T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK KAFES YAPILARI

SEVGİ DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Sevgi DEMİR tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK danışmanlığında yürütülen "Esnek Kafes Yapıları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 08 / 11 / 2019 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Başkan	:	Prof. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :

ONAY:

04 / 12 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06/ 12 / 2019 tarih ve 2019.. / 7.50 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Selahattin MADEN

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Sevgi DEMİR

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1810 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖZET

ESNEK KAFES YAPILARI

Sevgi DEMİR

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019
Yüksek Lisans Tezi, 40s.

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, bazı esnek kafes yapılarını vermek, bu yapılara ait temel özellikleri araştırmak ve elde edilen sonuçları ortaya koymaktır.

Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmamızda temel olan kafesler ve esnek kümeler hakkında bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. İkinci bölümde esnek kafes, esnek alt kafes, esnek kafes homomorfisi, esnek dağılımlı kafes ve esnek modüler kafes kavramları verilerek bunlara ait özellikler araştırılmıştır ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kafes, Esnek kafes, Esnek dağılımlı kafes, Esnek modüler kafes.

ABSTRACT

SOFT LATTICE STRUCTURES

Sevgi DEMİR

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2019
MSc. Thesis, 40p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of the present thesis is to give the some soft lattice structures, to investigate the basic properties of these structures, and is to present the obtained results.

This study consists of two main chapters. In first chapter, some definitions and theorems which are crucial for our study such as lattice and soft set are stated. In second chapter, by giving the concepts of soft lattice, soft sublattice, soft lattice homomorphism, soft distributive lattice and soft modular lattice, the algebraic properties belonging to these are examined and obtained results are evaluated.

Key Words: Lattice, Soft lattice, Soft distributive lattice, Soft modular lattice.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince yardımlarını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK olmak üzere Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür ederim. Ayrıca Ordu Üniversitesi BAP Koordinatörlüğüne B-1810 numaralı proje ile vermiş oldukları destek için teşekkür ederim.

Aynı zamanda, her zaman yanımda olan, hiçbir yardımı esirgemeyen, manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim aileme de sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\wp(U)$	: U kümesinin güç kümesi
$\sqsubseteq$	: Esnek alt küme
Des(F,A)	: (F,A) esnek kümesinin desteği
S(U)	: U kümesi üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi
Ek(L)	: L üzerindeki tüm esnek kafesler
$\cup$	: Esnek kümelerin birleşimi
$\sqcup$	: Esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\cap$	: Esnek kümelerin arakesiti
$\sqcap$	: Esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti
$\wedge$	: Esnek kümelerin $\wedge$-arakesiti
$\vee$	: Esnek kümelerin $\vee$-birleşimi
$\sim$	: Esnek kafes homomorfisi
$\approx$	: Esnek kafes izomorfisi

1. GİRİŞ

Belirsizlik problemleri ve bu problemlerin çözümüne yönelik yaklaşımlar birçok bilim adamı tarafından uzun zamandır ele alınmaktadır. Belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok yaklaşım metotları geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan en önemlileri bulanık kümeler (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler (Pawlak, 1982) ve esnek kümeler (Molodtsov, 1999) dir. Esnek küme teorisi, belirsizlik içeren problemlerin mevcut metotlar ile çözümü noktasında karşılaşılan zorluklarların üstesinden gelebilmek ve bu problemlere uygun çözümler geliştirebilmek için ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından ortaya konuldu. Molodtsov (1999, 2004) birçok alana esnek küme teorisini uyguladı. Esnek kümeler, hem teori hem de pratiğin dengeli bir kapsamını vurgular. Günümüzde esnek küme teorisi, mühendislik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler, doğa bilimleri ve tıp bilimi başta olmak üzere akıllı sistemlerden karar verme sistemlerine kadar bir çok alanda geniş bir uygulama imkanı buldu. Maji ve ark. (2002, 2003) bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptılar ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladılar. Esnek küme teorisi, özellikle esnek karar verme gibi birçok alanda geniş kapsamlı uygulamalarla ilerleme göstermiştir (Maji ve ark., 2003; Ali ve ark., 2009; Çağman ve Enginoğlu, 2010; Feng ve ark., 2010; Feng ve ark., 2011; Feng ve ark., 2013). Daha sonrasında esnek kümelerin cebirsel yapılar üzerindeki uygulamalarıda birçok araştırmacı tarafından ele alındı ve bu yapılar üzerindeki etkisi incelendi. İlk olarak Aktaş ve Çağman (2007) esnek grup kavramını verdiler ve bu kavramın temel özelliklerini incelediler. Jun (2008) esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini araştırdı. Feng ve ark. (2008) esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halka kavramını verdiler ve bu kavrama ait bazı özelikleri incelediler. Sun ve ark. (2008) esnek modülleri tanımlayarak, esnek modüllere ait bazı temel özellikleri elde ettiler. Shabir ve Ali (2009) yarıgruplarda esnek ideal kavramını verdiler. Majumdar ve Samanta (2010) esnek dönüşüm kavramını verdiler ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar. Acar ve ark. (2010) esnek halkaları tanımladılar ve esnek halkaların bazı temel özelliklerini incelediler. Qin ve Hong (2010) esnek kümelerin kafes yapısını inşaa ettiler, esnek eşitlik kavramını incelediler ve bunlarla ilgili bazı özellikler elde ettiler. Yamak ve ark. (2011) esnek hypergroupoid kavramını verdiler ve bu kavrama ait bazı yeni özellikler elde ettiler. Çelik ve ark. (2011) esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler. Karaaslan ve ark. (2012) esnek kümelerdeki bazı işlemleri kullanarak, esnek kümeler üzerinde esnek kafesleri tanımladılar ve bazı esnek kafes yapılarını incelediler. Nagarajan ve Geetha (2014) bir esnek kafesin esnek ideali kavramını verdiler ve ilgili özellikleri araştırdılar. Bera ve ark. (2017) bir kafes üzerinde esnek kongrüans bağıntısını tanımladılar ve tam esnek kongrüans bağıntısı kavramını verdiler.

Biz bu çalışmada bazı esnek kafes yapılarını ele alacağız, temel özelliklerini inceleyeceğiz ve elde edilen sonuçları değerlendireceğiz. Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde çalışmamızda temel olan kafesler ve esnek kümeler hakkında bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. İkinci bölümde esnek kafes, esnek alt kafes, esnek kafes homomorfisi, esnek dağılımlı kafes ve esnek modüler kafes kavramları verilerek bunlara ait özellikler araştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Kafesler

Tanım 2.1.1 (Birkhoff, 1967) $L \neq \emptyset$ bir küme ve "$\leq$" L üzerinde bir bağıntı olsun. L'ye sıralı küme denir. $\Leftrightarrow$

(i) Her $a \in L$ için $a \leq a$

(ii) Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise a=b

(iii) Her $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir.

Bir L sıralı kümesi $(L, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ bir sıralı küme, $B \subseteq L$ ve $a \in L$ olsun.

(i) Eğer her $b \in B$ için $a \leq b$ ise $a \in L$ elemanına B nin bir alt sınırı denir.

(ii) Eğer her $b \in B$ için $b \leq a$ ise $a \in L$ elemanına B nin bir üst sınırı denir.

(iii) Eğer a, B kümesinin bir alt sınırı ve $a \in B$ ise a ya B kümesinin en küçük elemanı denir.

(iv) Eğer a, B kümesinin bir üst sınırı ve $a \in B$ ise a ya B kümesinin en büyük elemanı denir.

Tanım 2.1.3 (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ sıralı küme ve $B \subseteq L$ olsun. $\overline{B}$, B nin tüm üst sınırlarından; $\underline{B}$, B tüm alt sınırlarından oluşan bir küme olsun.

- $\underline{B} \neq \emptyset$ ve $\underline{B}$ nin en büyük elemanı varsa bu elemana B nin en büyük alt sınırı (infumumu) denir ve $\inf B = \wedge B = \wedge_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.
- $\overline{B} \neq \emptyset$ ve $\overline{B}$ nin en küçük elemanı varsa bu elemana B nin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup B = \vee B = \vee_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ bir sıralı küme olsun. L kümesine kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $\sup\{a, b\} = a \vee b$ ve $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ mevcuttur.

Tanım 2.1.5 (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ bir kafes olsun.

(i) L ye tam kafes denir. $\Leftrightarrow$ Her $\emptyset \neq T \subseteq L$ için $\sup T$ ve $\inf T$ mevcuttur.

(ii) L ye modüler kafes denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in L$ ve $a \leq b$ için $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$ dir.

(iii) L ye dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$ Her bir $a, b, c \in L$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ve $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Bir L kafesi genel olarak $(L, \leq, \vee, \wedge)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, L kafesinin en küçük elemanı ve en büyük elemanı varsa, bu elemanlar sırasıyla "0" ve "1" ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 (Birkhoff, 1967) L bir kafes $0 \in L$ ve her $x \in L$ için $0 \leq x$ ise L ye alttan sınırlı kafes denir ve $(L, \leq, 0)$ ile gösterilir. $1 \in L$ ve her $x \in L$ için $x \leq 1$ ise L ye üstten sınırlı kafes denir ve $(L, \leq, 1)$ ile gösterilir. L kafesi üstten ve alttan sınırlı ise L ye sınırlı kafes denir ve $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir.
Aksi söylenmedikçe bütün kafesler sınırlı kafes olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.1.7 (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ bir tam kafes olsun. L ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in \wedge$ için $a \wedge (\bigvee_{i \in \wedge} b_i) = \bigvee_{i \in \wedge} (a \wedge b_i)$ dir.

Tanım 2.1.8 (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ bir kafes ve $\varnothing \neq T \subseteq L$ olsun. T ye alt kafes denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in T$ için $a \vee b, a \wedge b \in T$ dir.

Teorem 2.1.1 (Birkhoff, 1967) $(L, \leq)$ bir kafes olsun. Eğer L dağılımlı (modüler) kafes ise L nin her alt kafesi de dağılımlı (modüler) dır.

Tanım 2.1.9 (Birkhoff, 1967) $(L_1, \leq)$ ve $(L_2, \leq)$ sıralı kümeler ve $f : L_1 \longrightarrow L_2$ bir fonksiyon olsun. f ye sıra korur fonksiyon denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L_1$ için $a \leq b$ ise $f(a) \leq f(b)$ dir.

Tanım 2.1.10 (Birkhoff, 1967) $(L_1, \leq)$ ve $(L_2, \leq)$ kafesler ve $f : L_1 \longrightarrow L_2$ bir fonksiyon olsun. f ye kafes homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L_1$ için $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ ve $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ dir.

Örnek 2.1.1 (i) $A \neq \emptyset$ bir küme ve $L = \wp(A)$ olsun. $T, S \in L$ için $T \leq S \Leftrightarrow T \subseteq S$ ile verilen "$\leq$" bağıntısı ile $(L, \leq)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

(ii) L sonlu bir küme ve $(L, \leq)$ dağılımlı kafes ise $(L, \leq)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

(iii) $(L_1, \leq)$ ve $(L_2, \leq)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafesler olsun. $L_1 \times L_2$ üzerinde "$\leq$" sıralama bağıntısı $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$ ve $b \leq d$ şeklinde verilsin. Bu taktirde $(L_1 \times L_2, \leq)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

2.2 Esnek Kümeler

Tanım 2.2.1 (Molodtsov, 1999; Feng ve ark., 2008) U ve E boştan farklı kümeler, $\wp(U)$ U'nun güç kümesi, E parametreler kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $\eta : A \longrightarrow \wp(U)$ dönüşümü ile verilen (η, A) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. Burada $R \subseteq A \times U$ olmak üzere her $x \in A$ için $\eta(x) = \{y \in U \mid (x, y) \in R\}$ şeklinde tanımlanır. $Des(\eta, A) = \{x \in A : |\eta(x) \neq \emptyset\}$ kümesine (η, A) esnek kümesinin desteği denir. Her $x \in A$ için $\eta(x) = \emptyset$ ise (η, A) ya boş esnek küme denir. Eğer $Des(\eta, A) \neq \emptyset$ ise (η, A) ya boştan farklı esnek küme denir. U üzerinde tanımlı bütün esnek kümelerin ailesi $S(U)$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.2.1 $f : A \longrightarrow U$ bir fonksiyon ve $\eta : A \longrightarrow \wp(U)$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in A$ için $\eta(x) = \{f(x)\}$ şeklinde tanımlanan (η, A) ikilisi U üzerinde bir esnek kümedir.

Örnek 2.2.2 $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ bir fonksiyon ve (η, A), (μ, B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde esnek kümeler olmak üzere

$$\varphi(\eta) : A \to \wp(U_2) \;\; \varphi(\eta)(x) = \varphi(\eta(x))$$

$$\varphi^{-1}(\mu) : B \to \wp(U_1) \;\; \varphi^{-1}(\mu)(y) = \varphi^{-1}(\mu(y))$$

ile tanımlanan $(\varphi(\eta), A)$ ve $(\varphi^{-1}(\mu), B)$ ikilileri sırasıyla U_2 ve U_1 üzerinde esnek kümelerdir.

Tanım 2.2.2 (Molodtsov, 1999) (η, A) ve (μ, B) U üzerinde iki esnek küme ve $A \subseteq B$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $\eta(x) \subseteq \mu(x)$ ise (η, A) ya (μ, B) nin esnek alt kümesi denir. Bu durum $(\eta, A) \sqsubseteq (\mu, B)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 2.2.1 $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ bir fonksiyon olmak üzere (η_1, A_1) ve (η_2, A_2) U_1 üzerinde, (μ_1, B_1) ve (μ_2, B_2) U_2 üzerinde tanımlı esnek kümeler olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

(i) $(\eta_1, A_1) \subseteq (\eta_2, A_2)$ ise $(\varphi(\eta_1), A_1) \subseteq (\varphi(\eta_2), A_2)$

(ii) $(\mu_1, B_1) \subseteq (\mu_2, B_2)$ ise $(\varphi^{-1}(\mu_1), B_1) \subseteq (\varphi^{-1}(\mu_2), B_2)$

Tanım 2.2.3 (Ali ve ark., 2009; Feng ve ark., 2008) $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\}$ U üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun.

(i) $A = \cup_{i\in\wedge} A_i$ ve her $a \in A$ için $\wedge(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $\eta(a) = \cup_{i\in\wedge(a)}\eta_i(a)$ şeklinde tanımlanan (η, A) esnek kümesine $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\}$ esnek kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum $\bigcup_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(ii) $A = \cap_{i\in\wedge} A_i$ ve her $a \in A$ için $\eta(a) = \cap_{i\in\wedge}\eta_i(a)$ şeklinde tanımlanan (η, A) esnek kümesine $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\}$ esnek kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum $\bigcap_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(iii) $A = \cap_{i\in\wedge} A_i$ ve her $a \in A$ için $\eta(a) = \cup_{i\in\wedge}\eta_i(a)$ şeklinde tanımlanan (η, A) esnek kümesine $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\}$ esnek kümeler ailesinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum $\bigsqcup_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(iv) $A = \cup_{i\in\wedge} A_i$ ve her $a \in A$ için $\wedge(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $\eta(a) = \cap_{i\in\wedge(a)}\eta_i(a)$ şeklinde tanımlanan (η, A) esnek kümesine $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\}$ esnek kümeler ailesinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $\bigsqcap_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(v) $A = \prod_{i\in\wedge} A_i$ ve her $(a_i) \in A$ için $\eta(a_i) = \cup_{i\in\wedge}\eta_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (η, A) esnek kümesine $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \lambda\}$ esnek kümeler ailesinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $\bigvee_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(vi) $A = \prod_{i\in\wedge} A_i$ ve her $(a_i) \in A$ için $\eta(a_i) = \cap_{i\in\wedge}\eta_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (η, A) esnek kümesine $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\}$ esnek kümeler ailesinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $\bigwedge_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

U üzerinde tanımlı (η, A) ve (μ, B) gibi iki esnek küme için yukarıda verilen tanımlar sırasıyla aşağıdaki şekillerde gösterilir.
(η, A) ve (μ, B) esnek kümelerinin birleşimi: $(\eta, A) \cup (\mu, B)$
(η, A) ve (μ, B) esnek kümelerinin arakesiti : $(\eta, A) \cap (\mu, B)$
(η, A) ve (μ, B) esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi: $(\eta, A) \sqcup (\mu, B)$
(η, A) ve (μ, B) esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti: $(\eta, A) \sqcap (\mu, B)$
(η, A) ve (μ, B) esnek kümelerinin $\vee$-birleşimi: $(\eta, A) \vee (\mu, B)$

(η, A) ve (μ, B) esnek kümelerinin $\wedge$-arakesiti: $(\eta, A) \wedge (\mu, B)$

Önerme 2.2.2 $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} \subseteq Es(U)$ ve $(\eta, B) \in Es(U)$ olsun. Bu taktirde;

(i) $(\eta, B) \cap \left(\bigcup_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcup_{i\in\wedge} \left((\eta, B) \cap (\eta_i, A_i) \right)$

(ii) $(\eta, B) \cup \left(\bigcap_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcap_{i\in\wedge} \left((\eta, B) \cup (\eta_i, A_i) \right)$

(iii) $(\eta, B) \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \bigsqcup_{i\in\wedge} \left((\eta, B) \sqcap (\eta_i, A_i) \right)$

(iv) $(\eta, B) \sqcup \left(\prod_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \prod_{i\in\wedge} \left((\eta, B) \sqcup (\eta_i, A_i) \right)$

İspat:

(i) $(\eta, B) \cap \left(\bigcup_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \left(\mu, B \cap (\cup_{i\in\wedge} A_i) \right)$ ve $\bigcup_{i\in\wedge} \left((\eta, B) \bigcap (\eta_i, A_i) \right) = \left(\delta, \cup_{i\in\wedge} (B \cap A_i) \right)$ olsun. $\wedge(x) = \{i \mid x \in A_i\}$, $\wedge^{|}(x) = \{i \mid x \in B \cap A_i\}$ olmak üzere $x \in B \cap (\cup_{i\in\wedge} A_i) = \cup_{i\in\wedge} (B \cap A_i)$ ise
$\mu(x) = \eta(x) \cap (\cup_{i\in\wedge(x)} \eta_i(x)) = \cup_{i\in\wedge(x)} (\eta(x) \cap \eta_i(x)) = \cup_{i\in\wedge^{|}(x)} (\eta(x) \cap \eta_i(x)) = \delta(x)$ dir. Buradan $(\eta, B) \cap \left(\bigcup_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcup_{i\in\wedge} \left((\eta, B) \cap (\eta_i, A_i) \right)$ dir.

(ii) $(\eta, B) \cup \left(\bigcap_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \left(\mu, B \cup (\cap_{i\in\wedge} A_i) \right)$ ve
$\bigcap_{i\in\wedge} \left((\eta, B) \bigcup (\eta_i, A_i) \right) = \left(\delta, \cap_{i\in\wedge} (B \cup A_i) \right)$ olsun.
$x \in B \cup (\cap_{i\in\wedge} A_i) = \cap_{i\in\wedge} (B \cup A_i)$ olmak üzere;

Eğer $x \in B \setminus \cap_{i\in\wedge} A_i$ ise $\mu(x) = \eta(x)$ dir. Ayrıca $x \notin \cap_{i\in\wedge} A_i$ olduğundan $\exists i \in \wedge, x \notin A_i$ ve $\wedge^{|} = \{j \mid x \in A_j\}$ olmak üzere $\delta(x) = \left[\cap_{i\in\wedge^{|}} (\eta(x) \cup \eta_i(x)) \right] \wedge \eta(x) = \eta(x)$ dir. Yani $\mu(x) = \delta(x)$ olur.
Eğer $x \in \cap_{i\in\wedge} A_i \setminus B$ ise $\mu(x) = \cap_{i\in\wedge} \eta_i(x)$ dir. Ayrıca her $i \in \wedge$ için $x \in A_i \setminus B$ olduğundan $\delta(x) = \cap_{i\in\wedge} \eta_i(x)$ dir. Yani $\mu(x) = \delta(x)$ olur.
Eğer $x \in B \cap (\cap_{i\in\lambda} A_i)$ ise $\mu(x) = \eta(x) \cap (\cap_{i\in\wedge} \eta_i(x)) = \cap_{i\in\wedge} (\eta(x) \cap \eta_i(x)) = \delta(x)$ olur. Buradan $(\eta, B) \cup \left(\bigcap_{i\in\wedge} (\eta_i, A_i) \right) = \bigcap \left((\eta, B) \cup (\eta_i, A_i) \right)$ dir.

(iii) (i) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(iv) (ii) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.2.1 $\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\}$ U üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $(Es(U), \sqsubseteq)$ sıralı kümedir.

(ii) $(Es(U), \sqsubseteq)$ tam kafestir ve $\text{Sup}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcup_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$, $\dot{\text{I}}\text{nf}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcap_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$.

(iii) $(Es(U), \sqsubseteq)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

İspat:

(i) (η_1, A_1), (η_2, A_2) ve (η_3, A_3) U üzerinde esnek kümeler olsun. $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_2, A_2)$ olduğu açıktır. $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_2, A_2)$ ve $(\eta_2, A_2) \sqsubseteq (\eta_1, A_1)$ olsun. Bu taktirde buradan $A_1 \subseteq A_2$ ve her $x \in A_1$ için $\eta_1(x) \subseteq \eta_2(x)$ dir. Benzer şekilde $A_2 \subseteq A_1$ için ve her $x \in A_2$ için $\eta_2(x) \subseteq \eta_1(x)$ dir. Dolayısıyla $A_1 = A_2$ ve $\eta_1(x) = \eta_2(x)$ olur. Buradan $(\eta_1, A_1) = (\eta_2, A_2)$ dir. $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_2, A_2)$ ve $(\eta_2, A_2) \sqsubseteq (\eta_3, A_3)$ olsun. Buradan $A_1 \subseteq A_2$ ve her $x \in A_1$ için $\eta_1(x) \subseteq \eta_2(x)$ dir. Benzer şekilde $A_2 \subseteq A_3$ ve her $x \in A_2$ için $\eta_2(x) \subseteq \eta_3(x)$ dir. Dolayısıyla $A_1 \subseteq A_3$ ve $\eta_1(x) \subseteq \eta_3(x)$ olur. Yani $(\eta_1, A_1) \sqsubseteq (\eta_3, A_3)$ dir. Sonuç olarak $(S(U), \sqsubset)$ bir sıralı kümedir.

(ii) Açık olarak her $j \in \wedge$ için $(\eta_j, A_j) \subseteq \bigcup_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ dir. Diğer yandan, $(\mu, A) \in S(U)$ ve her $i \in \wedge$ için $(\eta_i, A_i) \subseteq (\mu, A)$ olsun. Buradan $A_i \subseteq A$ ve her $x \in A$ için $\eta_i(x) \subseteq \mu(x)$ dir. Böylece $\cup_{i\in\wedge}A_i \subseteq A$ ve $x \in \cup_{i\in\wedge}$ için $\cup_{i\in\wedge(x)}\eta_i(x) \subseteq \mu(x)$ yani $\bigcup_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i) \subseteq (\mu, A)$ olur. Buradan $\text{Sup}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcup_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ dir.

Açık olarak her $j \in \wedge$ için $\bigcap_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i) \subseteq (\eta_j, A_j)$ dir. Diğer yandan, $(\mu, A) \in S(U)$ ve her $i \in \wedge$ için $(\mu, A) \subseteq (\eta_i, A_i)$ ise her $i \in \wedge$ ve her $x \in A$ için $A \subseteq A_i$ ve $\mu(x) \subseteq \eta_i(x)$ dir. Böylece $A \subseteq \cap_{i\in\wedge}A_i$ ve $x \in A$ için $\mu(x) \subseteq \cap_{i\in\wedge}\eta_i(x)$ yani $(\mu, A) \subseteq \bigcap_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ olur. Buradan $\dot{\text{I}}\text{nf}\{(\eta_i, A_i) \mid i \in \wedge\} = \bigcap_{i\in\wedge}(\eta_i, A_i)$ dir.

(iii) Önerme 2.2.2 ile açıktır.

Tanım 2.2.4 (Yamak ve ark., 2011) (η, A) ve (μ, B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde esnek kümeler ve $f : U_1 \longrightarrow U_2$ ve $g : A \longrightarrow B$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $x \in A$ için $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$ ise $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ ye bir esnek fonksiyon denir.

Bu tanımda, eğer f ve g bire-bir (örten) bir dönüşüm ise (f, g) ye bire-bir (örten) esnek fonksiyon denir. (η, A) ve (μ, B) arasındaki bire-bir ve örten esnek fonksiyona esnek tam eşleme denir. Bu durum $(\eta, A) \backsimeq (\mu, B)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 2.2.3 (Yamak ve ark., 2011) (η, A), (μ, B), (δ, C) sırasıyla U_1, U_2 ve U_3 üzerinde esnek kümeler ve $(\phi, \psi) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$, $(\varphi, \gamma) : (\mu, B) \longrightarrow (\delta, C)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$,

(ii) (ϕ, ψ) esnek tam eşleme ise $(\phi^{-1}, \psi^{-1}) : (\mu, B) \longrightarrow (\eta, A)$ esnek tam eşlemedir.

Tanım 2.2.5 (Yamak ve ark., 2011) (η, A) ve (μ, B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde esnek kümeler ve $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ olsun.

(i) (η, A) esnek kümesinin (f, g) esnek fonksiyonu altında görüntüsü U_2 üzerinde bir esnek kümedir. Bu durum $(f, g)(\eta, A) = (f(\eta), B)$ şeklinde gösterilir ve her $y \in B$ için

$$f(\eta)(y) = \begin{cases} \bigcup_{g(x)=y} f(\eta(x)) & \text{eğer} \quad y \in \text{Resg} \\ \emptyset & \text{eğer} \quad y \notin \text{Resg} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

(ii) (μ, B) esnek kümesinin (f, g) esnek fonksiyonu altındaki ters görüntüsü U_1 üzerinde bir esnek kümedir. Bu durum $(f, g)^{-1}(\mu, B) = (f^{-1}(\mu), A)$ şeklinde gösterilir ve her $x \in A$ için $f^{-1}(\mu)(x) = f^{-1}(\mu(g(x)))$ şeklinde tanımlanır.

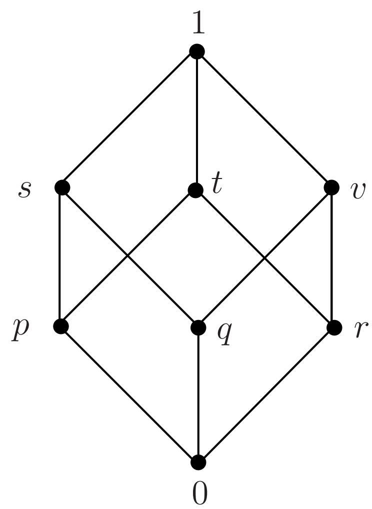
3. ESNEK KAFES YAPILARI

3.1 Esnek Kafesler

Bu bölümde, esnek kafes kavramını ele alacağız ve bu kavrama ait bazı özellikleri araştıracağız. Bu bölüm boyunca, L bir tam kafes ve bütün esnek kümeler boştan farklı olarak ele alıncaktır. R bağıntısı $R \subseteq A \times L$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy\}$ şeklinde tanımlansın. Açıkça (η, A) L üzerinde bir esnek kümedir.

Tanım 3.1.1 (η, A) L üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin alt kafesi ise (η, A) ya L üzerinde bir esnek kafes denir. L üzerindeki bütün esnek kafeslerin kümesi $Ek(L)$ ile gösterilecektir.

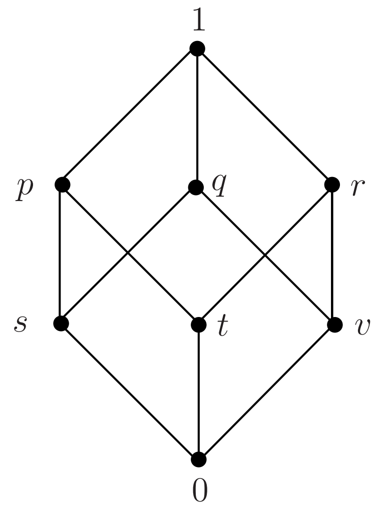
Örnek 3.1.1 $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesi Şekil 3.1. deki gibi verilsin.



Şekil 3.1: $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesi

$A = \{r, q, v\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = 1\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\eta(r) = \{1, s\}$, $\eta(q) = \{1, t\}$, $\eta(v) = \{1, p, t, s\}$ dir. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin bir alt kafesidir. Buradan $(\eta, A) \in Ek(L)$ dir.

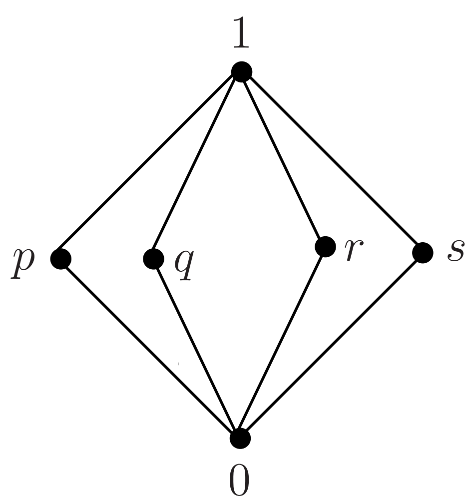
Örnek 3.1.2 $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesi şekil 3.2 deki gibi verilsin.



Şekil 3.2: $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesi

$A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(1) = \{p, r, t, 1\}$, $\eta(2) = \{0\}$ ve $\eta(3) = \{1, s\}$ şeklinde tanımlansın. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin alt kafesidir. Buradan $(\eta, A) \in Ek(L)$dir.

Örnek 3.1.3 $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi Şekil 3.3. deki gibi verilsin.



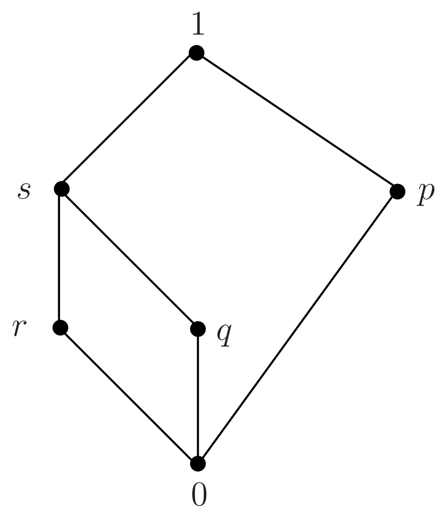
Şekil 3.3: $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi

$A = \{0, p, q, r, s, 1\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = 1\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\eta(0) = \{1\}$, $\eta(p) = \{1, q, r, s\}$,

$\eta(q) = \{1, p, r, s\}$, $\eta(r) = \{1, p, q, s\}$, $\eta(s) = \{1, p, q, r\}$, $\eta(1) = \{0, p, q, r, s, 1\}$ dir. Açıkça $q, r \in \eta(p)$ dır. Fakat $q \wedge r = 0 \notin \eta(p)$. Buradan $\eta(p)$ L nin alt kafesi değildir. Benzer şekilde $\eta(q)$, $\eta(r)$ ve $\eta(s)$ L nin alt kafesi değildirler. Üstelik $(\eta, A) \notin Ek(L)$ dir.

Eğer (η, A) L üzerinde bir esnek kafes değilse boştan farklı bir $B \subseteq A$ alt kümesi yardımıyla (η, B) L üzerinde bir esnek kafes yapılabilir.

Örnek 3.1.4 $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi şekil 3.4. deki gibi verilsin.



Şekil 3.4: $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi

$A = \{0, p, q, r, s, 1\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \wedge y = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\eta(0) = \{0, p, q, r, s, 1\}$, $\eta(p) = \{0, q, r, s\}$, $\eta(q) = \{0, p, r\}$, $\eta(r) = \{0, p, q\}$, $\eta(s) = \{0, p\}$, $\eta(1) = \{0\}$ dir. Açıkça, $\eta(q)$ ve $\eta(r)$ L'nin alt kafesi değillerdir. Açıkça her $x \in B$ için $\eta_B(x)$ L nin alt kafesidir. Üstelik $(\eta, A) \notin Ek(L)$ dir.

Şimdi $B = \{0, p, s, 1\} \subseteq A$ alalım. Buradan $\eta_B(0) = \{0, p, q, r, s, 1\}$, $\eta_B(p) = \{0, q, r, s\}$, $\eta_B(s) = \{0, p\}$, $\eta_B(1) = \{0\}$ dır. Üstelik $(\eta, B) \in Ek(L)$ dır.

Sonuç 3.1.1 Her kafes bir esnek kafes olarak ele alınabilir.

Teorem 3.1.1 L bir kafes ve $\{(\eta_i, A_i \mid i \in \lambda\}$ L üzerinde esnek kafeslerin bir ailesi olsun. Bu taktirde;

(i) $\bigcap_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ bir esnek kafestir.

(ii) $\prod_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ bir esnek kafestir.

(iii) Her $i, j \in \lambda$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise $\bigcup_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ bir esnek kafestir.

(iv) Her $i, j \in \lambda$, $x \in \bigcup_{i\in\lambda} A_i$ için $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$ veya $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$ ise $\bigcup_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ bir esnek kafestir.

(v) Her $i, j \in \lambda$, $x \in \bigcap_{i\in\lambda} A_i$ için $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$ veya $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$ ise $\bigsqcup_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ bir esnek kafestir.

(vi) $\bigwedge_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ bir esnek kafestir.

(vii) Her $i, j \in \lambda$, $a_i \in A_i$ için $\eta_i(a_i) \subseteq \eta_j(a_j)$ veya $\eta_j(a_j) \subseteq \eta_i(a_i)$ ise $\bigvee_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ bir esnek kafestir.

İspat:

(i) $\bigcap_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i) = (\mu, C)$ olsun. Burada $C = \bigcap_{i\in\lambda} A_i$ ve her $x \in C$ için $\mu(x) = \bigcap_{i\in\lambda} \eta_i(x)$ dir. Açıkça her $i \in \lambda$ için $\eta_i(x)$ L nin bir alt kafesidir. Buradan $\mu(x)$ L nin bir alt kafesidir. Üstelik $\bigcap_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ L üzerinde bir esnek kafestir.

(ii) $\prod_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i) = (\mu, C)$ olsun. Burada $C = \bigcup_{i\in\lambda} A_i$ ve her $x \in C$ için $\mu(x) = \bigcap_{i\in\lambda(x)} \eta_i(x)$ dir. $Des(\mu, C) = \bigcup_{i\in\lambda} Des(\eta_i, A_i) \neq \emptyset$ olduğundan (μ, C) boştan farklıdır. Buradan $x \in Des(\mu, C)$ için $\mu(x) = \bigcap_{i\in\lambda(x)}(\eta_i)(x) \neq \emptyset$ dır. Dolayısıyla her $i \in \lambda(x)$ için $\eta_i(x) \neq \emptyset$ dır. Açıkça her $i \in \lambda(x)$ ve $x \in \bigcup_{i\in\lambda} A_i$ için $\eta_i(x)$ L nin bir alt kafesidir. Üstelik $\bigcap_{i\in\lambda(x)} \eta_i(x)$ L nin bir alt kafesidir. Buradan $\prod_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ L üzerinde bir esnek kafestir.

(iii) Tanım 2.3.5 (i) ile açıktır.

(iv) $\bigcup_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i) = (\mu, C)$ olsun. Buradan $C = \bigcup_{i\in\lambda} A_i$ ve her $c \in C$ için $\mu(x) = \bigcup_{i\in\lambda(x)} \eta_i(x)$ dir. $Des(\mu, C) = \bigcup_{i\in\lambda} Des(\eta_i, A_i) \neq \emptyset$ olduğundan (μ, C) boştan farklıdır. $x \in Des(\mu, C)$ olsun. Buradan $\mu(x) = \bigcup_{i\in\lambda(x)} \eta_i(x) \neq \emptyset$ dır ve $\exists i_0 \in \lambda(x)$ öyleki $\eta_{i_0}(x) \neq \emptyset$ dır. $x \in \bigcup_{i\in\lambda} A_i$ için $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$ veya $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$ olduğundan $\bigcup_{i\in\lambda} \eta_i(x)$ L nin bir alt kafesidir. Üstelik $\bigcup_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ L üzerinde bir esnek kafestir.

(v) (iv) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(vi) $\bigwedge_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i) = (\mu, C)$ olsun. $(x_i)_{i\in\lambda} \in Des(\mu, C)$ alalım.
Buradan $\mu((x_i)_{i\in\lambda}) = \bigcap_{i\in\lambda} \eta_i(x_i) \neq \emptyset$ dır. Her $i \in \lambda$ için $\eta_i(x_i)$ L nin bir alt kafesi olduğundan $\bigcap_{i\in\lambda} \eta_i(x_i)$ L nin bir alt kafesidir. Buradan $\bigwedge_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ L üzerinde bir esnek kafestir.

(vii) $\bigvee_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i) = (\mu, C)$ olsun. $(x_i)_{i\in\lambda} \in Des(\mu, C)$ alalım. Buradan $\mu((x_i)_{i\in\lambda}) = \bigcup_{i\in\lambda} \eta_i(x_i) \neq \emptyset$ dır ve $\exists i_0 \in \lambda(x)$ öyleki $\eta_{i_0}(x_{i_0}) \neq \emptyset$ dır. Her $i, j \in \lambda$ $x_i \in A_i$ için $\eta_i(x) \subseteq \eta_j(x)$ veya $\eta_j(x) \subseteq \eta_i(x)$ olduğundan $\eta_i(x_i)$ L nin bir alt kafesidir. Böylece $\bigcup_{i\in\lambda} \eta_i(x_i)$ L nin bir alt kafesidir. Buradan $\bigvee_{i\in\lambda}(\eta_i, A_i)$ L üzerinde bir esnek kafestir.

Sonuç 3.1.2 (η, A) ve (μ, B) L üzerinde iki esnek kafes olsun. Bu taktirde,

(i) $(\eta, A) \cap (\mu, B) \in Ek(L)$

(ii) $(\eta, A) \sqcap (\mu, B) \in Ek(L)$

(iii) $A \cap B = \emptyset$ ise $(\eta, A) \cup (\mu, B) \in Ek(L)$

(iv) Her $x \in A \cap B$ için $\eta(x) \subseteq \mu(x)$ veya $\mu(x) \subseteq \eta(x)$ ise $(\eta, A) \cup (\mu, B) \in Ek(L)$

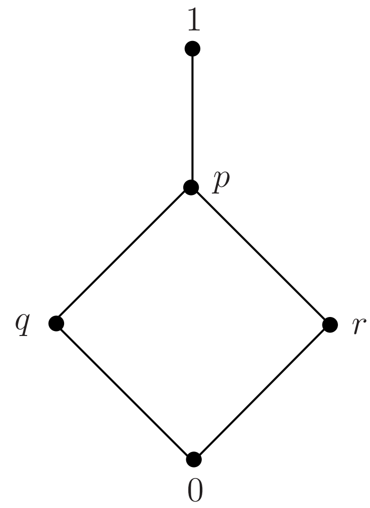
(v) Her $x \in A \cap B$ için $\eta(x) \subseteq \mu(x)$ veya $\mu(x) \subseteq \eta(x)$ ise $(\eta, A) \sqcup (\mu, B) \in Ek(L)$

(vi) $(\eta, A) \wedge (\mu, B) \in Ek(L)$

(vii) Her $(x, y) \in A \times B$ için $\eta(x) \subseteq \mu(y)$ veya $\mu(y) \subseteq \eta(x)$ ise $(\eta, A) \vee (\mu, B) \in Ek(L)$

Örnek 3.1.5 $L = \{1, p, q, r, 0\}$ kafesi şekil 3.5 deki gibi verilsin.

$A = \{1, 2, 3\}$ parametreler kümesi olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu her $x \in A$ için $\eta(1) = \{0, p, 1\}$, $\eta(2) = \{0, p\}$ ve $\eta(3) = \{p, q\}$ şeklinde tanımlansın. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin alt kafesidir. Buradan (η, A) ikilisi L üzerinde esnek kafestir. $B = \{1, 3, 4\}$ olmak üzere $\mu : B \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu her $x \in B$ için $\mu(1) = \{p, q, r, 0\}$, $\mu(3) = \{r\}$ ve $\mu(4) = \{p, r\}$ L şeklinde tanımlansın. Açıkça her $x \in B$ için $\mu(x)$ L nin alt kafesidir. Buradan (μ, B) L üzerinde esnek kafestir.



Şekil 3.5: $L = \{1, p, q, r, 0\}$ kafesi

Üstelik $(\delta, C) = (\eta, A) \cap (\mu, B)$ ve $(\delta, C) = (\eta, A) \wedge (\mu, B)$ L üzerinde esnek kafestir. Fakat $(\delta, C) = (\eta, A) \cup (\mu, B)$ ve $(\delta, C) = (\eta, A) \vee (\mu, B)$ L üzerinde esnek kafes değildirler. Çünkü $\delta(3) = \eta(3) \cup \mu(3) = \{p, q, r\}$ ve $\delta(1, 3) = \eta(1) \vee \mu(3) = \{0, p, r, 1\}$ L nin alt kafesi değildir.

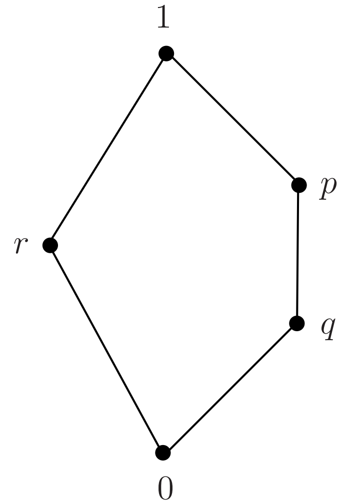
Tanım 3.1.2 (η, A) L üzerinde bir esnek kafes olsun.

(i) Eğer her $x \in A$ için $\eta(x) = 0_L$ ise (η, A) ya L üzerinde sıfır esnek kafes denir.

(ii) Eğer her $x \in A$ için $\eta(x) = L$ ise (η, A) ya L üzerinde tam esnek kafes denir.

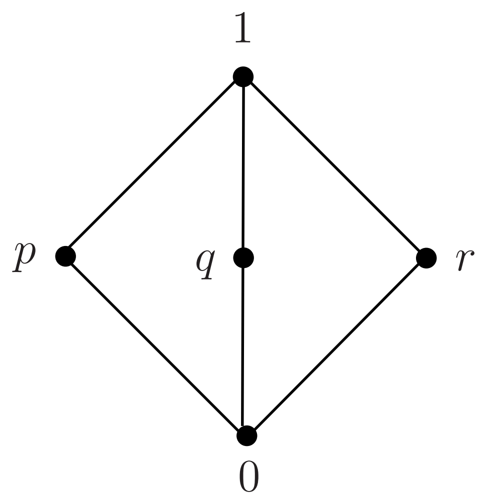
Örnek 3.1.6 $L = \{0, p, q, r, 1\}$ kafesi şekil 3.6 daki gibi verilsin.

$A = \{p, q\}$ olmak üzere $F : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu her $x \in A$ için $\eta(x) = \{y \in L \mid x \wedge y = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\eta(p) = \eta(q) = \{0\}$ olur. Açıkça (η, A) L üzerinde sıfır esnek kafestir.



Şekil 3.6: $L = \{0, p, q, r, 1\}$ kafesi

Örnek 3.1.7 $L = \{0, p, q, r, 1\}$ kafesi şekil 3.7 deki gibi verilsin.

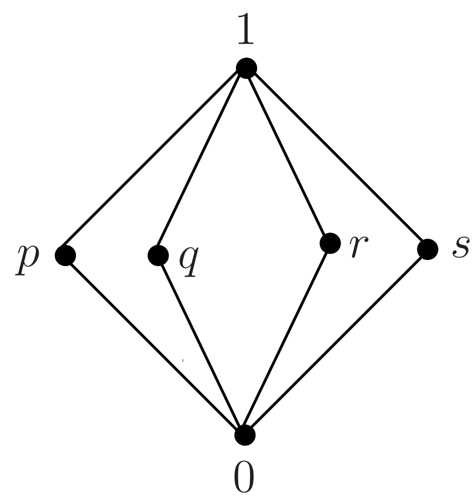


Şekil 3.7: $L = \{0, p, q, r, 1\}$ kafesi

$A = \{r, 0\}$ olmak üzere $F : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu her $x \in A$ için $\eta(x) = \{y \in L \mid x \wedge y \in \{0, r\}\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\eta(r) = \eta(0) = L$ olur. Açıkça (η, A) L üzerinde tam esnek kafestir.

Tanım 3.1.3 (η, A) ve (μ, B) L üzerinde iki esnek kafes ve $(\eta, A) \subseteq (\mu, B)$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $\eta(x)$, $\mu(x)$ in alt kafesi ise (η, A) ya (μ, B) nin esnek alt kafesi denir.

Örnek 3.1.8 $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 3.8: $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi

$A = \{0, p, q, r, s, 1\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = x\}$ ve $B = \{0, q, r, s\}$ olmak üzere $\mu : B \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\mu(x) = \{y \in L \mid xRy \Leftrightarrow x \vee y = x\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\eta(0) = \{0\}$, $\eta(p) = \{0, p\}$, $\eta(q) = \{p, q\}$, $\eta(r) = \{0, r\}$, $\eta(s) = \{0, q, r, s\}$, $\eta(1) = \{0, p, q, r, s, 1\}$, $\mu(0) = \{0\}$, $\mu(q) = \{0, q\}$, $\mu(r) = \{0, r\}$, $\mu(s) = \{0, q, r, s\}$ şeklindedir. Açıkça (η, A) ve (μ, B) L üzerinde esnek kafeslerdir. Üstelik $B \subseteq A$ ve her $x \in B$ için $\mu(x)$ $\eta(x)$ in alt kafesidir. Sonuç olarak (μ, B) (η, A) nın esnek alt kafesidir.

Önerme 3.1.1 Her esnek kafes kendisinin bir esnek alt kafesidir.

İspat: Tanım 3.1.3 ile isapatı açıktır.

Tanım 3.1.4 (η, A) L_1 üzerinde bir esnek kafes ve $f : L_1 \to L_2$ bir kafes homomorfisi olsun. Bu taktirde $(f(\eta))(x) = f(\eta(x))$ dir.

Önerme 3.1.2 (η, A) ve (μ, B) L_1 üzerinde esnek kafesler ve (η, A) (μ, B) nin esnek alt kafesi olsun. Eğer $f : L_1 \to L_2$ kafes homomorfisi ise $(f(\eta), A)$, $(f(\mu), B)$ nin bir esnek alt kafesidir.

İspat: (η, A), (μ, B) nin esnek alt kafesi olsun. O halde $A \subseteq B$ ve her $x \in A$ için $\eta(x)$, $\mu(x)$ in alt kafesidir. $f : L_1 \to L_2$ homomorfisi olduğundan her $x \in A$, $y \in B$ için $f(\eta(x))$

ve $f(\mu(y))$ L_2 nin alt kafesi olur. Ayrıca her $x \in A$ için $f(\eta(x))$ $f(\mu(y))$ nin alt kafesidir. Buradan $(f(\eta), A)$, $(f(\mu), B)$ nin esnek alt kafesidir.

3.2 Esnek Kafes Homomorfisi

Tanım 3.2.1 (η, A) ve (μ, B) sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde esnek kafesler ve $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ ye bir esnek fonksiyon olsun. Eğer $f : L_1 \longrightarrow L_2$ ye bir kafes homomorfisi ise (f, g) ye esnek kafes homomorfisi denir. Bu durumda (η, A), (μ, B) ye esnek homomorftur denir ve $(\eta, A) \backsim (\mu, B)$ ile gösterilir.
Eğer $f : L_1 \longrightarrow L_2$ ye bir kafes izomorfisi ve $g : A \to B$ birebir ve örten fonksiyon ise (f, g) ye esnek kafes izomorfisi denir. Bu durumda (η, A), (μ, B) ye esnek izomorftur denir. Bu durum $(\eta, A) \approx (\mu, B)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3.2.1 "$\approx$" bağıntısı esnek kafesler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat: (μ, A), (η, B) ve (δ, C) sırasıyla L_1, L_2 ve L_3 üzerinde esnek kafesler olsun.

(i) $(\mu, A) \approx (\mu, A)$ olduğu açıktır.

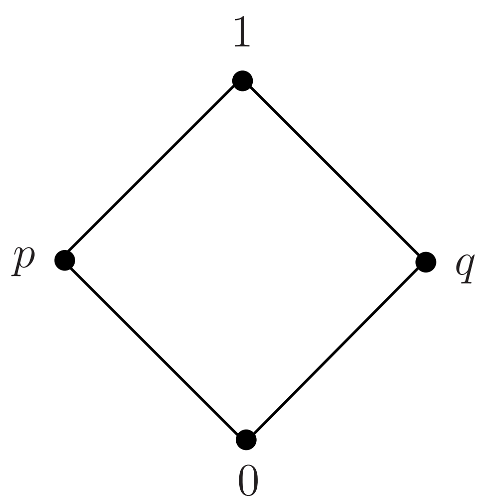
(ii) $(\mu, A) \approx (\eta, B)$ olsun. Bu taktirde, $\exists\ f : L_1 \longrightarrow L_2$ ye izomorfi ve $\exists\ g : A \longrightarrow B$ birebir ve örten dönüşümü öyleki, her $x \in A$ için $f(\mu(x)) = \eta(g(x))$ dir. Buradan $f^{-1} : L_2 \longrightarrow L_1$ izomorfisi, $g^{-1} : B \longrightarrow A$ dönüşümü mevcuttur ve her $y \in B$ için $f^{-1}(\eta(y)) = \mu(g^{-1}(y))$ dir. Böylece $(\eta, B) \approx (\mu, A)$ olur.

(iii) $(\mu, A) \approx (\eta, B)$ ve $(\eta, B) \approx (\delta, C)$ olsun. Bu taktirde, $f : L_1 \longrightarrow L_2$, $\phi : L_2 \longrightarrow L_3$ izomorfileri ve $g : A \longrightarrow B$, $h : B \longrightarrow C$ birebir, örten dönüşümleri mevcuttur öyleki her $x \in A$, $y \in B$ için $f(\mu(x)) = \eta(g(x))$ ve $\phi(\eta(y)) = \delta(h(y))$ dir. Buradan $\phi(\eta(g(x))) = \phi(f(\mu(x))) = \delta(h(g(x)))$ olur. Yani, $\phi \circ f(\mu(x)) = \delta(h \circ g(x))$ dir. Böylece $(\mu, A) \approx (\delta, C)$ elde edilir.

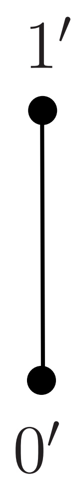
Önerme 3.2.2 (η, A), (μ, B) ve (δ, C) sırasıyla L_1, L_2 ve L_3 kafesleri üzerinde esnek kafesler olsun. Eğer $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ ve $(f', g') : (\mu, B) \longrightarrow (\delta, C)$ esnek kafes homomorfileri ise $(f' \circ f, g' \circ g) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$ esnek kafes homomorfisidir.

İspat: Önerme 2.2.3 ile açıkça $(f' \circ f, g' \circ g) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$ bir esnek fonksiyondur. Diğer taraftan, $f : L_1 \longrightarrow L_2$ ve $f' : L_2 \longrightarrow L_3$ kafes homomorfileri olduğundan $f' \circ f : L_1 \longrightarrow L_3$ kafes homomorfisidir. Böylece $(f' \circ f, g' \circ g) : (\eta, A) \longrightarrow (\delta, C)$ bir esnek kafes homomorfisidir.

Örnek 3.2.1 $L_1 = \{0, p, q, 1\}$ ve $L_2 = \{0', 1'\}$ kafesleri sırasıyla şekil 3.9 ve şekil 3.10 deki gibi verilsin.



Şekil 3.9: $L_1 = \{0, p, q, 1\}$ kafesi



Şekil 3.10: $L_2 = \{0', 1'\}$ kafesi

$A = \{0, p, q, 1\}$ ve $B = \{0', 1'\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L_1)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L_1 : xRy \Leftrightarrow x \vee y = x, x \in A\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, $(\eta, A) \in Ek(L_1)$ dir. $\mu : B \longrightarrow \wp(L_2)$ küme değerli fonksiyonu $\mu(x) = \{y \in L_2 : xRy \Leftrightarrow x \vee y = x, x \in B\}$ şeklinde tanımlansın. O halde, $(\mu, B) \in Ek(L_2)$ dir. $f : L_1 \rightarrow L_2$ ve $g : A \rightarrow B$ dönüşümleri $f(0) = 0'$, $f(p) = 0'$, $f(q) = 1'$, $f(1) = 1'$, $g(0) = 0'$, $g(p) = 0'$, $g(q) = 1'$, $\mu(1) = 1'$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f : L_1 \rightarrow L_2$ bir kafes homomorfisidir. Ayrıca her $x \in A$ için $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$ eşitliği sağlanır. Buradan $(\eta, A) \backsim (\mu, B)$ dir.

Teorem 3.2.1 (η, A) ve (μ, B) sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde iki esnek kafes ve $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ esnek kafes homomorfisi olsun.

(i) Eğer f örten, g birebir ve örten ise $(f(\eta), B)$ L_2 de bir esnek kafestir.

(ii) $(f^{-1}(\mu), A)$ L_1 üzerinde bir esnek kafestir.

İspat:

(i) $y \in B$ olsun. g örten olduğundan $g(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in A$ mevcuttur. $\eta(x)$ L_1 in alt kafesi ve f kafes homomorfisi olduğundan $f(\eta(x))$ L_2 nin alt kafesidir. Ayrıca g birebir olduğundan her $y \in B$ için $f(\eta)(y) = f(\eta(x))$ L_2 nin alt kafesidir. Buradan $(f(\eta), B)$ L_2 de bir esnek kafestir.

(ii) Her $x \in A$ için $g(x) \in B$ ve (μ, B) L_2 üzerinde esnek kafes olduğundan $\mu(g(x))$ L_2 nin alt kafesidir. Ayrıca her $x \in A$ için $f^{-1}(\mu(g(x)))$ L_1 in alt kafesidir. Buradan $(f^{-1}(\mu), A)$ L_1 üzerinde bir esnek kafestir.

Teorem 3.2.2 (η, A) ve (μ, B) sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde iki esnek kafes ve $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ esnek kafes homomorfisi olsun.

(i) Eğer (η, A) L_1 üzerinde tam esnek kafes ise $(f(\eta), B)$ L_2 üzerinde tam esnek kafestir.

(ii) Eğer f birebir ve (μ, B) sıfır esnek kafes ise $(f^{-1}(\mu), A)$ L_1 üzerinde sıfır esnek kafestir.

İspat: Tanım 2.2.5 ve Tanım 3.1.2 yardımıyla ispatı kolaylıkla gösterilebilir.

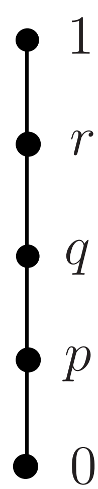
Teorem 3.2.3 (η, A) ve (μ, B) sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer (η, A) L_1 üzerinde esnek kafes ve $(\eta, A) \approx (\mu, B)$ ise (μ, B) de L_2 üzerinde esnek kafestir.

İspat: $(\eta, A) \approx (\mu, B)$ olduğundan $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ esnek kafes izomorfisi mevcuttur. $g : A \longrightarrow B$ birebir ve örten bir dönüşüm olduğundan her $y \in B$ için $g(x) = y$ ve $f(\eta(x)) = \mu(g(x)) = \mu(y)$ olacak şekilde bir $x \in A$ mevcuttur. Açıkça $f(\eta(x))$ L_2 nin alt kafesidir ve bundan dolayı $\mu(y)$ L_2 nin alt kafesidir. Buradan (μ, B) L_2 üzerinde esnek kafestir.

3.3 Esnek Dağılımlı Kafesler

Tanım 3.3.1 (η, A) L üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin dağılımlı alt kafesi ise (η, A) ya L üzerinde bir esnek dağılımlı kafes denir.

Örnek 3.3.1 $L = \{0, p, q, r, 1\}$ kafesi şekil 3.11 daki gibi verilsin.



Şekil 3.11: $L = \{0, p, q, r, 1\}$ kafesi

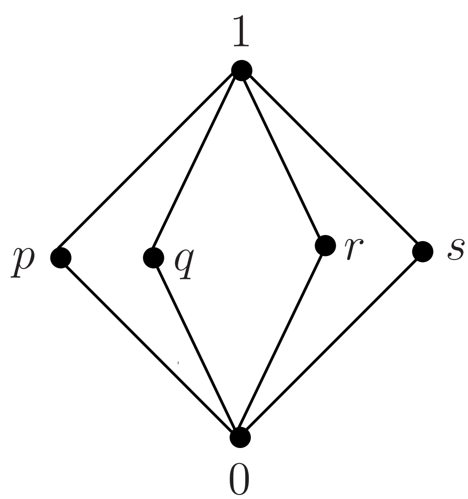
$A = \{p, q, r\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \vee y = x\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\eta(p) = \{0, p\}$, $\eta(q) = \{0, p, q\}$, $\eta(r) = \{0, p, q, r\}$ dir. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$, L nin dağılımlı alt kafesidir. Buradan (η, A) L üzerinde bir esnek dağılımlı kafestir.

Önerme 3.3.1 L bir dağılımlı kafes ve $(\eta, A) \in Ek(L)$ olsun. Bu taktirde (η, A) L üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

İspat: $(\eta, A) \in Ek(L)$ olduğundan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin alt kafesidir. L dağılımlı ve her dağılımlı kafesin alt kafesi dağılımlı olduğundan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin bir dağılımlı alt kafesidir. Buradan (η, A) L üzerinde bir esnek dağılımlı kafestir.

Uyarı: Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani, eğer (η, A) L üzerinde esnek dağılımlı kafes ise L nin dağılımlı kafes olması gerekli değildir.

Örnek 3.3.2 $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi Şekil 3.12 deki gibi verilsin.



Şekil 3.12: $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi

$A = \{p, q, r, s\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = y\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre$\eta(p) = \{0, p\}$, $\eta(q) = \{p, q\}$, $\eta(r) = \{0, r\}$, $\eta(s) = \{0, s\}$ dir. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$, L nin dağılımlı alt kafesidir. Buradan (η, A) L üzerinde bir esnek dağılımlı kafestir. Fakat L dağılımlı kafes değildir.

Teorem 3.3.1 (η, A) ve (μ, B) sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde esnek kafesler ve $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ bir esnek kafes homomorfisi olsun. Bu taktirde,

(i) Eğer (η, A) esnek dağılımlı kafes ise $(f(\eta), A)$ L_2 üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

(ii) (μ, B) L_2 üzerinde esnek dağılımlı kafes ise $(f^{-1}(\mu), B)$ L_1 üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

İspat: Tanım 2.2.5 ve Tanım 3.3.1 yardımıyla ispatı kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.3.2 (η, A) L üzerinde bir esnek dağılımlı kafes ve (μ, B), (η, A) nın esnek alt kafesi olsun. O halde (μ, B) de esnek dağılımlı kafestir.

İspat: (μ, B) (η, A) nın esnek alt kafesi olsun. O halde $B \subseteq A$ ve her $x \in B$ için $\mu(x)$ $\eta(x)$ in alt kafesidir. (η, A) L üzerinde esnek dağılımlı kafes olduğundan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin dağılımlı alt kafesidir. Her $x \in A$ için $\mu(x)$ $\eta(x)$ in alt kafesi olduğundan $\mu(x)$ de L nin dağılımlı alt kafesidir. Buradan (μ, B) L üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

Teorem 3.3.3 (η, A) L_1 üzerinde ve (μ, B) L_2 üzerinde esnek kafesler olsun. Eğer (η, A) L_1 üzerinde esnek dağılımlı kafes ve $(\eta, A) \approx (\mu, B)$ ise (μ, B) de L_2 üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

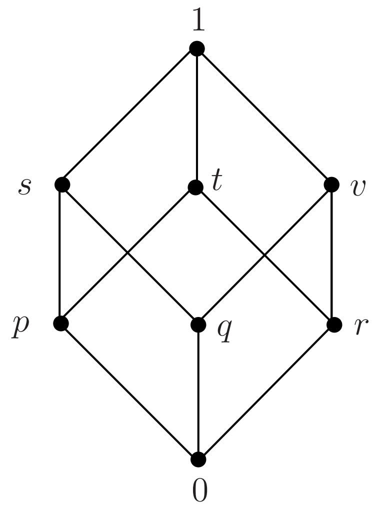
İspat: $(\eta, A) \approx (\mu, B)$ ise $(f, g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ olacak şekilde $f : L_1 \longrightarrow L_2$ ve $g : A \longrightarrow B$ dönüşümleri vardır ve her $x \in A$ için $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$ dir. (η, A) L_1 üzerinde esnek dağılımlı kafes ise her $x \in A$ için $\eta(x)$ L_1 in dağılımlı alt kafesidir. Üstelik $f(\eta(x))$ L_2 nin dağılımlı alt kafesidir. Yani $\mu(g(x))$ L_2 nin dağılımlı alt kafesidir. $g : A \longrightarrow B$ örten oldğundan her $y \in B$ için $\exists x \in A$ öyleki $g(x) = y$ dir. Buradan $\mu(y)$ L_2 nin dağılımlı alt kafesidir. Sonuç olarak (μ, B) L_2 üzerinde esnek dağılımlı kafestir.

3.4 Esnek Modüler Kafesler

Tanım 3.4.1 (η, A), L üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin modüler alt kafesi ise (η, A) ya L üzerinde esnek modüler kafes denir.

Örnek 3.4.1 $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesi Şekil 3.13 deki gibi verilsin.

$A = \{0, p, q, r, 1\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\eta(p) = \{p, q, r, v, t\}$, $\eta(q) = \{0, p, r, t\}$, $\eta(r) = \{0, p, q, s\}$, $\eta(1) = \{0\}$ dir. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin modüler alt kafesidir. Buradan (η, A) L üzerinde esnek modüler kafestir.



Şekil 3.13: $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesi

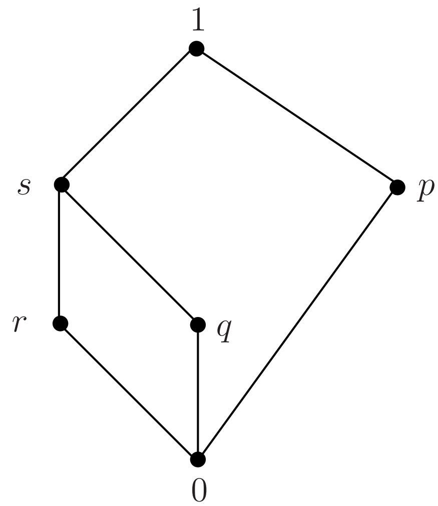
Önerme 3.4.1 L bir modüler kafes ve $(\eta, A) \in Ek(L)$ olsun. Bu taktirde (η, A) L üzerinde esnek modüler kafestir.

İspat: $(\eta, A) \in Ek(L)$ olduğundan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin alt kafesidir. Burada L modüler kafes ve her modüler kafesin alt kafesi modüler kafes olduğundan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin modüler alt kafesidir. Buradan (η, A) L üzerinde esnek modüler kafestir.

Uyarı: Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani eğer (η, A) L üzerinde bir esnek modüler kafes ise L nin modüler kafes olması gerekli değildir. Aşağıdaki örnekle bu durumu açıklayalım.

Örnek 3.4.2 $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi şekil 3.14. deki gibi verilsin.

$A = \{p, q, r, s\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(A)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = y\}$ şeklinde tanımlansın. Buradan $\eta(p) = \{0, p\}$, $\eta(q) = \{p, q\}$, $\eta(r) = \{0, r\}$, $\eta(s) = \{0, q, r, s\}$ dir. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$, L nin modüler alt kafesidir. O halde (η, A) L üzerinde bir esnek modüler kafestir. Fakat L modüler kafes değildir.



Şekil 3.14: $L = \{0, p, q, r, s, 1\}$ kafesi

Teorem 3.4.1 (η, A) ve (μ, B) sırasıyla L_1 ve L_2 üzerinde esnek kafesler ve (f, g) : $(\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ esnek kafes homomorfisi olsun. Bu taktirde

(i) Eğer (η, A) esnek modüler kafes ise $(f(\eta), B)$ L_2 üzerinde esnek modüler kafestir.

(ii) (μ, B) L_2 üzerinde esnek modüler kafes ise $(f^{-1}(\mu), A)$ L_1 üzerinde esnek modüler kafestir.

İspat: Tanım 2.2.5 ve Tanım 3.4.1 yardımıyla ispatı kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.4.2 (η, A), L üzerinde bir esnek modüler kafes ve (μ, B), (η, A) nın esnek alt kafesi olsun. O halde (μ, B) de L üzerinde esnek modüler kafestir.

İspat: (μ, B) (η, A) nın esnek alt kafesi olsun. O halde $B \subseteq A$ ve her $x \in B$ için $\mu(x)$ $\eta(x)$ in alt kafesidir. Ayrıca (η, A) L üzerinde esnek modüler kafes olduğundan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin modüler alt kafesidir. $\mu(x)$ de $\eta(x)$ in alt kafesi olduğundan her $x \in B$ için $\mu(x)$ L nin modüler alt kafesidir. Buradan (μ, B) L üzerinde bir esnek modüler kafestir.

Teorem 3.4.3 (η, A) L_1 üzerinde ve (μ, B) L_2 üzerinde esnek kafesler olsun. Eğer (η, A) L_1 üzerinde esnek modüler kafes ve $(\eta, A) \approx (\mu, B)$ ise (μ, B) de L_2 üzerinde esnek modüler kafestir.

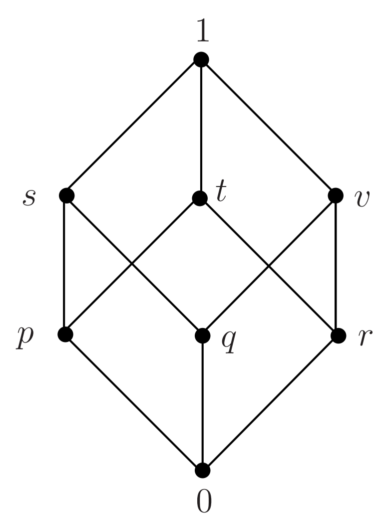
İspat: $(\eta, A) \approx (\mu, B)$ ise $(f,g) : (\eta, A) \longrightarrow (\mu, B)$ olacak şekilde $f : L_1 \longrightarrow L_2$ ve $g : A \longrightarrow B$ dönüşümleri vardır ve her $x \in A$ için $f(\eta(x)) = \mu(g(x))$ dir. (η, A) L_1 üzerinde esnek modüler kafes ise her $x \in A$ için $\eta(x)$ L_1 in modüler alt kafesidir. Üstelik $f(\eta(x))$ L_2 nin modüler alt kafesidir. Yani $\mu(g(x))$ L_2 nin modüler alt kafesidir. $g : A \longrightarrow B$ örten oldğundan her $y \in B$ için $\exists x \in A$ öyleki $g(x) = y$ dir. Buradan $\mu(y)$ L_2 nin modüler alt kafesidir. Sonuç olarak (μ, B) L_2 üzerinde esnek modüler kafestir.

Teorem 3.4.4 Bir esnek dağılımlı kafes esnek modüler kafestir.

İspat: (η, A) L üzerinde esnek dağılımlı kafes olsun. Buradan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin dağılımlı alt kafesidir. Yani $x, y, z \in A$ için $\eta(x) \wedge (\eta(y) \vee \eta(z)) = (\eta(x) \wedge \eta(y)) \vee (\eta(x) \wedge \eta(z))$ dir.
Eğer $\eta(y) \leq \eta(x)$ ise ; $\eta(x) \wedge (\eta(y) \vee \eta(z)) = \eta(y) \vee (\eta(x) \wedge \eta(z))$ elde edilir. Buradan her $x \in A$ için $\eta(x)$ L nin modüler alt kafesidir. Yani (η, A) L üzerinde esnek modüler kafestir.

Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani bir esnek modüler kafes esnek dağılımlı kafes olmayabilir.

Örnek 3.4.3 Şekil 3.15 deki $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesini dikkate alalım.



Şekil 3.15: $L = \{0, p, q, r, s, t, v, 1\}$ kafesi

$A = \{0, p, q, r, 1\}$ olmak üzere $\eta : A \longrightarrow \wp(L)$ küme değerli fonksiyonu $\eta(x) = \{y \in L : xRy \Leftrightarrow x \wedge y = 0\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $\eta(p) = \{p, q, r, v, t\}$, $\eta(q) = \{0, p, r, t\}$, $\eta(r) = \{0, p, q, s\}$, $\eta(1) = \{0\}$ dir. Açıkça her $x \in A$ için $\eta(x)$, L nin modüler alt kafesidir. Buradan (η, A), L üzerinde esnek modüler kafestir. Fakat (η, A) esnek dağılımlı kafes değildir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle bir U kümesi üzerinde tanımlı bütün esnek kümelerin ailesinin "$\sqsubseteq$" bağıntısı ile tam kafes ve sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Esnek kümeler üzerinde ikili işlemler verilerek esnek kafesler için ikili işlemlerin buradaki etkileri incelenmiştir. Kafes teorisine ait bazı sonuçların esnek kafesler içinde geçerli olduğu gösterilmiştir. Esnek fonksiyon yardımıyla esnek kafeslerin homomorfik görüntüsü ve homomorfik ters görüntüsüne ait bazı özellikler verilmiştir.

Bu sonuçlara dayanarak, esnek kafes yapısı yardımıyla klasik kafes yapısına ait özellikler incelenebilir. L kafesi üzerinde bir t-norm alınarak esnek kümelerin yapısı incelenebilir. Kafeslerin karakterize edilmesinde de faydalı olabilecek diğer esnek kafes yapılarının özellikleri üzerine bazı çalışmalar yapılabilir.

5.KAYNAKLAR

Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B. (2010). Soft sets and soft rings. *Computers and Mathematics with Applications*, 59(11), 3458-3463.

Aktaş, H., Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Information sciences*, 177, 2726-2735.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Comptuers and Mathematics with Applications*, 57(9), 1547-1553.

Bera, S., Roy, S., K., Karaaslan, F., Çağman, N. (2017). Soft congruence relation over lattice. *Hacattepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(6), 1035-1042.

Birkhoff, G. (1967). Lattice Theory. American Mathematical society, Providence, Rhode, Island, 420pp.

Çağman, N., Enginoğlu, S. (2010). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207, 848-855.

Çağman, N., Çıtak, F., Aktaş, H. (2012). Soft int-group and its applications to group theory. *Neural Computing and Applications*, 21(1), 2621-2628.

Çelik., Y., Ekiz., C., Yamak., S. (2011). A new view on soft rings. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(2), 273-286.

Feng, F., Jun, Y.B. Zhao., X. (2008). Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621-2628.

Feng, F., Jun, Y.B., Liu., X., Li, L. (2010). An adjustable apporach to fuzzy soft set based decision making. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 10-20.

Feng, F., Li, C., Davvaz, B., Ali, M.I. (2010). Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative apporach. *Soft Computing*, 14(6), 899-911.

Feng, F., Liu, X., Leoreanu-Fotea, V., Jun, Y.B. (2011). Soft sets and soft rough sets. *Information Sciences*, 181(6), 1125-1137.

Feng, F., Ali, M.I., Shabir, M. (2013). Soft relations applied to semigroups. *Filomat*, 27(7), 1183-1196.

Jun, Y.B. (2008). Soft bck/bci-algebras. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(5), 1408-1413.

Karaaslan, F., Çağman, N., Enginoğlu, S. (2012). Soft Lattices. *Journal of New Results in Science*, 1, 5-17.

Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.

Maji, P.K., Roy, A.R., Biswas, R. (2002). An application of soft sets in a decision making problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44(8-9), 1077-1083.

Majumdar, P., Samanta, S.K. (2010). On soft mappings. *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 2666-2672.

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19-31.

Molodtsov, D. (2004). The Theory of Soft Sets. URSS Publishers, Moscow.

Nagarajan, E.K.R., Meenambigai, G. (2011). An application of soft sets to lattices. *Kragujevac Journal of Mathematics,* 35(1), 75-87.

Nagarajan, E.K.R., Geetha, P. (2014). Soft Ideals of a Soft Lattice. *International Journal of Mathematics Trends and Technology,* 8(2), 112-119.

Pawlak, Z. (19829. Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences,* 11(1), 341-356.

Qin, K., Hong, Z. (2010). On soft equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 1347-1355.

Shabir, M., Ali, M.I. (2009). Soft Ideals and Generalized Fuzzy Ideals in Semigroups. *New Mathematics and Natural Computation,* 5(3), 599-615.

Sun, Q-M., Zhang, Z-L., Liu, J. (2008). Soft Sets and Soft Modules. Rough Sets and Knowledge Tecnology, Springer, China, 403-409.

Yamak, S., Kazancı, O., Davvaz, B. (2011). Soft hyperstructure. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 797-803.

Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Sevgi DEMİR
Doğum Yeri	**:**	Ordu
Doğum Tarihi	**:**	18/09/1994
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	svgidmr6@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Böl. ORDU

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Böl.	Ordu Üniversitesi	2016