T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPERATÖR AG-PREİNVEKS FONKSİYONLAR VE HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ YARDIMIYLA BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER

ELİF BAŞKÖY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Elif BAŞKÖY

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

OPERATÖR AG-PREİNVEKS FONKSİYONLAR VE HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ YARDIMIYLA BAZI YENİ EŞİTSİZLİKLER

ELİF BAŞKÖY

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 40 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDAL ÜNLÜYOL

Bu tezde, ilk olarak Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör AG preinveks fonksiyonlar sınıfı incelenmiştir. İkinci olarak, Hermite-Hadamard eşitsizliği yardımıyla yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Üçüncü olarak bu operatörler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için bazı yaklaşımlar verilmiştir. Son olarak ise iki operatör preinveks fonksiyonun çarpımı için eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı, özeşlenik operatörler, özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları, operatör AG preinveks fonksiyonlar.

ABSTRACT

OPERATOR AG-PREINVEX FUNCTIONS AND SOME NEW INEQUALITIES VIA HERMİTE-HADAMARD INEQUALITY

ELİF BAŞKÖY

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 40 PAGES

SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. ERDAL ÜNLÜYOL

In this thesis, Firstly, it is researched the operator AG preinvex functions for continuous functions of selfadjoint operators. Secondly, it is established some inequalities due to Hermite-Hadamard inequality. Thirdly, it is given give an estimate of the right hand side of a Hermite-Hadamard type inequality for this operator. Finally, it is obtained some inequalities for the product of two operator preinvex functions.

Keywords: Hilbert space, self-adjoint operators, continuous functions of self-adjoint operators, operator AG preinvex functions.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle her zaman yanımda olan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL'a en içten duygularımla teşekkürlerimi iletiyorum.

Yüksek lisans eğitim-öğretim süresince değerli bilgilerinden istifade ettiğim Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan annem, babam ve abime sonsuz teşekkürler.

Hayatımın her alanında olduğu gibi, tez çalışmamı hazırlarken de bana yardımcı olan sevgili eşime ve bana ilham veren biricik oğlum Mert Kuzey'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\mathbf{0}}$	: $[0, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$	: $m \in \mathbb{N}$, boyutlu reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$(\cdot,\cdot), \langle\cdot,\cdot\rangle$	İç çarpım fonksiyonu
H	: Hilbert uzayı
$B(H)^{+}$	: H dan H ya pozitif sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)_{sa}$	: H dan H ya sınırlı özeşlenik operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

Elster ve Neshse [12] konveksel fonksiyonlar sınıfını incelemişlerdir, yani $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(z) \;\; \leq \;\; \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $z \in S$ noktalarını içeren fonksiyonlara konveksel denir. Eğer S bir konveks küme ve f de konveks bir fonksiyon ise, bu durumda f'nin konveksel olduğu açıktır. Aslında Elster ve Nehse konveksel matematiksel programlama için optimal şart altında bir eyer(büküm) noktası elde etmişlerdir.

Hayaski ve Komiya [18] hem konveksel fonksiyonları hem de konveksel fonksiyonlar için bir Gordan tipi teorem geliştirmişler.

Hanson [16], her $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}$ için

$$f(x) - f(u) \;\; \geq \;\; [\eta(x, u)]^T \nabla f(u) \tag{1.0.2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x, u)$ vektör fonksiyona sahip $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Burada "∇" sembolü diverjansı göstermektedir. Bu tarz fonksiyonlar Craven [4] tarafından inveks olarak isimlendirilmiştir. Bu terim ise "<u>**in**</u>variant con<u>**vex**</u>" ifadesinden kısaltılmıştır. Craven ve Glover [5], Ben-Israel ve Mond [3], ayrıca Martin' in [23] invex fonksiyonlar sınıfıyla ilgili çalışmaları mevcuttur.

Ben-Israel ve Mond [3], Hanson ve Mond [17] daha genel olan yani, S kümesi üzerinde diferensiyellenebilen fonksiyonların, her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(u + \lambda \eta(x, u)) \;\; \leq \;\; \lambda f(x) + (1-\lambda) f(u) \tag{1.0.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x, u)$ vektör fonksiyonunun varlığını ispat etmişler ve diferensiyellenebilen fonksiyonların hem (1.0.2) yi hem de (1.0.3)'ü sağladığını göstermişlerdir. Bu koşullar altında (1.0.3) eşitsizliğini sağlayan bu fonksiyonlara V. Jeyakumar tarafından "pre-invex" ismi verilmiştir. Ayrıca, $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ m-boyutlu vektör değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer f'nin bileşenlerinin her biri, η-ya göre S üzerinde preinveks ise, bu f'ye η'ya göre S üzerinde preinvekstir denir. Her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$u + \lambda \eta(x, u) \in S$$

olup, buradan preinveks fonksiyonların konveksel olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere, inveksliк ve preinveksliğin nasıl ortaya çıktığı hakkında genel bir bilgi verdik. Şimdi bu fonksiyon sınıfının "neden" ortaya çıktığını kısaca söyleyelim.

Konveksliğin bu yeni genelleştirmesi, optimizasyon problemleri, statik ve dinamik problemleri vb. konularının daha iyi anlaşılması ve çözülmesi için matematikçiler tarafından elde edilmiştir.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, ilk olarak Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör AG preinveks fonksiyonlar sınıfı incelenmiştir. İkinci olarak, Hermite-Hadamard eşitsizliği yardımıyla yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Üçüncü olarak bu operatörler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için bazı yaklaşımlar verilmiştir. Son olarak ise iki operatör preinveks fonksiyonun çarpımı için eşitsizlikler verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.0.1 (**Lineer Uzay**) L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır). $F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.3 F bir cisim, V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$
şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.4 (**İç-çarpım uzayı**): F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $(.,.) : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise " $(.,.)$" dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, $(X, (.,.))$ ikilisine de "iç-çarpım" uzayı denir:

1. $\forall x \in X$ için $(x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_X$;

2. $\forall x, y \in X$ için $(x,y) = \overline{(y,x)}$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$;

4. $\forall x, y, z \in X$ için $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$.

Remark 2.0.1 $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $(x,y) = (y,x)$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz:

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$,

2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \in F$ için $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x,y)$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$.

Tanım 2.0.5 (**Norm**): $(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X$ vektörünün normu

$$\| x \| = (x,x)^{\frac{1}{2}} \tag{2.0.1}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

Tanım 2.0.6 (**Hilbert Uzayı**): $(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı (2.0.1) normuna göre tam ise, yani $(X, (.,.))$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi (2.0.1) norma göre yakınsak ise bu $(X, (.,.))$ uzayına bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.7 (**Birim Operatör**): $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. I, E ve I_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.8 (**Sınırlı Operatör**): X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesi $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X, \text{ her } x \in D(A)$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör" denir.

Tanım 2.0.9 (**Lineer Operatör**): X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' in bir alt uzayı olmak üzere her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y),$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.10 (**Eşlenik ve Özeşlenik Operatör**): A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya özeşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.11 (**Rezolventa**): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(X)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.12 (**Spektrum**): H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile göstereceğiz.

Buraya kadar genel anlamda bu tezin daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan Operatör Teorisi'nin bilgilerini verdik. Şimdi ise klasik anlamdaki eşitsizliklerle, operatörler arasındaki geçişi vereceğiz.

$a < b, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli bir f konveks fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.0.2}$$

Buradaki iki eşitsizlik eğer yön değiştirirse, o zaman bu f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde konkav olur.

(2.0.2) eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Biz Hermite-Hadamard eşitsizliğini, Jensen eşitsizliğinden ve konvekslik tanımından kolayca elde edebiliriz. Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir konveks fonksiyonun ortalama değerini verir. Dragomir ve Agarwal [7] konveks fonksiyonları içeren Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için aşağıdaki şekilde eşitsizlik elde etmişlerdir. Kikianty [21], Banach uzaylarının geometrisinde Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir. Konveks fonksiyonların özel bir genelleştirmesi olan inveks ve preinvekslik, Hanson [16] tarafından çalışılmıştır.

X bir vektör uzayı ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. $t \in [0, 1]$ için

$$[x, y] := (1 - t)x + ty$$

parçasını tanımlayalım.

$f : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ve

$$g(x, y) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x, y)(t) := f((1 - t)x + ty), \ t \in [0, 1]$$

fonksiyonunu düşünelim. f nin, $[x, y]$ üzerinde konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $g(x, y)$ nin $[0, 1]$ üzerinde konveks olmasıdır.

Bir $[x, y] \in X$ parçası üzerinde tanımlanan herhangi bir konveks fonksiyon için, $g(x, y) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonundan

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \int_0^1 f((1 - t)x + ty)dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{2.0.3}$$

Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini yazabiliriz.

Dragomir operatör konveks ve operatör preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin operatör versiyonunu elde etmiştir [9],[10].

Şimdi, sınırlı özeşlenik operatörlerin sürekli foksiyonları için bir $(H, \langle ., . \rangle)$ Hilbert uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi olan $B(H)$ da operatörlerde sıralamayı inceleyelim.

$A, B \in B(H)$ özeşlenik operatörleri ve her $x \in H$ vektörü için eğer

$$\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$$

ise, o zaman $A \leq B$ yazabiliriz. Buna operatörlerde sıralama denir.

A, bir $(H; \langle .,.\rangle)$ kompleks Hilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Gelfand dönüşümü, A tarafından üretilen $C^*(A)$ C^*-cebiri, H üzerinde 1_H birim operatör, $Sp(A)$ olarak gösterilen A nın spektrumu üzerinde tanımlanan kompleks değerli tüm fonksiyonların $C(Sp(A))$ kümesi arasında Φ izomorfizm $*$-izometriği ile kurulur. Herhangi $f, g \in C(Sp(A))$ ve herhangi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

(i) $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$;

(ii) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$;

(iii) $\|\Phi(f)\| = \|f\| := sup_{t\in Sp(A)}|f(t)|$;

(iv) $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$, burada $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$

yazabiliriz [13]. Bu notasyonla, biz tüm $f \in C(Sp(A))$ için

$$f(A) := \Phi(f) \tag{2.0.4}$$

tanımlayabiliriz ve bu da bize bir A sınırlı özeşlenik operatörlerünün bir f-fonksiyonu altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini gösterir.

Eğer A, sınırlı özeşlenik bir operatör ve f, $Sp(A)$ üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, o zaman herhangi bir $t \in Sp(A)$ için $f(t) \geq 0$ olması, $f(A) \geq 0$ demektir. Yani $f(A)$, H üzerinde pozitif bir operatördür. Dahası, f ve g, $Sp(A)$ üzerinde reel değerli sürekli iki fonksiyon olsun. Her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \leq g(t)$$

ise, o zaman $B(H)$ daki operatör sıralamasına göre

$$f(A) \leq g(A).$$

Spektrumları $I \subseteq \mathbb{R}$ de olan her $A, B \in B(H)$ için

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (\geq)(1-\lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde f reel değerli sürekli bu fonksiyona operatör konveks (operatör konkav) denir.

Operatör konveks (operatör konkav) ve operatör monoton fonksiyonlar üzerinde bazı temel sonuçlar Furuta ve arkadaşları [13] tarafından verilmiştir.

Dragomir [11] operatör konveks fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği ispatlamıştır.

Teorem 2.0.1 [11] $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığı üzerinde operatör konveks olsun. O halde spekturumları I'da olan her özeşlenik A ve B operatörleri için

$$\begin{aligned} &\Big(\Big(f(\frac{A+B}{2})\Big) \leq \Big)\frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+B}{4}\Big)+f\Big(\frac{A+3B}{4}\Big)\Big] \\ \leq\ & \int_0^1 f((1-t)A+tB)dt \\ \leq\ & \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{A+B}{2}\Big)+\frac{f(A)+f(B)}{2}\Big]\Big(\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}\Big) \end{aligned} \tag{2.0.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.0.13 (**İnveks Küme**): X bir reel vektör uzayı ve $S \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in S$ ve $t \in [0,1]$ için

$$y + t\eta(x,y) \in S$$

ise $S \subseteq X$'e $\eta : S \times S \to X$ dönüşümüne göre inveks bir küme denir. Her $x, y \in S$ için $x\, ve\, v := x + \eta(y,x)$ noktalarını birleştiren P_{xv} η-yolu aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$P_{xv} := \big\{z : z = x + t\eta(y,x), t \in [0,1]\big\}.$$

Eğer her $x, y \in S$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\left.\begin{aligned} \eta(y, y+t\eta(x,y)) &= -t\eta(x,y) \\ \eta(x, y+t\eta(x,y)) &= (1-t)\eta(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu durumda η dönüşümünün (C) şartını sağladığı söylenir.

Ayrıca her $x, y \in S$ ve her $t_1, t_2 \in [0,1]$ için (C) şartından

$$\eta(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)) = (t_2 - t_1)\eta(x,y) \tag{2.0.6}$$

yazabiliriz.

Tanım 2.0.14 (**Operatör Preinveks Fonksiyon**) $S \subseteq B(H)_{sa}$, $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme olsun. Bu durumda $B(H)$'daki operatör sıralamasına göre her $A, B \in S$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(A + t\eta(B,A) \leq (1-t)f(A) + tf(B) \tag{2.0.7}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna S üzerinde η' ya göre operatör preinveks denir.

Şimdi η dönüşümüne göre (C) koşulunu sağlayan bazı operatör preinveks fonksiyon ve inveks küme örnekleri verelim.

Örnek 2.0.1 ([14], Örnek 1-a) Varsayalım 1_H H Hilbert uzayı üzerinde bir birim operatörü,

$$\begin{aligned} T := (-3 \times 1_H, -1 \times 1_H) &= \{A \in B(H)_{sa} : -3 \times 1_H < A < -1 \times 1_H\} \\ U := (1_H, 4 \times 1_H) &= \{A \in B(H)_{sa} : 1_H < A < 4 \times 1_H\} \\ S := T \cup U &\subseteq B(H)_{sa} \end{aligned}$$

ve $\eta_1 : S \times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_1(A,B) = \begin{cases} A - B & A, B \in U \\ A - B, & A, B \in T \\ 1_H - B, & A \in T, B \in U \\ -1_H - B, & A \in U, B \in T \end{cases}$$

olsun. η_1'in (C) koşulunu sağladığı ve S kümesinin η_1 fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. $f(t) = t^2$ reel fonksiyonu S kümesi üzrinde η_1 e göre preinvekstir. Fakat $a, b \in \mathbb{R}$ için $g(t) = a + bt$ fonksiyonu S kümesi üzerinde η_1 e göre preinveks değildir.

Örnek 2.0.2 ([14], Örnek 1-b) $V := (-2 \times 1_H, 0)$, $W := (0, 2 \times 1_H)$, $S := V \cup W \subseteq B(H)_{sa}$ ve $\eta_2 : S \times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_2(A,B) \begin{cases} A - B, & A, B \in V \text{ veya } A, B \in W \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. η_2, (C) koşulunu sağlar ve S kümesi η_2 ye göre invekstir. $a \in \mathbb{R}$ için $f(t) = a$ sabit fonksiyonu S üzerinde η_2 ye göre sadece preinveks fonksiyondur.

Remark 2.0.2 Her operatör konveks fonksiyon, $\eta(A,B) = A - B$ dönüşümüne göre operatör preinveks bir fonksiyondur, fakat tersi genelde doğru değildir [14].

Örnek 2.0.3 ([14] Örnek 1-c) $f(t) = -|t|$ konveks bir fonksiyon değildir, fakat f-fonksiyonu

$$\eta_3(A,B) = \begin{cases} A-B, & A,B \geq 0 \text{ veya } A,B \leq 0, \\ B-A, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

η_3 e göre preinvekstir.

Tanım 2.0.15 (**İntegraller için Hölder Eşitsizliği**) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b |g(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.0.16 (**Power-Mean Eşitsizliği**) $q \geq 1$ olsun.f ve g $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_a^b |f(x)|dx\Big)^{1-\frac{1}{q}} \Big(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 Operatör Preinveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Bu kısımda operatör preinveks fonksiyonlar için literatürde var olan bazı eşitsizlikleri ifade ve ispat edeceğiz. Bunu yaparken esas aldığımız kaynak Ghazanfari' nin [15] çalışmasıdır.

Teorem 3.1.1 $S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ya göre bir inveks küme ve η da (C) şartını sağlasın. Eğer spektrumları I da olan her $A, B \in S, V = A + \eta(B, A)$ için, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu P_{AV}, η yolundaki η' ya göre operatör preinveks ve k, p pozitif tamsayılar ise, bu durumda

$$\begin{aligned} f\Big(A + \frac{1}{2}\eta(B, A)\Big) &\leq \frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} f\Big(A + \frac{2i+1}{2k^p}\eta(B, A)\Big) \\ &\leq \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt \\ &\leq \frac{1}{2k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1}\Big[f\Big(A + \frac{i+1}{k^p}\eta(B, A)\Big) + f\Big(A + \frac{i}{k^p}\eta(B, A)\Big)\Big] \\ &\leq \frac{f(A) + f(B)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $x \in H, \|x\| = 1, t \in [0, 1]$ için $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A) \subseteq I$ and $\langle Vx, x\rangle \in Sp(V) \subseteq I$ olduğundan dolayı

$$\langle (A + t\eta(B, A)), x\rangle = (1 - t)\langle Ax, x\rangle + t\langle Vx, x\rangle \in I \tag{3.1.2}$$

yazabiliriz. f' nin sürekliliği ve (3.1.2) den

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B, A))$$

integrali vardır. η, (C) şartını sağladığından her $t \in [0, 1]$ için

$$A + \frac{1}{2}\eta(B, A) = A + t\eta(B, A) + \frac{1}{2}\eta\Big(A + (1 - t)\eta(B, A), A + t\eta(B, A)\Big) \tag{3.1.3}$$

eşitliği doğrudur.

$x \in H$ birim vektör ve $\varphi(t) := \langle f(A + t\eta(B, A))\rangle$ şeklinde tanımlanan $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. İddiaya göre f bir operatör preinveks fonksiyon olduğundan

φ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında konvekstir [15]. Bu durumda reel değerli φ fonksiyonu için $[\frac{i}{k^p}, \frac{i+1}{k^p}]$ aralığı üzerinde klasik Hermite-Hadamard eşitsizliğini uygularsak,

$$\varphi\Big(\frac{2i+1}{2k^p}\Big) \leq k^p \int_{\frac{i}{k^p}}^{\frac{i+1}{k^p}} \varphi(t)dt \leq \frac{\varphi(\frac{i}{k^p}) + \varphi(\frac{i+1}{k^p})}{2} \tag{3.1.4}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi yukarıdaki eşitsizliği $i = 0, \cdots, k^p - 1$ için toplarsak

$$\sum_{i=0}^{k^p-1} \varphi\Big(\frac{2i+1}{2k^p}\Big) \leq k^p \int_0^1 \varphi(t)dt \leq \sum_{i=0}^{k^p-1} \frac{\varphi(\frac{i}{k^p}) + \varphi(\frac{i+1}{k^p})}{2} \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} \quad & f\Big(A + \frac{2i+1}{k^p}\eta(B,A)\Big) \leq \int_0^1 f(A + t\eta(B,A)) \\ \leq \frac{1}{2k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} \quad & \Big[f\Big(A + \frac{i+1}{k^p}\eta(B,A)\Big) + f\Big(A + \frac{i}{k^p}\eta(B,A)\Big)\Big] \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği bulunur. (3.1.3) eşitsizliğinde $t = \frac{2i+1}{k^p}$ olarak alınır ve f fonksiyonun operatör preinveksliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} f(A + \frac{1}{2}\eta(B,A)) \ &\leq \ \frac{1}{2}f\Big(A + \frac{2i+1}{k^p}\eta(B,A)\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}f\Big(A + (1 - \frac{2i+1}{k^p})\eta(B,A)\Big) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan yukarıdaki eşitsizliği $i = 0, \cdots, k^p - 1$ için toplar ve doğru olan

$$\sum_{i=0}^{k^p-1} f\Big(A + \frac{2i+1}{k^p}\eta(B,A)\Big) = \sum_{i=0}^{k^p-1} f\Big(A + (1 - \frac{2i+1}{k^p})\eta(B,A)\Big)$$

eşitliğini kullanırsak,

$$k^p f\Big(A + \frac{1}{2}\eta(B,A)\Big) \leq \sum_{i=0}^{k^p-1} f\Big(A + \frac{2i+1}{k^p}\eta(B,A)\Big) \tag{3.1.8}$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan f' nin preinveksliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} \Big[f\Big(A + \frac{i+1}{k^p}\eta(B,A)\Big) + f\Big(A + \frac{i}{k^p}\eta(B,A)\Big)\Big] \\ \leq \ & \frac{1}{2k^p}\sum_{i=0}^{k^p-1} \Big[\frac{i+1}{k^p}f\Big(B) + \Big(1 - \frac{i+1}{k^p}\Big)f(A) + \frac{i}{k^p}f(B) + \Big(1 - \frac{i}{k^p}f(A)\Big)\Big] \\ \leq \ & \frac{f(A) + f(B)}{2}. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Sonuç olarak, (3.1.6), (3.1.8) ve (3.1.9) eşitsizlikleriden (3.1.1)'i elde ederiz.

Şimdi yukarıdaki teoremden elde edilen basit bir sonucu verelim.

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.1' in iddiasına göre,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt - f\Big(A+\frac{1}{2}\eta(B,A)\Big) \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2} - \int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt \end{aligned}$$

eştizliği doğrudur.

Örnek 3.1.1 S, f ve η_1 Örnek 2.0.1' de olduğu gibi seçilirse, her $A, B \in S$ için

$$\Big(A+\frac{1}{2}\eta(B,A)\Big)^2 \leq \int_0^1 f(A+t\eta_1(B,A))^2 dt \leq \frac{A^2+B^2}{2}$$

eşitsizliği doğrudur.

3.2 İki Operatör Preinveks Fonksiyonların Çarpımı İçin Eşitsizlikler

$S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ya göre inveks bir küme ve $f, g : I \to \mathbb{R}$ ise P_{AV}, η yolundaki operatörler için η ya göre I aralığı üzerinde iki operatör preinveks fonksiyon olsun. Bu durumda I aralığında $A, V := A + t\eta(B,A)$ nin spekturumlu her $A, B \in S$ için $x \in H$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle, \\ N(A,B)(x) &= \langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle \end{aligned}$$

H Hilbert uzayında $M(A,B)$ ve $N(A,B)$ reel fonksiyonlarını tanımlayalım.

Teorem 3.2.1 $f, g : I \to \mathbb{R}^+$, I aralığı üzerinde η ya göre operatör preinveks iki fonksiyon ve η (C) şartını sağlasın. Bu durumda I aralığında $A, V := A + t\eta(B,A)$ spekturumlu bir H Hilbert uzayı üzerindeki her A ve B özeşlenik operatörler için keyfi $x \in H, \|x\| = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ &\qquad \leq \frac{1}{3}M(A,B)(x) + \frac{1}{6}N(A,B)(x) \qquad (3.2.1) \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: f, g' nin sürekliliği ve (3.1.2)' den

$$\int_0^1 f(B+t\eta(B,A))dt,\ \int_0^1 g(A+t\eta(B,A))dt,\ \int_0^1 (fg)(A+t\eta(B,A))dt$$

operatör değerli integralleri mevcuttur.

f ve g operatör preinveks olduğundan, her $t \in [0,1]$ ve $x \in H$ için

$$\langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle \leq \langle \big(tf(B)+(1-t)f(A)\big)x,x\rangle \tag{3.2.2}$$

$$\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle \leq \langle \big(tg(B)+(1-t)g(A)\big)x,x\rangle \tag{3.2.3}$$

eşitsizlikleri doğrudur. (3.2.2) ve (3.2.3) ten

$$\begin{aligned}\langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle \\ \leq\ & (1-t)^2\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle + t^2\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle \\ & +t(1-t)\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle + \langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big]\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

bulunur. (3.2.4) eşitsizliğinin her iki tarafını $[0,1]$ aralığı üzerinde integralini alırsak, istenilen (3.2.1) eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 3.2.2 $f,g :\to \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde η ya göre operatör preinveks iki fonksiyon ve η (C) şartını sağlasın. Eğer I da A,V spektrumlu bir H Hilbert uzayı üzerinde keyfi A ve B özeşlenik operatörleri için $x \in H, \|x\| = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Big\langle f\Big(A+\tfrac{1}{2}\eta(B,A)\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(A+\tfrac{1}{2}\eta(B,A)\Big)x,x\Big\rangle \\ \leq\ & \frac{1}{2}\int_0^1 \langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle dt \\ & +\frac{1}{12}M(A,B)(x)+\frac{1}{6}N(A,B)(x)\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3.1.3) eşitliğinde $D = A+t\eta(B,A)$ ve $E = A+(1-t)\eta(B,A)$ olarak alınırsa

$$A+\frac{1}{2}\eta(B,A) = D+\frac{1}{2}\eta(E,D)$$

eşitliği doğrudur. f ve g operatör preinveks olduğundan keyfi $t \in I$ ve $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\begin{aligned}\Big\langle f\Big(A+\tfrac{1}{2}\eta(B,A)\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(A+\tfrac{1}{2}\eta(B,A)\Big)x,x\Big\rangle \\ =\ & \Big\langle f\Big(D+\frac{1}{2}\eta(E,D)\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(D+\frac{1}{2}\eta(E,D)\Big)x,x\Big\rangle \\ \leq\ & \Big\langle\Big(\frac{f(D)+f(E)}{2}\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle\Big(\frac{g(D)+g(E)}{2}\Big)x,x\Big\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4}\Big[\langle f(D)x,x\rangle+\langle f(E)x,x\rangle\Big]\Big[\langle g(D)x,x\rangle+\langle g(E)x,x\rangle\Big]\\
&\leq \frac{1}{4}\Big[\langle f(D)x,x\rangle\langle g(D)x,x\rangle\Big]+\Big[\langle f(E)x,x\rangle+\langle g(E)x,x\rangle\Big]\\
&\quad+\frac{1}{4}\Big[t\langle f(A)x,x\rangle+(1-t)\langle f(B)x,x\rangle\Big]\Big[(1-t)\langle g(A)x,x\rangle+t\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&\quad+\Big[(1-t)\langle f(A)x,x\rangle+t\langle f(B)x,x\rangle\Big]\Big[t\langle g(A)x,x\rangle+(1-t)\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&= \frac{1}{4}\Big[\langle f(D)x,x\rangle\langle g(D)x,x\rangle+\langle f(E)x,x\rangle\langle g(E)x,x\rangle\Big]\\
&\quad+\frac{1}{4}2t(1-t)\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle\Big]\\
&\quad+(t^2+(1-t)^2)\Big[\langle f(A)x,x\rangle\langle g(B)x,x\rangle+\langle f(B)x,x\rangle\langle g(A)x,x\rangle\Big] \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Buradan (3.2.6) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ üzerinde integrali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle f\Big(A+\tfrac{1}{2}\eta(B,A)\Big)x,x\Big\rangle\Big\langle g\Big(A+\tfrac{1}{2}\eta(B,A)\Big)x,x\Big\rangle\\
&\leq \frac{1}{4}\int_0^1\Big[\langle f(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+t\eta(B,A))x,x\rangle\Big]dt\\
&\quad+\frac{1}{4}\int_0^1\Big[\langle f(A+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle\langle g(A+(1-t)\eta(B,A))x,x\rangle\Big]dt\\
&\quad+\frac{1}{12}M(A,B)(x)+\frac{1}{6}N(A,B)(x)
\end{aligned}
$$

olup, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3 $f : I \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon, $S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ya göre açık inveks bir küme η da (C) şartını sağlasın. Eğer her $A, B \in S$ ve $V = A+\eta(B,A)$ için f fonksiyonu I da A ve V nin spektrumlu P_{AV}, η yolu üzerinde η ya göre operatör preinveks ise bu durumda her $a, b \in (0,1)$, $a < b$ ve her $x \in H$, $\|x\| = 1$ için

$$
\begin{aligned}
&\Big|\tfrac{1}{2}\Big\langle \int_0^a f(A+s\eta(B,A))dsx,x\Big\rangle+\tfrac{1}{2}\Big\langle \int_0^b f(A+s\eta(B,A))dsx,x\Big\rangle\\
&\qquad -\frac{1}{b-a}\int_a^b\Big\langle\int_0^t f(A+s\eta(B,A))dsx,x\Big\rangle\Big|\\
&\qquad \leq \frac{b-a}{8}\Big\{\langle f(A+a\eta(B,A))x,x\rangle+\langle f(A+b\eta(B,A))x,x\rangle\Big\} \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\tfrac{1}{2}\int_0^a f(A+s\eta(B,A))ds+\tfrac{1}{2}\int_0^b f(A+s\eta(B,A))ds\\
&\qquad -\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_0^t f(A+s\eta(B,A))ds\Big\|\\
&\qquad \leq \frac{b-a}{8}\Big\|f(A)+a\eta(B,A)+f(A+b\eta(B,A))\Big\|\\
&\qquad \leq \frac{b-a}{8}\Big[\big\|f(A+a\eta(B,A))\big\|+\big\|f(A+b\eta(B,A)\big\|\Big] \qquad (3.2.8)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: $A, B \in S$ ve $a, b \in (0,1), a < b$ olsun. Her $x \in H, \|x\| = 1$ için

$$\varphi(t) := \Big\langle \int_0^t f(A + s\eta(B,A))ds\ x, x \Big\rangle$$

şeklinde $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım. f nin sürekliliği, iç çarpımın sürekliliği ve operatör değerli fonksiyonların integral özelliklerinden

$$\Big\langle \int_0^t f(A + s\eta(B,A))ds\ x, x \Big\rangle = \int_0^t \langle f(A + s\eta(B,A))x, x\rangle ds$$

olur. $f(A + s\eta(B,A)) \geq 0$ olduğundan her $t \in I$ için $\varphi(t) \geq 0$. Her $t \in (0,1)$ için

$$\varphi'(t) = \langle f(A + t\eta(B,A))x, x\rangle \geq 0$$

olduğu açıktır. İddiaya göre $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$. f fonksiyonu I da A ve V nin spektrumlu P_{AV}, η yolu üzerinde η ya göre operatör preinveks ve Önerme 2.4[15] den φ' fonksiyonu konvekstir. Teorem 2.2 [7] yi φ fonksiyonuna uygularsak

$$\Big|\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b \varpi(s)ds\Big| \leq \frac{(b-a)\big(\varpi'(a) + \varpi'(b)\big)}{8}$$

elde ederiz. Buradan (3.2.7) yı buluruz. Her $x \in H, \|x\| = 1$ için (3.2.7) nın her iki tarafının supremumu alınırsa bu sefer de (3.2.8) yi buluruz. Bu ise ispatı tamamlar.

3.3 Operatör AG-preinveks Fonksiyonlar

Tanım 3.3.1 [25] $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer $a, b \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq f(a)^{\lambda} f(b)^{1-\lambda} \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu f fonksiyonuna I aralığı üzerinde bir Aritmetik-Geometrik (AG) veya log-konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.3.1 f, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde bir AG-konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde $u = log\, t$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\frac{a+b}{2}) &\leq \sqrt{f\Big(\frac{3a+b}{4}\Big) f\Big(\frac{a+3b}{4}\Big)} \leq exp\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b log\,(f(u))du\Big) \\ &\leq \sqrt{f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)}\sqrt[4]{f(a)}\sqrt[4]{f(b)} \\ &\leq \sqrt{f(a)f(b)} \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

eşitsizliği vardır [25].

Tanım 3.3.2 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon, A ve B de spektrumları I' da olan $B(H)$' ın iki özeşlenik operatörü olsun. Bu durumda, her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \Big(\geq \Big) f(A)^{\lambda} f(B)^{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f' ye operatör AG-konveks (operatör AG-konkav) fonksiyon denir. [25]

Örnek 3.3.1 A, B $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı iki kompleks matris olsun. $\alpha \in (0,1)$ için

$$|\alpha A + (1-\alpha)B| \geq |A|^{\alpha} |B|^{1-\alpha} \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $|\cdot|$ sembolü determinantı göstermektedir [19]

Remark 3.3.1 f bir operatör AG-konveks fonksiyon ve $A, B \in B(H)$ spektrumları I' da olan iki değişmeli pozitif operatör olsun Bu durumda, $\alpha \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{A+B}{2}\Big) &\leq \int_0^1 \sqrt{f(\alpha A + (1-\alpha)B) f((1-\alpha)A + \alpha B)} d\alpha \\ &\leq \sqrt{f(A)f(B)} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği vardır.

Tanım 3.3.3 $S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ya göre bir inveks küme ve $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, A ve B de spektrumları I' da olan $B(H)$' ın iki özeşlenik operatörü ve $t \in [0,1]$ için

$$f(A + t\eta(B,A)) \leq f(A)^{1-t} f(B)^t$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f' ye S kümesi üzerinde η ya göre operatör AG-preinveks fonksiyon denir [26].

Remark 3.3.2 f bir operatör AG-preinveks fonksiyon olsun. Değişmeli durumda,

$$\begin{aligned} f(A + t\eta(B,A)) &\leq f(A)^{1-t} f(B)^t \leq (1-t)f(A) + tf(B) \\ &\leq \max\Big\{f(A),\ f(B)\Big\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise, f' nin operatör kuazi preinveks, yani

$$f(A + t\eta(B,A)) \leq \max\Big\{f(A),\ f(B)\Big\}$$

olması anlamına gelir.

3.4 Operatör AG-preinveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Operatör AG-preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini elde etmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.4.1 $S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ya göre bir inveks küme ve $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olsun. η' nın (C) şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda, her $A, B \in S, V = A + \eta(B, A)$ ve sabit bir $s \in (0, 1]$ için f' nin η' ya göre spektrumları I' da olan P_{AV}, η yolu üzerinde operatör AG-preinveks fonksiyon olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$\varphi_{A,B}(t) = f(A + t\eta(B, A)) \tag{3.4.1}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{A,B}$ fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığı üzerinde log-konveks olmasıdır [26].

İspat: φ, $[0, 1]$ aralığı üzerinde bir log-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda, f' nin η' ya göre AG-preinveks olduğunu gösterelim.

Keyfi $C_1 := A + t_1\eta(B, A), C_2 := A + t_2\eta(B, A) \in P_{AV}$ olmak üzere $\lambda \in [0, 1]$ için (3.4.1) eşitliğinde uygun yere yazılırsa,

$$\begin{aligned}
f(C_1 + \lambda\eta(C_2, C_1)) &= f\Big(A + t_1\eta(B, A) + \lambda\eta\big(A + t_2\eta(B, A), A + t_1\eta(B, A)\big)\Big) \\
&= f\Big(A + t_1\eta(B, A) + \lambda(t_2 -_1)\eta(B, A)\Big) \\
&= f\Big(A + (t_1 + \lambda t_2 - \lambda t_1)\eta(B, A)\Big) \\
&= f\Big(A + \big((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2\big)\eta(B, A)\Big) \\
&= \varphi\Big((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2\Big) \\
&\leq \varphi(t_1)^{1-\lambda}\varphi(t_2)^{\lambda} \\
&= \Big(f\big(A + t_1\eta(B, A)\big)\Big)^{1-\lambda}\Big(f\big(A + t_2\eta(B, A)\big)\Big)^{\lambda}
\end{aligned}$$

olup, ispatın birinci kısmı tamamlanır. Tersine olarak, f bir operatör AG-preinveks fonksiyon olsun. Bu durumda (2.0.7) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\varphi\big((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2\big) &= f\Big(A + \big((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2\big)\eta(B, A)\Big) \\
&= f\Big(A + t_1\eta(B, A) + \lambda(t_2 - t_1)\eta(B, A)\Big) \\
&= f\Big(A + t_1\eta(B, A) + \lambda\eta\big(A + t_2\eta(B, A), A + t_1\eta(B, A)\big)\Big) \\
&\leq f\Big(A + t_1\eta(B, A)\Big)^{1-\lambda} f\Big(A + t_2\eta(B, A)\Big)^{\lambda} \\
&= \varphi(t_1)^{1-\lambda}\varphi(t_2)^{\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise φ fonksiyonunun log-konveks olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.1 $S \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ ya göre bir inveks küme ve $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon olsun. η' nın (C) şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda, her $A, B \in S, V = A + \eta(B, A)$ ve sabit bir $s \in (0, 1]$ için f' nin η' ya göre spektrumları I' da olan P_{AV}, η yolu üzerinde operatör AG-preinveks fonksiyon ise, bu durumda

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) &\leq \sqrt{f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)} \\ &\leq exp\Big(\int_0^1 log\left(f(A+t\eta(B,A))\right)dt\Big) \\ &\leq \sqrt{f\Big(\frac{A+V}{2}\Big)}\sqrt[4]{f(A)}\sqrt[4]{f(B)} \\ &\leq \sqrt{f(A)}\sqrt{f(B)} \\ &= \frac{f(A)+f(V)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: İddiaya göre f bir operatör AG-preinveks fonksiyon olduğundan dolayı, Lemma 3.4.1' den $\varphi(t) = f(A + t\eta(B, A))$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde log-konvekstir. Diğer taraftan, [27]' den, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerindeki φ log-konveks fonksiyonları için:

$$\begin{aligned} \varphi(\frac{1}{2}) &\leq \sqrt{\varphi(\frac{1}{4})\varphi(\frac{3}{4})} \\ &\leq exp\Big(\int_0^1 log\left(\varphi(u)\right)du\Big) \\ &\leq \sqrt{\varphi(\frac{1}{2})}\sqrt[4]{\varphi(0)}\sqrt[4]{\varphi(1)} \\ &\leq \sqrt{\varphi(0)\varphi(1)} \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca doğru olan

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(A), \\ \varphi(\frac{1}{4}) &= f\Big(A+\frac{1}{4}\eta(B,A)\Big) = f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big), \\ \varphi(\frac{1}{2}) &= f\Big(A+\frac{1}{2}\eta(B,A)\Big) = f\Big(\frac{A+V}{2}\Big), \\ \varphi(1) &= f(V) \end{aligned}$$

eşitliklerini kullanırsak ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması literatürde var olan operatör preinveks ve operatör AG-preinveks fonksiyonların [14], [26], [25], [27] ve [28] bilimsel çalışmalarının ayrıntılı bir şekilde incelenip yazılmasıyla meydana gelmiştir.

Sonuç olarak, bu yüksek lisans tez çalışması ile Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör AG-preinveks fonksiyonlar sınıfı incelenmiştir. İkinci olarak, Hermite-Hadamard eşitsizliği yardımıyla yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Üçüncü olarak bu operatörler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için bazı yaklaşımlar verilmiştir. Son olarak ise iki operatör preinveks fonksiyonun çarpımı için eşitsizlikler elde edilmiştir.

Konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik hakkında literatür taraması yapılarak, uygun teorik alt yapısı kurularak konveks fonksiyon ve eşitsizik türleri için bu yüksek lisans tez çalışmasında ifade edilen teknikler yardımıyla Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonlarına aktarılabileceğini diğer bilim insanlarına öneriyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Alomori, MW. & Darus, M. & Kirmaci, US. (2011). Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions. *Acta Mathematica Scientia Series B English Edition*, 31, 1643-1652.

[2] Barani, A. & Ghazanfari, AG. & Dragomir, SS. (2012). Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex. *Journal of Inequalities and Applications*, Vol: Article ID 247.

[3] Ben-Israel, A. & Mond, B. (1986). What is invexity?. *Journal of Australian Mathematical Society Series B*, 28, 1-29.

[4] Craven, BD. (1981). Invex functions and constrained local minima. *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 24, 357-366.

[5] Craven, BD. & Glover, BM. (1985). Invex functions and duality. *Journal of Australian Mathematical Society Series A*, 39, 1-20.

[6] Dragomir, SS. (2011). Hermite-Hadamard's Type Inequalities for Operator Convex Functions. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 766-772.

[7] Dragomir, SS. & Agarwal, RP. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezodial formula. *Applied Mathematics Letters*, 11(5), 91-15.

[8] Dragomir, SS. & Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard's inequality for s-convex fuctions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, 32, 687-696.

[9] Dragomir, SS. (2002). An inequality improving the first Hermite Hadamard inequality for convex functions defined on linear spaces and applcations for semi-inner products. *Journal of Inequalities in Pure Applied Mathematics*, 3, 8 pages.

[10] Dragomir, SS. (2002). An inequality improving the second Hermite Hadamard inequality for convex functions defined on linear spaces and applcations for semi-inner products. *Journal of Inequalities in Pure Applied Mathematics*, 3, 8 pages.

[11] Dragomir, SS. (2011). the Hermite Hadamard type inequalities for operator convex functions. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 766-772.

[12] Elster, KH. & Neshe, R. (1980). Optimality conditions fo some non-convex problems. *Springer-Verlog, New York*.

[13] Furuta, T. & Mićić Hot J., Pečarić J. , Seo Y., Mond-Pečarić, 2015 *Method in Operator Inequalities*, Monograhs in Inequalities, Element, Zagreb.

[14] Ghazanfari, AG. & Shakoori, M. & Barani, A. & Dragomir, SS. Hermite-Hadamard type inequality for operator preinvex functions. math. FA, 4(2013); Available online at http://arXiv:1306.0730vl.

[15] Ghazanfari AG., Barani A. (2015), Some Hermite-Hadamard Type Inequalities for the Product of two operator Preinvex Functions, *Banah J. Math. Anal.*, 9(2), 9-20.

[16] Hanson, MA. (1981). On sufficency of the Kuhn-Tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80, 545-550.

[17] Hanson, MA.& Mond, B. (1987). Convex Transformable Probamming Problems and Invexity. *J. Inf. Opt. Sci.*, 8, 201- 207.

[18] Hayaski, M. & Komiya, H. (1980) Perfect duality for convexlike programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 38, 179-189.

[19] Horn R.A., Johnson C.R., (2012), Matrix Analysis, Cambridge University Press.

[20] Hudzik, H. & Maligranda, L. (1994). Some remaks on s-convex fuctions. *Anequtiones Mathematicae*, 48, 100-111.

[21] Kikianty, E. (2010). Hermite Hadamard inequality in the geometry of Banach spaces. Ph. D. Thesis, Victoria University.

[22] Kirmacı, US. & Bakula, MK. & Özdemir, ME. & Pečarić, J. & Seo, Y. & Mond-Pečarić. (2007). Hadamard's type inequality for s-convex fuctions. *Applied Mathematics and Computation*, 193, 26-35.

[23] Martin, DH. (1985). The essence of invexity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 47, 65- 76.

[24] Mohan, SR. & Neogy, SK. (1995). On Invex Sets and Preinvex Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Aplications*, 189, 901-908.

[25] Taghavi, A., Darvish V., Nazari H. M., Some integral inequalities for operator arithmetic-geometrically convex functions, arXiv:1511.06587v1.

[26] Taghavi A., Nazari H. M., Darvish V., (2016), Some Hermite-Hadamard type integral inequalities for operator AG-preinvex functions, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 8(2), 312-323

[27] Taghavi, A., Darvish V., Nazari H. M., Dragomir S.S., Hermite-Hadamard type inequalities for operator geometrically convex functions, Monatsh. Math. 10.1007/s00605-015-0816-6.

[28] Yang, XM. (2001). On Properties of Preinvex Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Aplications*, 256, 229-241.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	ELİF BAŞKÖY
Doğum Yeri	**:**	Sakarya
Doğum Tarihi	**:**	10.07.1992
Medeni Hali	**:**	Evli
Lisans	**:**	Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2010 – 2014
Çalıştığı Yer	**:**	Uzuncaorman Murat Nişancı Ortaokulu, Hendek / Sakarya 2014 – 2016, Hürriyet Ortaokulu, Gölköy / Ordu 2016–