T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERDE ÇEKİRDEK İNVERS GÖSTERİMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

GÜRKAN MURSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

GÜRKAN MURSAL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MATRİSLERDE ÇEKİRDEK İNVERS GÖSTERİMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

GÜRKAN MURSAL

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 62 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından kısaca bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olan bazı temel tanımlar, teoremler ve genel bilgiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde çekirdek invers tanımı verilerek bunun çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca matrislerin çekirdek inversleri ile ilgili bazı hesaplanma yöntemleri ve çekirdek inverslerin bazı uygulamalarından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmistir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anantara Kelimeler: Matris, Kare Matris Parçalı Matris, Rank, Genelleştirilmiş İnvers, Moore-Penrose İnvers, Grup İnvers, Çekirdek İnvers.

ABSTRACT

REPRESENTATIONS OF THE CORE INVERSE OF MATRICES AND SOME APPLICATIONS

GÜRKAN MURSAL

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 62 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized into five parts. In the first chapter, an introduction is given by mentioning the purpose of the study. In the second chapter, some basic definitions, theorems and general informations that will be required in our study are expressed. It is given the definition of the core inverse of a matrix and considered some properties of this inverse. Furthermore, some computational methods and several applications of the core inverses of matrices are given in this chapter. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Partitioned Matrix, Rank, Generalized Inverse, Moore-Penrose Inverse, Group Inverse, Core Inverse.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmalarım boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ ndeki tüm değerli hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ **veya** $\mathbb{C}_{\boldsymbol{m,n}}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I_n}$	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{\boldsymbol{A}}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^{*}$	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\|\boldsymbol{A}\|$	: A matrisinin determinantı
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A_{ij}}$	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A matrisinin inversi
$\mathbf{ind}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin indeksi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin izi
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1})}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}$	: A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A_0}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1,2})}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{+}$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\oplus}$	: A matrisinin çekirdek inversi
köş$(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin köşegen elemanları
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Bugün matrisler ve matris teorisi, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi, bilgisayar mühendisliği, kodlama teorisi ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından itibaren kullanılmaya başlanmıştır. İngiliz matematikçi Sylvester, ilk kez 1850 yılında matris kavramını kullanmıştır. 1853 yılında ise bir diğer ingiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında zamanında çok meşhur olan '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli eserinde matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. İlerleyen zamanlarda Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk kez 1920 yılında Moore tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışma yapılamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan tamamen habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını yeniden tanımlamıştır. Penrose ile aynı dönemlerde yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao, bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde, singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında çok sık kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Ancak Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle bu invers, Moore–Penrose inversten biraz farklıdır. Rao, daha sonraki bir çalışmasında ise lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olan ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha da zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Bu invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bu inversin çeşitli uygulamaları Rao' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' li yıllardan itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville, Bjerhammer, Ben-Israel ve Charnes, Chipman, Chipman ve Rao, Scroggs ve Odell sayılabilir. Bott ve Duffin, bir kare matrisin kısıtlı inversini tanımlamışlardır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda oldukça fazla kullanılır. Chernoff, çalışmalarında singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini ele almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek türlü olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao, değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünün mevcut olup-olmadığının araştırılmasında ve mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan Moore-penrose invers adı verilen bir genelleştirilmiş invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Daha sonra keyfi mertebeden bir kare matris için Çekirdek invers tanımı ve bunun bazı özellikleri ortaya konulmuş ve ayrıca bu tipten inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1

i) $\mathbb{K}$ bir cisim, $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesini $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gösterelim. Bir $\mathfrak{f}: A \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow \mathfrak{f}(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olmak üzere keyfi seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu sayı tablosuna $\mathbb{K}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

veya kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her bir (i, j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına ise A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

ii) Bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ veya $\mathbb{K}^{m \times n}$ ile gösterilir.

iii) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde olmak üzere, eğer her (i, j) için $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \le i \le m$ ve $1 \le j \le n$ ise A ve B matrislerine eşit matrisler denir.

iv) $A = [a_{ij}]$ matrisi $m \times n$ tipinde olmak üzere, her bir (i, j), $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine sıfır matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.2

i) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde iki matris olsun. Bu takdirde A ve B matrislerinin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+: \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

ii) $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Başka bir deyişle

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c,A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

dir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.3 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matris olup

$$\mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right],\ 1 \leq i \leq m,\ \ 1 \leq j \leq n$$

şeklinde veya daha açık olarak

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda iki matrisin çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı eşit olmalıdır. Uygun A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.4 Eğer özel olarak $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alınırsa, bu takdirde matrise bir reel matris ve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alınırsa matrise bir kompleks matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.5

i) Eğer bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise, yani matrisin satır sayısı sütun sayısına eşit ise, bu takdirde A matrisine bir kare matris denir. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii) Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise bu matrise köşegen matris denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \ldots , a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} =$ k, k $\in \mathbb{K}$ ise matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve $n -$ yinci mertebeden bir birim matris

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Herhangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ eşitliği sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.6

i) Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ matrisinden aynı numaralı satır ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$ matrisine A matrisinin transpozu denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

olduğu kolayca görülür.

ii) A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

iii) A ve B aynı mertebeden iki kare matris olmak üzere eğer $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli matrisler denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.7 $\{1,2, \ldots n\}$ kümesinin kendisi üzerine tanımlı birebir ve örten bağıntısına veya buna eş değer olarak $1,2, \ldots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \ldots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu şekildeki permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ permütasyonunun işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Farz edelim ki $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir kare matris olsun. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi bu şekilde $n!$ tane çarpım kapsar.

Tanım 2.8 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_\sigma (sgn\sigma) a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir. Bu durumda 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. Başka bir deyişle $A = [a]$ ise, bu durumda $\det(A) = |a| = a$ olur. Öte yandan 2×2 tipindeki bir A matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur (Branson R., 1999).

Tanım 2.9

i) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ ile gösterilen minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan alt kare matrisin determinantıdır.

ii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. Bu durumda bir a_{ij} elemanının A_{ij} ile gösterilen kofaktörü (veya işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

iii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı herhangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp elde edilen çarpanların toplanmasıyla hesaplanır. Başka bir deyişle herhangi i ve j $(i, j = 1,2,3, \dots, n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}|M_{ik}| \qquad (2.3)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}|M_{ik}| \qquad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Her bir i için, (2.3) açılımına, A matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı, her bir j için, (2.4) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı denir.

iv) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için eğer $|A| = 0$ ise, A matrisine singüler matris, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine nonsingüler (veya regüler) matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.10 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\text{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

matrisine A matrisinin ek matrisi denir ve

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.11 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\text{Ek}(A) = \text{Ek}(A).A = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|I_n \tag{2.5}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\text{Ek}(A) \tag{2.6}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.3 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisi için A^{-1} invers matrisi tektir.

ii) A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) A ve B çarpıma uygun nonsingüler matrisler ise AB çarpımı da nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

Tanım 2.12

i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine idempotent matris denir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine bunların eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

v) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

vi) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal matris denir (Branson R., 1999).

Teorem 2.5 A ve B uygun matrisler olmak üzere,

i) $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$.

ii) $(A^*)^* = A$.

iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

iv) $(AB)^* = B^*A^*$.

eşitlikleri sağlanır (Branson R., 1999).

Tanım 2.13

i) $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) A matrisi$m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. Bu durumda A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı ve A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.6 Bir matrisin herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi o matrisin satır rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

Teorem 2.7

i) Elemanter işlemler herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez.

ii) Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

Tanım 2.14 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\mathrm{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.8 A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.15 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine nonsingüler matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.16

i) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ kümesine A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

ii) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde $\Re(A) = \{y: Ax = y\}$ kümesine A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.9 Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

i) $m = n = r \Rightarrow PAQ = I$

ii) $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I\ ,0]$

iii) $m > r,\ n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dir (Lancaster, P., 1969).

Teorem 2.10 Çarpıma uygun A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\{r(A)\ ,\ r(B)\} \tag{2.7}$$

dir (Lancaster, P., 1969)

2.2 Genelleştirilmiş İnversler

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan G matrisine A matrisinin bir Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ sembollerinden birisi ile gösterilir.

(i) $AGA = A,$

(ii) $GAG = G,$

(iii) $(AG)^* = AG,$

(iv) $(GA)^* = GA.$ (2.8)

Bu durumda eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Bir A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^+$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^+ matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin birtakım özellikleri verilecektir.

Teorem 2.11 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^+ matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

Teorem 2.12 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek A^+ matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^+ = 0$ olup $A \neq 0$ alınabilir. A matrisi r ranklı olsun. Böylece

$$A = BC \tag{2.9}$$

olarak parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı bir matris ve C matrisi ise $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı bir matris olup, B^*B ve CC^* matrisleri nonsingülerdir. Bu durumda, A^+

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.10}$$

olarak alınırsa, A^+ matrisi istenen Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^+A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$

$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$

(ii) $A^+AA^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$

olduğu görülür. Moore–Penrose inversin tek olduğunu göstermek için A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki A_1^+ ve A_2^+ Moore–Penrose inversinin mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani, A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.13 $m \times n$ tipinde bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipindedir.

Teorem 2.14

i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^+ = \frac{1}{m.n}A^*$ dir.

ii) a, $n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$ şeklindedir.

iii) a, $1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir.

İspat: i) Bunun için verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

(i) $AA^+A = A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^*A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^+AA^+ = \left(\frac{1}{m.n}A^* \ \right)A\left(\frac{1}{m.n}A^* \ \right) = \frac{1}{m.n}(A^*A)\left(\frac{1}{m.n}A^* \ \right) = \left(\frac{1}{m.n}A^* \ \right) = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = \left(A\frac{1}{m.n}A^*\right)^* = A\frac{1}{m.n}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = \left(\frac{1}{m.n}A^*A\right)^* = \frac{1}{m.n}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

ii) a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = a(a^*a)^{-1}a^*a = a(a^*a)^{-1}(a^*a) = \ a,$

(ii) $a^+aa^+ = (a^*a)^{-1}a^*a(a^*a)^{-1}a^* = (a^*a)^{-1}a^* = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = [a(a^*a)^{-1}a^*]^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [(a^*a)^{-1}a^*a]^* = (a^*a)^{-1}a^*a = a^+a$

olduğu görülür.

iii) a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = aa^*(aa^*)^{-1}a = (aa^*)(aa^*)^{-1}a = a,$

(ii) $a^+aa^+ = a^*(aa^*)^{-1}aa^*(aa^*)^{-1} = a^*(aa^*)^{-1} = a^+,$

(iii) $(aa^+)^* = [aa^*(aa^*)^{-1}]^* = aa^*(aa^*)^{-1} = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [a^*(aa^*)^{-1}a]^* = a^*(aa^*)^{-1}a = a^+a$

olduğu görülür.

Teorem 2.15 A herhangi bir matris olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.11}$$

İspat: (2.9) bağıntısındaki gibi $A = BC$ alınsın. Bu durumda $A^* = C^*B^*$ olduğundan,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \ \text{ ve } \quad (A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

elde edilir ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*,$

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+,$$

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+,$$

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$$

olur. Böylece,

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

elde edilir. Buradan da $(A^*)^+ = (A^+)^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.16 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, herhangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur.

Teorem 2.17 Herhangi bir A matrisi için $r(A) = r(A^+)$ dır.

İspat: Eğer Teorem 2.10 $AA^+A = A$ eşitliğine uygulanırsa

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+),$$

ve benzer şekilde, $A^+AA^+ = A^+$ ifadesine uygulanırsa

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten istenen sonuç sağlanır.

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, bu takdirde A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Teorem 2.18 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^+ = A$ dir.

Teorem 2.19 $B = \text{Köş}\{b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $b_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $b_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

Teorem 2.19

i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$,

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$ olur.

İspat: Her iki durum için verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

i) (i) $AA^{+}A = AA^{*}(AA^{*})^{-1}A = (AA^{*})(AA^{*})^{-1}A = A$,

ii) (ii) $A^{+}AA^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1}AA^{*}(AA^{*})^{-1}$

$$= A^{*}(AA^{*})^{-1}(AA^{*})(AA^{*})^{-1} = A^{*}(AA^{*})^{-1} = A^{+\dagger},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = (AA^{*}(AA^{*})^{-1})^{*} = ((AA^{*})(AA^{*})^{-1})^{*} = I^{*} = I$

$$= (AA^{*})(AA^{*})^{-1} = AA^{*}(AA^{*})^{-1} = AA^{+},$$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = (A^{*}(AA^{*})^{-1}A)^{*} = A^{*}(AA^{*})^{-1}A = A^{+}A$

olur.

ii) (i) $AA^{+}A = A(A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A(A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A(A^{*}A)^{-1}A^{*}$

$$= (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A)(A^{*}A)^{-1}A^{*}$$

$$= (A^{*}A)^{-1}A^{*} = A^{+},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = (A(A^{*}A)^{-1}A^{*})^{*} = A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = AA^{+}$,

(iv) $(A^{+}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}A^{*}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}(A^{*}A))^{*} = I^{*} = I$

$$= (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A^{+}A$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.20 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere B ve C matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde olmak üzere $r(A) = r(B) = r$ olsun. Bu takdirde,

$$(BC)^{+} = C^{+}B^{+} \tag{2.12}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: B matrisi sütun ranklı, C matrisi satır ranklı olduğundan Teorem 2.19 e göre

$C^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}$ ve $B^{+} = (BB^{*})^{-1}B^{*}$

olur ve buradan,

$$C^{+}B^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(BB^{*})^{-1}B^{*}$$

elde edilir. Bu ise zaten $(BC)^{+}$ matrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. MATRİSLERDE ÇEKİRDEK İNVERS GÖSTERİMLERİ

3.1 Bir Matrisin Çekirdek İnversi

$\mathbb{C}_{m,n}$ mxn tipindeki karmaşık matrislerinin kümesi olsun. A^*, $\mathcal{R}(A)$ ve $r(A)$ sembolleri bir $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ matrisinin sırasıyla, eşlenik devriğini, ranj uzayını (sütun uzayı) ve rankını göstersin. Ayrıca, I_n, n mertebesinden birim matris olacaktır.

Çekirdek invers tanımını vermeden önce, beş tip genelleştirilmiş invers kavramını tekrar hatırlamak ilgi çekici olacaktır. İlk olarak, $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ matrisinin $A^\dagger \in \mathbb{C}_{n,m}$ ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıdaki eşitlikleri sağlayan tek türlü olarak mevcut olan matristir:

$$AA^\dagger A = A \ , \ A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad AA^\dagger = (AA^\dagger)^* \quad A^\dagger A = (A^\dagger A)^* \tag{3.1}$$

Moore-Penrose tersinin önemli bir özelliği ortogonal izdüşümleri temsil etmek için kullanılabilmesidir. Örneğin $P_A = AA^\dagger$ ve $P_{A^*} = A^\dagger A$ sırasıyla $\mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}(A^*)$ üzerindeki ortogonal izdüşümlerdir.

Diğer bir matris inversi grup inversdir. Böyle bir inversin varlığı sadece kare matrislerle sınırlıdır ve belirli bir $A \in \mathbb{C}_{n.n}$ matrisi için aşağıdaki denklemleri sağlayan ve tek türlü olarak mevcut olan $A^\# \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisidir:

$$AA^\# A = A \quad A^\# AA^\# = A^\# \quad AA^\# = A^\# A \tag{3.2}$$

Her kare matrisin bir grup inverse sahip olması gerekmez. Ancak verilen bir A matrisinin böyle bir inverse sahip olması için gerek ve yeter koşul indeksinin 1 olması veya başka bir deyişle $r(A^2) = r(A)$ olmasıdır. Bu çalışma boyunca indeksi 1 olan tüm matrislerin kümesi $\mathbb{C}_n^{CM}$ ile gösterilecektir, yani

$$\mathbb{C}_n^{CM} = \{ A \in \mathbb{C}_{n,n} \colon r(A^2) = r(A)\}$$

dir. İndeksi 1 olan matrislere grup matrisleri veya çekirdek matrisleri adı verilir.

Literatürde ilgi çeken genelleştirilmiş inverslerin üç sınıfı ise iç invers, yansımalı invers ve normalleştirilmiş invers olarak adlandırılır ve bir $A \in \mathbb{C}_{n,m}$ için

$$A\{1\} = \{A^- \in \mathbb{C}_{n,m} \colon AA^- A = A\} \tag{3.3}$$

$$A\{1,2\} = \{A^= \in \mathbb{C}_{n,m} : AA^= A = A \, , \ A^= AA^= = A^=\} \tag{3.4}$$

$$A\{1,2,3\} = \{A^{=} \in \mathbb{C}_{n,m} : AA^{=}A = A\,, A^{=}AA^{=} = A^{=}\,,\ (AA^{=})^* = AA^{=}\} \tag{3.5}$$

şeklinde gösterilir. Burada kullanılan ek semboller $\mathbb{C}_{m,n}^{Pl}$, $\mathbb{C}_n^P$, $\mathbb{C}_n^{OP}$, $\mathbb{C}_n^{TM}$, ve $\mathbb{C}_n^{EP}$, kısmi izometrileri, izdüşümleri (idempotent matrisleri), ortogonal izdüşümleri, (Hermityen idempotent matrisleri), tripotent ve EP (ranj-Hermityen) matrisleri gösteriri ve

$$\mathbb{C}_{m,n}^{Pl} = \left\{A \in \mathbb{C}_{m,n}: AA^*A = A\right\} = \{A \in \mathbb{C}_{m,n}: A^\dagger = A^*\}, \tag{3.6}$$

$$\mathbb{C}_n^P = \{A \in \mathbb{C}_{n,n} : A^2 = A\}, \tag{3.7}$$

$$\mathbb{C}_n^{OP} = \left\{A \in \mathbb{C}_{n,n} : A^2 = A = A^*\right\} = \{A \in \mathbb{C}_{n,n} : A^2 = A = A^\dagger\}\ , \tag{3.8}$$

$$\mathbb{C}_n^{TM} = \{A \in \mathbb{C}_{n,n} : A^3 = A\}, \tag{3.9}$$

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \left\{A \in \mathbb{C}_{n,n} : AA^\dagger = A^\dagger A\right\} = \left\{A \in \mathbb{C}_{n,n} : \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)\right\}, \tag{3.10}$$

ile gösterilir.

Rankı r olan her $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.11}$$

biçiminde gösterilebilir, burada $U \in \mathbb{C}_{n,n}$ uniter matris, $\sum$=diag$\{\sigma_1\, I_{r1} \ldots\ldots \sigma_t I_{rt}\}$ matrisi A nın singüler değerlerinden oluşan köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri

$$KK^* + LL^* = I^r \tag{3.12}$$

eşitliğini sağlar. Önemli olan şudur ki eğer A tekil olmayan matris ise, yani r=n olması durumunda, (3.11)' deki parçalı matrisin alt satırı ve sağ sütunu yok olur ve bu durumda $V = UK^*$ olmak üzere $A = U\Sigma V^*$ olur. (3.11) eşitliğinden

$$A^\dagger = U\begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.13}$$

sonucu çıkmaktadır Ayrıca eğer A matrisinin indeksi bir ise, bu takdirde

$$A^\# = U\begin{pmatrix} K^{-1}\Sigma^{-1} & K^{-1}\Sigma^{-1}K^{-1}L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.14}$$

yazılabilir. Daha sonraki değerlendirmelerde yardımcı olacak aşağıdaki lemma (3.11) ve (3.13) gösterimleri ile (3.6)-(3.10) ifadelerinin doğrudan birleştirilmesiyle elde edilmiştir.

Lemma 3.1 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi r ranklı olmak üzere (3.11) deki gösterime sahip olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir:

(i) $A \in \mathbb{C}_n^{Pl} \Leftrightarrow \Sigma = I_r,$

(ii) $A \in \mathbb{C}_n^{P} \Leftrightarrow \Sigma K = I_r$,

(iii) $A \in \mathbb{C}_n^{OP}\ v \Leftrightarrow L = 0, \Sigma = I_r, K = I_r$

(iv) $A \in \mathbb{C}_n^{TM} \Leftrightarrow (\Sigma K)^2 = I_r,$

(v) $A \in \mathbb{C}_n^{EP}\ v \Leftrightarrow \mathrm{L} = 0$.

Tanım 3.1 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisine A nın Çekirdek inversi adı verilir:

$$AA^{\oplus} = P_A \quad \text{ve} \quad \text{(ii)} \quad \mathcal{R}(A^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(A) \tag{3.15}$$

Bir sonraki kısımda Çekirdek inversin çeşitli özellikleri tanımlanmıştır. Bu özellikler Çekirdek invers ile bilinen çeşitli matris sınıfları arasındaki ilişkiyi ortaya koymada önemli rol oynamaktadır.

3.2 Çekirdek İnversin Özellikleri

Yukarıda belirtildiği gibi, Moore–Penrose invers ve grup invers tektir. Aynı özelliğin Çekirdek invers için de geçerli olduğu istenen bir durumdur.

Lemma 3.2 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi (3.11) şeklinde verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A^{\oplus} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.16}$$

formundadır.

İspat. Öncelikle (3.11) – (3.13) formüllerinden

$$P_A = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.17}$$

eşitliğini yazılabildiğini belirtelim. Şimdi, $B \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisinin

$$B = U\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}U^* \tag{3.18}$$

şeklinde parçalanabildiğini farz edelim, burada $W \in \mathbb{C}_{r,r}$, $Z \in \mathbb{C}_{n-r,n-r}$ A' nın çekirdek inversidir. Doğrudan hesaplamayla kolayca gösterilebilir ki, Tanım 3.1' deki (i) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\Sigma KW + \Sigma LY = I_r$, $KX + LZ = 0$ olmasıdır. Öte yandan $\mathcal{R}(A^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(A)$ bağıntısı denk olarak $P_A A^{\oplus} = A^{\oplus}$ şeklinde de ifade edilebildiğinden, Tanım 3.1' in (ii) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart Y=0, Z=0 olmasıdır. Dolayısıyla, $\Sigma KW = I_r$, $KX = 0$ elde edilir. Bu koşullardan ilki, K matrisinin nonsingüler olduğunu ikincisi ise X=0 olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2' den açıkça görülüyor ki, her A kare matrisi çekirdek inverse sahip değildir ve $A^{\oplus}$ nın varlığı için gerek ve yeter koşul (3.11) gösterimindeki K matrisinin nonsingüler olmasıdır. Daha önce belirtildiği gibi $r(K) = r$ koşulu A matrisinin indeksinin bir olmasına ve dolayısıyla A' nın bir çekirdek matris olmasına eşdeğerdir. Bu gözlem aslında $A^{\oplus}$ ile ilgili olarak 'Çekirdek invers' teriminin kullanımına ilham kaynağı olmuştur.

$r(A^2) = r(A)$ koşulu $A^{\#}$ grup inversinin varlığı için gerek ve yeter şart olduğundan $A^{\oplus}$ Çekirdek inversinin grup invers ile çakışıp çakışmadığını sorgulamak doğaldır. Genel olarak bu durum doğru değildir şöyle ki,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

idempotent matrisi için $A^{\#} = A$ olmasına rağmen

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

ve buradan da

$$A^{\oplus} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca, (3.14) ve (3.16) karşılaştırıldığında $A^{\oplus} = A^{\#}$ durumunun olması için gerek ve yeter koşul $L = 0$ olması yani, A' nın bir EP matris olması sonucuna götürür.

Aşağıda verilen üç teorem, bir A matrisinin $A^{\oplus}$ Çekirdek inversinin çeşitli karakterizasyonlarını ortaya koymaktadır.

Teorem 3.1 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde

(i) $A^{\oplus} = A^{\#}P_A$,
(ii) $A^{\oplus} \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(iii) $(A^{\oplus})^{\dagger} = AP_A$,
(iv) $(A^{\oplus})^{\oplus} = AP_A$,
(v) $A^{\oplus} \in A\{1,2\}$,
(vi) $(A^{\oplus})^2 A = A^{\#}$,
(vii) $(A^{\oplus})^m = (A^m)^{\oplus}$,
(viii) $A^{\oplus}A = A^{\#}A$.

İspat. (i) koşulu, (3.14), (3.16) ve (3.17)' nin doğrudan bir sonucudur. (3.16) dan

$$(A^{\oplus})^{\dagger} = U\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.22}$$

ve dolayısıyla $A^{\oplus}(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^{\oplus})^{\dagger}A^{\oplus} = P_A$ elde edilir ki bu da teoremin (ii) kısmıdır. Bir sonraki koşul da (3.11), (3.17) ve (3.22)'den elde edildiği gibi doğrudan doğruya kurulur.

Teoremin (i) şıkkından $(A^{\oplus})^{\oplus} = (A^{\oplus})^{\#}P_{A^{\oplus}}$ olduğu görülür, burada, kolaylıkla doğrulanabileceği gibi, $(A^{\oplus})^{\#}$ (3.22)' de verilen $(A^{\oplus})^{\dagger}$ ile aynıdır, dolayısıyla $P_{A^{\oplus}} = P_A$ ile aynı biçimdedir. Sonuç olarak, (iv) koşulunun geçerliliği doğrudan görülür.

Ayrıca (v) şıkkının ispatı teoremin (i) şartının $AA^{\oplus}A = AA^{\#}P_A A$ ve $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\#}P_A AA^{\#}P_A$ olmasını gerektirdiği gerçeğine dayanır. Dolayısıyla, bu eşitliklerin birincisinden $AA^{\oplus}A = AA^{\#}A = A$ ve ikincisinden ise $A^{\oplus}AA^{\oplus} = A^{\#}AA^{\#}P_A = A^{\oplus}$ denklemi elde edilir.

(vi) koşulunu sağlamak için (3.11) ve (3.17) 'in kullanımıyla yapılan basit hesaplamalardan sonra

$$(A^{\oplus})^2 A = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* ,$$

elde dilir ki sağ tarafta ki matrisin (3.14)' te verilen $A^{\#}$ matrisinin başka bir formunun olmasına yol açtığını gözlemleriz. Son iki koşulun ispatları ise teoremin (i) şıkkına dayanır. (viii) koşulunun geçerliliği kolayca görülürken (vii) koşulunun ispatı daha içeriklidir. İlk olarak Teorem 3.1 in (i) şıkkından $(A^{\oplus})^m = (A^{\#}P_A)^m$ elde edilir. Bundan dolayı (3.14) ve (3.17) kullanılarak

$$(A^{\oplus})^m = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.23}$$

olduğu görülür. Öte yandan, $(A^m)^{\#} = (A^{\#})^m$ nın belirlenen özelliği göze alındığında $(A^m)^{\oplus} = (A^{\#})^m P_{A^m}$ denklemi elde edilir. Bununla beraber A matrisnin indeksi bir olduğundan, $P_{A^m} = P_A$ yazılabilir. Sonuç olarak $(A^m)^{\oplus} = (A^{\#})^m P_A$ ve buradan da $(A^m)^{\oplus}$ nin (3.23)' deki matris ile aynı forma sahip olduğu gösterilmiş olur. Böylece de ispat tamamlanır.

Teorem 3. 1' in (iii) şıkkından $A^{\oplus} = (A^2 A^{\dagger})^{\dagger}$, elde edilir ki bu da (i) şıkkında verilen Çekirdek invers için alternatif bir formüldür. Ayrıca, Teorem 3.1 ile ilgili gözlemler aşağıda verilmiştir. Bunlardan ilki, EP sizlik özelliği Lemma 3.1' de meydana gelen yegane özelliktir ki bu $A^{\oplus}$' nın da sahip olup olmadığına bakılmaksızın A'nın sahip olduğu tek özelliğin EP-sizlik özelliğidir. Örneğin, $A^{\oplus}$ matrisinin r-potent, yani $(A^{\oplus})^r = A^{\oplus}, r \geq 2$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin r-potent olmasıdır. Özellikle $A^{\oplus}$ bir izdüşüm ise, bu takdirde bir ortogonal izdüşümdür.

Tanım 3.1' in $AA^{\oplus}$ matrisinin $\mathcal{R}(A)$ üzerindeki ortogonal izdüşüm olmasını istemesine rağmen, Teorem 3. 1'in (viii) şıkkından, $A^{\oplus}A$ nın aynı zamanda idempotent olduğu fakat Hermityen olmasının gerekmediği de dikkate değerdir. Aslında $A^{\oplus}A$, $AA^{\#} = A^{\#}A$ ile çakışan $\mathcal{R}(A)$ üzerine bir eğik izdüşümdür.

Yapılan son gözlem Teorem 3.1 'in (v) şıkkına atıfta bulunmaktadır ki bu $A^{\oplus}$ matrisinin A nın bir yansımalı inversi olması demektir. Bu gerçeği $AA^{\oplus}$ matrisinin A matrisinin sütun uzayı üzerinde dik izdüşümü olduğu gerekliliği ile birleştirilerek $A^{\oplus}$ matrisinin A nın bir normalleştirilmiş genelleştirilmiş inversi yani başka bir deyişle

A{1,2,3} kümesinin yegane elemanı olduğu sonucuna varılır. Herhangi bir $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ matrisinin normalleştirilmiş genelleştirilmiş inverslerinin sınıfı sınıfının

$$A\{1,2,3\} = \{A^{(1,2,3)} = A^{\dagger} + (I_n - A^{\dagger}A)VA^{\dagger}: V \in \mathbb{C}_{n,m} \tag{3.24}$$

olarak ifade edilebileceği bilinmektedir, burada (3.24) gösterimi daha genel biçimde $A^{\dagger}$ yerine A{1, 2, 3}' den herhangi bir keyfi matris alınarak daha genel biçimde verilebilir. Bu nedenle, (3.24) ile karakterize edilen A{1, 2, 3} kümesinin elemanı $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisinin tek çekirdek inversi olacak şekilde bir $V \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisinin tek olması gerekmemek şartıyla mevcut olacağı görülür. Bu gerçek aynı zamanda

$$BVC = D \tag{3.25}$$

denkleminin incelenmesiyle de görülmektedir, burada $B = I_n - A^{\dagger}A,\ C = A^{\dagger}$ ve $D = A^{\oplus} - A^{\dagger}$ şeklindedir. (3.25) formundaki denkleminin tutarlılığı ve bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul, genel durumda daha önce verilmiştir. Bu gerçek kullanılarak (3.25) eşitliğinin gerçekten çözülebilir olduğu ve (3.24) deki olası V seçeneklerinden birinin $A^{\oplus} \in A\{1,2,3\}$ olmak üzere $V = A^{\oplus}A - A^{\dagger}A$ eşitliğini sağladığı kolaylıkla doğrulanabilir.

Aşağıda verilen teorem, $A^{\oplus}$ matrisinin A' nın çeşitli dönüşümlerine eşit olması için gerek ve yeter koşulları ortaya koyar.

Teorem 3.2 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir:

(i) $A^{\oplus} = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
(ii) $A^{\oplus} = P_A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{P}$,
(iii) $A^{\oplus} = A^{\dagger} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(iv) $A^{\oplus} = A^{\#} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
(v) $A^{\oplus} = A\, A \in \mathbb{C}_n^{TM} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$,
(vi) $A^{\oplus} = A^{*} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_{n,n}^{Pl} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$.

İspat: (i) şıkkının gereklilik kısmını oluşturmak için, Teorem 3. 1' in (i) şıkkının $A^{\oplus} = 0 \implies A^{\#}P_A = 0$ olmasını sağladığına dikkat edelim. Sağ taraftaki ifadeyi A ile sağdan ve soldan çarparak A = 0 olduğu görülür. (i) şıkkının yeterlilik kısmı ise Tanım 3.1 (ii) koşulunun doğrudan bir sonucudur. (3.16) ve (3.17) ifadeleri Lemma 3.1' in (ii) şıkkının birleştirilmesiyle (ii) elde edilir. (3.13) ve (3.16) ifadeleri kullanılarak, $A^{\oplus} = A^{\dagger}$ olması için gerek ve yeter şartın L = 0, $(\Sigma K)^{-1} = K^{*}\Sigma^{-1}$ ise olduğu gösterilebilir. Bununla birlikte, (3.12)' nin ışığı altında, L=0 $\Longrightarrow K^* = K^{-1}$ olduğu ve bu nedenle, bu ilişkilerin ikincisinin her zaman sağlandığı görülür. Benzer şekilde, (iv) ifadesinin sol tarafındaki koşulun sağlanması için gerek ve yeter şart L = 0, $(\Sigma K)^{-1} = K^{-1}\Sigma^{-1}$ olmasıdır ki bu da yalnızca birinci koşula indirgenebilen bağlaç olması durumunda geçerlidir.

(3.11) ve (3.16) ifadelerinin kullanımıyla yapılan doğrudan hesaplamalar, $A^{\oplus} = A$ olması için gerek ve yeter şart L = 0, $(\Sigma K)^{-1} = \Sigma K$ iken $A^{\oplus} = A^*$ olması için gerek ve yeter şart L = 0, $(\Sigma K)^{-1} = K^*\Sigma$ olduğunu gösterir. Hem Σ hem de K matrislerinin nonsingüler olduğu gerçeğini kullanarak, birinci durumda L = 0' ın $(\Sigma K)^2 = I_r$ ile ikinci durumda ise $\Sigma = I_r$ ile birleştirileceği sonucuna varılır. Buradan, teoremin (v) ve (vi) ifadeleri, Lemma 3.1' den kolaylıkla elde edilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2' nin (v) şıkkından, $A^{\oplus} = A$ olmasının A' nın öz değerlerinin {-1, 0, 1} kümesine ait olduğunu bu ise herhangi bir tripotent matrisin özdeğerlerinin kısıtlı olduğunu gösterir. Bu durumla ilgili bir başka gözlem ise bir matrisin tripotent olması için gerek ve yeter şart iki ayrık idempotent matrisin farkı olarak ifade edilebilmesidir. Sonuç olarak, $A^{\oplus} = A$ olması için gerek ve yeter şart $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olması ve $A = P_1 - P_2$ olacak şekilde şekilde $P_1P_2 = 0 = P_2P_1$ şartlarını sağlayan $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n^{P}$ matrislerinin mevcut olmasıdır.

$A^{\oplus}$ yı içeren $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ matrisinin iki karakterizasyonu Teorem 3.2' de verildiği gibidir. Diğer sonuçlar aşağıdaki teoremde belirlenmiştir.

Teorem 3.3 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

- **(i)** $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
- **(ii)** $(A^{\oplus})^{\oplus} = A$,
- **(iii)** $A^{\oplus}A = AA^{\oplus}$,
- **(iv)** $(A^{\dagger})^{\oplus} = A$,
- **(v)** $(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{\oplus}$.

İspat: (ii)–(v) koşullarının her birinin L = 0 ifadesine eşdeğer olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.1' in (iv) şıkkı göz önüne alındığında, teoremin (ii) koşulunun $AP_A = A$ olarak ifade edilebildiği görülür. Bu nedenle $(A^{\oplus})^{\oplus} = A \iff L = 0$ denkliği açıktır.

Açıkça doğrulanabileceği gibi, (i)⟺(iii) kısmını ispatlamak için, $A^{\oplus}A = AA^{\oplus} \Leftrightarrow (\Sigma K)^{-1}\Sigma L = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Teorem 3.1 in (i) şıkkının yeniden kullanılmasıyla $(A^{\dagger})^{\oplus} = (A^{\dagger})^{\#}P_{A^{\dagger}}$ olduğu gösterilebilir. Doğrudan doğrulamayla

$$(A^{\dagger})^{\#} = U\begin{pmatrix} \Sigma(K^*)^{-1} & 0 \\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma(K^*)^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^*$$

ve

$$P_{A^{\dagger}} = U\begin{pmatrix} K^*K & K^*L \\ L^*K & L^*L \end{pmatrix}U^*$$

olduğu gösterilebilir. Buradan da

$$(A^{\dagger})^{\oplus} = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma K & L^*(K^*)^{-1}\Sigma \mathrm{L} \end{pmatrix}U^* \tag{3.26}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.11) ve (3.26) ifadelerinin karşılaştırılması bizi $L^*(K^*)^{-1}\Sigma K = 0,\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma \mathrm{L}$ olması için gerek ve yeter şartın $(A^{\dagger})^{\oplus} = A$ olduğu sonucuna götürür. Σ ve K matrislerinin nonsingülerliği dikkate alındığında, bu koşullardan ilkinin L = 0' a denk olduğu görülür. Böylece, teoremin (i) ⟺ (iv) denkliği ispatlanmış olur. Aslında (3.22) ve (3.26)'den direkt olarak görülmektedir ki, $(A^{\oplus})^{\oplus} = A \Leftrightarrow L = 0$ denkliğinin geçerliliği ispatı tamamlayan bir gerçektir.

Teorem 3. 3' e yapılan bir yorum da şudur ki, (3.13), (3.14) ve (3.16) eşitliklerinden $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow A^{\oplus} = A^{\#} \Leftrightarrow A^{\oplus} = A^{\dagger}$ olduğunun elde edilmelidir. Bu denkliklere $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow A^{\#} = A^{\dagger}$ bilinen sonucun bir karşılığı olarak bakılabilir.

Aşağıda verilen teorem, iki ortogonal izdüşümün çarpımının Çekirdek inversi için bir formül sağlamaktadır.

Teorem 3.4 $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu duruma $(AB)^{\oplus} = (ABA)^{\dagger}$ dir.

İspat: A ve B sırasıyla (3.11) ve (3.18) genel şekillerinde verilmiş olsun. Bu durumda $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğundan

$$A = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \quad \text{ve } B = U\begin{pmatrix} W & X \\ X^* & Z \end{pmatrix}U^* \tag{3.27}$$

yazılabilir. Burada (3.27) deki sol taraftaki formül Lemma 3.1' in (iii) şıkkından elde edilir ve (3.27)'deki sağ tarafındaki W ve Z matrisleri Hermityen matrisler, yani $W^* = W$, $Z^* = Z$ dir. Öte yandan $B^2 = B$ olduğundan

$$W = W^2 + XX^* \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28)' deki bağlantı (W:X) bir sütun parçalanmış matrisi göstermek üzere

$$rk(W) = rk(WW^* + XX^*) = rk(W{:}X)$$

eşitliğini temsil eder. Bunun sonucu olarak

$$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(W) \tag{3.29}$$

yazılabilir. (3.27) ifadelerinin bir diğer sonucu

$$AB = U\begin{pmatrix} W & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.30}$$

eşitliğidir. (3.30) ifadesi sondan (3.27)'de verilen A matrisi ile çarpıldığında bizi

$$(ABA)^{\dagger} = U\begin{pmatrix} W^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

sonucuna götürür. Öte yandan, (3.28) ve (3.29) ifadelerinin ışığı altında, (3.1) ve (3.2) tanımlarının doğrudan doğrulanması ile

$$(AB)^{\dagger} = U\begin{pmatrix} P_W & 0 \\ X^*W^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}U^* \quad \text{ve} \quad (AB)^{\#} = U\begin{pmatrix} W^{\dagger} & (W^{\dagger})^2X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

yazılabilir, burada

$$P_{AB} = U\begin{pmatrix} P_W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

dir. Öte yandan $(AB)^{\oplus} = (AB)^{\#}P_{AB}$ formülü nedeniyle

$$(AB)^{\oplus} = U\begin{pmatrix} W^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

eşitliğine ulaşılır ki bunun sonucunda da ispat tamamlanmış olur.

Gelecek kısım matris denklemlerinin çözülebilirliği ile ilgili problemlerde çekirdek inversin olası uygulamalarını gösteren bazı sonuçlarla ilgilidir.

$$XBX = X \quad , \qquad (BX)^* = BX \tag{3.31}$$

matris denkleminin genel çözümü

$$X = C(DBC)^{\text{≏}}D \, , \tag{3.32}$$

formundadır, burada $(DBC)^{\text{≏}} \in (DBC)\{1,2,3\}$, $C \in \mathbb{C}_{n,p}$ ve $D \in \mathbb{C}_{q,m}$ matrisleri $D^*D = I_m$ şartı hariç keyfidirler.

Aşağıdaki sonuç, (3.31) matris denkleminin çekirdek invers içeren çözümünün belirli bir versiyonunu vermektedir.

Teorem 3.5 $B \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. Bu takdirde (3.31) eşitliklerinin her ortak çözümü

$$X = C(BC)^{\oplus} \tag{3.33}$$

olarak ifade edilebilir, burada $C \in \mathbb{C}_{m,n}$ olmak üzere BC $\in \mathbb{C}_m^{CM}$ dir.

İspat: (3.33) formülü (3.32)' den $D = I_m,\ p = m$ ve $(BC)^{\oplus}$' yi $(BC)\{1, 2, 3\}$ sınıfının bir temsilcisi olarak almak suretiyle elde edilebileceğinden (3.33) gerçekten Denklem (3.31) denklemleri için bir çözüm olacaktır. Bu nedenle eğer $X_0 \in \mathbb{C}_{n,m}$ matrisi $X_0BX_0 = X_0$ ve $(BX_0)^* = BX_0$ eşitliklerini sağlıyorsa, o zaman geriye sadece (3.33) ifadesinde belirtilen X matrisinin $X = X_0$ ı sağlayacak şekilde bir C matrisinin var olduğunu göstermek kalır. Teorem 3.1'in (i)' şartının yanı sıra Moore-Penrose ve grup terslerinin özellikleri de dikkate alınırsa, $C = X_0$ alınarak,

$$\begin{aligned} X &= X_0(BX_0)^{\oplus} = X_0(BX_0)^{\#}BX_0\,(BX_0)^{\dagger} = X_0BX_0(BX_0)^{\#}BX_0(BX_0)^{\dagger} \\ &= X_0BX_0\,(BX_0)^{\dagger} = X_0BX_0BX_0(BX_0)^{\dagger} = X_0(BX_0)^*[BX_0\,(BX_0)^{\dagger}]^* \\ &= X_0[BX_0\,(BX_0)^{\dagger}BX_0]^* = X_0B = X_0 \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Çekirdek inversin bir başka olası uygulaması, onun Bott-Duffin inversi olarak adlandırılan bir inversle olan ilişkisinden kaynaklanmaktadır. Böyle bir invers, elektrik şebekesi teorisinde ortaya çıkan bazı kısıtlı denklem sistemlerinin çözümlerinde meydana çıkar. Bir $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisinin $\mathcal{R}(A)$' ya göre Bott-Duffin inversi

$$A_{\mathcal{R}(A)}^{(-1)} = P_A[(A - I_n)P_A + I_n]^{-1} \tag{3.34}$$

ile verilir, burada $(A - I_n)P_A + I_n$ matrisi nonsingülerdir. Doğrudan hesaplamalar (3.11) ve (3.17) yardımıyla

$$(A - I_n)P_A + I_n = U\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}U^* \tag{3.35}$$

olduğunu gösterir öyle ki $(A - I_n)P_A + I_n$ matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart K matrisinin nonsingüler veya buna eşdeğer olarak $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olmasıdır. Böyle bir durumda, (3.17) ve (3.35) ifadelerini (1.34) eşitliğinde yerine koymak bizi $A_{\mathcal{R}(A)}^{(-1)}$ Bott-Duffin inversinin $A^{\oplus}$ çekirdek inversi ile çakıştığı sonucuna götürür.

3.2 Çekirdek Kısmi Sıralama

$\mathbb{C}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}$ de bilinen üç matris kısmı sıralaması bu kısmın bakış açısı dolayısıyla oldukça ilgi çekicidir. Bunlardan ilki,Drazin tarafından tanıtılan ve

$$A \stackrel{*}{\leq} B \iff A^{\dagger}A = A^{\dagger}B \text{ ve } AA^{\dagger} = BA^{\dagger} \tag{3.36}$$

dir. İkincisi, Hartwig ve Nambooripad tarafından bağımsız olarak geliştirilen eksi (rank çıkarma) kısmı sıralamasıdır. Bu sıralamanın bilinen birkaç özelliğinden aşağıdaki iki tanesine atıfta bulunulacaktır:

$$A \lesseqqgtr B \iff r(B - A) = r(B) - r(A) \tag{3.37}$$

ve

$$A \lesseqqgtr B \iff A_1^{-}A = A_1^{-}B \text{ ve } AA_2^{-} = BA_2^{-} \tag{3.38}$$

dir, burada $A_1^{-}, A_2^{-} \in A\{1\}$ dir.

Açıkça belirtelim ki (3.38) karekterizasyonu (3.36) ifadesinin özel bir modifikasyonu olarak düşünülebilir. (3.36)' nın alternatif bir modifikasyonu, keskin sıralama olarak adlandırılmış ve Mitra tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$A \leq^{\#} B \iff A^{\#}A = A^{\#}B \text{ ve } A^{\#}A = BA^{\#}, \tag{3.39}$$

burada $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ dir. Ayrıca kolayca gösterilebilir ki

$$A^{\#}A = A^{\#}B \iff A^2 = AB \text{ ve } AA^{\#} = BA^{\#} \iff A^2 = BA \tag{3.40}$$

dir. Yine (3.36) nın bir başka modifikasyonu aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 3.2 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. $A \leq^{\oplus} B$ ikili işlemi

$$A \leq^{\oplus} B \iff A^{\oplus}A = A^{\oplus}B \text{ ve } AA^{\oplus} = BA^{\oplus} \tag{3.41}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ikili işleme, A ve B arasındaki çekirdek sıralaması adı verilir.

(3.41)' daki belirlemenin, B' nin bir Çekirdek matrisi olmasını talep etmeden de anlamlı olacağını ifade edelim. Yine de (3.39)' de olduğu gibi hem A matrisi hem de B matrisinin $\mathbb{C}_n^{CM}$ sınıfına ait olduğunu varsaymak mantıklıdır.

Aşağıda verilen iki lemma, Çekirdek sıralamasının bir matris kısmi sıralaması olduğunu göstermede oldukça önemli bir rol oynayacaktır.

Lemma 3.3 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun, A'nın (3.11)'deki formunda verildiğini varsayalım. Bu durumda $A \leq^{\oplus} B$ olması için gerek ve yeter şart

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & Z \end{pmatrix}U^* \tag{3.42}$$

olmasıdır, burada ΣK nonsingülerdir ve $Z \in \mathbb{C}_{n-r,n-r}$ indeksi bir olan keyfi bir matrisidir.

İspat: B (3.18)' deki gibi parçalanmış olsun. Bu durumda (3.11), (3.16) ve (3.18)'den

$$A^{\oplus}A = U\begin{pmatrix} I_r & K^{-1}L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, \quad A^{\oplus}B = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1}W & (\Sigma K)^{-1}X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.43}$$

elde edilir, burada $A^{\oplus}A = A^{\oplus}B$ olması için gerek ve yeter şart $W = \Sigma\mathrm{K}$ ve $X = \Sigma L$ olmasıdır. Ayrıca $AA^{\oplus} = BA^{\oplus}$ olması için gerek ve yeter şart $W = \Sigma\mathrm{K}$ $L = 0$ olduğundan

$$AA^{\oplus} = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*, \quad BA^{\oplus} = U\begin{pmatrix} W(\Sigma K)^{-1} & 0 \\ Y(\Sigma K)^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.44}$$

dir. Sonuç olarak (3.42) formülü elde edilir. (3.42)' deki ΣK matrisinin nonsingüler olması iddiasının açıklanmaya ihtiyacı yoktur ve $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ gerçeği $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ varsayımından kaynaklanmaktadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.4 $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (3.42)'deki formda verilmiş olsun. Bu takdirde $X_0 = (\Sigma K)^{-2}\Sigma L(I_{n-r} - ZZ^{\#}) - (\Sigma K)^{-1}\Sigma L Z^{\#}$ olmak üzere

$$B^{\#} = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & X_0 \\ 0 & Z^{\#} \end{pmatrix} U^* \tag{3.45}$$

dir.

İspat: Lemma 3.3 'ün ışığı altında iddia doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Aşağıdaki teorem yeni bir matris kısmı sıralaması tanımlar.

Teorem 3.6 Çekirdek sıralama bağıntısı bir matris kısmi sıralamasıdır.

İspat: Herhangi iki $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi için Çekirdek sıralamasının: (i) yansımalı yani, $A \leq^{\oplus} A$ olduğunu, (ii) antisimetrik, yani $A \leq^{\oplus} B, B \leq^{\oplus} A$ ise $A = B$ olduğunu ve (iii) geçişmeli, yani $A \leq^{\oplus} B, B \leq^{\oplus} C$ ise $A \leq^{\oplus} C$ olduğunu göstermeliyiz.

Yansımalılık trivial bir şekilde sağlandığından, (ii) özelliğinin sağlandığını göstererek ispata başlayalım. A $\leq^{\oplus}$ B ve B $\leq^{\oplus}$ A olsun. Bu ilişkilerin ilki, B ve $B^{\#}$ matrislerinin sırasıyla (3.42) ve (3.45) formlarında olmasını sağlarken, ikincisi

$$B \leq^{\oplus} A \iff B^{\oplus}B = B^{\oplus}A \quad \text{ve } BB^{\oplus} = AB^{\oplus} \tag{3.46}$$

olduğunu gösterir. Teorem 3.1' in (v) şıkkı (3.46) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci eşitlikle birleştirilirse $B = AB^{\oplus}B$ olduğu görülür. Dolayısıyla, Teorem 3.1' in (i) şıkkından dolayı, $B = AB^{\#}B$ elde ederiz. (3.11), (3.42) ve (3.45) kullanılarak yapılan doğrudan hesaplamalar gösterir ki

$$AB^{\#}B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma\mathrm{L} + \Sigma\mathrm{K}X_0 Z + \Sigma L Z^{\#} Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.47}$$

eşitliği yazılabilir. (3.42) yi (3.47)' ile karşılaştırırsak $B = AB^{\#}B$ olması için bir gerek (ve aynı zamanda yeter) koşulun $Z = 0$ olduğu sonucuna varırız. Ancak eğer $Z = 0$ ise, o zaman (3.42) biçimindeki B matrisi (3.11) biçimindeki A matrisi ile çakışmaktadır ki bu da çekirdek sıralamasının antisimetrik olduğunu gösterir.

Çekirdek sıralamasının geçişli olduğunu göstermek için, $A \leq^{\oplus} B, B \leq^{\oplus} C$ ise C matrisinin

$$C = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & \tilde{Z} \end{pmatrix} U^{*} \tag{3.48}$$

biçiminde olduğunu göstermeliyiz, burada $\tilde{Z} \in \mathbb{C}_{n-r,n-r}$ dir. Yine $A \leq^{\oplus} B$ olduğundan B ve $B^{\#}$ matrislerinin sırasıyla (3.42) ve (3.45) ifadelerinde belirtildiği gibi olmasını sağladığı gerçeğinden tekrar yararlanacağız ve bu matrisleri ilk önce B nin sütun uzayına dik izdüşüm için formül türetmede kullanacağız. B ve ardından $B^{\oplus}$ için formül türetmede kullanacağız. $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(BB^{*})$ olduğundan, $P_B = BB^{*}(BB^{*})^{\dagger}$ olduğu açıktır. Bu durumda (3.42)' den aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$BB^{*} = U\begin{pmatrix} \Sigma^{2} & \Sigma L Z^{*} \\ Z L^{*} \Sigma & Z Z^{*} \end{pmatrix} U^{*}. \tag{3.49}$$

Şimdi bu eşitliğe parçalanmış bir matrisin Moore-Penrose inversi için bilinen formülü uygulayabiliriz. Açıkça, A, C, R ve D matrisleri (3.49) $A = \Sigma^{2},\ C = \Sigma L Z^{*}, R = Z L^{*} \Sigma$ ve $D = ZZ^{*}$ ile temsil edilir. Ayrıca, $Q = D - RA^{\dagger}C$ olarak tanımlanan matris şimdi $Q = Z(I_{n-r} - L^{*}L)Z^{*}$ şeklini alır. Öte yandan (3.49) matrisi Hermitian olduğundan, Moore-Penrose için yukarıda belirtilen formülün uygulanabilmesini sağlayan dört koşul, şu an bunlardan sadece ikisine, yani $\mathcal{R}(\Sigma L Z^{*}) \subseteq \mathcal{R}(\Sigma^{2})$ ve $\mathcal{R}(Z L^{*} \Sigma) \subseteq \mathcal{R}[Z(I_{n-r} - L^{*}L)Z^{*}]$' ye indirgenir. Bu durumda Σ nın nonsingülerliği bunlardan ilkinin trivial bir şekilde sağlandığını gösterir. İkincisinin geçerliliğini göstermek için önce $\det(I_{n-r} - L^{*}L) = \det(I_{r} - LL^{*})$ olduğuna dikkat edelim. Bu gözlemi (3.12) ile birleştirrir ve K matrisinin nonsigüler olduğu dikkate alınıra $I_{n-r} - L^{*}L$ matrisinin de nonsingüler olduğu söylenebilir. Bu ise $\mathcal{R}(L^{*}\Sigma) \subseteq \mathcal{R}(I_{n-r} - L^{*}L)$ olmasını sağlar ki bu da $\mathcal{R}(Z L^{*} \Sigma) \subseteq \mathcal{R}[Z(I_{n-r} - L^{*}L)]$ anlamına gelir, çünkü sağdaki sütun uzayı $\mathcal{R}[Z(I_{n-r} - L^{*}L)Z^{*}] = \mathcal{R}(Z)$ ile çakışır. Böylece,

$$(BB^{*})^{\dagger} = U\begin{pmatrix} W_1 & X_1 \\ X_1^{*} & Z_1 \end{pmatrix} U^{*} \tag{3.50}$$

elde edilir, burada

$$W_1 = \Sigma^{-2} + \Sigma^{-1} L Z^{*}[Z(I_{n-r} - L^{*}L)Z^{*}]^{\dagger} Z L^{*} \Sigma^{-1},$$

$$X_1 = -\Sigma^{-1} L Z^* [Z(I_{n-r} - L^* L) Z^*]^\dagger \ ,$$

$$Z_1 = [Z(I_{n-r} - L^* L) Z^*]^\dagger$$

dir. Ayrıca (3.49) ve (3.50) matrisleri

$$P_B = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_Z \end{pmatrix} U^* \tag{3.51}$$

matrisine uzatılabilir ve sonuç olarak Teorem 3.1' in (i) şıkkını (3.45) ve (3.51) ifadelerine uygulayarak aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$B^{\oplus} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & -(\Sigma K)^{-1} \Sigma \mathrm{L} Z^{\oplus} \\ 0 & Z^{\oplus} \end{pmatrix} U^* \tag{3.52}$$

İspatın son kısmında, $B \leq^{\oplus} C$ durumunun

$$B^{\oplus} B = B^{\oplus} C \quad \text{ve} \quad B B^{\oplus} = C B^{\oplus} \tag{3.53}$$

ye denk olduğu gerçeğini kullanacağız. $B^{\oplus} B = B B^\dagger$ olduğundan, (3.53)' deki ikinci koşul $P_B = C B^{\oplus}$ olarak ifade edilebilir. $C \in \mathbb{C}_{n.n}$matrisinin $W_2 \in \mathbb{C}_{r.r}$, $Z_2 \in \mathbb{C}_{n-r,n-r}$ olmak üzere

$$C = U \begin{pmatrix} W_2 & X_2 \\ Y_2 & Z_2 \end{pmatrix} U^* \tag{3.54}$$

şeklinde parçalandığını varsayalım. Bu durumda (3.52) ve (3.54)' dan, X_0 matrisi Lemma 3.4 deki gibi tanımlanmış olmak üzere

$$C B^{\oplus} = U \begin{pmatrix} W_2 (\Sigma K)^{-1} & W_2 X_0 P_Z + X_2 Z^{\oplus} \\ Y_2 (\Sigma K)^{-1} & Y_2 X_0 P_Z + Z_2 Z^{\oplus} \end{pmatrix} U^* \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.51) ile (3.55) arasındaki karşılaştırma, $W_2 = \Sigma K$ ve $Y_2 = 0$ olduğunu gösterir. Öte yandan, (3.53)' deki ilk koşulun B ile önceden çarpılması $B = P_B$ olmasına yol açar. Dolayısıyla, $W_2 = \Sigma K$ ve $Y_2 = 0$ olduğu dikkate alınarak, (3.51) ve (1.34) eşitliklerinden

$$B = U \begin{pmatrix} \Sigma K & X_2 \\ 0 & P_Z Z_2 \end{pmatrix} U^*$$

elde edilir. Bu matrisi (3.4 2) ile karşılaştırmak bizi $X_2 = \Sigma L$ olduğu sonucuna götürür ve $\tilde{Z} = P_Z Z_2$ gösterimi dikkate alınırsa C matrisinin (3.48) biçiminde olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece de ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1' in (i) koşulu göz önüne alındığında, (3.41) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk koşulun $A^{\#}A = A^{\#}P_A B$ olarak yeniden yazılabileceği görülmektedir. Bu eşitliğin$A^{\dagger}A$ ile önceden çarpılması, $A^{\oplus}A = A^{\oplus}B \Longrightarrow A^{\dagger}A = A^{\dagger}B$ olduğunu kanıtlar. Ters çıkarımın geçerliliği $A^{\dagger}A = A^{\dagger}B$ eşitliğinin $A^{\#}A$ ile önden çarpılmasıyla gösterilebildiğinden, $A^{\oplus}A = A^{\oplus}B \Longleftrightarrow A^{\dagger}A = A^{\dagger}B$ ya ulaşırız. Benzer şekilde, (1.41) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci koşulun $A^{\oplus}A = A^{\oplus}B \Longleftrightarrow A^2 = BA$ ifadesini sağladığı gösterilebilir. Sonuç olarak, $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ A arasındaki Çekirdek sıralamasının alternatif bir tanımını elde ederiz, yani

$$A \leq^{\oplus} B \Leftrightarrow A^{\dagger}A = A^{\dagger}B \quad \text{ve} \quad A^2 = BA \tag{3.56}$$

dir. Dolayısıyla, Çekirdek sıralamasının bir şekilde yıldız sıralama ve keskin sıralama arasında bir şey olduğu görülmektedir. Burada (3.36) eşitliğinin sağındaki birinci koşul ve (3.39) eşitliğinin sağındaki ikinci koşul kullanılmıştır. Bu bağlamda iki doğal soru ortaya çıkıyor. Birincisi, (3.36) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci koşulu ve (3.39) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci koşulun korunacağı şekilde çekirdek kısmi sıralama tanımını nasıl motife edileceğidir? Moore-Penrose inversin (3.1) de ve grup inversin (3.2) de verilen tanımlarından farklı olarak, Çekirdek inversin tanımının (3.15) eşitliğinde A ile $A^{\oplus}$ ın yer değiştirmesi anlamında simetrik olmadığı gerçeğinden ötürü aslında bu soru gerçekten orijinal bir sorudur. Bununla birlikte, $\tilde{A}$ matrisini,

$$\tilde{A}A = P_{A^*} \quad \text{ve} \quad \text{(ii)} \qquad \mathcal{R}(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \text{ ,}$$

koşullara göre tanımlarsak, bu takdirde $\tilde{A}$ matrisi $A^{\oplus}$ dakilere benzer özelliklere sahip olacaktır. Örneğin Teorem 3.1' in (i) koşulunun karşılığı $\tilde{A} = P_{A^*}A^{\#}$ olacaktır. Ayrıca, $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ için, aşağıdakilerle karakterize edilen ilgili matris kısmi sıralamasını tanımlayabiliriz:

$$A \mathrel{\tilde{\leq}} B \Leftrightarrow \tilde{A}A = \tilde{A}B \quad \text{ve} \quad A\tilde{A} = B\tilde{A}.$$

Böyle bir sıralama

$$A \mathrel{\tilde{\leq}} B \Leftrightarrow A^2 = AB \quad \text{ve} \quad A^{\dagger}A = BA^{\dagger}$$

sağlanır öyle ki burada sağ tarafta verilen eşitlikler sırasıyla (3.39) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci koşul ve (3.36) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci koşuldur.(3.56) eşitliği ile ilgili ikinci soru, sağ tarafındaki eşitliklerin herhangi $A, B \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisleri için anlamlı olduğu gözleminden esinlenmiştir. Bu, (3.56) ilişkisinin $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olmasını talep etmeksizin bir matris kısmi sıralamasını tanımladığı anlamına gelip gelmediği sorusudur. Bu sorunun cevabı olumsuzdur, çünkü

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrislerini göz önüne alalım bunlardan sadece C bir indeksli olsun. Doğrudan hesaplamalarla

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

olduğu dolayısıyla $A^{\dagger}A = A^{\dagger}B, A^2 = BA$ ($A \leq^{\oplus} B$ olarak yorumlanabilir) ve $B^{\dagger}B = B^{\dagger}C, B^2 = BC$ b ($B \leq^{\oplus} C$ olarak yorumlanabilir) olur. Ancak, eş zamanlı olarak, $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olmaksızın (3.56) ifadesinde belirtilen $A \leq^{\oplus} B$ ' nin geçişli olmadığı gösterilebileceğinden $A^{\dagger}A \neq A^{\dagger}C$, $A^2 \neq CA$ oldukları görülür.

(3.36) ve (3.38) eşitliklerinden genel olarak $A \leq^{*} B \Longrightarrow A \leqq B$ olduğu açıktır. Üstelik, eksi sıralama, keskin sıralamadan daha zayıftır, örneğin

$$A \leq^{\#} B \Leftrightarrow A \leqq B, AB = BA, \ B \in \mathbb{C}_n^{CM}$$

dir. Yıldız ve keskin sıralama arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Buna göre, eğer $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ise, bu takdirde

(i) $A \leq^{*} B$,
(ii) $A^2 \leq^{*} B^2$,
(iii) $A \leq^{\#} B$

koşullarından herhangi ikisinin sağlanması üçüncüyü de sağlar.

Yukarıdaki gözlemler ışığı altında, yıldız, eksi, keskin ve Çekirdek sıralamaları arasındaki olası içerme ilişkilerini araştırmak ilgi çekicidir. $A \leq^{*} B$ ve $A \leq^{\oplus} B$

arasındaki bağlantıları inceleyerek işe başlayalım. (3.19) formuna sahip A' nın kullanımı ile gösterilebileceği gibi

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

olmak üzere genel olarak bu iki sıralama bağımsızdır. İlk olarak, (3.19)-(3.21) ve (3.57)' de verilen B_1 matrisini kullanarak $A^{\oplus}A = A = A^{\oplus}B_1$, $AA^{\oplus} = A^{\oplus} = B_1A^{\oplus}$ oldukları elde edilir ki bu da $A \leq^{\oplus} B_1$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan $AA^{\dagger} \neq B_1A^{\dagger}$ olması $A \leq^{\oplus} B_1 \nRightarrow A \leq^{*} B_1$ olduğuna işaret eder. Ters çıkarımın da geçerli olmadığı gerçeği (3.19)-(3.21) ve (3.57)'de verilen B_2 ile gösterilebilir. Bu matrisler $A^{\dagger}A = A^{\dagger}B_2$,$AA^{\dagger} = B_2A^{\dagger}$ yani $A \leq^{*} B$ yi karşılar ancak $AA^{\oplus} = B_2A^{\oplus}$ yi yerine getirmez, bu da A' nın Çekirdek sıralamasına göre B_2 nin altında olmadığı anlamına gelir. Aşağıdaki teorem, öncül EP olduğunda yıldız ve Çekirdek sıralamalarının eşdeğer olduğunu iddia eder.

Teorem 3.7 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ve A' nın EP olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $A \leq^{\oplus} B \Leftrightarrow A \leq^{*} B$ dir.

İspat: $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olsun. Bu durumda (3.11) ve (3.18)' ü (3.36)' de yerine koymak, $A \leq^{*} B$ olması için gerek ve yeter şartın

$$B = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} U^{*}$$

olduğunu gösterir, burada ΣK tekil değildir ve $Z \in \mathbb{C}_{n-r,n-r}$. Bu ise Z' nin indeksinin bir olmasını sağlar. Bu karakterizasyonu Lemma 3.3 ile karşılaştırmak iddiayı ortaya koya. Teorem 3.7 nin gereklilik kısmının, $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ ile $ZL^{*} = 0$ varsayımını yansıtan L=0 gereksiniminin değiştirilmesiyle zayıflatılabileceğine dikkat edilmelidir.

$A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow A^{\dagger} = A^{\#}$ olduğundan Teorem 3.7’nin varsayımları altında $A \leq^{\oplus} B \Leftrightarrow A \leq^{\#}$ olduğu da gösterilebilir. Bu türden başka bir gözlem, ortogonal izdüşümler sınıfı içinde, yıldız ve eksi kısmi sıralamaların eşdeğer olduğu bilinen gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle, Teorem 3. 7' den, $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğunda $A \leq^{\oplus} B \Leftrightarrow A \leqq B$ olduğu sonucuna varılır. Ancak, $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ varsayımı gevşetildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.8 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde $A \leq^{\oplus} B \Longrightarrow A \lesseqqgtr B$ dir.

İspat: Sonuç Lemma 3.3 ten görülmektedir. Bu durumda (3.42) biçimindeki B matrisi $r(B) = r + r(Z)$neşitliğini sağlar ve bu durum $r(A) = r$ ve $r(B - A) = r(Z)$ ile birleştirildiğinde $r(B - A) = r(B) - r(A)$ olduğu yani $A \lesseqqgtr B$ olduğu gösterilimiş olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3. 8 de kurulan çıkarımın genel olarak tersine çevrilemez olduğu gerçeği, (3.19) ifadesinde verilen A matrisini ve $B = I_2$ alınarak görülebilir. Bu takdirde $r(A) = 1$, $r(B) = 2$ ve $r(B - A) = 1$ olur ki bu da $A \leq B$ anlamına gelir. Öte yandan, (3.21) in kullanımıyla $A^{\oplus}A \neq A^{\oplus}B$ ve dolayısıyla da $A \lesseqqgtr B \nRightarrow A \leq^{\oplus} B$ olduğu elde edilir.

(3.19) erilen A' nın ve $B = I_2$' nın kullanımıyla gösterilebilecek başka bir özellik, $A \leq^{\#} B \nRightarrow A \leq^{\oplus} B$ olmasıdır. $A^{\#}A = A^{\#} = AA^{\#}$ olduğundan, (3.39)' den $A \leq^{\#} B$ olduğu hemencecik görülür. A ve B' nin $A \leq^{\oplus} B$ yi sağlamadığı gerçeği zaten belirtilmişti. Aslında Çekirdek sıralama keskin sıralamayı da sağlamaz. Bu iddiayı doğrulamak için (3.19) ve (3.57)'de tanımlanan A ve B_1 matrislerini kullanabiliriz. Bu takdirde yukarıda bahsedildiği gibi, $A \leq^{\oplus} B_1$ ve eşzamanlı olarak $A^{\#}A \neq A^{\#}B_1$ olup bu da A nın keskin sıralamaya göre B_1 in bir öncülü olmadığını gösterir.

Birçok benzerliğin yanı sıra, aşağıdaki örnek Çekirdek sıralama ile bu bölümde ele alınan diğer üç sıralama arasında dikkate değer farklılıkların olduğunu göstermektedir.

$$A \leq^{X} B \Leftrightarrow (B - A) \leq^{X} B, \tag{3.58}$$

olsun, burada $\leq^{X}$sıralaması $\leq^{*}, \leq^{-}$ ya da $\leq^{\#}$ sıralamasını temsil eder. Şaşırtıcı bir şekilde, $\leq^{X}$ile $\leq^{\oplus}$ ile değiştirildiğinde (3.58) karakterizasyon tutmaz. Bu gerçeği göstermek için yine (3.19) ve (3.57)'de verilen A veB_1' den yararlanabiliriz. $A \leq^{\oplus} B_1$ sıralamasına ek olarak, bu matrisler

$$(B_1 - A)^{\oplus} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla, $(B_1 - A)(B_1 - A)^{\oplus} \neq B_1(B_1 - A)^{\oplus}$ olur ki bu da, $B_1 - A$ nın çekirdek sıralamaya göre B_1 in altında olmadığı anlamına gelir.

Bir sonraki sonuç, onu takip eden teoremi vermek için faydalı olacaktır.

Lemma 3. 5 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisleri sırasıyla (3.11) ve (3.18) formlarında verilmiş olsun. Bu takdirde $A^2 \leq^{\oplus} B^2$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $YW + ZY = 0$

(ii) $W^2 + XY = (\Sigma K)^2$,

(iii) $WX + XZ = \Sigma K \Sigma L$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3.1' in (vii) şıkkı göz önüne alındığında, (3.11), (3.16) ve (3.18) ifadelerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$(A^2)^{\oplus} A^2 = U \begin{pmatrix} I_r & (\Sigma K)^{-1} \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \ ,$$

$$A^2 (A^2)^{\oplus} = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

$$(A^2)^{\oplus} B^2 = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-2}(W^2 + XY) & (\Sigma K)^{-2}(WX + XZ) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

$$B^2 (A^2)^{\oplus} = U \begin{pmatrix} (W^2 + XY)(\Sigma K)^{-2} & 0 \\ (YW + ZY)(\Sigma K)^{-2} & 0 \end{pmatrix} U^*.$$

Dolayısıyla, $(A^2)^{\oplus} A^2 = (A^2)^{\oplus} B^2$ olması için gerek ve yeter şart $(W^2 + XY) = (\Sigma K)^2, (WX + XZ) = \Sigma K \Sigma L$ olması ve $A^2 (A^2)^{\oplus} = B^2 (A^2)^{\oplus}$ olması için gerek ve yeter şart ise $W^2 + XY = (\Sigma K)^2, YW + ZY = 0$ olduğu görülür buradan da iddia doğrulanmış olur.

Baksalary ve arkadaşları $AB = BA$, $A \leq^* B$ ve $A^2 \leq^* B^2$ koşulları arasındaki ilişkilerin kapsamlı bir analizini vermişlerdir. Aşağıdaki teorem, bu hususları Çekirdek sıralamaya genişletmektedir.

Teorem 3.9 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisleri $A \leq^* B$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu durumda $AB = BA$ olması için gerek ve yeter şart $A^2 \leq^{\oplus} B^2$ olmasıdır.

İspat: $A \leq^* B$ olsun, yani B matrisi (3.42) biçiminde olsun. Bu takdirde

$$AB = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^2 & \Sigma K \Sigma L + \Sigma L Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \ , \ \ BA = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^2 & \Sigma K \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

yazılabilir. Bu nedenle, $AB = BA \Leftrightarrow LZ = 0$ olacaktır. Öte yandan, Lemma 3.5' te listelenen koşullarda $W = \Sigma K, X = \Sigma L$ ve $Y = 0$ (ki bu $A \leq^{\oplus} B$ 'yi sağlar) alınırsa, $A^2 \leq^{\oplus} B^2 \Leftrightarrow LZ = 0$ olduğu görülür. Böylece de ispat tamamlanır.

Bu teoremin sonucu olarak $A \leq^{*} I_n \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{OP}$ yazılabilir. Aşağıdaki teorem bu sonucun yıldız sıralaması ile Çekirdek sıralamasının yer değiştirildiği genişletilmiş bir versiyonunu vermektedir.

Teorem 3.10 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde $A \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow A \leq^{\oplus} I_n$ olacaktır. Üstelik $A \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow A \leq^{*} A^2, A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ dir.

İspat: Tanım 3. 2' den, $A^{\oplus}A = A^{\oplus} = AA^{\oplus}$ olması için gerek ve yeter şart $A \leq^{\oplus} I_n$ olduğu görülür. Dolayısıyla, (3.16) ile (3.43) ve (3.44)' daki sol taraftaki formüller kullanılarak $A \leq^{\oplus} I_n \Leftrightarrow L = 0, \Sigma K = I_r$ yazılabildiği görülür. Burada not edelim ki $A^{\oplus}A = A^{\oplus} \Longrightarrow AA^{\oplus} = AA^{\oplus}$ dir.

Lemma 3.1 i dikkate bulunarak, *A*' nın, Çekirdek sıralamasına göre I_n ' nin altında olması için gerek ve yeter şartın idempotent ve EP olması olduğu sonucuna varılır. Bununla birlikte, böyle bir bağlantı, *A*' nın bir dik izdüşüm olması şartına eşdeğerdir. Ayrıca, Tanım 3.2 den $A \leq^{\oplus} A^2$ olası için gerek ve yeter şart $A^{\oplus}A = A^{\oplus}A^2, AA^{\oplus} = A^2A^{\oplus}$ olması olduğu görülür. Bu durumda Teorem 3. 1' in (i) şıkkından dolayı $A^{\oplus}A = A$ ve $AA^{\oplus} = AP_A$ elde edilir. Teorem 3.1' in (iii) şıkkına atıfta bulunarak, son eşitliği $A^{\oplus}A = (A^{\oplus})^{\dagger}$ formunda yeniden yazabiliriz. Sonuç olarak, (3.11), (3.22) ifadelerinden ve (3.43) ve (3.44) ifadelerinde verilen sol taraftaki formüller dikkate alınırsa $A \leq^{\oplus} A^2 \Leftrightarrow \Sigma K = I_r$ elde edilir. Burada belirtelim ki $A^{\oplus}A = A^{\oplus}A^2 \Leftrightarrow AA^{\oplus} = A^2A^{\oplus}$ dir. Sonuç olarak teoremin ikinci kısmının da sağlandığı gösterilmiş olur ve böylece ispat tamamlanır.

3.4 Çekirdek İnvers Gösterimleri

Bu kısımda, Teorem 3.1 de verilen şartları tartışarak bunlardan bazı yeni sonuçlar elde edilecektir. İlk önce, *XAY* nin çekirdek invers ile çakıştığı şartı altında *X* ve *Y* üzerindeki koşulu ele alacağız. Bu sonuç, Teorem 3.1 (i) nin bir genelleştirilmesi olarak da görülebilir. Benzer bir analiz Teorem 3.1 (iii) için de verilebilir. Yani, $A^{\oplus} = (A^2Z)^{\dagger}$ eşitliğinin sağlanması şartı altında *Z* üzerinde bir kısıtlama türetilebilir.

Şimdi Teorem 3.1 (i) ve (iii) deki $A^{\oplus}$ nın iki gösterimi hakkında daha ilginç sonuçlar verilecektir. Bu durumda ilk olarak *XAY* nin $A^{\oplus}$ çekirdek invers ile çakıştığı $A\{1\}$' de bulunan *X* ve *Y* nin maksimal sınıflarını belirleyen bir teorem verilebilir.

Teorem 3. 11 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (3.11) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. *X* ve *Y*, *A* matrisinin iki genelleştirilmiş inversi olsun. O halde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

(i) $A^{\oplus} = XAY$,

(ii) $\mathcal{R}(XA) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $Y \in A\{1, 3\}$, burada $A\{1,3\}$, *A*' nın en küçük kareler inverslerinin kümesini ifade eder,

(iii) *X* ve *Y* sırasıyla şu şekilde ifade edilebilir:

$$X = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}U^* \text{ ve } Y = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LY_{21} & -K^{-1}LY_{22} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

buarada $X_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $X_{22}, Y_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ ve $Y_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ dir.

İspat: *X* ve *Y* matrislerini

$$X = U\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}U^* \text{ ve } Y = U\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}U^* \quad (3.60)$$

şeklinde yazalım. Bu takdirde

$$AXA = U\begin{pmatrix} (\Sigma KX_{11} + \Sigma LX_{21})\Sigma K & (\Sigma KX_{11} + \Sigma LX_{21})\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

elde edilir ve buradan da *AXA=A* veya *AYA= A* koşulunun sırasıyla

$$X_{11} = (\Sigma K)^{-1}(I_r - \Sigma LX_{21}) \text{ veya } Y_{11} = (\Sigma K)^{-1}(I_r - \Sigma LY_{21}) \quad (3.61)$$

ifadesine eşdeğer olduğu görülür.

İspata (i) ⇒ (ii) olduğunu göstererek başlansın. (i)' nin geçerli olduğunu varsayalım. $A^{\oplus}$= *XAY* soldan ve sağdan *A* matrisi ile çarpılırsa sırasıyla

$$A^{\oplus}A = AX \quad (3.62)$$

ve

$$P_A = AY \tag{3.63}$$

sonucuna varılır, burada P_A (3.17)' de tanıtılan ortogonal izdüşümdür. Tanıma göre $\mathcal{R}(A^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(A)$ içermesi geçerli olduğundan, (3.62) eşitliği $\mathcal{R}(XA) \subseteq \mathcal{R}(A)$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde**,** P_A matrisi ${P_A}^* = P_A$ eşitliğini sağladığından, (3.63) eşitliği $(AY)^* = AY$ **,** yani $Y \in A\{1, 3\}$ olduğu anlamına gelir. Böylece (ii) elde edilir.

Şimdi de (ii) ⇒ (iii) olduğunu gösterelim. (ii) nin sağlandığını varsayalım. (3.62) eşitliği kullanılırsa *X* ve Y' yi sırasıyla

$$X = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1}(I_r - \Sigma L X_{21}) & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} U^*$$

ve

$$Y = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1}(I_r - \Sigma L Y_{21}) & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} U^*$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda $X_{21} = 0$ ve $Y_{12} = -K^{-1}LY_{22}$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. *XA* çarpımı.

$$XA = U\begin{pmatrix} I_r - K^{-1}LX_{21}\Sigma K & K^{-1}L - K^{-1}LX_{21}\Sigma L \\ X_{21}\Sigma K & X_{21}\Sigma \mathrm{L} \end{pmatrix}.$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\mathcal{R}(XA) \subseteq \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(U_1)$ durumu

$$X_{21}\Sigma K = 0 \text{ ve } X_{21}\Sigma L = 0,$$

olduğu anlamına gelir. Buradan da $X_{21} = 0$ olduğu görülür. Daha sonra, AY çarpımı

$$AY = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1}(I_r - \Sigma L Y_{21}\Sigma L & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} U^*$$

$$= \begin{pmatrix} I_r & \Sigma K Y_{12} + \Sigma L Y_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

şeklinde hesaplandığından $(AY)^* = AY$ koşulu $\Sigma K Y_{12} + \Sigma L Y_{22} = 0$ anlamına gelir. ki bu da $Y_{12} = -(\Sigma K)^{-1}\Sigma L Y_{22} = -K^{-1}LY_{22}$ olduğunu gösterir. Böylece (iii) türetilir.

Son olarak (iii) ⇒ (i) olduğunu ispatlayalım. Doğrudan bir hesaplamayla

$$XAY = \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LY_{21} & -K^{-1}LY_{22} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} U^*$$

$$= U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

$$= A^{\oplus}$$

olduğu görülür ve bu da ispatı tamamlar.

$A^{\#}$ grup inversi $\mathcal{R}(A^{\#}A) \subseteq \mathcal{R}(A)$ içermesini sağladığından ve $A^{\dagger}$ Moore-Penrose inversi bir en küçük kareler inversi olduğundan, yukarıdaki teorem özel durumu olarak Teorem 3.1 (i) yi içerir.

Teorem 3.12 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (3.11) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. Z**,** A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $A^{\oplus} = (A^2Z)^{\dagger}$,

(ii) $Z \in A\{1,3\}$,

(iii) $Z_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $Z_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ olmak üzere Z matrisi

$$Z = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & -K^{-1}LZ_{22} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^* \tag{3.64}$$

olarak yazılabilir.

İspat: (ii) ve (iii) nin denkliği Teorem 3.11 de zaten kanıtlandığından, (i) ve (iii) ninün denk olduğunu gösterelim. $A^{\oplus} = (A^2Z)^{\dagger}$ koşulu

$$(A^{\oplus})^{\dagger} = (A^2Z),$$

eşitliğine denk olduğundan $A^{\oplus}$ matrisinin Moore-Penrose inversi

$$(A^{\oplus})^{\dagger} = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

olarak yazılabilir. Öte yandan Z matrisi A nın bir genelleştirilmiş inversi olduğundan, Z matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$Z = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^*$$

Böylece A^2Z çarpımı

$$A^2Z = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^*$$

$$= U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma K Z_{12} + \Sigma L Z_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

olarak yazılabilir ve böylece $A^{\oplus} = (A^2Z)^{\dagger}$ eşitliği aşağıdaki denkleme eşdeğerdir:

$$\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma K Z_{12} + \Sigma L Z_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ki bunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$Z_{12} = -(\Sigma K)^{-1}(\Sigma L Z_{22}) = -K^{-1}LZ_{22}$$

olmasıdır. Böylece (i) ve (iii) nün denkliği ispatlanmış olur ve ispat tamamlanır.

Bu kısımda, çekirdek kısmi sıralama hakkında bazı sonuçlar elde edeceğiz. $\mathbb{C}_n^{CM}$ üzerindeki çekirdek kısmi sıralama bir önceki kısımda tanımlanmıştı.

Ayrıca, *A* matrisi (3.11) biçiminde olduğunda, $A \leq^{\oplus} B$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart *B* matrisinin bir $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ için

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \qquad (3.65)$$

formunda yazılabilmesidir.

Önerme 3.1 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun ve $A \leq^{\oplus} B$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(i) $BA^{\oplus}B = A$,

(ii) $B^{\oplus}AB^{\oplus} = A^{\oplus}$,

(iii) $B^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}BB^{\oplus} = A^{\oplus}$.

Teorem 3.13 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi *r* ranklı bir matris olsun. Bu takdirde

(i) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için için gerek ve yeter koşul

$$BA^{\oplus}B = A \tag{3.66}$$

olmasıdır, burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ ve $T \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere

$$B = U\begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.67}$$

dir.

(ii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$B^{\oplus}AB^{\oplus} = A^{\oplus} \tag{3.68}$$

olmasıdır, burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$, $V \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $T \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere

$$B = U\begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma[LZ^{\oplus} \quad Z + V(I_{n-r} - Z^{\oplus} Z] \\ 0 & Z \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

dir.

(iii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ olmak üzere

$$B^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}BB^{\oplus} = A^{\oplus} \tag{3.70}$$

olmasıdır.

İspat: (i) B matrisini

$$B = U\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}U^* \tag{3.71}$$

formunda yazalım. Bu takdirde $BA^{\oplus}B = A$ eşitliği

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_{11}(\Sigma K)^{-1}B_{11} & B_{11}(\Sigma K)^{-1}B_{12} \\ B_{21}(\Sigma K)^{-1}B_{11} & B_{21}(\Sigma K)^{-1}B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmasına denktir. Dört bloğu eşitleyerek ve $T = B_{11}(\Sigma K)^{-1}$ alarak, yukarıdaki eşitliğin $T^2 = I_r$ ve

$$B_{11} = T\Sigma K, \quad B_{12} = T\Sigma L, \quad B_{21} = 0 \tag{3.72}$$

anlamına geldiğini görebiliriz. Bu nedenle matrisinin bazı $Z \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$, $T \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $T^2 = I_r$ için

$$B = U\begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma L \\ 0 & Z \end{pmatrix}U^*$$

formunda olmasını gerektirir. Öte yandan B' nin indeksi ≤ 1 olduğundan, Z matrisinin indeksi ≤ 1 olmalıdır. Bu nedenle (3.67) nin gerekliliği kanıtlanmıştır.

Aksine olarak, B matrisinin (3.67) biçiminde olduğunu varsayalım. Bu takdirde doğrudan bir hesaplama ile eşitliğin (3.66) nın geçerli olduğunu görebiliriz. Böylece (i) şıkkı ispatlanır.

Şimdi (ii)' yi ispatlayalım. (3.68) eşitliğinin sağlandığını varsayalım. B matrisini $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ olacak şekilde seçerek

$$B^{\oplus} = U\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}U^* \tag{3.73}$$

elde edilir. Bu durumda $\mathcal{R}(A^{\oplus}) = \mathcal{R}(A)$ ve buradan da

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(B^{\oplus}) = \mathcal{R}(B),$$

ve

$$AB^{\oplus}AB^{\oplus} = BA^{\oplus} = P_A, \tag{3.74}$$

$$BB^{\oplus}AB^{\oplus} = BA^{\oplus} \text{ ve } AB^{\oplus} = BA^{\oplus} \tag{3.75}$$

olduğu görülür, buradaki son eşitlik $BB^{\oplus}$ nın $\mathcal{R}(B)$ üzerine bir izdüşüm matrisi olduğunu ifade eder. Böylece

$$AB^{\oplus} = U\begin{pmatrix} \Sigma(KX_{11} + LX_{21}) & \Sigma(KX_{12} + LX_{22}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*,$$

$$BA^{\oplus} = U\begin{pmatrix} B_{11}(\Sigma K)^{-1} & 0 \\ B_{21}(\Sigma K)^{-1} & 0 \end{pmatrix}U^*$$

yazılabilir. (3.75) de ifade edildiği gibi yukarıdaki iki matris çakışacaktır ve bu nedenle

$$\Sigma(KX_{11}+LX_{21})=B_{11}(\Sigma K)^{-1}\ ,\ \Sigma(KX_{12}+LX_{22})=0\ ,\ B_{21}(\Sigma K)^{-1}=0$$

eşitlikleri elde edilir ki bu da

$$\Sigma(KX_{11}+LX_{21})=B_{11}(\Sigma K)^{-1}\ ,\ \ KX_{12}+LX_{22}=0\ ,\ B_{21}=0 \tag{3.76}$$

olduğunu gösterir. Diğer bir taraftan, (3.74) eşitliği şu şekilde de yeniden yazılabilir;

$$(AB^{\oplus})^2=U\begin{pmatrix}(\Sigma KX_{12}+\Sigma LX_{22})^2 & (\Sigma KX_{11}+\Sigma LX_{12})(\Sigma KX_{12}+\Sigma LX_{22})\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*$$

$$=U\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^*=P_A.$$

Bunun sonucu olarak

$$T^2=I_r\ \ ,\ \ T\equiv\Sigma(KX_{11}+LX_{21}),$$

$$\Sigma(KX_{11}+LX_{21})\Sigma(KX_{12}+LX_{22})=0,$$

ve dolayısıyla

$$T^2=I_r\ ,\ \ KX_{12}+LX_{22}=0 \tag{3.77}$$

elde edilir. Bu takdirde (3.76) ve (3.77) eşitlikleri birleştirilirse

$B_{11}=T\Sigma K$ ve $B_{21}=0$.

Böylece *B* matrisinin

$$B=U\begin{pmatrix}T\Sigma K & T\Sigma M\\ 0 & Z\end{pmatrix}U^*$$

formunda olduğu gerekliliği elde edilir, burada $T\in\mathbb{C}_{r,r}$ matrisi $T^2=I_r$ olacak şekilde olmak üzere $Z\in\mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$, $M\in\mathbb{C}_{r,(n-r)}$ matrisleri keyfi matrislerdir. *B* matrisinin indeksi ≤ 1 olduğundan**,** *Z* matrisinin de indeksi ≤ 1 şu şekilde olmalıdır. Bu ise $B^{\oplus}$ çekirdek invers matrisinin

$$B^{\oplus}=U\begin{pmatrix}(\Sigma K)^{-1}T & -K^{-1}MZ^{\oplus}\\ 0 & Z^{\oplus}\end{pmatrix}U^* \tag{3.78}$$

şeklinde olduğu anlamına gelir: Bunu göstermek için, *G* matrisi (3.78) in sağ tarafındaki matris olsun. Bu takdirde,

$$BG = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & ZZ^{\oplus} \end{pmatrix}U^*$$

elde edilir ki bu da $P_Z = ZZ^{\oplus}$ nin bir dik izdüşüm matrisi olmasından dolayı

$$BG = (BG)^* = (BG)^2$$

eşitliğini sağlar. Kolayca görülebildiği gibi, $r(BG) = r(B)$ olu BG matrisi $\mathcal{R}(B)$ üzerindeki dik izdüşümüdür. Yani

$$BG = P_B \tag{3.79}$$

dir. Diğer taraftan $U_1 \in \mathbb{C}_{n,r}$ ve $U_2 \in \mathbb{C}_{n,(n-r)}$ olmak üzere $U = (U_1, U_2)$ olsun. Bu takdirde G ve B matrislerinin sütun uzayları, $\oplus$ sembolü lineer alt uzayların direkt toplamını göstermek üzere sırayla şekilde verilmiştir:

$$\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(U_1) \oplus \mathcal{R}(U_2 Z^{\oplus}) \quad \text{ve}\ \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(U_1) \oplus \mathcal{R}(U_2 Z).$$

$\mathcal{R}(Z^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(Z)$ olduğundan $\mathcal{R}(U_2 Z^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(U_2 Z)$ yazılabilir, bu ise

$$\mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{R}(B) \tag{3.80}$$

olduğu anlamına gelir. Böylece (3.79) ve (3.80) den $G = B^{\oplus}$ olduğu elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$B^{\oplus}AB^{\oplus} = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-1}T\Sigma(L-M)Z^{\oplus} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

$$= U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = A^{\oplus} \tag{3.81}$$

ve bunun ardından da

$$MZ^{\oplus} = LZ^{\oplus} \tag{3.82}$$

elde edilir. Bu durumda her Z ve L matrisi için yukarıdaki eşitliğin geçerli olduğu M kümesi şu şekilde verilir:

$$M = LZ^{\oplus}Z + V(I_{n-r} - Z^{\oplus}Z), \quad V \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}.$$

Böylece (3.69) elde edilmiş olur.

Tersine olarak B matrisinin (3.69) daki gibi olduğunu varsayalım. Bu takdirde (3.81) ve (3.82) eşitliklerinden (3.68) eşitliğinin sağlandığı açıkça görülür. Bu ise (ii) şıkkının ispatını tamamlamış olur.

(iii) nin ispatı aşağıdaki gibidir. (3.70) eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Bu takdirde bu eşitliğin A matrisiyle soldan çarparak

$$AB^{\oplus}BA^{\oplus} = P_A P_B = P_A$$

elde edilir ki buradaki ikinci eşitlik $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ olduğunu gösterir. Tersine olarak $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $P_A P_B = P_A$ olduğu açıktır yani

$$AA^{\oplus}BB^{\oplus} = AA^{\oplus}$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin $A^{\oplus}$ ile soldan çarpılması sonucunda

$$A^{\oplus}BB^{\oplus} = A^{\oplus}$$

elde edilir bu da (3.70) deki ikinci eşitlik ile aynıdır. Öte yandan $BB^{\#}$ matrisi $\mathcal{R}(B)(\supseteq \mathcal{R}(A))$ üzerinde bir izdüşüm olduğundan $BB^{\#}AA^{\#} = AA^{\#}$ elde edilir, burada $B^{\#}$, B nin grup inversini göstermektedir. $AA^{\#} = A^{\#}A = A^{\#}AA^{\dagger}A = A^{\oplus}A$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin

$$B^{\oplus}BA^{\oplus}A = A^{\oplus}A.$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Bu son eşitliğin $A^{\oplus}$ ile sağdan çarpılmasıyla

$$B^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}$$

elde edilir ki bu da (3.70) nin birincieşitliğiyle örtüşmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.2 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadelerler eşdeğerdir:

(a) $A^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus}$, yani $A^{\oplus}$, B nin bir dış inversidir.

(b) $A^{\dagger}BA^{\#} = A^{\oplus}$

Teorem 3. 14 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu takdirde $B \in \mathbb{C}_{n,n}$ nin

$$A^{\oplus}BA^{\oplus} = A^{\oplus} \tag{3.83}$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart B matrisinin

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \tag{3.84}$$

formunda olmasıdır, buarada $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ keyfi matrislerdir.

(ii) $r(A) = r$ olmak üzere $B \in \mathbb{C}_{n,n}$ ve $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrislerinin,

$$A^\dagger B A^\# = A^{\oplus} \tag{3.85}$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart A nın ranj - Hermityen ve B matrisinin

$$B = U\begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \tag{3.86}$$

formunda olmasıdır, burada $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}, B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ matrisleri keyfi matrislerdir.

İspat: Önce (i) şıkkını ispatlayalım. B matrisi

$$B = U\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \tag{3.87}$$

olarak yazılabildiğinden (3.83) deki eşitlik aşağıdaki eşitliğe eşdeğerdir:

$$\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu da aynı zamanda $B_{11} = \Sigma K$ olması demektir. Bu nedenle (3.84) eşitliğini elde ederiz. Şimdi (ii) şıkkını ispatlayalım. İlk olarak (3.85) eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Bu takdirde, $r(A^{\oplus}) = r(A\ ) = r$ olduğundan,

$$r = r(A^\# A A^\dagger) \leq r(A^\dagger) = r$$

yazılabilir ve dolayısıyla A matrisi

$$\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A) \tag{3.88}$$

eşitliğini sağlamalıdır. Başka bir deyişle, A matrisi ranj- Hermityen matris olmalıdır. Dolayısıyla (3.11) deki L matrisi sıfır olmalıdır. L=0 olmak üzere (3.13) ve (3.24) eşitlikleri kullanılırsa

$$A^{\dagger}BA^{\#} = U\begin{pmatrix} K^{*}\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K^{-1}\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*}.$$

$$= U\begin{pmatrix} K^{*}\Sigma^{-1}B_{11}K^{-1}\Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

olduğu görülür. (3.16) daki $A^{\oplus}$ matrisi ile (3.89) ifadesi eşitlenirse

$$K^{*}\Sigma^{-1}B_{11}K^{-1}\Sigma^{-1} = K^{-1}\Sigma^{-1} \tag{3.90}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür ki bu da $B_{11} = \Sigma(K^{*})^{-1}$ olduğu anlamına gelmiştir. Böylece gereklilik ispatlanmış olur.

Tersine olarak, A matrisnin ranj-Hermityen matris ve B matrisinin (3.86) biçiminde olduğunu varsayalım. Bu takdirde (3.85) eşitliğinin sağlandığı doğrudan bir hesaplama ile kolayca görülebilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3.5 Genelleştirilmiş Çekirdek İnvers

Bu bölümün başlangıcında çekirdek invers kavramını ve bazı özelliklerini vermiştik. Böyle bir inversin sadece kare matrisler için sözkonusu olabileceğini ve belirli bir $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ için

$$AA^{\oplus} = P_A \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}(A^{\oplus}) \subseteq \mathcal{R}(A)$$

koşullarını sağlayan ve tek türlü mevcut $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi olarak tanımlamıştık. Her kare matrisin bir çekirdek inverse sahip olmadığını belirli bir A matrisinin çekirdek inversinin olması için gerek ve yeter koşul onun bir indeksli yani rk(A^2)=rk(A) olması olduğunu, indeksi 1 olan matrislere grup matris veya çekirdek matris adı verildiğini belirtmiştik. Burada kullanılan ek semboller $\mathbb{C}_n^P, \mathbb{C}_n^{OP}, \mathbb{C}_n^{EP}, \mathbb{C}_n^{NM}, \mathbb{C}_n^{CM}$ sırasıyla şunlardır eğik projektörler (impodent matris), ortogonal izdüşümler (Hermetiyen idempotent matris) ranj-Hermetiyen matris (EP), normal matris ve çekirdek matrislein kümelerini sırasıyla

$$\mathbb{C}_n^P = \{A \in \mathbb{C}_{nxn} : A^2 = A\},$$

$$\mathbb{C}_n^{OP} = \{A \in \mathbb{C}_{nxn} : A^2 = A = A^{*}\},$$

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \{A \in \mathbb{C}_{nxn} : AA^{\dagger} = A^{\dagger}A\},$$

$$\mathbb{C}_n^{NM} = \{A \in \mathbb{C}_{nxn} : AA^{*} = A^{*}A\},$$

$$\mathbb{C}_n^{CM} = \{A \in \mathbb{C}_{nxn}: \mathrm{rk}(A^2) = \mathrm{rk}(A)\}$$

ile göstermiştik. Rankı r olan her $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.91}$$

biçiminde gösterilebildiğini, burada $U \in \mathbb{C}_{n,n}$ uniter matris, $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1 I_{r1} \ldots \sigma_t I_{rt}\}$ matrisi A nın singüler değerlerinden oluşan köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t$, $r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri

$$KK^* + LL^* = I^r \tag{3.92}$$

eşitliğini sağladığını ifade etmiştik. Bu durumda $V = UK^*$ olmak üzere $A = U\Sigma V^*$ olur. (3.11) eşitliğinden $A^\dagger$ ve $A^\oplus$ inverslerinin sırasıyla

$$A^\dagger = U\begin{pmatrix} K^*\Sigma^{-1} & 0 \\ L^*\Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.93}$$

ve

$$A^\oplus = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \tag{3.94}$$

biçiminde gösterilebildiğini ifade etmiştik. Burada K matrisinin nonsingüler olması durumunda $A^\oplus$ nın mevcut olacağı açıktır.

Aşağıdaki tanımda verilecek genelleştirilmiş çekirdek invers kavramı bu kısımda önemli bir rol oynar.

Tanım 3.2 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ metrisi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A^\triangle = (AP_A)^\dagger \tag{3.95}$$

eşitlşiğini sağlayan bir $A^\triangle \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi A'nın genelleştirilmiş çekirdek inversi olarak adlandırılır. Bu durumda (3.95) den her $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ için $A^\triangle$ matrisinin mevcut ve tek olduğu görülür.

Bu kısımda bilinen çeşitli matris sınıflarının inversleriyle bağlantısını gösteren karakterisazyonlar ve bunların gösterileceği bazı genelleştirilmiş çekirdek invers özellikleri burada gösterilenlere vurgu yapılarak verilecektir. Bununla beraber $A^{\triangle}$ literatürde bilinen çekirdek inversin tek genelleştirilmesi olmadığı da dikkat çekicidir.

Lemma 3.5 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisi (3.91) formunda verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A^{\triangle} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{*} \tag{3.96}$$

dir.

İspat: Bu durumda (3.91) ve (3.93) den yararlanılarak,

$$P_A = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{*} \tag{3.97}$$

yazılabilir. Bu nedenle iddia (3.95) den direkt olarak görülür ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.5 bir matrisin genelleştirilmiş çekirdek inversinin, çekirdek inversinden daha genel bir kavram olduğunu gösterir. (3.91) de gözüken K matrisinonsingüler yani $A \in \mathbb{C}_n^{NM}$ olduğunda $A^{\triangle}$ ve $A^{\oplus}$ matrislerinin çakıştığını göstermektedir.

Moore-Penrose inversin özellikleri ışığı altında, Lemma 3.5 nin bir başka açık sonucu genelde $(A^{\triangle})^m \neq (A^m)^{\triangle}$, $m \in \mathbb{N}$ olmasıdır. Öte yandan bu özellik her zaman $(A^{\oplus})^m = (A^m)^{\oplus}$ olması için $A^{\triangle}$ yı $A^{\oplus}$ dan ayırır. Ayrıca $(A^{\oplus})^{\dagger} = AP_A$ olduğu da bilinmektedir. Tanım 3.2 genelleştirilmiş çekirdek inversinde benzer özellik ile yani $(A^{\triangle})^{\dagger} = AP_A$ olarak karakterize edilmesini sağlar.

Teorem 3.15 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçeklenir:

(i) $AA^{\triangle}$ matrisi AP_A matrisinin sütün uzayında dik izdüşümdür.

(ii) $A^{\triangle}A$ matrisi $(AP_A)^{\dagger}$ matrisinin sütün uzayı üzerinde eğik projektörüdür.

İspat: (3.91) ve (3.96) eşitliklerinden

$$AA^{\triangle} = U \begin{pmatrix} \Sigma K (\Sigma K)^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^{*} \tag{3.98}$$

ve

$$A^{\triangle}A = U\begin{pmatrix} (\Sigma K)^{\dagger}\Sigma K & (\Sigma K)^{\dagger}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^{*} \tag{3.99}$$

elde edilir. Bu durumda (3.98) ve (3.99) ifadelerinden $AA^{\triangle}$ matrisinin idempotent ve Hermityen olduğu ancak $A^{\triangle}A$ idempotent olduğu fakat Hermityen olmasının gerekmediği görülür. Teoremin (i) şıkkında verilen $AA^{\triangle}$ matrisinin sütun uzayının belirtilmesi $\mathcal{R}[\Sigma K(\Sigma K)^{\dagger}] = \mathcal{R}(\Sigma K)$ eşitliğinden görülebilir. Teoremin (ii) şıkkının ispatını tamamlamak için (3.96) ve (3.98) eşitliklerinin $A^{\triangle}AA^{\triangle} = A^{\triangle}$ eşitliğini, yani $\mathcal{R}(A^{\triangle}) \subseteq \mathcal{R}(A^{\triangle}A) \subseteq \mathcal{R}(A^{\triangle})$ içermesini sağladığını belirtelim. Bu ise $\mathcal{R}(A^{\triangle}A) = \mathcal{R}(A^{\triangle})$ eşitliğini verir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.15 (i) nin ispatından aşağıdakileri sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu takdirde $A^{\triangle} \in A\{2\}$ dir.

Daha önceki ifadelerden $A^{\oplus}$ inversinin hem $A\{1\}$'e hem de $A\{2\}$ 'ye ait olduğu bilinmektedir. Yukarıda verilen Sonuç 3. 1 ise $A^{\triangle} \in A\{2\}$ olduğunu göstermektedir. Bu durumda $A^{\triangle}$ matrisinin $A\{1\}$ sınıfına ait olup olmadığını araştırmak ilgi çekicidir.

Teorem 3.16 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu takdirde $A^{\triangle} \in A\{1\} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ dir.

İspat: Bu durumda (3.91) ve (3.96) eşitliklerinden

$$AA^{\triangle}A = A \;\Leftrightarrow\; \Sigma K(\Sigma K)^{\dagger}\Sigma L = \Sigma L \Leftrightarrow\; \mathcal{R}(\Sigma L) \subseteq \mathcal{R}(\Sigma K) \tag{3.100}$$

yazılabilir. Σ nonsigüler olduğundan (3.100) deki içerme bağıntısı $\mathcal{R}(L) \subseteq \mathcal{R}(K)$ şekline indirgenebilir. Bunu $\mathcal{R}(L) + \mathcal{R}(K) = \mathbb{C}_{r,1}$ ile birleştirdiğimizde (3.92) nin doğrudan bir sonucu olarak K matrisinin nonsingüler olması gerektiği yani $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olduğu görülür. Böylece de ispat tamamlanır.

Ayrıca Teorem 3.17 nin alternatif olarak $A^{\triangle} \in A\{1\}$ olması için gerek ve yeter şart $r(A) = r(AP_A)$ olmasıdır şeklinde de ifade edilebileceğini belirtelim. Bu nedenle (3.95) e göre $A^{\triangle} \in A\{1\}$ denk başka bir eşitlik olarak $r(A) = r(AP_A)$ elde edilir.

A $\in$ $\mathbb{C}_{n,n}$ matrisinin $\mathbb{C}_n^{P}, \mathbb{C}_n^{OP}, \mathbb{C}_n^{EP}, \mathbb{C}_n^{NM}, \mathbb{C}_n^{CM}$ kümelerinden herhangi birine ait olması durumda $A^{\triangle}$ inversinin de aynı sınıfa ait olduğu lemma 3.5 ve (3.95) eşitliği aracılığıyla doğrulanabilir. Ancak bu durumların hiç birisi tersinir değildir. Bu iddiayı doğrulamak için

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$A^{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Bu ise A^{Δ} inversinin bir ortogonal izdüşüm yani bir idempodent , EP, normal ve çekirdek matris olduğunu ancak A nın bu özelliklerin hiçbirine sahip olmadığı görülür. Daha fazla analiz ile $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olduğunda

$$A \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow A^{\triangle} \in \mathbb{C}_n^{OP} \text{ ve } A \in \mathbb{C}_n^{NM} \Leftrightarrow A^{\triangle} \in \mathbb{C}_n^{NM}$$

olmasına rağmen $A \in \mathbb{C}_n^{NM}$ olduğunda $A \in \mathbb{C}_n^{P} \Leftrightarrow A^{\triangle} \in \mathbb{C}_n^{P}$ olduğu görülür. Öte yandan $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$ olduğu bilinmektedir. Öte yandan $(A^{\oplus})^{\oplus} = AP_A$ eşitliği gösterilir. Ancak genel olarak $(A^{\triangle})^{\triangle}$ inversinin ne A matrisine ne de AP_A matrisine eşit olmadığı oldukça ilginç bir durumdur. Öte yandan $(A^{\triangle})^{\triangle} = A$ ve $(A^{\triangle})^{\triangle} = AP_A$ eşitliklerinin sağlanması için gerek ve yeter şartlar aşağıdaki iki teoremde verilmiştir.

Teorem 3. 17 $A \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{n,n}}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,

(ii) $(A^{\triangle})^{\triangle} = A$,

(iii) $(A^{\dagger})^{\triangle} = A$,

(iv) $(A^{\triangle})^{\dagger} = A$,

(v) $AP_A = A$.

İspat: (3.95)'e göre $(A^{\triangle})^{\triangle} = (A^{\triangle}A_{P^{\triangle}})^{\dagger}$ eşitliği yazılabilir. (3.96) gösterimi kullanılarak $A^{\triangle}$ nın sütün uzayı üzerindeki dik izdüşüm, yani $P_{A^{\triangle}} = A^{\triangle}(A^{\triangle})^{\dagger}$,

$$P_{A^{\triangle}} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{\dagger}\Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

biçimindedir. Bu nedenle,

$$(A^{\triangle})^{\triangle} = U \begin{pmatrix} [(\Sigma K)^{\dagger}(\Sigma K)^{\dagger}\Sigma K]^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

olacaktır. Bu durumda (3.91) ve (3.102) ifadelerini karşılaştırılırsa teoremin (ii) şıkkındaki koşulun ancak ve ancak $\Sigma L = 0$ ve $[(\Sigma K)^{\dagger}(\Sigma K)^{\dagger}\Sigma K]^{\dagger} = \Sigma K$ olması durumunda sağlandığı görülür. Bu koşullardan ilki (1.2) ile K 'nın nonsingüler olmasını garanti eden $L = 0$ koşuluna eşdeğerdir. Sonuç olarak, koşullardan ikincisi $[(\Sigma K)^{-1}(\Sigma K)^{-1}\Sigma K]^{-1} = \Sigma K$ ile değiştirilebilir ki bu eşitlik her zaman sağlanır. Sonuç olarak Teoremin (ii) şartı $L = 0$ koşuluna eşdeğerdir yani A 'nın EP olması gerekir.

Benzer şekilde (3.95) de verilen eşitlikten faydalanarak $(A^{\dagger})^{\triangle} = (A^{\dagger}A_{P^{\dagger}})^{\dagger} = (A^{\dagger}A^{\dagger}A)^{\dagger}$ yazılabilir ve böylece teoremin (iii) koşulu $(A^{\dagger}A^{\dagger}A)^{\dagger}$ olarak yeniden yazılabilir. Bu durumda

$$(A^{\dagger}A^{\dagger}A)^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{*}\Sigma^{-1}K^{*}K & K^{*}\Sigma^{-1}K^{*}L \\ L^{*}\Sigma^{-1}K^{*}K & L^{*}\Sigma^{-1}K^{*}L \end{pmatrix} U^{*},$$

olup buradan da teoremin (iii) koşulunun aşağıdaki dört özdeşliğin birleşimine eşdeğer olduğu sonuncuna varılır.

$$K^{*}\Sigma^{-1}K^{*}K = K^{*}\Sigma^{-1}, \quad L^{*}\Sigma^{-1}K^{*}K = L^{*}\Sigma^{-1}, \tag{3.103}$$

$$L^{*}\Sigma^{-1}K^{*}L = 0, \quad K^{*}\Sigma^{-1}K^{*}L = 0 \tag{3.104}$$

Öte yandan (3.103)' deki eşitlikleri sırasıyla K ve L ile soldan çarparak elde edilen sonuçların bileştirilmesi ile $K^{*}K = I_r$ eşitliği elde edilir. Aynı şekilde (3.104) eşitliklerine benzer dönüşümler uygulanırsa $K^{*}L = 0$ elde edilir.

$K^{*}K = I_r$ olması K nın nonsingülerliğini sağladığından $K^{*}L = 0$ eşitliğinin $L = 0$ eşitliğine indirgenebileceği açıktır. Öte yandan $L=0 \Rightarrow K^{*}K = I_r$ elde edilir ki bu da $L=0$ eşitliğinin (3.103) ve (3.104)' daki eşitliklerin sağlanması için yeterli olmasına rağmen gerekli olmadığını gösterir. Bu ise (iii) nin sağlanması için gerek ve yeter şartın A matrisinin EP olması olduğu anlamına gelir. (iv) şıkkına karşılık gelen ispat $A^{\triangle} = A^{\dagger}$ olarak yazılabilir ki bu (3.93) ve (3.96) daki gösterimlerin karşılaştırılmasıyla elde edilir. Öte yandan (i) ⇔ (v) kısmının ispatı doğrudan (3.91) ve (3.97) eşitliklerinden görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.17 nin (i)-(iii) şıkları arasındaki denklikler

$$A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow (A^{\oplus})^{\oplus} = A \Leftrightarrow (A^{\dagger})^{\oplus} = A$$

şeklinde de yorumlanabilir. Öte yandan

$$A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow A^{\oplus}A = AA^{\oplus} \text{ ve } A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow (A^{\oplus})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{\oplus},$$

ifadeleri $\triangle$ ile $\oplus$ gösterimleri yer değiştirdiğinde de geçerlidir. Ayrıca A matrisi EP olduğunda $A^{\triangle}A = AA^{\triangle}$ ve $(A^{\triangle})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{\triangle}$ eşitliklerinin her ikisi de sağlanır.

Teorem 3.18 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $A^{\triangle} \in \mathbb{C}_n^{EP}$,

(ii) $A(A^{\triangle})^2 = A^{\triangle}$,

(iii) $(A^{\triangle})^{\triangle} = AP_A$,

(iv) AP_A matrisi *EP* dir.

İspat: (3.96) dan kolayca görülür ki $A^{\triangle}$ matrisinin EP olması için ancak ve ancak $(\Sigma K)^{\dagger}$matrisinin EP olmasıdır ki bu da ΣK matrisinin *EP* olmasına eşdeğerdir, yani $\mathcal{R}(\Sigma K) = \mathcal{R}[(\Sigma K)^*]$dir. Direkt hesaplamalar teoremin (ii) şıkkının $\Sigma K(\Sigma K)^{\dagger}(\Sigma K)^{\dagger} = (\Sigma K)^{\dagger}$ olarak ifade edilebileceğini göstermektedir. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\mathcal{R}[(\Sigma K)^{\dagger}] \subseteq \mathcal{R}(\Sigma K)$ olmasıdır. Bu nedenle $r[(\Sigma \mathrm{K})^{\dagger}] = r(\Sigma K)$ ve $\mathcal{R}[(\Sigma \mathrm{K})^{\dagger}] = \mathcal{R}[(\Sigma \mathrm{K})^*]$ olduğundan $\mathcal{R}(\Sigma \mathrm{K}) = \mathcal{R}[(\Sigma \mathrm{K})^*]$ sonucuna ulaşılır. Bu ise (i) $\Leftrightarrow$ (ii) olduğunu ispatlar.

(3.91), (3.97) ve (3.102)' den, teoremin (iii) şıkkında verilen $(A^{\triangle})^{\triangle} = AP_A$ koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şartın $\Sigma K(\Sigma K)^{\dagger}(\Sigma K)^{\dagger} = (\Sigma K)^{\dagger}$ olduğu veya başka bir deyişle $\mathcal{R}(\Sigma K) \subseteq \mathcal{R}(\Sigma K)^*$ olduğu görülebilir. Önceki ifadenin ispatındakine benzer argümanlar (i) $\Leftrightarrow$ (iii) denkliğinin de zorunlu olarak geçerli olmasını gösterir. Teoremin son şıkkına karşılık gelen ispata ise (3.91) ve (3.97) ifadelerinden yararlanarak doğrudan ulaşılabilir.

Teorem 3.19 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu takdirde

(i) $A^{\triangle} = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0$,

(ii) $A^{\triangle} = 0 \Leftrightarrow A^{\dagger} = 0$,

(iii) $A^{\triangle} = A^{\dagger} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,

(iv) $A^{\triangle} = A^{\oplus} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{CM}$,

(v) $A^{\triangle} = P_A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{P}$.

İspat: Bu durumda (3.96) ifadesinden,

$$A^{\triangle} = 0 \Leftrightarrow (\Sigma K)^{\dagger} = 0 \Leftrightarrow \Sigma K = 0 \Leftrightarrow K = 0$$

olduğu görülür. Diğer taraftan temsil (3.91) gösteriminden

$$A^2 = 0 \Leftrightarrow \Sigma K \Sigma K = 0 \text{ ve } \Sigma K \Sigma L = 0 \tag{3.105}$$

elde edilir. Bu durumda (3.105) ifadesinin sağ tarafındaki özdeşliklerin sırasıyla K^* ve L^* ile sağdan çarpılmasıyla elde edilen eşitliklerin birleştirilmesiyle $K = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0$ olduğu görülür ki bu da teoremin (i) şıkkını doğrular. Öte yandan (3.91) ve (3.96) gösterimleri doğrudan

$$A^{\triangle} = A \Leftrightarrow L = 0 \text{ ve } (\Sigma K)^{\dagger} = \Sigma K \tag{3.106}$$

olduğunu gösterir. $L=0$ olması K matrisinin nonsingülerliğini sağladığından, (3.106) daki son koşul $(\Sigma K)^2 = I_r$ olarak yeniden yazılabilir. Ayrıca (3.91) ve (3.93) karşılaştırılarak $A^{\dagger} = A$ olması için gerek ve yeter şartın $L=0$ ve $(\Sigma K)^2 = I_r$ olduğu görülür ki bu da (ii) şıkkının ispatını tamamlar. (iii) ve (iv) şıklarında verilen karakterizasyonlar, sırasıyla (3.96) ile (3.93) ve (3.94) ifadeleri karşılaştırılarak doğrudan gösterilebilir. Teoremin son denkliğini elde etmek için (3.96) ve (3.97) den

$$A^{\Delta} = P_A \Leftrightarrow (\Sigma K)^{\dagger} = I_r \Leftrightarrow \Sigma K = I_r$$

sonucunun çıkarıldığını gözlemleyelim. Bu ise Lemma 3.5 in sonucu olarak iddianın doğruluğunu gösterir.

Teorem 3.19 (ii) de verilen denklik

$$A^{\Delta} = A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP} \text{ ve } A^3 = A$$

şeklinde de ifade edilebilir ki bu da $A^{\Delta} = A$ denkliği için ilave şartlar ortaya koyar.

$A \in \mathbb{C}_{n,n}$ matrisinin $\mathcal{R}(A)$ uzayına göre Bott-Duffin inversinin $I_n - \bar{A}P_A$ nin nonsingüler olması şartıyla

$$A_{\mathcal{R}(A)}^{(-1)} = P_A(I_n - \bar{A}P_A)^{-1}$$

şeklinde verildiğini hatırlayalım, burada $\bar{A} = I_n - A$ dir. $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması durumunda, Bott-Duffin ve çekirdek inversler çakışır. Aşağıdaki teorem, $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olduğu varsayımını gevşeterek bu sonucu genelleştirir.

Teorem 3.20 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ ve $\bar{A} = I_n - A$ olsun. Bu takdirde $A^{\triangle} = P_A(I_n - \bar{A}P_A)^{\dagger}$ dir.

İspat: İddia (3.91), (3.96) ve (3.97) ifadelerinin doğrudan bir sonucudur.

A matrisinin her ikisi de AP_A yı içeren bir çekirdek matris olması için iki gerek ve yeter koşul aşağıda verilmiştir. Teoremde kullanılan $\overline{P_A}$ sembolü, $\overline{P_A} = I_n - P_A$ anlamına gelir.

Teorem 3.21 $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$,

(ii) $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(AP_A)$,

(iii) $\mathcal{R}(A\overline{P}_A) \subseteq \mathcal{R}(AP_A)$.

İspat: Teoremin (ii) şıkkındaki içerme $r(A) \leq r(AP_A) \leq r(A^2)$ eşitsiizliğini gerektiri ki bu da $r(A) = r(A^2)$ ya, yani $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ ye yol açar. Tersine olarak, (3.91) ve (3.97) ye göre $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olduğunda

$$AP_A(AP_A)^{\dagger}A = A \tag{3.107}$$

gerekliliği sağlanır, yani $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(AP_A)$ dir. İspatı tamamlamak için

$$\mathcal{R}(A\overline{P}_A) \subseteq \mathcal{R}(AP_A) \Leftrightarrow AP_A(AP_A)^{\dagger}A\overline{P}_A = A\overline{P}_A$$

olduğunu belirtelim. Doğrudan hesaplamalar gösterir ki bu denkliğin sağ tarafındaki eşitlik (3.107) ye dönüşür. Bu ise (ii)⇔ (iii) olduğunu göstermektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olduğunda $(PQ)^{\oplus} = (PQP)^{\dagger}$ olduğu bilinmektedir. Bu eşitliğin, çekirdek invers ile genelleştirilmiş çekirdek invers yer değiştirildiğinde de geçerli olduğunu belirtelim. Bu sonuç, diğer iki ilgili karakterizasyon ile birlikte, bir sonraki teoremde yer almaktadır. Burada kullanılan $P_{\mathcal{R}(QPQ)}$ sembolü, $\mathcal{R}(QPQ)$ üzerindeki ortogonal izdüşümü gösterir.

Teorem 3.22 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

(i) $(PQ)^{\triangle} = (PQP)^{\dagger}$,

(ii) $[(PQ)^{\dagger}]^{\triangle} = P_{\mathcal{R}(QPQ)}$,

(iii) $(I_n - PQ)^{\triangle} = (I_n - PQ)^{\dagger}$.

İspat: Bu durumda $P \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrisi r ranklı olsun. Bu takdirde

$$P = U\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.108}$$

olacak şekilde bir üniter $U \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}}$ matrisi vardır. (3.108) gösterimi n-yinci mertebeden başka bir $Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ ortogonal izdüşümünün belirlenebilmesi için kullanılabilir. Yani, aynı U matrisinin kullanarak

$$Q = U\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}U^* \tag{3.109}$$

yazılabilir, burada $B \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n-r}}$ ve hermityen olup $A \in \mathbb{C}_{r,r}, D \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{n-r},\boldsymbol{n-r}}$ matrisleri

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } B^*A^\dagger B = P_{\overline{D}} - \overline{D} \tag{3.110}$$

şartlarını sağlar, burada $\overline{D} = I_{n-r} - D$ dir. P ve Q matrisleri (3.108) ve (3.109) formlarında olduğunda $\mathcal{R}(PQ)$ üzerine ortogonal izdüşüm

$$P\mathcal{R}_{(PQ)} = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*$$

olarak verilebilir. Bu nedenle

$$(PQ)^\triangle = (PQP_{\mathcal{R}(PQ)})^\dagger = U\begin{pmatrix} A^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* \tag{3.111}$$

yazılabilir. Böylece

$$PQP = U\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^*,$$

olup teoremin (i) kısmı ispatlanmış olur. Bir sonraki amacımız benzer bir yorum türetmektir. P ve Q matrisleri (3.108) ve (3.109) formlarında olduğunda daha sonra $\mathcal{R}(QPQ)$ üzerindeki ortogonal izdüşüm

$$P_{\mathcal{R}(QPQ)} = U\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & B^*A^\dagger B \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & P_{\overline{D}} - \overline{D} \end{pmatrix}U^* \tag{3.112}$$

ile verilir. Öte yandan $\mathcal{R}[(PQ)^\dagger] = \mathcal{R}(QP)$ olduğundan $[(PQ)^\dagger]^\triangle = [(PQ)^\dagger P_{\mathcal{R}(QP)}]^\dagger$ elde edilir, burada

$$(PQ)^\dagger = U\begin{pmatrix} P_A & 0 \\ B^*A^\dagger & 0 \end{pmatrix}U^* \quad \text{ve} \quad P_{\mathcal{R}(QP)} = U\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & P_{\overline{D}} - \overline{D} \end{pmatrix}U^*$$

dir. Dolayısıyla (3.110) bağıntısındaki ilişkiler dikkate alınırsa

$$(PQ)^\dagger P_{\mathcal{R}(QP)} = U\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & P_{\overline{D}} - \overline{D} \end{pmatrix}U^* ,$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.112) eşitliğiyle karşılaştırıldığında, her ortogonal izdüşümün Moore-Penrose inversine eşit olduğu gerçeğiyle uyumlu olduğu görülür. İspatı tamamlamak için $I_n - PQ$ farkının da her zaman bir EP olduğunu hatırlatalım. Bu durumda, (iii) şıkkında verilen eşitlik, Teorem 3. 17 de verilen (i)⇔(iv) kısmından elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Literatürde, iki P ve Q ortogonal izdüşümün toplamının da bir ortogonal izdüşüm olması için bazı gerek ve yeter koşul mevcuttur. Muhtemelen bunlardan en iyi bilineni $P + Q \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow PQ = 0$ dır. Son teoremimiz, genelleştirilmiş çekirdek invers notasyonuna atıfta bulunan yeni bir koşul ortaya koymaktadır.

Teorem 3.23 $P, Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olması için gerek ve yeter şart $(PQ)^{\triangle} = 0$ olmasıdır.

İspat: (3.108) ve (3.109) gösterimlerinden yararlanılarak, $PQ=0$ (ki bu $P + Q \in \mathbb{C}_n^{OP}$ olmasına eşdeğerdir) olması için gerek ve yeter şart $A=0$ olduğu görülmektedir. Öte yandan (3.111) den $(PQ)^{\triangle} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Bu kısım, matris kısmi sıralamaları ile ilgili bir açıklamayı vererek sona erecektir. $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olduğunda,

$$A \leq^{\oplus} B \Leftrightarrow A^{\oplus}A = A^{\oplus}B \quad \text{ve} \quad AA^{\oplus} = BA^{\oplus}$$

ikili işlemi (i) yansımalıdır, yani $A \leq^{\oplus} A$ dir. (ii) ters simetriktir, yani $A \leq^{\oplus} B$, $B \leq^{\oplus} A$ ise $A = B$ dir. (iii) geçişli, yani $A \leq^{\oplus} B$, $B \leq^{\oplus} C$ ise $A \leq^{\oplus} C$ dir. Bu ise, $A \leq^{\oplus} B$ bağıntısının matris kısmi sıralamasını tanımladığı anlamına gelir ki bu çekirdek sıralama olarak da adlandırılır. A ve B herhangi iki kare matris olmak üzere

$$A \leq^{\triangle} B \Leftrightarrow AA^{\triangle} = A^{\triangle}B \quad \text{ve} \quad AA^{\triangle} = BA^{\triangle}, \tag{3.113}$$

bağıntısının bir matris kısmi sıralama bağıntısını belirleyip belirlemediği ilginç bir sorudur. Bu sorunun cevabı negatiftir, çünkü A matrisini (3.101) deki gibi ve $B = A^{\triangle}$ alınarak bu durum doğrulanabilir. Böyle bir durumda $A^{\triangle}A$, $A^{\triangle}B$, $AA^{\triangle}$, $BA^{\triangle}$, $B^{\triangle}B$, $B^{\triangle}A$, $BB^{\triangle}$ ve $AB^{\triangle}$ çarpımlarının her biri $A^{\triangle}(= B^{\triangle})$ ye eşit olacaktır ki bu da $A \leq^{\triangle} B$ ve $B \leq^{\triangle} A$ olduğu anlamına gelir. Bununla beraber $A \neq B$ olduğundan, (3.113) bağıntısının ters simetrik olmadığı da görülür.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak bir Giriş verilerek Genel Bilgiler başlığı altında kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünün mevcut olup-olmadığının araştırılmasında ve mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan Moore-penrose invers adı verilen bir genelleştirilmiş invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur.

Tezin temel kısmında keyfi mertebeden bir kare matris için Çekirdek invers tanımı ve bu inversin bazı temel özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca çekirdek inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler ve çeşitli çekirdek invers gösterimleri verilmiştir. Son olarak genelleştirilmiş çekirdek invers kavramı detaylı bir şekilde ele alınmış ve çekirdek invers ile genelleştirilmiş çekirdek invers arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tezde yapılan çalışmalar dikkate alınarak keyfi mertebeden bir kare matris çeşitli alt kare matrisler şeklinde parçalanarak başlangıçta verilen matrisin Çekirdek inversinin alt kare matrislerin çekirdek inversleri cinsinden nasıl ifade edilebileceği araştırılabilir. Ayrıca diğer genelleştirilmiş inverslerde olduğu gibi çekirdek inversleri hesaplamada kullanılmak üzere çeşitli algoritmalar ve bilgisayar programları geliştirilebilir. Matris inverslerinin kullanılabildiği mühendislik uygulamalarında çekirdek inverslerin kullanılıp kullanılamayacağı ve kullanılabilmesi durumunda diğer inverslere göre daha uygulanabilir olup olmadığı araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Baksalary, OM., Trenkler, G. (2010). Core inverse of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 58, No. 6: 681–697.

Baksalary, OM., Trenkler, G. (2014). On a generalized core inverse. *Appl Math Computation*, 236: 450–457.

Baksalary, OM., Styan, GPH., Trenkler, G. (2009). On a matrix decomposition of Hartwig and Spindelböck. *Linear Algebra and Its Applications*, 430: 2798–2812.

Benítez, J., Boasso, E., & Xu, S. (2020). On the continuity and differentiability of the (dual) core inverse in C*-algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 68(4), 686-709.

Bjerhammer, A. (1958). A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. *Handl. Stockholm.* No. 124, 1-32.

Chen, J., Zhu, H., Patricio, P. (2017). Characterizations and representations of core and dual core inverses. *Canad Math Bulletion*, 60:269–282.

Coll, C., Lattanzi, M., Thome, N., Weighted, G. (2018). Drazin inverses and a new pre-order on rectangular matrices. *Appl Math Compututations*, 317:12–24.

Cvetković-Ilić, DS., Wei, Y. (2017). *Algebraic properties of generalized inverses*. Singapore: Springer.

Cvetković-Ilić, DS., Mosić, D., Wei, Y. (2015). Partial orders on *B(H)*. *Linear Algebra and Its Applications*, 481:115–130.

Deng, C., Yu, A. (2015). Relationships between DMP relation and some partial orders. *Appl Math Computation*, 266: 41–53.

Ferreyra, DE., Levis, FE., Thome N. (2018). Revisiting the core EP inverse and its extension to rectangular matrices. *Quaest Mathhematics*, 41:265–281.

Hartwig, RE. (1994). EP perturbations. *Sankhy.a Ser A.*, 56:347–357.

Hernandez, A., Lattanzi, M, Thome, N, et al. (2012). The star partial order and the eigen projection at 0 on EP matrices. *Appl Math Computations*, 218: 10669–10678.

Kurata, H. (2018). Some theorems on the core inverse of matrices and the core partial ordering. *Appl Math Computation*, 316:43–51.

Ma, H. (2018). Optimal perturbation bounds for the core inverse. *Applied Math. Computation*, 336: 176–181.

Ma, H., Li, T. (2021). Characterizations and representations of the core inverse and its applications, *Linear and Multilinear Algebra*, 69(1): 93-103.

Malik, SB. (2013). Some more properties of core partial order, *Appl. Math. Comput*. 221: 192–201.

Malik, SB., Rueda, L., Thome, N. (2014). Further properties on the core partial order and other matrix partial orders, *Linear Multilinear Algebra* 62 (12): 1629–1648.

Manjunatha, Prasad K, Mohana, KS. (2014). Core-EP inverse. *Linear Multilinear Algebra*, 62(6): 92–802.

Mitra, SK. (1987). On group inverses and the sharp order. *Linear Algebra and Its Applications*, 92: 17–37.

Mitra, SK., Rao, CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. *Sankhya Ser. A.* Vol. 30, 245-252.

Moore, E H. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), *Bull. Amer. Math.* Soc., Vol. 26, 394-395.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices, Proc. *Cambridge Philos*. Soc., Vol. 51, 406-413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations, *Proc. Cambridge Philos.* Soc., Vol. 52, 17-19.

Pringle, RM., Rayner AA. (1970). Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models, *SIAM Rev*. 12,107-115

Pringle, RM., Rayner AA. (1971). Generalized Inverse Matrices ,Griffin,London

Rakić, DS, Dinčić, N, Djordjević, DS. (2014). Core inverse and core partial order of Hilbert space operators. *Appl Math Computations*, 244: 283–302.

Rakić, DS, Dinčić, N, Djordjević, DS. (2014). Group,Moore-Penrose, core and dual core inverse in rings with involution. *Linear Algebra and Its Applications*, 463: 115–133.

Rao, CR. (1962). A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158.

Rao, CR. (1966). Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Rao, CR. (1967). Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, CR., Mitra, SK. (1971). Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Wang, H. (2016). Core-EP decomposition and its applications. *Linear Algebra and Its Applications*, 508: 289–300.

Wang, H., Li, X. (2015). Characterizations of the core inverse and the core partial ordering. *Linear Multilinear Algebra*, 63: 1829–1836.

Wei, Y. (2017). Acute perturbation of the group inverse. *Linear Algebra and Its Applications*, 534: 135–157.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Gürkan MURSAL
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	
Fakülte	
Bölümü	
Mezuniyet Yılı	
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	