(t) \rangle = \oint_{(\alpha)} dt \quad (2.6)$$

bağıntısı ile hesaplanır (Hacısalihoglu, 1983).

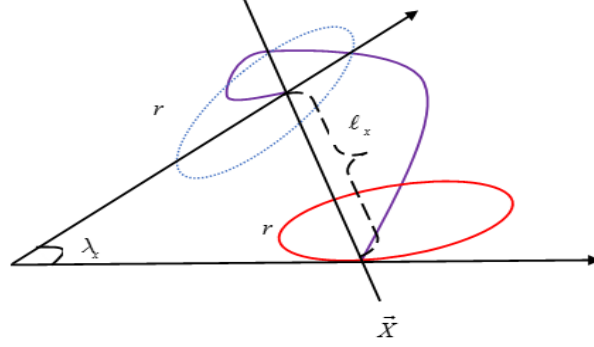
$\vec{\psi}(t, s)$ kapalı regle yüzeyinin ana doğrularına dik bir doğrultunun bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı denir ve λ_x ile gösterilir. $\vec{x}(t)$ ana doğrularının Steiner öteleme vektörü üzerindeki dik izdüşümü $\vec{\psi}(t, s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım uzunluğuna, $\vec{x}(t)$ ana doğrularının Steiner dönme

vektörü üzerindeki dik izdüşümü $\vec{\psi}(t, s)$ kapalı regle yüzeyinin açılım açısına eşittir.

Buna göre ℓ_x açılım uzunluğu ve λ_x açılım açısı

$$\ell_x = \langle \vec{v}(t), \vec{x}(t) \rangle, \quad \lambda_x = -\langle \vec{d}(t), \vec{x}(t) \rangle$$

şeklinde olur (Hacısalihoglu, 1994).



Şekil 2.3 λ_x Açılım Açısı ve ℓ_x Açılım Uzunluğu

$\vec{\psi}(t, s)$ regle yüzeyinin ana doğruları asimptotik ve geodezik çizgiler olduğu için $\langle S(\vec{x}_1(t)), \vec{x}_1(t) \rangle = \langle S(\vec{x}_2(t)), \vec{x}_2(t) \rangle = 0$ olur. Bu durumda yüzeyin Gauss eğriliği (2.2) ve (2.3) bağıntılarından

$$K = -\langle S(\vec{x}_2(t)), \vec{x}_1(t) \rangle^2 \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoglu, 1983).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 ID – Modül

$ID = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlanırsa bu kümeye dual sayılar kümesi denir.

➤ Toplama: $A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$,

➤ Çarpma: $A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$,

➤ Bölme: $\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2} \right), \quad a \neq 0$,

➤ Eşitlik: $A = B \Leftrightarrow a = b \text{ ve } a^* = b^*$

Dual sayılar kümesinin her elemanı bir dual sayı adı verilir. Dual sayılar kümesi üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemi ile birlikte birimli ve değişmeli bir halka olur. $(a, 0)$ şeklindeki bir dual sayısı $a \in \mathbb{R}$ şeklindeki bir reel sayıya izomorf olduğundan

$$A = (a, a^*) = (a, 0) \oplus (0, a^*)$$

$$= (a, 0) \oplus (0, 1) \odot (a^*, 0)$$

$$= a + \varepsilon a^*$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda dual sayılar kümesinin bir başka ifadesi

$$ID = \{A = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0\}$$

şeklinde yazılır. Bu yazılıştan hareketle ID^3 kümesi

$$ID^3 = \{A = (A_1, A_2, A_3) : A_i \in ID, 1 \leq i \leq 3\}$$

$$= \{A = (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*) : a_i, a_i^* \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3, \varepsilon^2 = 0\}$$

$$= \{A = (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon(a_1^*, a_2^*, a_3^*) : a_i, a_i^* \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3, \varepsilon^2 = 0\}$$

$$= \{A = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in \mathbb{R}^3, \varepsilon^2 = 0\}$$

şeklinde ifade edilir. Bu küme üzerinde toplama ve skalar ile çarpma işlemleri

➤ Toplama: $\vec{A} + \vec{B} = (A_i) + (B_i) = (A_i + B_i), \quad 1 \leq i \leq 3,$

➤ Skalar ile çarpma: $\lambda \cdot \vec{A} = (\lambda A_i)$

işlemleri tanımlıdır. $(ID^3, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir modül olur. Bu modüle kısaca ID – Modül denir. ID – Modüle bir uzay gözüyle bakılır ve her elemanına da dual vektör adı verilir.

ID – Modülde iki dual vektör $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$ olsun. Bu vektörler için iç çarpım, vektörel çarpım ve norm işlemleri sırasıyla,

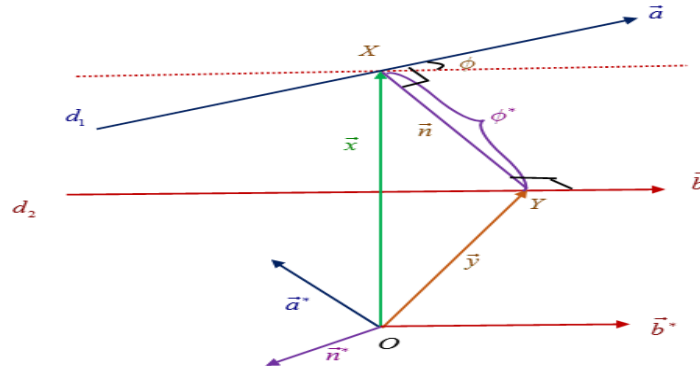
$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle),$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (\vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*) \wedge (\vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b}),$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}, \quad a \neq 0$$

şeklinde tanımlanır. $A = \{A = a + \varepsilon a^* : \|A\| = (1, 0), a, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesine birim dual küre adı verilir.

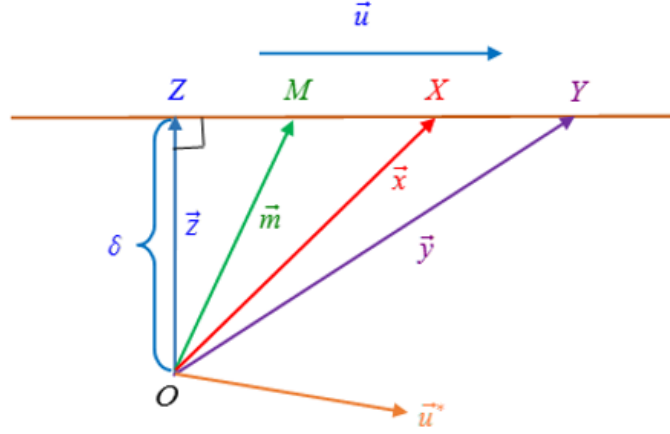
$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$ iki dual vektörü verilsin. Bu vektörlerin eksenleri arasındaki açı ϕ ve eksenleri arasındaki mesafe ϕ^* ile gösterilsin. Bu durumda $\Phi = \phi + \varepsilon \phi^*$ şeklindeki dual sayıya \vec{A} ve \vec{B} birim dual vektörleri arasındaki açı denir (Hacısalıhoğlu, 1983b) (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 ID – Modülde Açı

Teorem 3.1.1: (Study Dönüşümü) Birim dual kürenin dual noktaları, \mathbb{R}^3 teki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalıhoğlu, 1983b).

İspat: \mathbb{R}^3 de M noktasından geçen bir doğrunun doğrultu vektörü \vec{u} ile gösterilsin.



Şekil 3.2 Doğrunun Doğrultu Vektörü ve Vektörel Momenti

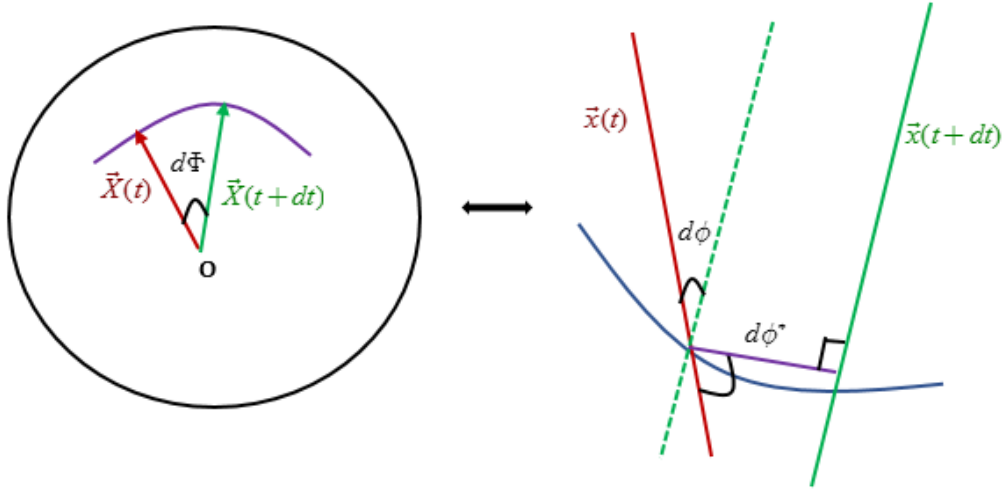
Şekil 3.2'den $(\vec{x} - \vec{m}) \wedge \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{u} - \vec{m} \wedge \vec{u} = 0$ yazılır. \vec{u} birim vektör alınırsa $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u} = \vec{u}^*$ olur. Burada \vec{u}^* vektörüne \vec{u} vektörünün O noktasına göre vektörel momentini denir. Bu vektör noktanın doğru üzerindeki yerine bağlı olmamasına karşın başlangıç noktasının seçimi ile doğrudan ilgilidir. O noktasından doğruya bir Z dikmesi indirilirse

$$\vec{z} \wedge \vec{u} = \vec{u}^*$$

olur ve bu eşitliğin normundan $\|\vec{z} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{u}^*\| = \|\vec{z}\| = \delta$ bulunur. Bu şekilde elde edilen (\vec{u}, \vec{u}^*) vektör çiftleri \mathbb{R}^3 teki yönlü doğrulara karşılık gelir. Bu vektör $\vec{U} = \vec{u} + \varepsilon \vec{u}^*$ şeklinde yazılabilir. Bu vektör dual küre üzerinde dual noktaya tekabül eder. Tersine $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual küre üzerinde bir nokta olsun. Bu nokta (\vec{a}, \vec{a}^*) vektör çifti şeklinde yazılır. Burada \vec{a} vektörü doğrunun doğrultu vektörü ve \vec{a}^* vektörü de O noktasına göre vektörel momentini alınabilir.

Eğer $\vec{X} = \vec{X}(t) = \vec{x}(t) + \varepsilon \vec{x}^*(t)$ şeklinde parametreye bağlı yazılırsa bu durumda $\vec{X}(t)$ birim dual vektörü dual küre üzerinde bir eğri çizer. Bu eğri üzerinde noktalara Study dönüşümüne göre Öklid uzayında bir regle yüzey karşılık gelir.

$\vec{X}(t)$ dual eğrisine, regle yüzeyin dual küresel resmi denir (Hacısalıhoğlu, 1983), (Şekil 3.3).



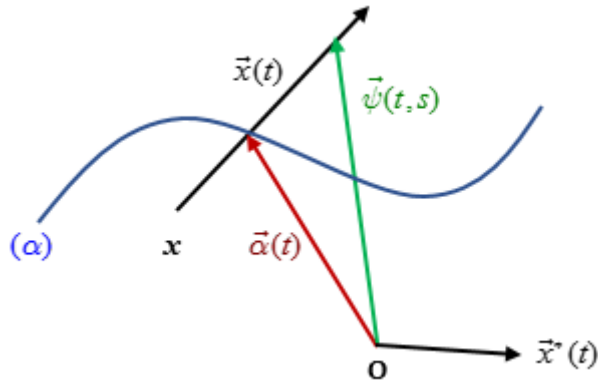
Şekil 3.3 Study Prensibi

3.2 ID – Modülde Regle Yüzey

Regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\varphi(t, s) = \vec{\alpha}(t) + s \vec{x}(t) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır. $\vec{x}(t)$ vektörünün vektörel moment vektörü $\vec{x}^*(t)$ ile gösterilsin.



Şekil 3.4 ID – Modülde Regle Yüzey

Şekil 3.4 ten $\vec{x}^*(t)$ moment vektörü

$$\vec{x}^*(t) = \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{x}(t) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. (3.2) bağıntısının her iki tarafı $\vec{x}(t)$ ile vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) &= \vec{x}(t) \wedge (\vec{\alpha}(t) \wedge \vec{x}(t)) \\
&= \langle \vec{x}(t), \vec{x}(t) \rangle \vec{\alpha}(t) - \langle \vec{\alpha}(t), \vec{x}(t) \rangle \vec{x}(t) \\
&= \vec{\alpha}(t) - \langle \vec{\alpha}(t), \vec{x}(t) \rangle \vec{x}(t)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\alpha(t)$ eğrisi

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) + \langle \vec{\alpha}(t), \vec{x}(t) \rangle \vec{x}(t) \quad (3.3)$$

şeklinde bulunur. (3.3) eşitliği (3.1) de yerine yazılırsa yüzeyin dual ifadesi

$$\begin{aligned}
\varphi(t, s) &= \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) + \langle \vec{\alpha}(t), \vec{x}(t) \rangle \vec{x}(t) + s \vec{x}(t) \\
&= \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) + (\langle \vec{\alpha}(t), \vec{x}(t) \rangle + s) \vec{x}(t)
\end{aligned}$$

olur. Burada $\mu = \langle \vec{\alpha}(t), \vec{x}(t) \rangle + s$ alınırsa $\varphi(t, s)$ yüzeyi

$$\varphi(t, s) = \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^*(t) + \mu \vec{x}(t)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeye regle yüzeyin dual vektörel ifadesi denir.

Dual Steiner dönme vektörü $\vec{D}(t) = \vec{d}(t) + \varepsilon \vec{d}^*(t)$ olmak üzere $\varphi(t, s)$ kapalı regle yüzeyin dual açılım açısı, dual açılım uzunluğu ve dağılma parametresi sırasıyla,

$$\Lambda_x = -\langle \vec{D}(t), \vec{X}(t) \rangle, \quad (3.4)$$

$$L_x = \langle \vec{d}^*(t), \vec{x}(t) \rangle + \langle \vec{d}(t), \vec{x}^*(t) \rangle, \quad (3.5)$$

$$P_x = \frac{\langle d \vec{x}(t), d \vec{x}^*(t) \rangle}{\langle d \vec{x}(t), d \vec{x}(t) \rangle} \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır (Hacısalihoglu, 1983b).

3.3 ID – Modülde Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Tanım 3.3.1: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir iki eğri, bu eğrilerin teğet vektörleri $\vec{u}_1(t)$ ve $\vec{v}_1(t)$, vektörel moment vektörleri $\vec{u}_1^*(t)$ ve $\vec{v}_1^*(t)$ olsun. Bu vektörlerden elde edilen $\vec{U}_1(t) = \vec{u}_1(t) + \varepsilon \vec{u}_1^*(t)$ ve $\vec{V}_1(t) = \vec{v}_1(t) + \varepsilon \vec{v}_1^*(t)$ dual vektörleri birim küre üzerinde bir dual eğri çizerler. Bu eğriler arasındaki dual açı $\Phi(t) = \phi(t) + \varepsilon \phi^*(t)$ ile gösterilsin. Bu durumda,

1. $\vec{U}_1(t)$ ve $\vec{V}_1(t)$ vektörleri paralel,
2. Dual küre üzerinde uygun noktalar arasındaki dual yay uzunluğu ϕ^* sıfırdan farklı ve sabit

ise bu iki eğriye dual paralel eş uzaklıklı regle yüzeyler denir (Mazlum, 2022). Bu yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla,

$$\vec{\Psi}(t, s) = \vec{u}_1(t) \wedge \vec{u}_1^*(t) + s \vec{u}_1(t), \quad \vec{u}_1^*(t) = \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{u}_1(t),$$

$$\vec{\bar{\Psi}}(t, s) = \vec{v}_1(t) \wedge \vec{v}_1^*(t) + s \vec{v}_1(t), \quad \vec{v}_1^*(t) = \vec{\tilde{\alpha}}(t) \wedge \vec{v}_1(t)$$

şeklinde yazılır. Burada $\vec{\tilde{\alpha}}(t) = \vec{\alpha}(t) + \phi^*(t) \vec{u}_1(t) + z(t) \vec{u}_2(t) + r(t) \vec{u}_3(t)$ dir (Mazlum, 2022).

Teorem 3.3.1: $\vec{\Psi}(t, s)$ ve $\vec{\bar{\Psi}}(t, s)$ dual regle yüzeylerin ortonormal çatıları sırasıyla $\{\vec{U}_1(t), \vec{U}_2(t), \vec{U}_3(t)\}$ ve $\{\vec{V}_1(t), \vec{V}_2(t), \vec{V}_3(t)\}$ olsun. Bu çatıların reel ve dual bileşenleri arasında

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{v}_2(t) \\ \vec{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1(t) \\ \vec{u}_2(t) \\ \vec{u}_3(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1^*(t) \\ \vec{v}_2^*(t) \\ \vec{v}_3^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^*(t) \\ \vec{u}_2^*(t) \\ \vec{u}_3^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & r(t) & -z(t) \\ -r(t) & 0 & \phi^*(t) \\ z(t) & -\phi^*(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1(t) \\ \vec{u}_2(t) \\ \vec{u}_3(t) \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır (Mazlum, 2022).

Teorem 3.3.2: $\vec{\Psi}(t, s)$ ve $\vec{\bar{\Psi}}(t, s)$ dual regle yüzeylerin eğrilik ve burulmaları sırasıyla $\kappa(t) = k_1(t) + \varepsilon k_1^*(t)$, $\tau(t) = k_2(t) + \varepsilon k_2^*(t)$ ve $\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}(t) + \varepsilon \mathbf{p}^*(t)$, $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}(t) + \varepsilon \mathbf{q}^*(t)$ olsun. Bu eğrilikler arasında

$$\mathbf{P}(t) = \kappa(t) \frac{dt}{d\tilde{t}} + \varepsilon (r'(t) + z(t) q(t)) \frac{dt}{d\tilde{t}},$$

$$\mathbf{Q}(t) = \tau(t) \frac{dt}{d\tilde{t}} - \varepsilon (z(t) q(t)) \frac{dt}{d\tilde{t}}$$

bağıntısı vardır (Mazlum, 2022).

Teorem 3.3.3: $\vec{\Psi}(t, s)$ ve $\vec{\bar{\Psi}}(t, s)$ dual regle yüzeylerin striksiyon çizgileri sırasıyla $\vec{\Upsilon}(t)$ ve $\vec{\bar{\Upsilon}}(t)$ olsun. Bu striksiyon çizgileri arasında

$$\vec{\bar{\Upsilon}}(t) = \vec{\Upsilon}(t) + \phi^*(t) \vec{u}_1(t) + z(t) \vec{u}_2(t) + r(t) \vec{u}_3(t)$$

bağıntısı vardır. Burada

$$\phi^*(t) = \frac{r(t) q(t) - z'(t)}{p(t)}$$

olur (Mazlum, 2022).

Teorem 3.3.4: $\vec{\Psi}(t, s)$ ve $\vec{\bar{\Psi}}(t, s)$ dual kapalı eş uzaklıklı regle yüzey olsun. Dual küre üzerinde dual teğet, dual aslinormal ve dual binormal eğrilerine Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin integral invaryantları arasında,

$$L_{V_1}(t) = L_{U_1}(t) + \oint dt \quad L_{V_2}(t) = L_{U_2}(t) = 0, \quad L_{V_3}(t) = L_{U_3}(t) = 0,$$

$$\Lambda_{V_1}(t) = \Lambda_{U_1}(t) - \oint k_2(t) dt - \varepsilon \oint dt, \quad \Lambda_{V_2}(t) = \Lambda_{U_2}(t) = 0,$$

$$\Lambda_{V_3}(t) = \Lambda_{U_3}(t) - \oint k_1(t) dt,$$

$$P_{V_1}(t) = P_{U_1}(t) = 0, \quad P_{V_2}(t) = P_{U_2}(t), \quad P_{V_3}(t) = P_{U_3}(t),$$

bağıntısı vardır (Gür, 2015).

Teorem 3.3.4: $\vec{\Psi}(t, s)$ ve $\vec{\bar{\Psi}}(t, s)$ dual eş uzaklılı regle yüzeylerinin dual teğet, dual aslinormal ve dual binormal vektörlerinin birim dual küre üzerinde çizdiği eğrilere karşılık gelen regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri K_{U_1} , K_{U_2} , K_{U_3} ve K_{V_1} , K_{V_2} , K_{V_3} ile gösterilsin. Bu eğrilikler arasında

$$K_{V_1} = K_{U_1} = 0, \quad K_{V_2} = K_{U_2}, \quad K_{V_3} = K_{U_3}$$

bağıntısı vardır (Gür, 2015).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm çalışmamın özgün kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde dayanayak eğrileri olarak successor eğrileri alınarak elde edilen eş uzaklıklı regle yüzeylerin dual ifadeleri verildi.

4.1 Successor Eğrisinin Dual Ortonormal Sistemi

Herhangi bir $\alpha(t)$ eğrisinin Frenet aparatları $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t), k_1(t), k_2(t)\}$ ve bu eğrinin successor eğrisi $\bar{\alpha}(t)$ olsun. $\bar{\alpha}(t)$ successor eğrisinin Frenet çatısı $\{\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \bar{u}_3(t)\}$ ile gösterilirse bu eğrinin vektörel moment vektörleri sırasıyla

$$\bar{u}_1^*(t) = \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_1(t), \quad \bar{u}_2^*(t) = \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t), \quad \bar{u}_3^*(t) = \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_3(t)$$

olur. $\bar{\alpha}(t)$ successor eğrisinin dual ortonormal sistemi $\{\bar{U}_1(t), \bar{U}_2(t), \bar{U}_3(t)\}$ ile olsun. Bu çatı

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(t) &= \bar{u}_1(t) + \varepsilon \bar{u}_1^*(t), & \bar{u}_1^*(t) &= \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_1(t) \\ \bar{U}_2(t) &= \bar{u}_2(t) + \varepsilon \bar{u}_2^*(t), & \bar{u}_2^*(t) &= \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t), \\ \bar{U}_3(t) &= \bar{u}_3(t) + \varepsilon \bar{u}_3^*(t), & \bar{u}_3^*(t) &= \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_3(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde bulunur. (4.1) bağıntısı ile türevleri arasında

$$\begin{aligned} \bar{U}_1'(t) &= \bar{\kappa}(t) \bar{U}_2(t), \\ \bar{U}_2'(t) &= -\bar{\kappa}(t) \bar{U}_1(t) + \bar{\tau}(t) \bar{U}_3(t), \\ \bar{U}_3'(t) &= -\bar{\tau}(t) \bar{U}_2(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

bağıntısı vardır. Burada sırasıyla $\bar{\kappa}(t) = \bar{k}_1(t) + \varepsilon \bar{k}_1^*(t)$ ve $\bar{\tau}(t) = \bar{k}_2(t) + \varepsilon \bar{k}_2^*(t)$ dual eğrilik ve dual burulmadır. (4.2) bağıntısı reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} \bar{u}_1'(t) = \bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t), \\ \bar{u}_2'(t) = -\bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t), \\ \bar{u}_3'(t) = -\bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_1^{*'}(t) = \bar{k}_1^*(t) \bar{u}_2(t) + \bar{k}_1(t) \bar{u}_2^*(t), \\ \bar{u}_2^{*'}(t) = -\bar{k}_1^*(t) \bar{u}_1(t) - \bar{k}_1(t) \bar{u}_1^*(t) + \bar{k}_2^*(t) \bar{u}_3(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3^*(t), \\ \bar{u}_3^{*'}(t) = -\bar{k}_2^*(t) \bar{u}_2(t) - \bar{k}_2(t) \bar{u}_2^*(t) \end{cases}$$

şeklinde yazılır. $\bar{u}_1^*(t)$, $\bar{u}_2^*(t)$ ve $\bar{u}_3^*(t)$ vektörlerinin türevleri sırasıyla alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{*'}(t) &= \bar{\alpha}'(t) \wedge \bar{u}_1(t) + \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_1'(t) \\ &= \bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_1(t) + \bar{\alpha}(t) \wedge (\bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t)) \\ &= \bar{k}_1(t) (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t)) \\ &= \bar{k}_1(t) \bar{u}_2^*(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

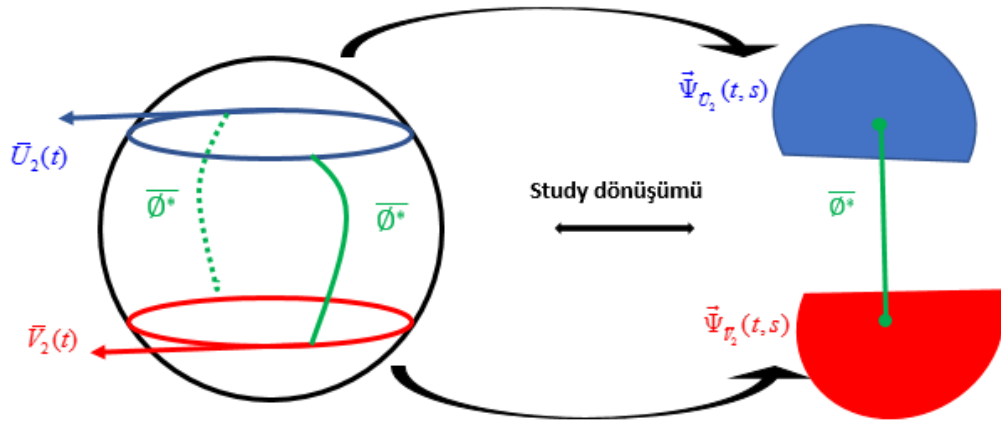
$$\begin{aligned} \bar{u}_2^{*'}(t) &= \bar{\alpha}'(t) \wedge \bar{u}_2(t) + \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2'(t) \\ &= \bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_2(t) + \bar{\alpha}(t) \wedge (-\bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t)) \\ &= \bar{u}_3(t) - \bar{k}_1(t) (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_1(t)) + \bar{k}_2(t) (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_3(t)) \\ &= \bar{u}_3(t) - \bar{k}_1(t) \bar{u}_1^*(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3^*(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_3^{*'}(t) &= \bar{\alpha}'(t) \wedge \bar{u}_3(t) + \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_3'(t) \\
&= \bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_3(t) + \bar{\alpha}(t) \wedge (-\bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t)) \\
&= -\bar{u}_2(t) - \bar{k}_2(t) (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t)) \\
&= -\bar{u}_2(t) - \bar{k}_2(t) \bar{u}_2^*(t),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur.

4.2 Dual Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Tanım 4.2.1: $\alpha(t)$ eğrisinin successor eğrisi $\bar{\alpha}(t)$ ve $\beta(t)$ eğrisinin successor eğrisi $\bar{\beta}(t)$ olsun. $\bar{\alpha}(t)$ ve $\bar{\beta}(t)$ successor eğrilerinin dual ortonormal sistemleri sırasıyla $\{\bar{U}_1(t), \bar{U}_2(t), \bar{U}_3(t)\}$ ve $\{\bar{V}_1(t), \bar{V}_2(t), \bar{V}_3(t)\}$ ile gösterilsin. $\bar{U}_2(t)$ ve $\bar{V}_2(t)$ dual vektörleri arasındaki dual açı $\bar{\Phi} = \bar{\phi} + \varepsilon \bar{\phi}^*$ sırf dual ve sıfırdan farklı sabit ise bu iki eğriye dual successor eş uzaklıklı regle yüzeyler denir (Mazlum, 2022).



Şekil 4.1 Dual Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

$\bar{U}_2(t)$ ve $\bar{V}_2(t)$ vektörlerinin çizdiği dual eğrilere tekabül eden regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Psi}_{\bar{U}_2}(t, s) &= \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t) + s \bar{u}_2(t), \quad \bar{u}_2^*(t) = \bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t), \\
\overrightarrow{\Psi}_{\bar{V}_2}(t, s) &= \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) + s \bar{v}_2(t), \quad \bar{v}_2^*(t) = \bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 4.2.1: $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{u}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{v}_2}(t, s)$ regle yüzeylerinin striksiyon çizgileri sırasıyla $\Upsilon_{\bar{\alpha}}(t)$ ve $\Upsilon_{\bar{\beta}}(t)$ olsun. $\Upsilon_{\bar{\alpha}}(t)$ ve $\Upsilon_{\bar{\beta}}(t)$ arasında

$$\Upsilon_{\bar{\beta}}(t) = \Upsilon_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \left(\frac{\mu' \bar{k}_1(t) + \eta' \bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \right) \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t) \quad (4.8)$$

bağıntısı vardır.

İspat: (2.4) bağıntısından $\Upsilon_{\bar{\alpha}}(t)$ striksiyon çizgisi

$$\Upsilon_{\bar{\alpha}}(t) = \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t) - \frac{\left\langle \bar{u}_2'(t), (\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t))' \right\rangle}{\left\| \bar{u}_2'(t) \right\|^2} \bar{u}_2(t) \quad (4.9)$$

yazılır. (4.5) bağıntısındaki $\bar{u}_2^{*'}(t)$ türevi (4.9) nolu bağıntıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t))' &= (\bar{u}_2(t)' \wedge \bar{u}_2^*(t) + \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^{*'}(t)) \\ &= (-\bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t)) \wedge \bar{u}_2^*(t) \\ &\quad + \bar{u}_2(t) \wedge (\bar{u}_3(t) - \bar{k}_1(t) \bar{u}_1^*(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3^*(t)) \\ &= -\bar{k}_1(t) (\bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_2^*(t)) + \bar{k}_2(t) (\bar{u}_3(t) \wedge \bar{u}_2^*(t)) \\ &\quad + \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_3(t) - \bar{k}_1(t) (\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_1^*(t)) + \bar{k}_2(t) (\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_3^*(t)) \\ &= \bar{u}_1(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

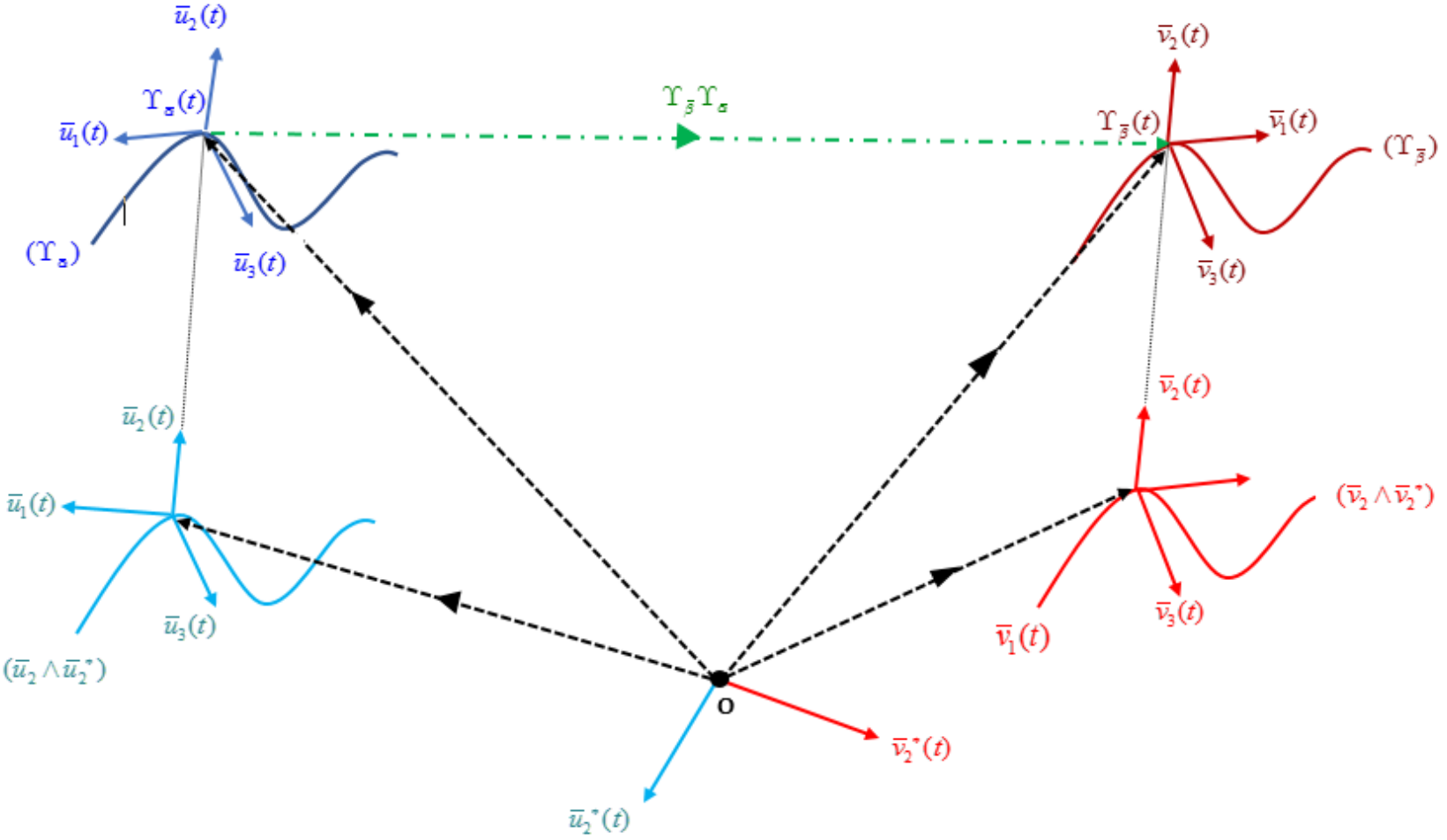
olur. (4.10) eşitliği (4.9) nolu bağıntıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\bar{\alpha}}(t) &= \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t) - \frac{\left\langle (-\bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t)), \bar{u}_1(t) \right\rangle}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \bar{u}_2(t) \\ &= \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t) + \frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \bar{u}_2(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

bulunur. (2.4) bağıntısından $\Upsilon_{\bar{\beta}}(t)$ striksiyon çizgisi

$$\begin{aligned}
Y_{\bar{\beta}}(t) &= \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) - \frac{\langle \bar{v}_2'(t), (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t))' \rangle}{\|\bar{v}_2'(t)\|^2} \bar{v}_2(t) \\
&= \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) - \frac{\langle \bar{v}_2'(t), \bar{v}_2'(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) + \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^{*'}(t) \rangle}{\|\bar{v}_2'(t)\|^2} \bar{v}_2(t) \\
&= \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) - \frac{\langle (-\bar{p}(t) \bar{v}_1(t) + \bar{q}(t) \bar{v}_3(t)), \bar{v}_1(t) \rangle}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \bar{v}_2(t) \\
&= \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) + \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \bar{v}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklinde yazılır.



Şekil 4.2 Successor Eğrileri ve Vektörel Momentleri

Şekil 4.2 den $Y_{\bar{\beta}}(t)Y_{\bar{\alpha}}(t)$ vektörünün $\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t), \bar{u}_3(t)$ birim vektörlerine dik izdüşümleri sırasıyla μ, ℓ, η ile gösterilsin. Bu durumda,

$$Y_{\bar{\beta}}(t)Y_{\bar{\alpha}}(t) = \mu \bar{u}_1(t) + \ell \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)$$

$$Y_{\bar{\beta}}(t) = Y_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \ell \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t) \quad (4.13)$$

şeklinde yazılır. Burada (4.12) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) + \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \bar{v}_2(t) = Y_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \ell \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t) \quad (4.14)$$

olur. Tanım 4.2.1 gereğince $\bar{\phi} = 0$ olduğundan $\bar{u}_2(t) = \bar{v}_2(t)$ yazılabilir. Böylece

$$\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) = Y_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \left(\ell - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \right) \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t) \quad (4.15)$$

bulunur. (4.15) ifadesinin türevi alınır ve Frenet formülleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t))' &= Y_{\bar{\alpha}}'(t) + \left(\mu' - \bar{k}_1(t) \left(\ell - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \right) \right) \bar{u}_1(t) \\ &\quad + \left(\mu \bar{k}_1(t) - \eta \bar{k}_2(t) + \left(\ell - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \right)' \right) \bar{u}_2(t) \\ &\quad + \left(\eta' - \bar{k}_2(t) \left(\ell - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \right) \right) \bar{u}_3(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

bulunur. (4.16) ifadesi $(\bar{v}_2(t))'$ ile iç çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{v}_2'(t), (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t))' \right\rangle &= \left\langle \bar{v}_2'(t), Y_{\bar{\alpha}}'(t) \right\rangle - (\mu' \bar{k}_1(t) + \eta' \bar{k}_2(t)) \\ &\quad + (\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)) \left(\ell - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

yazılır. (4.11) eşitliğinin türevi alınır

$$\begin{aligned}
(Y_{\bar{\alpha}}(t))' &= (\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t))' + \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} \right)' \bar{u}_2(t) + \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} \right) \bar{u}_2'(t) \\
&= \bar{u}_1(t) + \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} \right)' \bar{u}_2(t) + \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} \right) (-\bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t)) \\
&= \left(1 - \frac{\bar{k}_1^2(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} \right) \bar{u}_1(t) + \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} \right)' \bar{u}_2(t) + \left(\frac{\bar{k}_1(t) \bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \right) \bar{u}_3(t)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur. (4.18) bağıntısı $\bar{v}_2'(t)$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \bar{v}_2'(t), Y_{\bar{\alpha}}'(t) \rangle &= -\bar{k}_1(t) \left(1 - \frac{\bar{k}_1^2(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} \right) + \bar{k}_2(t) \left(\frac{\bar{k}_1(t) \bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \right) \\
&= -\bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \left(\frac{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olur. Bu durumda (4.17) ifadesi

$$\begin{aligned}
\langle \bar{v}_2'(t), (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t))' \rangle &= (\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)) \left(\ell - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \right) \\
&\quad - \mu' \bar{k}_1(t) + \eta' \bar{k}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde yazılır. Böylece (4.12) ifadesindeki $Y_{\bar{\beta}}(t)$ striksiyon çizgisi

$$\begin{aligned}
Y_{\bar{\beta}}(t) &= \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) - \frac{\left\langle \bar{v}_2'(t), (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2^*(t))' \right\rangle}{\|\bar{v}_2'(t)\|^2} \bar{v}_2(t) \\
&= Y_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \left(\frac{\left\langle \bar{v}_2'(t), (\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^*(t))' \right\rangle + \bar{k}_1(t) (1 + \mu')}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} + \eta' \bar{k}_2(t) \right) \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t) \\
&= Y_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \left(\frac{\bar{k}_1(t) - \bar{k}_1(t)(1 + \mu') + \eta' \bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \right) \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t) \\
&= Y_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \left(\frac{\mu' \bar{k}_1(t) + \eta' \bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \right) \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olur.

Sonuç 4.2.1: $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{U}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{V}_2}(t, s)$ dual successor eş uzaklıklı regle yüzeylerine karşılıklı dual noktaları arasındaki dual yay uzunluğu

$$\bar{\phi}^* = \frac{\mu' \bar{k}_1(t) + \eta' \bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \tag{4.22}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.2.2: $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{U}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{V}_2}(t, s)$ dual successor eş uzaklıklı regle yüzeylerinin dual ortonormal sistemleri sırasıyla $\{\bar{U}_1(t), \bar{U}_2(t), \bar{U}_3(t)\}$ ve $\{\bar{V}_1(t), \bar{V}_2(t), \bar{V}_3(t)\}$ olsun. Bu ortonormal sistemlerin reel ve dual bileşenleri arasında

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1(t) \\ \bar{v}_2(t) \\ \bar{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta - \theta) & 0 & \sin(\delta - \theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta - \theta) & 0 & \cos(\delta - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}_3(t) \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1^*(t) \\ \bar{v}_2^*(t) \\ \bar{v}_3^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\delta - \theta) & 0 & \sin(\delta - \theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta - \theta) & 0 & \cos(\delta - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^*(t) \\ \bar{u}_2^*(t) \\ \bar{u}_3^*(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \tilde{\lambda} \sin(\delta - \theta) & \eta \cos(\delta - \theta) - \mu \sin(\delta - \theta) & -\tilde{\lambda} \cos(\delta - \theta) \\ -\eta & 0 & \mu \\ \tilde{\lambda} \cos(\delta - \theta) & -\eta \sin(\delta - \theta) - \mu \cos(\delta - \theta) & \tilde{\lambda} \sin(\delta - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}_3(t) \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır. Burada $\tilde{\lambda} = \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t) + \bar{k}_2(t)} - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} + \bar{\phi}^* \right)$ dir.

İspat: (2.1) nolu bağıntıdaki successor çatıları arasındaki geçişler

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix},$$

(4.24)

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1(t) \\ \bar{v}_2(t) \\ \bar{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \delta & \sin \delta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Eş uzaklıklı regle yüzeylerin Frenet çatıları arasındaki bağıntıdan

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

olur. (4.24) ve (4.25) bağıntılarından successor çatıları arasında

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1(t) \\ \bar{v}_2(t) \\ \bar{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \delta & \sin \delta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\cos \delta & \sin \delta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}_3(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \theta + \sin \delta \sin \theta & 0 & -\cos \delta \sin \theta + \sin \delta \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \delta \cos \theta + \cos \delta \sin \theta & 0 & \sin \delta \sin \theta + \cos \delta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}_3(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\delta - \theta) & 0 & \sin(\delta - \theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta - \theta) & 0 & \cos(\delta - \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{u}_3(t) \end{bmatrix}$$

geçişleri bulunur. Şimdi dual kısımlar arasındaki geçişleri hesaplayalım. (2.4)

striksiyon çizgisi bağıntısından

$$\Upsilon_{\bar{\alpha}}(t) = \bar{\alpha}(t) - \frac{\langle \bar{\alpha}'(t), \bar{u}_2'(t) \rangle}{\|\bar{u}_2'(t)\|^2} \bar{u}_2(t) \Rightarrow \Upsilon_{\bar{\alpha}}(t) = \bar{\alpha}(t) + \frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \bar{u}_2(t)$$

ve

$$\Upsilon_{\bar{\beta}}(t) = \bar{\beta}(t) - \frac{\langle \bar{\beta}'(t), \bar{v}_2'(t) \rangle}{\|\bar{v}_2'(t)\|^2} \bar{v}_2(t) \Rightarrow \Upsilon_{\bar{\beta}}(t) = \bar{\beta}(t) + \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \bar{v}_2(t)$$

yazılır. (4.13) nolu bağıntıda $\Upsilon_{\bar{\alpha}}(t)$ ve $\Upsilon_{\bar{\beta}}(t)$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\Upsilon_{\bar{\beta}}(t) = \Upsilon_{\bar{\alpha}}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \ell \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)$$

$$\bar{\beta}(t) + \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \bar{v}_2(t) = \bar{\alpha}(t) + \frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \bar{u}_2(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \ell \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)$$

bulunur. $\bar{u}_2(t) = \bar{v}_2(t)$ olduğundan

$$\bar{\beta}(t) + \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} \bar{u}_2(t) = \bar{\alpha}(t) + \frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} \bar{u}_2(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \bar{\phi}^* \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)$$

$$\bar{\beta}(t) = \bar{\alpha}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} + \bar{\phi}^* \right) \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t) \quad (4.27)$$

olur. Kısaltmanın hatırına bundan sonraki işlemlerde $\bar{\beta}(t) = \bar{\alpha}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \lambda \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)$ alınacaktır. Burada

$$\lambda = \left(\frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)} - \frac{\bar{p}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)} + \bar{\phi}^* \right) \text{ olur. (4.27) nolu bağıntı gereğince } \bar{\beta}(t)$$

successor eğrisinin Frenet vektörlerinin vektörel momentleri hesaplanır ve (4.26) geçişleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^*(t) &= \bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_1(t) \\ &= (\bar{\alpha}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \lambda \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)) \wedge (\cos(\delta - \theta) \bar{u}_1(t) + \sin(\delta - \theta) \bar{u}_3(t)) \\ &= \cos(\delta - \theta) \bar{u}_1^*(t) + \sin(\delta - \theta) \bar{u}_3^*(t) + \lambda \sin(\delta - \theta) \bar{u}_1(t) - \lambda \cos(\delta - \theta) \bar{u}_3(t) \\ &\quad + (\eta \cos(\delta - \theta) - \mu \sin(\delta - \theta)) \bar{u}_2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2^*(t) &= \bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_2(t) \\ &= (\bar{\alpha}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \lambda \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)) \wedge \bar{u}_2(t) \\ &= \bar{u}_2^*(t) - \eta \bar{u}_1(t) + \mu \bar{u}_3(t), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}_3^*(t) &= \bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_3(t) \\
&= (\bar{\alpha}(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \lambda \bar{u}_2(t) + \eta \bar{u}_3(t)) \wedge (-\sin(\delta - \theta) \bar{u}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{u}_3(t)) \\
&= -\sin(\delta - \theta) \bar{u}_1^*(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{u}_3^*(t) - (\mu \cos(\delta - \theta) + \eta \sin(\delta - \theta)) \bar{u}_2(t) \\
&\quad + \lambda \cos(\delta - \theta) \bar{u}_1(t) + \lambda \sin(\delta - \theta) \bar{u}_3(t)
\end{aligned}$$

bulunur ve istenilen elde edilir.

Teorem 4.2.3: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_2}}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ dual successor paralel eş uzaklıklı regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin eğrilikleri arasında

$$\begin{aligned}
\bar{P}(t) &= (\cos(\delta - \theta) \bar{k}(t) - \sin(\delta - \theta) \bar{\tau}(t) + \varepsilon A_1) \frac{dt}{d\bar{t}}, \\
\bar{Q}(t) &= (\sin(\delta - \theta) \bar{k}(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{\tau}(t) + \varepsilon A_2) \frac{dt}{d\bar{t}}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

bağıntıları vardır. Burada $A_1 = -\sin(\delta - \theta)(\lambda \bar{k}_1(t) + \mu')$ ve $A_2 = \cos(\delta - \theta)(\lambda \bar{k}_1(t) + \mu') - \sin(\delta - \theta)(\lambda \bar{k}_2(t) + \eta')$ dir.

İspat: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisinin yay parametresi \bar{t} olsun.

$\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ nolu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{v}_2^*}{d\bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} &= \frac{d(\bar{u}_2^*(t) + \mu \bar{u}_3(t) - \eta \bar{u}_1(t))}{dt} \\
-\bar{p}^*(t) \bar{v}_1(t) - \bar{p}(t) \bar{v}_1^*(t) + \bar{q}^*(t) \bar{v}_3(t) + \bar{q}(t) \bar{v}_3^*(t) & \\
&= \left(\bar{u}_2^{*'}(t) + \mu' \bar{u}_3(t) + \mu \bar{u}_3'(t) - \eta' \bar{u}_1(t) - \eta \bar{u}_1'(t) \right) \frac{d\bar{t}}{dt}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

olur. Bu eşitlikte Frenet vektörleri ve (4.23) ifadesindeki geçişler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_1^*(t) \left(-\cos(\delta - \theta) \bar{p}(t) - \sin(\delta - \theta) \bar{q}(t) \right) + \bar{u}_3^*(t) \left(-\sin(\delta - \theta) \bar{p}(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{q}(t) \right) \\
& + \bar{u}_1(t) \left(\cos(\delta - \theta) (\hat{\lambda} \bar{q}(t) - \bar{p}^*(t)) - \sin(\delta - \theta) (\hat{\lambda} \bar{p}(s) + \bar{q}^*(t)) \right) \\
& + \bar{u}_2(t) \left(\cos(\delta - \theta) (-\eta \bar{p}(t) - \mu \bar{q}(t)) + \sin(\delta - \theta) (\mu \bar{p}(t) - \eta \bar{q}(t)) \right) \\
& + \bar{u}_3(t) \left(\sin(\delta - \theta) (\hat{\lambda} \bar{q}(s) - \bar{p}^*(t)) + \cos(\delta - \theta) (\hat{\lambda} \bar{p}(t) + \bar{q}^*(t)) \right) \\
& = -\bar{k}_1(t) \bar{u}_1^*(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3^*(t) + \bar{u}_1(t) \left(-\bar{k}_1^*(t) - \eta' \right) \\
& \quad + \bar{u}_2(t) \left(-\mu \bar{k}_2(t) - \eta \bar{k}_1(t) \right) + \bar{u}_3(t) \left(\bar{k}_2^*(t) + \mu' \right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. (4.31) eşitliğinde $\bar{u}_1^*(t)$ ve $\bar{u}_3^*(t)$ vektörlerinin katsayıları birbirlerine eşitlenirse

$$\begin{aligned}
-\bar{p}(t) \cos(\delta - \theta) - \bar{q}(t) \sin(\delta - \theta) &= -\bar{k}_1(t) \frac{d\bar{t}}{dt}, \\
-\bar{p}(t) \sin(\delta - \theta) + \bar{q}(t) \cos(\delta - \theta) &= \bar{k}_2(t) \frac{d\bar{t}}{dt}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

yazılır. $\bar{u}_1(t)$ ve $\bar{u}_3(t)$ vektörlerinin katsayıları birbirlerine eşitlenirse

$$\begin{aligned}
\left\{ \sin(\delta - \theta) (\bar{p}(t) \hat{\lambda} - \bar{q}^*(t)) + \cos(\delta - \theta) (\bar{q}(t) \hat{\lambda} - \bar{p}^*(t)) \right\} &= -(\bar{k}_1^*(t) + \eta') \frac{d\bar{t}}{dt}, \\
\left\{ \cos(\delta - \theta) (\bar{p}(t) \hat{\lambda} + \bar{q}^*(t)) + \sin(\delta - \theta) (\bar{q}(t) \hat{\lambda} - \bar{p}^*(t)) \right\} &= (\bar{k}_2^*(t) + \mu') \frac{d\bar{t}}{dt}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

eşitlikleri bulunur. (4.32) nolu bağıntıdaki denklemler ortak olarak çözümlerse,

$$\begin{aligned}
\bar{p}(t) &= \left(\cos(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) - \sin(\delta - \theta) \bar{k}_2(t) \right) \frac{dt}{d\bar{t}}, \\
\bar{q}(t) &= \left(\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t) \right) \frac{dt}{d\bar{t}}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ve (4.33) nolu bağıntıdaki denklemler ortak olarak çözümlerse

$$\bar{p}^*(t) = \left(\cos(\delta - \theta) (\bar{k}_1^*(t) + \lambda \bar{k}_2(t) + \eta') - \sin(\delta - \theta) (\bar{k}_2^*(t) - \lambda \bar{k}_1(t) + \mu') \right) \frac{dt}{d\bar{t}}, \quad (4.35)$$

$$\bar{q}^*(t) = \left(\sin(\delta - \theta) (\bar{k}_1^*(t) + \lambda \bar{k}_2(t) + \eta') + \cos(\delta - \theta) (\bar{k}_2^*(t) - \lambda \bar{k}_1(t) + \mu') \right) \frac{dt}{d\bar{t}}$$

bulunur. (4.34) ve (4.35) denklemlerinden

$$\bar{P}(t) = \bar{p}(t) + \varepsilon \bar{p}^*(t)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \cos(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) - \sin(\delta - \theta) \bar{k}_2(t) \\ + \varepsilon \left(\cos(\delta - \theta) (\bar{k}_1^*(t) + \lambda \bar{k}_2(t) + \eta') - \sin(\delta - \theta) (\bar{k}_2^*(t) - \lambda \bar{k}_1(t) + \mu') \right) \end{array} \right) \frac{dt}{d\bar{t}},$$

$$\bar{Q}(t) = \bar{q}(t) + \varepsilon \bar{q}^*(t)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t) \\ + \varepsilon \left(\sin(\delta - \theta) (\bar{k}_1^*(t) + \lambda \bar{k}_2(t) + \eta') + \cos(\delta - \theta) (\bar{k}_2^*(t) - \lambda \bar{k}_1(t) + \mu') \right) \end{array} \right) \frac{dt}{d\bar{t}}$$

bulunur. Bu ifadeler düzenlenirse

$$\bar{P}(t) = \left(\cos(\delta - \theta) \bar{\kappa}(t) - \sin(\delta - \theta) \bar{\tau}(t) + \varepsilon A_1 \right) \frac{dt}{d\bar{t}}, \quad (4.36)$$

$$\bar{Q}(t) = \left(\sin(\delta - \theta) \bar{\kappa}(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{\tau}(t) + \varepsilon A_2 \right) \frac{dt}{d\bar{t}}$$

elde edilir. Burada $A_1 = \cos(\delta - \theta) (\lambda \bar{k}_2(t) + \eta') - \sin(\delta - \theta) (\mu' - \lambda \bar{k}_1(t))$ ve

$A_2 = \cos(\delta - \theta) (\mu' - \lambda \bar{k}_1(t)) + \sin(\delta - \theta) (\lambda \bar{k}_2(t) + \eta')$ dir.

4.3 Kapalı Dual Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin İntegral İnavaryantları

$\overrightarrow{\Psi}_{\bar{U}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{V}_2}(t, s)$ kapalı dual successor paralel eş uzaklıklı regle yüzeylerinin açılım açılıarı (3.4) bağıntısından sırasıyla

$$\Lambda_{\bar{U}_1}(t) = -\oint \bar{\tau}(t) dt, \quad \Lambda_{\bar{U}_2}(t) = 0, \quad \Lambda_{\bar{U}_3}(t) = -\oint \bar{\kappa}(t) dt \quad (4.37)$$

$$\Lambda_{\bar{V}_1}(t) = -\oint \bar{Q}(t) d\bar{t}, \quad \Lambda_{\bar{V}_2}(t) = 0, \quad \Lambda_{\bar{V}_3}(t) = -\oint \bar{P}(t) d\bar{t}$$

şeklinde yazılır.

Teorem 4.3.1: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{U}_2}}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi_{\bar{V}_2}}(t, s)$ dual successor paralel eş uzaklıklı regle yüzeylerinin açılım açıları arasında

$$\begin{aligned} \Lambda_{\bar{V}_1}(t) &= -\cos(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_1}(t) + \sin(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_3}(t) - \oint \varepsilon A_2 dt \\ \Lambda_{\bar{V}_2}(t) &= \Lambda_{\bar{U}_2}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\Lambda_{\bar{V}_3}(t) = -\sin(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_1}(t) - \cos(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_3}(t) - \oint \varepsilon A_1 dt$$

bağıntıları vardır.

İspat: (4.36) ifadesindeki \bar{Q} eğriliği (4.37) bağıntısında yerine konulursa

$$\begin{aligned} \Lambda_{\bar{V}_1}(t) &= -\oint (\sin(\delta - \theta) \bar{\kappa}(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{\tau}(t) + \varepsilon A_2) \frac{dt}{d\bar{t}} d\bar{t} \\ &= -\sin(\delta - \theta) \oint \bar{\kappa}(t) dt - \cos(\delta - \theta) \oint \bar{\tau}(t) dt - \oint \varepsilon A_2 dt \\ &= \cos(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_1}(t) + \sin(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_3}(t) - \oint \varepsilon A_2 dt \end{aligned} \quad (4.39)$$

bulunur. (4.37) bağıntısından

$$\Lambda_{\bar{V}_2}(t) = \Lambda_{\bar{U}_2}(t) = 0 \quad (4.40)$$

olduğu görülür. (4.36) ifadesindeki \bar{P} eğriliği (4.37) bağıntısında yerine konulursa

$$\begin{aligned} \Lambda_{\bar{V}_3}(t) &= -\oint (\cos(\delta - \theta) \bar{\kappa}(t) - \sin(\delta - \theta) \bar{\tau}(t) + \varepsilon A_1) \frac{dt}{d\bar{t}} d\bar{t} \\ &= -\cos(\delta - \theta) \oint \bar{\kappa}(t) dt + \sin(\delta - \theta) \oint \bar{\tau}(t) dt - \oint \varepsilon A_1 dt \\ &= \sin(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_1}(t) - \cos(\delta - \theta) \Lambda_{\bar{U}_3}(t) - \oint \varepsilon A_1 dt \end{aligned} \quad (4.41)$$

bulunur.

$\overrightarrow{\Psi}_{\overline{U}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\overline{V}_2}(t, s)$ kapalı dual successor paralel eş uzaklıklı regle yüzeylerinin açılım uzunlukları (3.5) bağıntısından sırasıyla

$$\begin{aligned} L_{\overline{U}_1}(t) &= \oint \overline{k}_2^*(t) dt, & L_{\overline{U}_2}(t) &= 0, & L_{\overline{U}_3}(t) &= \oint \overline{k}_1^*(t) dt \\ L_{\overline{V}_1}(t) &= \oint \overline{q}^*(t) d\overline{t}, & L_{\overline{V}_2}(t) &= 0, & L_{\overline{V}_3}(t) &= \oint \overline{p}^*(t) d\overline{t} \end{aligned} \quad (4.42)$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.2: $\overrightarrow{\Psi}_{\overline{U}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\overline{V}_2}(t, s)$ dual successor paralel eş uzaklıklı regle yüzeylerinin açılım uzunlukları arasında

$$\begin{aligned} L_{\overline{V}_1}(t) &= \cos(\delta - \theta) L_{\overline{U}_1}(t) - \sin(\delta - \theta) L_{\overline{U}_3}(t) + \oint A_1 dt \\ L_{\overline{V}_2}(t) &= L_{\overline{U}_2}(s) = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$L_{\overline{V}_3}(t) = -\sin(\delta - \theta) L_{\overline{U}_1}(t) + \cos(\delta - \theta) L_{\overline{U}_3}(t) + \oint A_2 dt$$

bağıntıları vardır.

İspat: (4.35) bağıntısındaki \overline{q}^* eğriliği (4.42) bağıntısında yerine konulursa

$$\begin{aligned} \oint \overline{q}^*(t) d\overline{t} &= \oint \left(\cos(\delta - \theta) \overline{k}_2^*(t) - \sin(\delta - \theta) \overline{k}_1^*(t) + A_2 \right) \frac{dt}{d\overline{t}} d\overline{t} \\ &= \cos(\delta - \theta) \oint \overline{k}_2^*(t) dt - \sin(\delta - \theta) \oint \overline{k}_1^*(t) dt + \oint A_2 dt \\ &= \cos(\delta - \theta) L_{\overline{U}_1}(t) - \sin(\delta - \theta) L_{\overline{U}_3}(t) + \oint A_2 dt \end{aligned} \quad (4.44)$$

bulunur. (4.42) bağıntısından

$$L_{\overline{V}_2}(t) = L_{\overline{U}_2}(t) \quad (4.45)$$

olduğu görülür. (4.35) bağıntısındaki \overline{p}^* eğriliği (4.42) bağıntısında yerine konulursa

$$\begin{aligned}
\oint \bar{p}^*(t) d\bar{t} &= \oint \left(-\sin(\delta - \theta) \bar{k}_2^*(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_1^*(t) + A_1 \right) \frac{dt}{d\bar{t}} d\bar{t} \\
&= -\sin(\delta - \theta) \oint \bar{k}_2^*(t) dt + \cos(\delta - \theta) \oint \bar{k}_1^*(t) dt + \oint A_1 dt \\
&= -\sin(\delta - \theta) L_{\bar{U}_1}(t) + \cos(\delta - \theta) L_{\bar{U}_3}(t) + \oint A_1 dt
\end{aligned} \tag{4.46}$$

bulunur.

$\overrightarrow{\Psi}_{\bar{U}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{V}_2}(t, s)$ kapalı dual successor paralel eş uzaklıklı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri sırasıyla

$$P_{\bar{U}_1}(t) = 0, \quad P_{\bar{U}_2}(t) = \frac{\bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1^2(t) + \bar{k}_2^2(t)}, \quad P_{\bar{U}_3}(t) = \frac{1}{\bar{k}_2(t)} \tag{4.47}$$

$$P_{\bar{V}_1}(t) = 0, \quad P_{\bar{V}_2}(t) = \frac{\bar{q}(t)}{\bar{p}^2(t) + \bar{q}^2(t)}, \quad P_{\bar{V}_3}(t) = \frac{1}{\bar{q}(t)}$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.3: $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{U}_2}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi}_{\bar{V}_2}(t, s)$ dual successor paralel eş uzaklıklı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri arasında

$$\begin{aligned}
P_{\bar{V}_1}(t) &= P_{\bar{U}_1}(t) = 0, \\
P_{\bar{V}_2}(t) &= \left(\cos(\delta - \theta) \frac{\bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1(t)^2 + \bar{k}_2(t)^2} + B \right) \frac{d\bar{t}}{dt}, \\
P_{\bar{V}_3}(t) &= \frac{d\bar{t}}{\left(\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t) \right) dt}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

bağıntıları vardır.

İspat: (4.47) bağıntısından

$$P_{\bar{V}_1}(t) = P_{\bar{U}_1}(t) = 0 \tag{4.49}$$

olduğu görülür. (4.34) bağıntısındaki \bar{p} ve \bar{q} eğrilikleri (4.47) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_{\bar{v}_2}(t) &= \frac{(\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t)) \frac{dt}{d\bar{t}}}{\left\{ (\cos(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) - \sin(\delta - \theta) \bar{k}_2(t)) \frac{dt}{d\bar{t}} \right\}^2} \\
&\quad + \left\{ (\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t)) \frac{dt}{d\bar{t}} \right\}^2 \\
&= \frac{(\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t)) \frac{dt}{d\bar{t}}}{(\bar{k}_1(t)^2 + \bar{k}_2(t)^2) \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2} \\
&= \left(\sin(\delta - \theta) \frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t)^2 + \bar{k}_2(t)^2} + \cos(\delta - \theta) \frac{\bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1(t)^2 + \bar{k}_2(t)^2} \right) \frac{d\bar{t}}{dt} \\
&= P_{\bar{v}_2}(t) + B
\end{aligned} \tag{4.50}$$

bulunur. Burada $B = \sin(\delta - \theta) \frac{\bar{k}_1(t)}{\bar{k}_1(t)^2 + \bar{k}_2(t)^2}$ dir. (4.34) bağıntısındaki \bar{p} ve \bar{q} eğrilikleri (4.47) bağıntısında yerine yazılırsa

$$P_{\bar{v}_3}(t) = \frac{1}{(\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t)) \frac{dt}{d\bar{t}}} \tag{4.51}$$

elde edilir.

4.4 Dual Successor Eş Uzaklıklık Regle Yüzeylerin Gauss Eğrilikleri

Teorem 4.4.1: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_1}}(t, s)$ dual successor regle yüzeylerinin birim dual teğet vektörlerinin dual küre üzerinde çizdiği eğrinin \mathbb{R}^3 'te karşılığı olan regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri sırasıyla $K_{\bar{v}_1}$ ve $K_{\bar{v}_2}$ ile gösterilirse, bu eğrilikler arasında

$$K_{\bar{v}_1} = K_{\bar{v}_2} = 0$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_1}}(t, s)$ yüzeyinin s ve t ye göre türevleri

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_s} = \bar{u}_1(t), \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_t} &= \bar{u}_1'(t) \wedge \bar{u}_1^*(t) + \bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_1^{*'}(t) + s \bar{u}_1'(t) \\ &= \bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_1^*(t) + \bar{u}_1(t) \wedge (\bar{k}_1(t) \bar{u}_2^*(t)) + s \bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t) \\ &= \bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t) \wedge (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_1(t)) + \bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) \wedge (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t)) + s \bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t) \\ &= -\bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_1(t) + \bar{k}_1(t) (-\langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle + s) \bar{u}_2(t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

şeklinde hesaplanır. (4.52) ve (4.53) eşitlikleri iç çarpılırsa

$$\left\langle \overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_s}, \overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_t} = \bar{u}_1(t), \right\rangle = -\bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle$$

bulunur. Bu eşitlik sıfırdan farklı olduğundan $\{\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_s}, \overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_t}\}$ sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_s} = \overrightarrow{(X_{\bar{u}_1})_1}(t),$$

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_1})_t} = \overrightarrow{(X_{\bar{u}_1})_2}(t),$$

olacağından,

$$\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_1}(t) = \overrightarrow{(X_{\bar{u}_1})_1}(t) = \bar{u}_1(t), \quad (4.54)$$

$$\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_2}(t) = -\frac{\langle \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_1}(t), \overrightarrow{(X_{\bar{u}_1})_2}(t) \rangle}{\langle \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_1}(t), \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_1}(t) \rangle} \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_1}(t) + \overrightarrow{(X_{\bar{u}_1})_2}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\langle \bar{u}_1(t), -\bar{k}_1(t) (\langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_1(t) + (\langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s) \bar{u}_2(t)) \rangle}{\langle \bar{u}_1(t), \bar{u}_1(t) \rangle} \bar{u}_1(t) \\
&- \bar{k}_1(t) (\langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_1(t) + (\langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s) \bar{u}_2(t)) \\
&= \bar{k}_1(t) (\langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_1(t) - \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_1(t) - (\langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s) \bar{u}_2(t)) \\
&= -\bar{k}_1(t) (\langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s) \bar{u}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

olur. (4.54) ve (4.55) vektörleri birim vektör haline getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_1}(t) = \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_1})_1}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_1})_1}(t)\|} = \bar{u}_1(t), \tag{4.56}$$

$$\overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_2}(t) = \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_1})_2}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_1})_2}(t)\|} = \bar{u}_2(t) \tag{4.57}$$

elde edilir. Buradan $\langle \overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_1}(t), \overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_2}(t) \rangle = 0$ olur. Bu yüzeyin normal vektörü $\vec{N}_{\bar{v}_1}(t)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
\vec{N}_{\bar{v}_1}(t) &= \overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_1}(t) \wedge \overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_2}(t) \\
&= \bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_2(t) \\
&= \bar{u}_3(s)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

olur. Yüzeyin şekil operatörü $S_{\bar{v}_1}$ ve Gauss eğriliği $K_{\bar{v}_1}$ ile gösterilirse (2.7) nolu bağıntıdan

$$K_{\bar{v}_1} = \det S_{\bar{v}_1}(s) = -\left\langle S_{\bar{v}_1} \overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_2}(t), \overrightarrow{(E_{\bar{v}_1})_1}(t) \right\rangle^2 \tag{4.59}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
S_{\bar{u}_1}(\overrightarrow{(E_{\bar{u}_1})_2}(t)) &= D_{(E_{\bar{u}_1})_2} \overrightarrow{N_{\bar{u}_1}}(t) \\
&= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_2}(t)\|} D_{(Y_{\bar{u}_1})_2} \overrightarrow{N_{\bar{u}_1}}(t) \\
&= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_2}(t)\|} \frac{d\overrightarrow{N_{\bar{u}_1}}(t)}{dt} \\
&= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_1})_2}(t)\|} \bar{u}_3(t) \\
&= -\frac{\bar{k}_2(t)}{\bar{k}_1(t)(-\langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle + s) \bar{u}_2(t)} \bar{u}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

olur. $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_1}}(t, s)$ yüzeyin Gauss eğriliği $K_{\bar{u}_1} = 0$ şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_1}}(t, s)$ yüzeyinin Gauss eğriliği $K_{\bar{v}_1} = 0$ bulunur. Böylece $K_{\bar{u}_1} = K_{\bar{v}_1} = 0$ elde edilir.

Teorem 4.4.2: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_2}}(t, s)$ ve $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ dual successor eş uzaklıklı regle yüzeylerinin birim dual normal vektörlerinin dual küre üzerinde çizdiği eğrinin \mathbb{R}^3 'te karşılığı olan regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri sırasıyla $K_{\bar{u}_2}$ ve $K_{\bar{v}_2}$ olsun. Bu eğrilikler arasında

$$K_{\bar{u}_2} = -\frac{\bar{k}_2^2(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_2}(t)\|^4}, \quad K_{\bar{v}_2} = -\left(\frac{\bar{q}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2}(t)\|^2} \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^2$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_2}}(t, s)$ yüzeyinin s ve t ye göre türevleri alınırsa

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})_s} = \bar{u}_2(t), \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})}_t &= \bar{u}_2'(t) \wedge \bar{u}_2^*(t) + \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_2^{*'}(t) + s \bar{u}_2'(t) \\
&= \left(-\bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t) \right) \wedge \bar{u}_2^*(t) \\
&+ \bar{u}_2(t) \wedge \left(\bar{u}_3(t) - \bar{k}_1(t) \bar{u}_1^*(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3^*(t) \right) + s \left(-\bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t) \right) \\
&= -\bar{k}_1(t) \left(\bar{u}_1(t) \wedge \bar{u}_2^*(t) \right) + \bar{k}_2(t) \left(\bar{u}_3(t) \wedge \bar{u}_2^*(t) \right) + \bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_3(t) \\
&- \bar{k}_1(t) \left(\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_1^*(t) \right) + \bar{k}_2(t) \left(\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_3^*(t) \right) - s \bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + s \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t) \\
&= \bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) \wedge \left(\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t) \right) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t) \wedge \left(\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t) \right) \\
&+ \bar{u}_1(t) - \bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t) \wedge \left(\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_1(t) \right) \\
&+ \bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t) \wedge \left(\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_3(t) \right) - s \bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + s \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t) \\
&= \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_2(t) - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_2(t) \\
&+ \bar{u}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_1(t) \\
&- \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \bar{u}_3(t) - s \bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + s \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t) \\
&= \left(1 - s \bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \right) \bar{u}_1(t) \\
&+ \left(\bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle \right) \bar{u}_2(t) \\
&+ \left(-\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle + s \bar{k}_2(t) \right) \bar{u}_3(t)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

olur. (4.61) ve (4.62) eşitlikleri iç çarpılırsa

$$\left\langle \overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})}_s, \overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})}_t \right\rangle = \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle$$

bulunur. Bu eşitlik sıfırdan farklı olduğundan $\{\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})_s}, \overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})_t}\}$ sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})_s} = \overrightarrow{(X_{\bar{u}_2})_1}(t),$$

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{u}_2})_t} = \overrightarrow{(X_{\bar{u}_2})_2}(t),$$

olacağından,

$$\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_1}(t) = \overrightarrow{(X_{\bar{u}_2})_1}(t) = \bar{u}_2(t), \quad (4.63)$$

$$\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_2}(t) = -\frac{\langle \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_1}(t), \overrightarrow{(X_{\bar{u}_2})_2}(t) \rangle}{\langle \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_1}(t), \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_1}(t) \rangle} \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_1}(t) + \overrightarrow{(X_{\bar{u}_2})_1}(t) \quad (4.64)$$

$$= -\frac{\left\langle \begin{array}{l} (1-s\bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_1(t) \\ \bar{u}_2(t), \quad + (\bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_2(t) \\ + (-\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle + s\bar{k}_2(t)) \bar{u}_3(t) \end{array} \right\rangle}{\langle \bar{u}_2(t), \bar{u}_2(t) \rangle} \bar{u}_2(t)$$

$$+ (1-s\bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_1(t) + (-\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle + s\bar{k}_2(t)) \bar{u}_3(t)$$

$$+ (\bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_2(t)$$

$$= (1-s\bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_1(t) + (s\bar{k}_2(t) - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_3(t)$$

bulunur. (4.63) ve (4.64) vektörleri birim vektör haline getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{\bar{u}_2})_1}(t) = \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_1}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{u}_2})_1}(t)\|} = \bar{u}_2(t), \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_2}(t) &= \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_2})_2}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_2})_2}(t)\|} \\ &= \frac{(1-s\bar{k}_1(t)+\bar{k}_1(t)\langle\bar{u}_2(t),\bar{\alpha}(t)\rangle)\bar{u}_1(t)+\bar{k}_2(t)(s-\langle\bar{u}_2(t),\bar{\alpha}(t)\rangle)\bar{u}_3(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_2})_2}(t)\|} \end{aligned} \quad (4.66)$$

elde edilir. Buradan $\langle\overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_1}(t),\overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_2}(t)\rangle=0$ olur. Bu yüzeyin normal vektörü

$\vec{N}_{\bar{U}_2}(t)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\bar{U}_2}(t) &= \overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_1}(t) \wedge \overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_2}(t) \\ &= \bar{u}_2(t) \wedge \frac{(1-s\bar{k}_1(t)+\bar{k}_1(t)\langle\bar{u}_2(t),\bar{\alpha}(t)\rangle)\bar{u}_1(t)+\bar{k}_2(t)(s-\langle\bar{u}_2(t),\bar{\alpha}(t)\rangle)\bar{u}_3(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_2})_2}(t)\|} \\ &= \frac{\bar{k}_2(t)(s-\langle\bar{u}_2(t),\bar{\alpha}(t)\rangle)\bar{u}_1(t)-(1-s\bar{k}_1(t)+\bar{k}_1(t)\langle\bar{u}_2(t),\bar{\alpha}(t)\rangle)\bar{u}_3(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_2})_2}(t)\|} \end{aligned} \quad (4.67)$$

olur. Yüzeyin şekil operatörü $S_{\bar{U}_2}$ ve Gauss eğriliği $K_{\bar{U}_2}$ ile gösterilirse (2.7) nolu bağıntıdan

$$K_{\bar{U}_2} = \det S_{\bar{U}_2} = -\left\langle S_{\bar{U}_2}(\overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_2}(t)), \overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_1}(t) \right\rangle^2 \quad (4.68)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} S_{\bar{U}_2} \overrightarrow{(E_{\bar{U}_2})_2}(t) &= D_{(E_{\bar{U}_2})_2} \vec{N}_{\bar{U}_2}(t) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_2})_2}(t)\|} D_{(Y_{\bar{U}_2})_2} \vec{N}_{\bar{U}_2}(t) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_2})_2}(t)\|} \frac{d \vec{N}_{\bar{U}_2}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|(\overrightarrow{Y_{\bar{u}_2}})_2(t)\|} \left[\begin{array}{l} (s \bar{k}_2(t) - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_1(t) \\ -(1-s \bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_3(t) \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{\|(\overrightarrow{Y_{\bar{u}_2}})_2(t)\|^2} \left[\begin{array}{l} (s \bar{k}_2(t) - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle)' \bar{u}_1(t) \\ +(s \bar{k}_2(t) - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t) \\ -(1-s \bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle)' \bar{u}_3(t) \\ +(1-s \bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t) \end{array} \right] \\
&+ \frac{1}{\|(\overrightarrow{Y_{\bar{u}_2}})_2(t)\| \|(\overrightarrow{Y_{\bar{u}_2}})_2(t)\|'} \left[\begin{array}{l} (s \bar{k}_2(t) - \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_1(t) \\ -(1-s \bar{k}_1(t) + \bar{k}_1(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_3(t) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

olur. $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_2}}(t, s)$ yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_{\bar{u}_2} = -\frac{\bar{k}_2^2(t)}{\|(\overrightarrow{Y_{\bar{u}_2}})_2(t)\|^4} \quad (4.70)$$

şeklinde bulunur.

$\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ yüzeyinin s ve t ye göre türevleri alınırsa

$$(\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}})_s = \bar{v}_2(t), \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned}
(\overline{\Psi_{\bar{v}_2}})_t &= \bar{v}_2'(t) \wedge \bar{v}_2^*(t) + \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_2'^*(t) + s \bar{v}_2'(t) \\
&= (-\bar{p}(t) \bar{v}_1(t) + \bar{q}(t) \bar{v}_3(t)) \wedge \bar{v}_2^*(t) + s (-\bar{p}(t) \bar{v}_1(t) + \bar{q}(t) \bar{v}_3(t)) \\
&\quad + \bar{v}_2(t) \wedge (\bar{v}_3(t) - \bar{p}(t) \bar{v}_1^*(t) + \bar{q}(t) \bar{v}_3^*(t)) \\
&= -\bar{p}(t) (\bar{v}_1(t) \wedge \bar{v}_2^*(t)) + \bar{q}(t) (\bar{v}_3(t) \wedge \bar{v}_2^*(t)) \\
&\quad + \bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_3(t) - \bar{p}(t) (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_1^*(t)) + \bar{q}(t) (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_3^*(t)) \\
&\quad - s \bar{p}(t) \bar{v}_1(t) + t \bar{q}(t) \bar{v}_3(t) \\
&= \bar{p}(t) \bar{v}_1(t) \wedge (\bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_2(t)) + \bar{q}(t) \bar{v}_3(t) \wedge (\bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_2(t)) \\
&\quad + \bar{v}_1(t) - \bar{p}(t) \bar{v}_2(t) \wedge (\bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_1(t)) \\
&\quad + \bar{q}(t) \bar{v}_2(t) \wedge (\bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_3(t)) - s \bar{p}(t) \bar{v}_1(t) + s \bar{q}(t) \bar{v}_3(t) \\
&= \bar{p}(t) \langle \bar{v}_1(t), \bar{\beta}(t) \rangle \bar{v}_2(t) - \bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle \bar{v}_2(t) + \bar{v}_1(t) \\
&\quad + \bar{p}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle \bar{v}_1(t) - \bar{q}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle \bar{v}_3(t) \\
&\quad - s \bar{p}(t) \bar{v}_1(t) + s \bar{q}(t) \bar{v}_3(t) \tag{4.72} \\
&= (1 - s \bar{p}(t) + \bar{p}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_1(t) + (-\bar{q}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle + s \bar{q}(t)) \bar{v}_3(t) \\
&\quad + (\bar{p}(t) \langle \bar{v}_1(t), \bar{\beta}(t) \rangle - \bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_2(t)
\end{aligned}$$

olur. (4.71) ve (4.72) eşitlikleri iç çarpılırsa

$$\langle (\overline{\Psi_{\bar{v}_2}})_s, (\overline{\Psi_{\bar{v}_2}})_t \rangle = \bar{p}(t) \langle \bar{v}_1(t), \bar{\beta}(t) \rangle - \bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle$$

bulunur. Bu eşitlik sıfırdan farklı olduğundan $\{(\overline{\Psi_{\bar{v}_2}})_s, (\overline{\Psi_{\bar{v}_2}})_t\}$ sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmitd yöntemi uygulanırsa

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{v}_2})_s} = \overrightarrow{(X_{\bar{v}_2})_1} (t),$$

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{v}_2})_s} = \overrightarrow{(X_{\bar{v}_2})_2} (t)$$

olacağından,

$$\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_1} (t) = \overrightarrow{(X_{\bar{v}_2})_1} (t) = \bar{v}_2(t), \quad (4.73)$$

$$\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2} (t) = -\frac{\langle \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_1} (t), \overrightarrow{(X_{\bar{v}_2})_2} (t) \rangle}{\langle \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_1} (t), \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_1} (t) \rangle} \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_1} (t) + \overrightarrow{(X_{\bar{v}_2})_2} (t) \quad (4.74)$$

$$= -\frac{\left\langle \begin{array}{l} (1-s\bar{p}(t) + \bar{p}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_1(t) \\ \bar{v}_2(t), \quad + (\bar{p}(t) \langle \bar{v}_1(t), \bar{\beta}(t) \rangle - \bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_2(t) \\ + (-\bar{q}(t) \langle \bar{v}(t), \bar{\beta}(t) \rangle + s\bar{q}(t)) \bar{v}_3(t) \end{array} \right\rangle}{\langle \bar{v}_2(t), \bar{v}_2(t) \rangle} \bar{v}_2(t)$$

$$+ (1-s\bar{p}(t) + \bar{p}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_1(t) + (-\bar{q}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle + s\bar{q}(t)) \bar{v}_3(t)$$

$$+ (\bar{p}(t) \langle \bar{v}_1(t), \bar{\beta}(t) \rangle - \bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_2(t)$$

$$= (1-s\bar{p}(t) + \bar{p}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_1(t) + (s\bar{q}(t) - \bar{q}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_3(t)$$

olur. (4.73) ve (4.74) vektörleri birim vektör haline getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_1} (t) = \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_1} (t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_1} (t)\|} = \bar{v}_2(t), \quad (4.75)$$

$$\overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_2}(t) = \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2}(t)\|} \quad (4.76)$$

$$= \frac{(1-s\bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{p}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{v}}_1(t) + (s\bar{\mathbf{q}}(t) - \bar{\mathbf{q}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{v}}_3(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2}(t)\|}$$

bulunur. Buradan $\langle \overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_1}(t), \overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_2}(t) \rangle = 0$ olur. Bu yüzeyin normal vektörü

$\vec{N}_{\bar{v}_2}(t)$ ile gösterilirse

$$\vec{N}_{\bar{v}_2}(s) = \overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_1}(t) \wedge \overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_2}(t) \quad (4.77)$$

$$= \frac{(s\bar{\mathbf{q}}(t) - \bar{\mathbf{q}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{v}}_1(t) - (1-s\bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{p}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{v}}_3(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2}(t)\|}$$

olur. Yüzeyin şekil operatörü $S_{\bar{v}_2}$ ve Gauss eğriliği $K_{\bar{v}_2}$ ile gösterilirse (2.7) nolu bağıntıdan

$$K_{\bar{v}_2} = \det S_{\bar{v}_2} = -\left\langle S_{\bar{v}_2}(\overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_2}(t)), \overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_1}(t) \right\rangle^2 \quad (4.78)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} S_{\bar{v}_2}(\overrightarrow{(E_{\bar{v}_2})_2}(t)) &= D_{(E_{\bar{v}_2})_2} \vec{N}_{\bar{v}_2}(t) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2}(t)\|} D_{(Y_{\bar{v}_2})_2} \vec{N}_{\bar{v}_2}(t) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})_2}(t)\|} \frac{d\vec{N}_{\bar{v}_2}(t)}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})}_2 (s) \right\|} \left(\begin{array}{c} (s \bar{\mathbf{q}}(t) - \bar{\mathbf{q}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{v}}_1(t) \\ -(1-s \bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{p}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{v}}_3(t) \end{array} \right)' \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})}_2 (t) \right\|^2} \frac{d\bar{t}}{dt} \left(\begin{array}{c} (s \bar{\mathbf{q}}(t) - \bar{\mathbf{q}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle)' \bar{\mathbf{v}}_1(t) \\ +(s \bar{\mathbf{q}}(t) - \bar{\mathbf{q}}(t) \langle \bar{\mathbf{u}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{q}}(t) \bar{\mathbf{v}}_2(t) \\ -(1-s \bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{p}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle)' \bar{\mathbf{v}}_3(t) \\ +(1-s \bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{p}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{q}}(t) \bar{\mathbf{v}}_2(t) \end{array} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})}_2 (t) \right\| \left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})}_2 (t) \right\|'} \frac{d\bar{t}}{dt} \left(\begin{array}{c} (s \bar{\mathbf{q}}(t) - \bar{\mathbf{q}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{\mathbf{v}}_1(t) \\ -(1-s \bar{\mathbf{p}}(t) + \bar{\mathbf{p}}(t) \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle)' \bar{\mathbf{v}}_3(t) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

olur. $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ yüzeyin Gauss eğriliği

$$\begin{aligned}
K_{\bar{v}_2} &= - \left(\frac{\bar{\mathbf{q}}(t)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{v}_2})}_2 (t) \right\|^2} \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^2 \\
&= - \left(\frac{\bar{\mathbf{q}}(t)}{(1 + \bar{\mathbf{p}}(t) (\langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s))^2 + (\bar{\mathbf{q}}(t) (s - \langle \bar{\mathbf{v}}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle))^2} \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.80}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.4.1: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_2}}(t, s)$ yüzeyinin Gauss eğriliğinin $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_2}}(t, s)$ yüzeyinin aparatları türünden karşılığı

$$K_{\bar{v}_2} = - \frac{(\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t))^2}{\left((1 + (\bar{k}_1(t) \cos(\delta - \theta) - \bar{k}_2(t) \sin(\delta - \theta)) (\langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s + \lambda))^2 + ((\bar{k}_1(t) \sin(\delta - \theta) - \bar{k}_2(t) \cos(\delta - \theta)) (s - \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - \lambda))^2 \right)^2}$$

eşitliği ile verilir.

Teorem 4.4.3: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}}(s, t)$ ve $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}}(s, t)$ dual successor eş uzaklıklı regle yüzeylerinin birim dual binormal vektörlerinin dual küre üzerinde çizdiği eğrilerin \mathbb{R}^3 'te karşılığı olan regle yüzeylerin Gauss eğrilikleri sırasıyla $K_{\bar{u}_3}$ ve $K_{\bar{v}_3}$ ile gösterilirse, bu eğrilikler

$$K_{\bar{u}_3} = - \left(\frac{\bar{k}_2(t)}{1 + \bar{k}_2^2(t) (\langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s)^2} \right)^2,$$

$$K_{\bar{v}_3} = - \left(\frac{\bar{q}(t)}{1 + \bar{q}^2(t) (\langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s)^2} \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^2$$

şeklinde verilir.

İspat: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}}(t, s)$ yüzeyinin s ve t ye göre türevleri alınırsa

$$(\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_s = \bar{u}_3(t), \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_t &= \bar{u}_3'(t) \wedge \bar{u}_3^*(t) + \bar{u}_3(t) \wedge \bar{u}_3^{*'}(t) + s \bar{u}_3'(t) \\ &= (-\bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t)) \wedge \bar{u}_3^*(t) + \bar{u}_3(t) \wedge (-\bar{u}_2(t) - \bar{k}_2(t) \bar{u}_2^*(t)) - s \bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t) \\ &= -\bar{k}_2(t) (\bar{u}_2(t) \wedge \bar{u}_3^*(t)) - (\bar{u}_3(t) \wedge \bar{u}_2(t)) - \bar{k}_2(t) (\bar{u}_3(t) \wedge \bar{u}_2^*(t)) - s \bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\bar{k}_2(t) (\bar{u}_2(t) \wedge (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_3(t))) + \bar{u}_1(t) - \bar{k}_2(t) (\bar{u}_3(t) \wedge (\bar{\alpha}(t) \wedge \bar{u}_2(t))) - s \bar{k}_2(t) \bar{u}_2(t) \\
&= \bar{u}_1(t) + (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_2(t)
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$+ (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_3(t)$$

olur. (4.81) ve (4.82) eşitlikleri iç çarpılırsa

$$\langle (\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_s, (\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_t \rangle = \bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle$$

bulunur. Bu eşitlik sıfırdan farklı olduğundan $\{(\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_s, (\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_t\}$ sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$(\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_t = (\overrightarrow{X_{\bar{u}_3}})_1(t),$$

$$(\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}})_s = (\overrightarrow{X_{\bar{u}_3}})_2(t)$$

olacağından,

$$(\overrightarrow{Y_{\bar{u}_3}})_1(t) = (\overrightarrow{X_{\bar{u}_3}})_1(t) = \bar{u}_3(t), \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{Y_{\bar{u}_3}})_2(t) &= -\frac{\langle (\overrightarrow{Y_{\bar{u}_3}})_1(t), (\overrightarrow{X_{\bar{u}_3}})_2(t) \rangle}{\langle (\overrightarrow{Y_{\bar{u}_3}})_1(t), (\overrightarrow{Y_{\bar{u}_3}})_1(t) \rangle} (\overrightarrow{Y_{\bar{u}_3}})_1(t) + (\overrightarrow{X_{\bar{u}_3}})_2(t) \\
&= -\frac{\left\langle \begin{aligned} &\bar{u}_3(t), \bar{u}_1(t) + (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_2(t) \\ &+ (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_3(t) \end{aligned} \right\rangle}{\langle \bar{u}_3(t), \bar{u}_3(t) \rangle} \bar{u}_3(t)
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$+ \bar{u}_1(t) + (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_2(t) + (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_2(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \bar{u}_3(t)$$

$$= \bar{u}_1(t) + (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_2(t)$$

bulunur. (4.83) ve (4.84) vektörleri birim vektör haline getirilirse

$$\overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_1} = \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_1}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_1}(t)\|} = \bar{u}_3(t), \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_2}(t) &= \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_2}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_2}(t)\|} \\ &= \frac{\bar{u}_1(t) + (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_2(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_2}(t)\|} \end{aligned} \quad (4.86)$$

yazılır. Buradan $\langle \overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_1}(t), \overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_2}(t) \rangle = 0$ olur. Bu yüzeyin normal vektörü $\vec{N}_{\bar{U}_3}(t)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\bar{U}_3}(t) &= \overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_1}(t) \wedge \overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_2}(t) \\ &= \bar{u}_3(t) \wedge \frac{\bar{u}_1(t) + (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_2(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_2}(t)\|} \\ &= \frac{\bar{u}_2(t) - (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_1(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_2}(t)\|} \end{aligned} \quad (4.87)$$

olur. Yüzeyin şekil operatörü $S_{\bar{U}_3}$ ve Gauss eğriliği $K_{\bar{U}_3}$ ile gösterilirse (2.7) nolu bağıntıdan

$$K_{\bar{U}_3} = \det S_{\bar{U}_3} = -\left\langle S_{\bar{U}_3}(\overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_2}(t)), \overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_1}(t) \right\rangle^2 \quad (4.88)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} S_{\bar{U}_3}(\overrightarrow{(E_{\bar{U}_3})_2}(t)) &= D_{(E_{\bar{U}_3})_2} \overrightarrow{N}_{\bar{U}_3}(t) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{U}_3})_2}(t)\|} D_{(Y_{\bar{U}_3})_2} \overrightarrow{N}_{\bar{U}_3}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_3})_2} (t) \right\|} \frac{d\overrightarrow{N_{\bar{u}_3}}(t)}{dt} \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_3})_2} (t) \right\|} \left(\frac{\bar{u}_2(t) - (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_1(t)}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_3})_2} (t) \right\|} \right)' \\
&= \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_3})_2} (t) \right\|^2} \left\{ \begin{aligned} &(\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t))' \bar{u}_1(t) - (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle) \\ &-s \bar{k}_2(t) \bar{k}_1(t) \bar{u}_2(t) - \bar{k}_1(t) \bar{u}_1(t) + \bar{k}_2(t) \bar{u}_3(t) \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{1}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_3})_2} (t) \right\| \left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_3})_2} (t) \right\|'} \{ \bar{u}_2(t) - (\bar{k}_2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{k}_2(t)) \bar{u}_1(t) \}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

olur. $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}}(t, s)$ yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_{\bar{u}_3} = -\frac{(\bar{k}_2(t))^2}{\left\| \overrightarrow{(Y_{\bar{u}_3})_2} (t) \right\|^4} = -\frac{(\bar{k}_2(t))^2}{1 + \bar{k}_2^2(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s^2} \tag{4.90}$$

şeklinde bulunur. $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}}(t, s)$ yüzeyinin s ve t ye göre türevleri alınırsa

$$\overrightarrow{(\Psi_{\bar{v}_3})_s} = \bar{v}_3(t), \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{(\Psi_{\bar{v}_3})_t} &= \bar{v}_3'(t) \wedge \bar{v}_3^*(t) + \bar{v}_3(t) \wedge \bar{v}_3^{*'}(t) + s \bar{v}_3'(t) \\
&= (-\bar{q}(t) \bar{v}_2(t)) \wedge \bar{v}_3^*(t) + \bar{v}_3(t) \wedge (-\bar{v}_2(t) - \bar{q}(t) \bar{v}_2^*(t)) - s \bar{q}(t) \bar{v}_2(t) \\
&= -\bar{q}(t) (\bar{v}_2(t) \wedge \bar{v}_3^*(t)) - (\bar{v}_3(t) \wedge \bar{v}_2(t)) - \bar{q}(t) (\bar{v}_3(t) \wedge \bar{v}_2^*(t)) - t \bar{q}(t) \bar{v}_2(t) \\
&= -\bar{q}(t) (\bar{v}_2(t) \wedge (\bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_3(t))) + \bar{v}_1(t) - \bar{q}(t) (\bar{v}_3(t) \wedge (\bar{\beta}(t) \wedge \bar{v}_2(t))) - s \bar{q}(t) \bar{v}_2(t) \\
&= \bar{v}_1(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_2(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_3(t)
\end{aligned} \tag{4.92}$$

yazılır. (4.91) ve (4.92) eşitlikleri iç çarpılırsa

$$\langle (\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}})_s, (\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}})_t \rangle = \bar{q}(t) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle$$

bulunur. Bu eşitlik sıfırdan farklı olduğundan $\{(\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}})_t, (\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}})_s\}$ sistemi ortogonal değildir. Bu vektörlere Gram-Schmidt yöntemi uygulanırsa

$$(\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}})_t = (\overrightarrow{X_{\bar{v}_3}})_1(t),$$

$$(\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}})_s = (\overrightarrow{X_{\bar{v}_3}})_2(t),$$

olacağından,

$$(\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_1(t) = (\overrightarrow{X_{\bar{v}_3}})_1(t) = \bar{v}_3(t), \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_2(t) &= -\frac{\langle (\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_1(t), (\overrightarrow{X_{\bar{v}_3}})_2(t) \rangle}{\langle (\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_1(t), (\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_1(t) \rangle} (\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_1(t) + (\overrightarrow{X_{\bar{v}_3}})_2(t) \\ &= -\frac{\left\langle \begin{array}{l} \bar{v}_1(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_2(t) \\ \bar{v}_3(t), \\ + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_3(t) \end{array} \right\rangle}{\langle \bar{v}_3(t), \bar{v}_3(t) \rangle} \bar{v}_3(t) \\ &\quad + \bar{v}_1(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_2(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_2(t), \bar{\beta}(t) \rangle) \bar{v}_3(t) \\ &= \bar{v}_1(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_2(t) \end{aligned} \quad (4.94)$$

olur. (4.93) ve (4.94) vektörleri birim vektör haline getirilirse

$$(\overrightarrow{E_{\bar{v}_3}})_1(t) = \frac{(\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_1(t)}{\|(\overrightarrow{Y_{\bar{v}_3}})_1(t)\|} = \bar{v}_3(t), \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_2}(t) &= \frac{\overrightarrow{(Y_{\bar{V}_3})_2}(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{V}_3})_2}(t)\|} \\ &= \frac{\bar{v}_1(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_2(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{V}_3})_2}(t)\|} \end{aligned} \quad (4.96)$$

elde edilir. Buradan $\langle \overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_1}(t), \overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_2}(t) \rangle = 0$ olur. Bu yüzeyin normal vektörü $\vec{N}_{\bar{V}_3}(t)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\bar{V}_3}(t) &= \overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_1}(t) \wedge \overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_2}(t) \\ &= \bar{v}_3(t) \wedge \frac{\bar{v}_1(t) + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_2(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{V}_3})_2}(t)\|} \\ &= \frac{\bar{v}_2(t) - (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_1(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{V}_3})_2}(t)\|} \end{aligned} \quad (4.97)$$

olur. Yüzeyin şekil operatörü $S_{\bar{V}_3}$ ve Gauss eğriliği $K_{\bar{V}_3}$ ile gösterilirse (2.7) nolu bağıntıdan

$$K_{\bar{V}_3} = \det S_{\bar{V}_3} = -\left\langle S_{\bar{V}_3}(\overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_2}(t)), \overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_1}(t) \right\rangle^2 \quad (4.98)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} S_{\bar{V}_3}(\overrightarrow{(E_{\bar{V}_3})_2}(t)) &= D_{(E_{\bar{V}_3})_2} \overrightarrow{N}_{\bar{V}_3}(t) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{V}_3})_2}(t)\|} D_{(E_{\bar{V}_3})_2} \overrightarrow{N}_{\bar{V}_3}(t) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{V}_3})_2}(t)\|} \frac{d\overrightarrow{N}_{\bar{V}_3}(t)}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{dt} \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_3})_2}(t)\|} \frac{d\bar{t}}{dt} \left\{ \frac{\bar{v}_2(t) - (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\alpha}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_1(t)}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_3})_2}(t)\|} \right\}' \\
&= \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_3})_2}(t)\|^2} \frac{d\bar{t}}{dt} \left\{ \begin{aligned} &(\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t))' \bar{v}_1(t) - \bar{p}(t) \bar{v}_1(t) + \bar{q}(t) \bar{v}_3(t) \\ &-(\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{q}(t) \bar{v}_2(t) \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{1}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_3})_2}(t)\| \|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_3})_2}(t)\|'} \frac{d\bar{t}}{dt} \{ \bar{v}_2(t) - (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s \bar{q}(t)) \bar{v}_1(t) \}
\end{aligned}$$

olur. $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}}(t, s)$ yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_{\bar{v}_3} = - \left(\frac{\bar{q}(t) \frac{d\bar{t}}{dt}}{\|\overrightarrow{(Y_{\bar{v}_3})_2}(t)\|^2} \right)^2 = - \left(\frac{\bar{q}(t) \frac{d\bar{t}}{dt}}{(1 + (\bar{q}(t) \langle \bar{v}_3(t), \bar{\beta}(t) \rangle - s)^2)^2} \right)^2 \quad (4.100)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.4.2: $\overrightarrow{\Psi_{\bar{v}_3}}(t, s)$ yüzeyinin Gauss eğriliğinin $\overrightarrow{\Psi_{\bar{u}_3}}(t, s)$ yüzeyinin aparatları türünden ifadesi

$$K_{\bar{v}_3} = - \frac{\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) + \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t)^2}{\left(1 + \left(\begin{aligned} &\sin(\delta - \theta) \bar{k}_1(t) \\ &+ \cos(\delta - \theta) \bar{k}_2(t) \end{aligned} \right) \left(\begin{aligned} &-\sin(\delta - \theta) \langle \bar{u}_1(t), \bar{\alpha}(t) \rangle + \mu \\ &+ \cos(\delta - \theta) \langle \bar{u}_3(t), \bar{\alpha}(t) + \eta \rangle - s \end{aligned} \right)^2 \right)^2} \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)^4$$

eşitliği ile verilir.

$$\text{Örnek 4.1: } \bar{\alpha}(t) = \left(\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \bar{\beta}(t) = \left(2 + \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, 2 + \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

successor eğrileri olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$\bar{u}_1(t) = \bar{v}_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\bar{u}_2(t) = \bar{v}_2(t) = \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$\bar{u}_3(t) = \bar{v}_3(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\bar{k}_1(t) = \bar{p}(t) = \frac{1}{2}, \quad \bar{k}_2(t) = \bar{q}(t) = -\frac{1}{2}$$

şeklindedir bulunur. $\bar{\alpha}(t)$ ve $\bar{\beta}(t)$ successor eğrilerine karşılık gelen $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ eğrilerini bulalım.

(2.1) bağıntısı gereğince $u_1(t) = \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ olur. $\alpha(t)$ birim hızlı olduğundan $\alpha'(t) = u_1(t)$ yazılır. Bu durumda α eğrisi $\alpha(t) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right)$ şeklinde alınabilir. Benzer şekilde (2.1) bağıntısı gereğince $v_1(t) = \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ olur. $\beta(t)$ eğrisi birim hızlı bir eğri olduğundan $\beta'(t) = v_1(t)$ olur. Bu durumda β eğrisi $\beta(t) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + 2, 2 - \sqrt{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right)$ şeklinde olur. Elde edilen $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ eğrilerinin Frenet vektörleri, eğrilikleri ve burulmaları sırasıyla

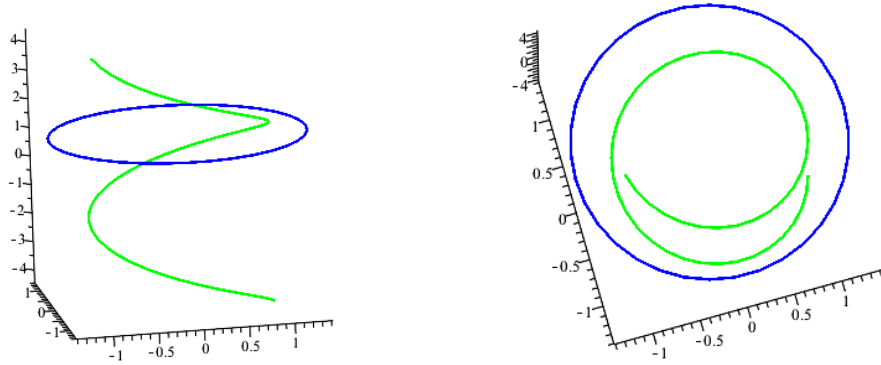
$$u_1(t) = v_1(t) = \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$u_2(t) = v_2(t) = \left(-\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$u_3(t) = v_3(t) = (0, 0, -1),$$

$$k_1(t) = \mathbf{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_2(t) = \mathbf{q}(t) = 0$$

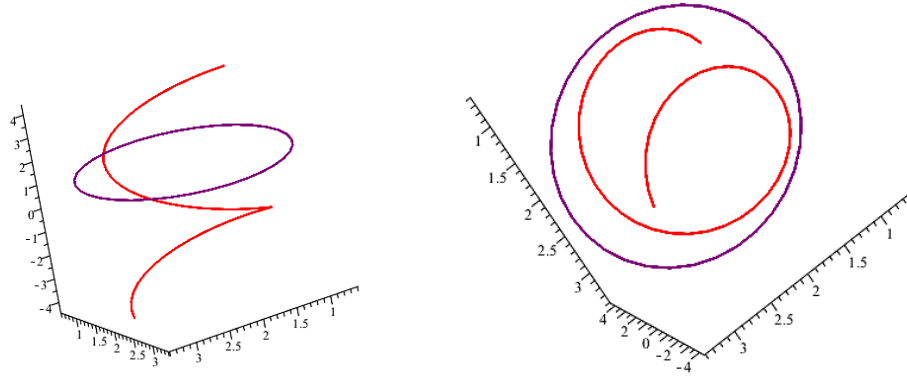
şeklinde hesaplanır. $\bar{\alpha}(t)$ ve $\bar{\beta}(t)$ successor eğrilere karşılık gelen $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$ eğrilerinin $t = (-2\pi, 2\pi)$ aralığındaki grafiklerine ayrı ayrı bakalım. α eğrisi ve $\bar{\alpha}$ successor eğrisinin grafiği Şekil 4.3 te verilmiştir.



Şekil 4.3 $\alpha(t)$ Eğrisi ve onun $\bar{\alpha}(t)$ Successor Eğrisi

Şekil 4.3 te görüldüğü üzere $\bar{\alpha}(t)$ successor eğrisi (yeşil ile gösterilen eğri) bir helis eğrisi olarak seçildiğinde ona karşılık gelen $\alpha(t)$ (mavi ile gösterilen eğri) eğrisi bir daire olmaktadır.

Benzer şekilde β eğrisi ve $\bar{\beta}$ successor eğrisinin grafiği Şekil 4.4 te verilmiştir.



Şekil 4.4 $\beta(t)$ Eğrisi ve onun $\bar{\beta}(t)$ Successor Eğrisi

Şekil 4.4 te görüldüğü üzere $\bar{\beta}(t)$ successor eğrisi (kırmızı ile gösterilen eğri) bir helis eğrisi olarak seçildiğinde ona karşılık gelen $\beta(t)$ (mor ile gösterilen eğri) eğrisi bir daire olmaktadır.

Şimdi dual successor eş uzaklıklı regle yüzeyleri oluşturalım. $\bar{\alpha}(t)$ ve $\bar{\beta}(t)$ eğrilerinin Frenet vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla

$$\bar{u}_1^*(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad \frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\bar{u}_2^*(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad 0 \right),$$

$$\bar{u}_3^*(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad \frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ve

$$\bar{v}_1^*(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad \frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \right. \\ \left. -\frac{2}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\bar{v}_2^*(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad 2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\bar{v}_3^*(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, & \frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. $\bar{\alpha}(t)$ successor eğrisinin dual ortonormal sistemleri

$$\bar{U}_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$+ \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\bar{U}_2(t) = \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \varepsilon \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$\bar{U}_3(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$+ \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ve $\bar{\beta}(t)$ successor eğrisinin dual ortonormal sistemi

$$\bar{V}_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$+ \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, & \frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\bar{V}_2(t) = \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \varepsilon \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, 2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_3(t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ \varepsilon \left(\begin{array}{l} -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{2} \cos \frac{ts}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur. $\bar{U}_2(t)$ ve $\bar{V}_2(t)$ dual vektörlerin birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğrilere, Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

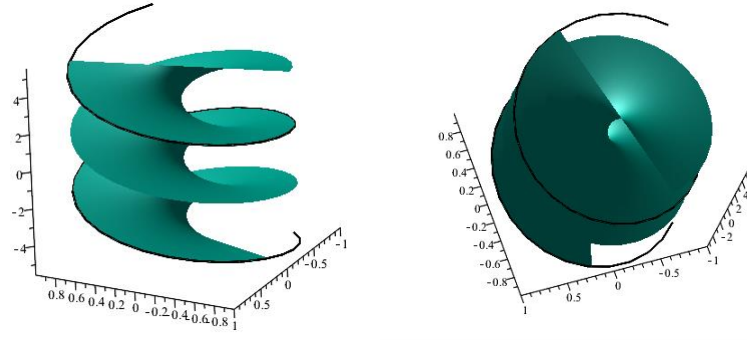
$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{\bar{U}_2}(t, s) &= \left(0, 0, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + s \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ \bar{\Psi}_{\bar{V}_2}(t, s) &= \left(-\cos \frac{t}{\sqrt{2}} \left(2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \left(2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - 2 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ s \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, 0 \right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Bu yüzeylerin striksiyon çizgileri ise sırasıyla

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{\alpha}}(t) &= \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \\ \gamma_{\bar{\beta}}(t) &= \left(-2 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{t}{\sqrt{2}} + \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, 2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{t}{\sqrt{2}} - \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

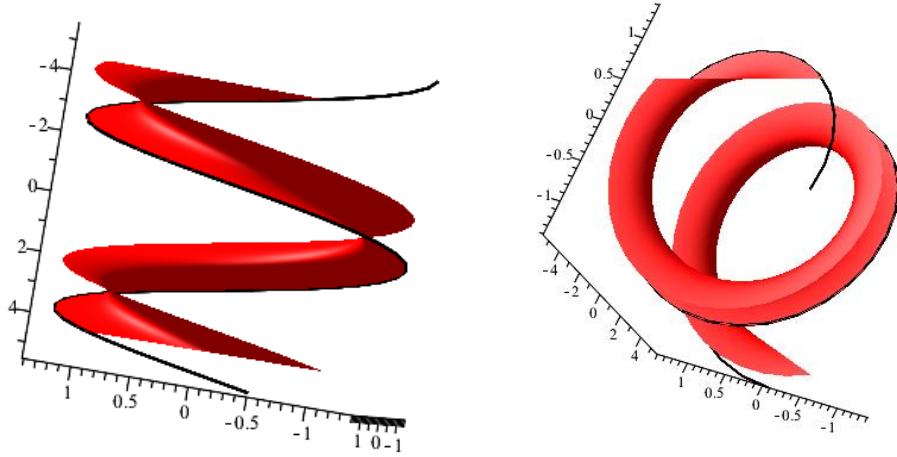
olur.

$t = (-2\pi, 2\pi)$ ve $s = (-1, 1)$ aralığında regle yüzeylerin ve striksiyon çizgilerini gösteren grafikler aşağıda gösterilmiştir.



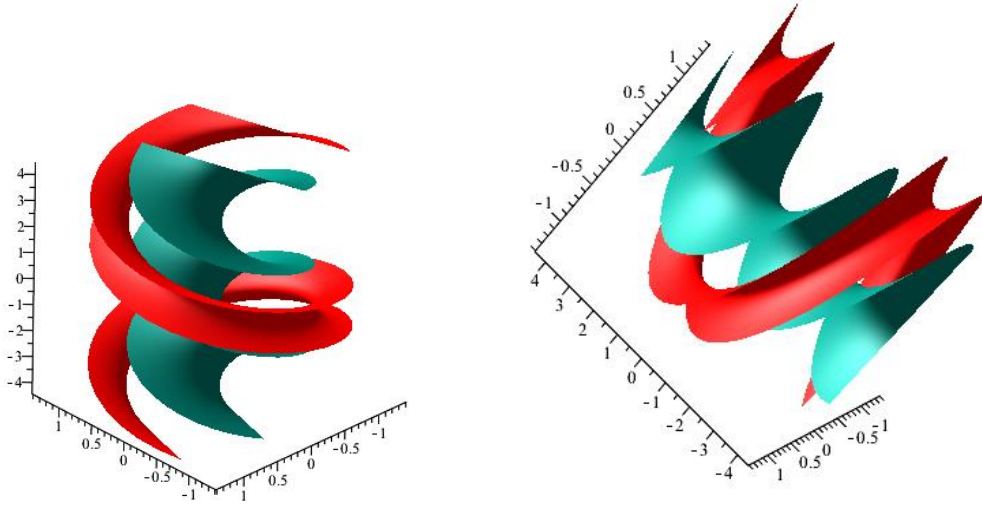
Şekil 4.5 $\bar{\alpha}(t)$ Eğrisine ait \mathbb{R}^3 teki Regle Yüzey ve Striksiyon Çizgisi

Şekil 4.5 te $\Psi_{\bar{U}_2}$ regle yüzeyinin ve $\gamma_{\bar{\alpha}}$ striksiyon çizgisinin grafiği çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere $\Psi_{\bar{U}_2}$ regle yüzeyi, $\gamma_{\bar{\alpha}}$ striksiyon çizgisi boyunca ilerlemektedir.



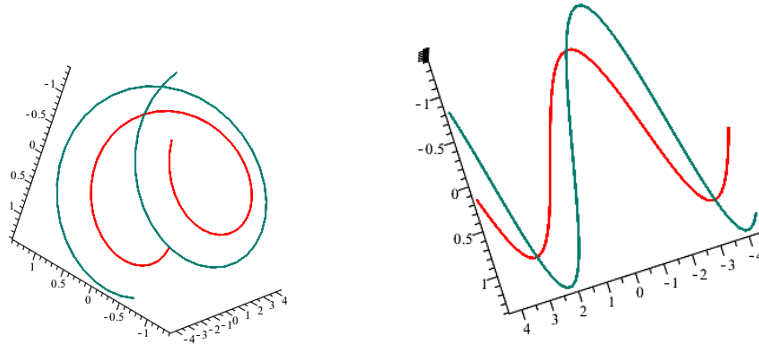
Şekil 4.6 $\bar{\beta}(t)$ Successor Eğrisine ait \mathbb{R}^3 teki Regle Yüzey ve Striksiyon Çizgisi

Şekil 4.6 da $\Psi_{\bar{V}_2}$ regle yüzeyinin ve $\gamma_{\bar{\beta}}$ striksiyon çizgisinin grafiği çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere $\Psi_{\bar{V}_2}$ regle yüzeyi, $\gamma_{\bar{\beta}}$ striksiyon çizgisi boyunca ilerlemektedir.



Şekil 4.7 \mathbb{R}^3 te Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Şekil 4.7 de $\bar{U}_2(t)$ ve $\bar{V}_2(t)$ dual vektörlerin birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğrilere, Öklid uzayında karşılık gelen regle yüzeylerin ($\Psi_{\bar{U}_2}$ ve $\Psi_{\bar{V}_2}$ yüzeylerinin) paralel eş uzaklıklı regle yüzeyler oldukları görülmektedir.

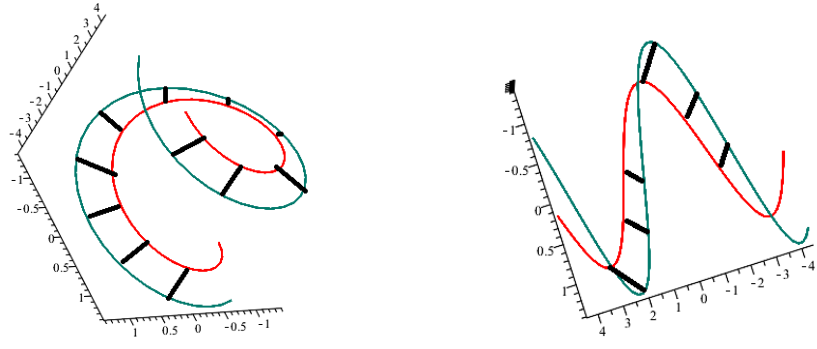


Şekil 4.8 ID – Modülde Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeylerin Dual İfadesi

Şekil 4.8 de $\bar{U}_2(t)$ ve $\bar{V}_2(t)$ dual vektörlerin birim dual küre üzerinde çizdiği dual eğrilerin ($\gamma_{\bar{\alpha}}$ ve $\gamma_{\bar{\beta}}$ striksiyon çizgileri) dual eş uzaklıklı oldukları görülmektedir.

Şimdi $\bar{\phi}^*$ uzaklığını hesaplayalım. (4.27) nolu bağıntıdan

$\bar{\phi}^* = 2 \left(\sin \frac{t}{\sqrt{2}} + \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$ olarak bulunur. Şekil 4.9 da $\bar{\phi}^*$ uzaklığı gösterilmiştir.



Şekil 4.9 ID – Modülde Successor Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler Arasındaki Uzaklık

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Çalışmamızda ilk olarak herhangi bir eğrinin successor eğrisi ifade edilerek vektörel moment vektörleri hesaplandı ve dual uzayda yeni vektörler elde edildi. Successor eğrilerinin asli normal vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin dual uzaydaki karşılıkları Study dönüşümü kullanılarak ifade edildi. Daha sonra birim teğet vektörleri paralel olan herhangi iki eğrinin successorlerine ait asli normal vektörlerinin oluşturduğu eş uzaklıklı regle yüzeylerin dual ifadesi verildi. Bu eğriler arasındaki uzaklık sıfırdan farklı sırf dual olduğu için aslında iki teğet vektörün dual uzayda karşılıkları olan dual noktalar arasındaki yay uzunluğuna eşit olduğu gösterildi. Bulunan regle yüzeylerin kapalı olması durumunda açılım açıları, açılım uzunlukları, dağılma parametreleri ve Gauss eğrilikleri ayrı ayrı hesaplandı ve bunlar arasındaki bağıntılar kuruldu. Tezimizin son kısmında örnek olarak iki tane helis eğrisi successor eğrisi olarak kabul edildi. Bu iki eğrinin hangi eğrinin successor eğrisi olacağı hesaplandı ve şekilleri tezimize eklendi. Daha sonra örnekte verilen eğrilerin Öklid uzayında ve dual uzayda oluşturdukları regle yüzeyler hesaplanarak görselleştirildi.

Yapılan bu çalışma eğri değiştirilerek Öklid ve dual uzayda çalışılabilir. Ayrıca aynı çalışma benzer yöntemlerle Lorentz uzayında da yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

- Blaschke, W. (1949). Diferensiyel Geometri Dersleri. İstanbul Üniversitesi Yayınları, No:43, İstanbul, 399s.
- Erişir, T, & Öztaş, H.K. (2022). Spinor Equations of Successor Curve. *Univarsal Journal of Mathematics and Applications*, 5(1), 32-41.
- Fenchel, W. (1951). The differential geometry of closed space curves, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57(1951), 44-54.
- Güner, Y. R. & Çağdaş, G. (2019). A form finding approach with triply periodic minimal surfaces. *Journal of Computational Design*, 1(1), 35-54.
- Gür, S. (2015). Dual uzayda paralel equidistante regle yüzeyler. Doktora Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
- Güven, Aİ. (2010). Dual küresel eğriler ve regle yüzeyler. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, HH. (1983 a). Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:7, Malatya, 269s.
- Hacısalıhoğlu, HH. (1983 b). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 338s.
- Hacısalıhoğlu, HH. (1994). Diferensiyel Geometri. II.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 340s.
- Hicks, N. J., 1974. Notes on Differential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company, London.
- Li, Y., Şenyurt, S., Özduran, A. & Canlı, D. (2022). The Characterizations of Parallel q-Equidistant Ruled Surfaces. *Symmetry*, 14, 1879.
- Masal, M. (1994). p-equidistante regle yüzeylerin bazı yeni karakteristik özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun.
- Masal, M. & Kuruoğlu, N. (1999). Some characteristic properties of the parallel p-equidistant ruled surfaces in the euclidean space. *Pure Applied Mathematica Sciences*, India, 49-50.
- Masal, M. & Kuruoğlu, N. (2000 a). Some characteristic properties of the shape operators of parallel p-equidistant ruled surfaces. *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 19E (2), 361-364.
- Masal, M. & Kuruoğlu, N. (2000 b). Some characteristic properties of the spherical indicatrix leading curves of parallel p-equidistant ruled surfaces. *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 19E (2), 405-410.
- Masal, M. & Kuruoğlu, N. (2013). Generalized paralel p-equidistant ruled surfaces. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 171, 18.
- Masal, M. (2018). Curves according to the successor frame in euclidean 3-Space, *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1868-1873.

- Mazlum, S. (2022). The dual expression of parallel equidistant ruled surfaces in euclidean 3-space. *Symmetry*, 14, 1062.
- Menninger, A. (2014). Characterization of the slant helix as successor curves of the general helix, *International Electronic Journal of Geometry*, 7(2), 84-91.
- Müller, HR. (1963). Kinematik Dersleri. Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 292s.
- O'Neill, B. (2006). Elementary differential geometry. Revised Second Edition, Elsevier, Los Angeles.
- Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 440s.
- Saraçoğlu, S. & Yaylı, Y. (2012). Ruled surfaces and dual spherical curves. *Acta Universitatis Apulensis*. 30: 337-354.
- Sarioğlugil, A. & Tutar, A. (2007). On ruled surfaces in euclidean space E^3 . *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2 (1): 1-11.
- Sarioğlugil, A., Şenyurt, S. & Kuruoglu, N. (2011). On the integral invariants of the closed ruled surfaces generated by a parallel p-equidistant dual centroit Curve in the line space. *Hadronic Journal*, 34 (3): 34-47.
- Struik, DJ. (1933). Outline of History of Differential Geometry. *Isis*, 19: 92-120.
- Şenatalar M. (1978). Diferansiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyler Teorisi). İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı 151, İstanbul, 349s.
- Şenyurt, S. & As, E. (2013). Some characteristic properties of parallel z- equidistant ruled surfaces, Hindawi Publishing Corporation, *Mathematical Problems in Engineering*, 7.
- Şenyurt, S. & Kaya, G. (2019). Successor eğrisinin frenet vektörlerinden elde edilen smarandache eğrileri, Karadeniz 1.Uluslararası Multidisipliner çalışmalar kongresi, tam metin bildiri kitabı, 318-324.
- Şenyurt, S. (2012). Integral invariants of parallel p-equidistant ruled surfaces which are generated by instantaneous pfaff vector. *Ordu Üniversitesi, Bilim Teknik Dergisi*, 2 (1): 13-22.
- Valeontis, I. (1986). Parallel q-equidistante Regelflachen Manuscripta. *Mathematics* 54, 391-404.
- Yazar, T. (2019). Mimarlıkta Yüzey Pannelleme Yaklaşımlarının Gauss Eğriliği ile İlişkisi. *Megaron E-Dergisi*, doi:10.5505/MEGARON.2018.5013

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Gülşah UZUN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	T.C.
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	17.07.2013
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	31.07.2017
Doktora	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Yayınlar	
<ol style="list-style-type: none">1. Kaya, G & Şenyurt, S. (2017). ‘On Neutrosophic Continuity’, Ordu University Journal of Science and Technology, 7(2): 330-339.2. Şenyurt, S., & Kaya, G. (2018). NC-Smarandache Curve and NW-Smarandache Curve According to Alternative Frame. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 10269–274.	
Konferans ve Sempozyumlar	
<ol style="list-style-type: none">1. Şenyurt, S., & Kaya, G. Some Properties of Neutrosophic Continuity), 15 th International Geometry Symposium, 03- 06/07/2017, Amasya/ Turkey.2. Şenyurt, S., & Kaya, G. CW and NCW Smarandache Curves According to Alternative Frame, ICMSA 2018 International Conference on Mathematical Studies and Applications, 04 – 06/10/2018, Karaman/ Turkey.3. Şenyurt, S., & Kaya, G. An Application on the Alternative Frame International Symposium on Multidisciplinary Academic Studies, 16 - 17/11/2018, Istanbul/ Turkey.4. Şenyurt, S., & Kaya, G. Successor Eğrisinin Frenet Vektörlerinin Vektörel Moment Eğrileri, Karadeniz 1. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Kongresi, 15 – 17/03/2019, Giresun.5. Şenyurt, S., & Kaya, G. Successor Eğrisinin Frenet Vektörlerinden Elde Edilen Smarandache Eğrileri Karadeniz 1. Uluslararası Multidisipliner Çalışmalar Kongresi, 15 – 17/03/2019, Giresun.	