NEGATİF AKIMLI POZİTİF

SIÇRAMALI İKİ TUTAN BARİYERLİ

YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ

SÜREÇLERİ

TUĞBA ALP

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEGATİF AKIMLI POZİTİF SIÇRAMALI İKİ TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ

TUĞBA ALP

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

ORDU - 2011

NEGATİF AKIMLI POZİTİF SIÇRAMALI İKİ TUTAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ

ÖZET

Özellikle stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin pek çok önemli problemi, iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilir. Bu süreçler hakkında pek çok ilginç çalışma yapılmıştır. Fakat bu çalışmaların çoğu, sonlu durum uzayına sahip rastgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemlerine aittir. Sınır-değer problemleri önemli olmasına rağmen, ele alınan süreçlerin kendi karakteristiklerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu konuda da bazı çalışmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmaları daha da ilerletmek gerekir. Özellikle, rastgele yürüyüş süreçlerinin yerine, bunlardan daha genel bir sınıf olan negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerine bakmak daha ilginçtir.

Bu çalışmada, 0 (sıfır) ve $a(a > 0)$ seviyelerinde iki tutan bariyere sahip negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci $X(t)$ ve bu sürecin önemli sınır fonksiyonelleri sayılan, sürecin ilk kez $a(a > 0)$ seviyesindeki tutan bariyere ulaşma anı γ_1^a ve sürecin ilk kez 0 (sıfır) seviyesindeki tutan bariyere düşme anı γ_1^0 matematiksel olarak kurulmuştur. Ayrıca γ_1^a ve γ_1^0 rasgele değişkenlerinin Laplace dönüşümleri, beklenen değerleri ve varyansları için açık formüller verilmiştir. Sürecin iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel veya Erlang dağılımına sahip olması özel durumlarında, γ_1^a ve γ_1^0 ın Laplace dönüşümleri, beklenen değerleri ve varyansları için formüller elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Stokastik süreç, yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci, negatif akımlı pozitif sıçramalı rastgele yürüyüş süreci, tutan bariyer, Laplace dönüşümü, Erlang dağılımı, üstel dağılım.

SEMİ-MARKOVİAN RANDOM WALK PROCESSES WİTH NEGATİVE DRİFT, POSİTİVE JUMPS AND TWO DELAYİNG BARRİERS

ABSTRACT

In a particular, a number of very interesting problems of stock control, queuing and reliability theories can be expressed by means of random walk processes with two barriers. Numerous studies have been done about these processes because of their theoretical and practical importance. But most of these studies belong to the boundary-value problems for the random walk processes which has a finite state space. The boundary-value problems are important, so are the investigation of proper characteristics of processes at hand. For this reason although there are some studies on proper characteristics of random walk processes with two barriers, more detailed studies in this field have to carried out. Especially, it is more interesting to look at semi-Markov random walk processes with negative drift and positive jumps that is a general class instead of random walk processes.

In this study, the semi-Markovian random walk processes with negative drift and positive jumps $X(t)$ which has delaying barrier at 0 (zero) and at $a(a > 0)$ and the important boundary functionals of it, the first reaching moment of the process into the delaying barrier at $a(a > 0)$, γ_1^a, and the first falling moment of the process into the delaying barrier at 0 (zero), γ_1^0, which are constructed mathematically. Also, explicit formulae are given for the Laplace transformation, expected value and variances of the random variables γ_1^a and γ_1^0. In special cases in which the quantity between two jump instants has exponential or Erlang distributions formulae are obtained for the Laplace transformation, expected value and variances of the random variables γ_1^a and γ_1^0.

Key Words: Stochastic process, semi-Markovian random walk process, random walk processes with negative drift and positive jumps, delaying barrier, Laplace transformation, Erlang distribution, exponential distribution.

TEŞEKKÜRLER

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenerek çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN'e, değerli tavsiye ve yardımlarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT'a ve Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR'a en içten duygularımla teşekkür eder, saygılar sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÇİZELGELER LİSTESİ

1. GİRİŞ

Bilim dünyasında teoriler, bu dünyaya özgü aksiyomlar üzerine inşa olunurlar. Teorik sonuçlar, bu aksiyomlardan didaktif mantık yoluyla çıkartılırlar. Bilim dünyasının teorileri ve ürünleri, gerçek dünyanın gerçekleri ile uyum içerisinde olmalarını sağlayacak şekilde biçimlendirilmiş olmalarına rağmen gerçeğin kendisi değildirler; birçok varsayımın ışığında ortaya çıkmış varlıklardır. Örneğin, yerden d kadar yüksekte bulunan bir cismin $t = \sqrt{2d/g}$ saniye içerisinde yere düşeceğini ifade eden yasa, ancak ve ancak söz konusu cismin, havası boşaltılmış bir tüp içerisinde düşme hareketini gerçekleştirmesi durumunda geçerlidir. Bu tip olaylara ve yasalara deterministik olaylar ve yasalar diyoruz. Aynı koşullar altında tekrarlandıklarında aynı sonuçları verdiklerini, vereceklerini biliyoruz.

Oysa bazı olaylar için bu tür bir determinizm söz konusu olmayabilir. Düzgün bir zarı aynı koşullar altında atmamız halinde, gelen yüzlerin hep aynı olmadığını görürüz. Aynı durum, iyi karıştırılmış bir deste kart içerisinden rastgele çekilen bir kart için de geçerlidir. Karar vermekte acele etmek, bu tür olayların matematiksel modellerini kurmanın mümkün olamayacağı sanısına kapılmak doğru olmaz. Düzgün bir zarı bir kez değil de söz gelimi 600 kez atarsak hemen her iki yüzün eşit sayılabilecek sayıda geldiğini görürüz. Bu atışların sayısını daha da yükseltirsek savımızın yasa mertebesine yükseldiğine şahit oluruz ve bu tür rastgele olayların da gerisinde yatan istatistikî bir düzenliliğin mevcut olduğunu kabul etmeye mecbur kalırız. Bir deney aynı şartlar altında birçok kez tekrar edildiğinde sonuçlar belli bir kurala bağlı olmaksızın her seferinde değişebiliyorsa, bu deneyin belirli bir sonucuna bağımlı olarak gerçekleşen (ya da gerçekleşmeyen) bir olaya rastgele olay denmektedir. Rastgele olaylara etki eden nedenlerin çokluğu ve karmaşıklığı bunların incelenmesi için özel metotları gerekli kılmıştır. Uygulamada deneyler göstermiştir ki, bir rastgele olayın gerçekleşmesi ya da gerçekleşmemesi pek çok sayıda gözlemlendiğinde, az çok bir kararlılık göstermektedir. Yani tek başına bir rastgele olayın karmaşıklığına karşılık, bunların cümlesi için geçerli basit bir kanun elde edilebilmektedir.

On yedinci yüzyılda doğan olasılık teorisi, rastgele olayların ve rastlantı değişkenlerinin çizdiği çerçeveyi kendisine konu edinmiştir. Bu nedenle olasılık teorisi, rastgele olaylara egemen olan kanunları matematiksel metotlarla inceleyen bir bilimdir. Şans değişmelerine bağlı hemen hemen bütün gözlemleri, bu şans değişmelerinin doğal özelliğini incelemek olasılık kuramıdır. Şans kavramları ve onunla birlikte “Şans” tarih öncesine kadar gider, ancak bunların matematiksel incelenmesi 300 yıl eskiye dayanır. Olasılık hesabı başlangıçta şans oyunları ya da kumar oyunlarıyla canlandırıldı. Bir çift zarı 24 kez atıp en az bir kez düşeş getirme olasılığının 4 zarı bir kez atıp en az bir şeş getirmenin olasılığına eşit olacağını düşünen Chevalier de Mere adlı kumarbaz, kumar masalarında harcadığı ömründen edindiği deneyiminin bu düşüncesini doğrulamadığını görür ve derdine deva olur umuduyla dönemin ünlü matematikçilerinden Blaise Pascal’a başvurur. Pascal (1623-1662) ve Pierre Fermat’ın (1601-1665) ortak çalışmaları, bir yandan Mere’nin derdine deva olurken öte yandan olasılık teorisinin doğmasına neden olmuştur.

On yedinci asrın geri kalan kısmında, de Mere tarafından gündeme getirilen benzer nitelikteki problemler ve benzerleri tartışılmış ancak ne genel bir çerçeve ne de teorik bir taban oluşturulamamıştır.

On sekizinci asrın hemen başlarında Jacob Bernoulli (1654-1705) ve Abraham de Moivre’ın (1667-1754) çalışmaları olasılık hesabı teorisinin başlamasını sağlamıştır. Bernoulli, ölümünden sonra 1713 yılında yayınlanan Ars Conectandi (The Art of Conjecture) adlı kitabında, önemli diğer çalışmalarının yanı sıra, adıyla anılan ve olasılığı, belirli bazı elemanter problemlerin çözümünde kullanılan bir araç olma seviyesinden bilimsel bir disiplin olma seviyesine yükselten teoremi, bilim dünyasının hizmetine sunmuştur. Olasılık teorisinin temel kanunlarından biri olan “Büyük Sayılar Kanunu” nu ilk defa J.Bernoulli ispat etmiştir ve ilk kez bir olayın olasılığını, bu olayın frekansının limiti olarak tanımlamıştır. De Moivre (1667-1754), 1718 yılında The Doctrine of Chances adlı kitabını yayınlayarak olasılık teorisine çarpım kuralını hediye etmiş ve normal olasılık yoğunluk fonksiyonunun oluşumuna ilk katkıyı yapmıştır.

Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855), Markov (1856-1922), Tchebychev (1821-1891) olasılık teorisinin gelişimine hız kazandırmışlardır. Olasılık teorisinin temel taşlarından biri olan “Merkezi limit teoremi” (Moivre-Laplace teoremi) ilk kez Laplace tarafından ispat edilmiş ve birçok dikkate değer uygulamaları yapılmıştır. Quetelet ve arkadaşları, Maxwell, Boltzman ve Gibbs çalışmalarında olasılık teorisinden şans oyunlarında, fizik ve astronomi sahalarında, sigortacılıkta, özellikle de ölüm istatistiklerinin oluşturulmasında, istatistiksel mekanikte bol miktarda yararlanmışlardır.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez bu teorinin kurucularından olan J. Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç (1868–1913) in büyük katkısıyla yirminci yüzyılın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır.

Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov ve A. Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreç olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken A. Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Bu alanda emeği geçen başlıca bilim adamları arasında N. Wiener, W. Feller, J. Dobb, R. Fisher, J. Neumann ve H. Cramer gibi olasılıkçıların isimlerini sayabiliriz.

Özellikle hızla gelişmekte olan teknoloji ve ekonomiye paralel olarak stokların kontrol edilmesi ile ilgili birçok önemli problemler ortaya çıkmaktadır. Bunun için ise ele alınan problemi tam olarak ihtiva eden stokastik süreçlerin matematiksel kuruluşlarının verilmesi oldukça önemlidir. Örneğin bir işletmeci, işletmesinden maksimum miktarda yararlanabilmek için bazı önlemler almalıdır. Çünkü, ürettiği malın maliyeti, korunması, pazarlanması, dayanıklılığı, stoklanması v.s., işletmenin hayatını etkileyecektir. Bütün bunların belirlenmesinde olasılık teorisinden ve özellikle de stokastik süreçler teorisinden faydalanılmaktadır.

Stok kontrol teorisi, kuyruk teorisi ve güvenilirlik teorisindeki problemlerin çoğu, bariyerli veya bariyersiz rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilebilir öyle ki bu bariyerler ele alınan probleme bağlı olarak değişik tiplerden olabilir (yansıtan, tutan, yutan v.s.,). Özellikle kuyruk teorisi ve şans oyunlarında yutan bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri kullanılır. Örneğin, başlangıç sermayesi a, $a > 0$, birim olan bir kumarbazın başlangıç sermayesi b, $b > 0$, birim olan bir kumarbaza karşı oyun oynadığını varsayalım ve kumarbaz her bir oyunun sonunda bir birim kazansın veya kaybetsin. Ayrıca kumarbazın sermayesi sıfıra düşünceye kadar veya "$a + b$" ye ulaşıncaya kadar oyuna devam ettiğini varsayalım. Bu durumda kumarbazın sermayesini "0" ve "$a + b$" de yutan bariyerlere sahip basit rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçle karakterize etmek mümkündür. Eğer kumarbazın sermayesi belirli bir adım sonrasında sıfır oluyorsa bu durumda kumarbaz iflas etmiş ve karşı kumarbaz onun bütün sermayesini kazanmış olacaktır.

Stok kontrol teorisindeki birçok problemin çözümlenmesinde basit rastgele yürüyüş süreçleri yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle bilim adamları çalışmalarını basit rastgele yürüyüş süreçleri yerine genel durum uzaylarına sahip rastgele yürüyüş süreçleri veya bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri üzerinde yoğunlaştırmışlardır. Basit rastgele yürüyüş süreçleri genel rastgele yürüyüş süreçlerinin değişik özel durumlarıdır.

Bu nedenledir ki stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik konularında ortaya çıkan genel durum uzayına sahip özel bir stokastik sürecin ele alınması ve bu sürecin detaylarıyla incelenmesi oldukça önemli olacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Literatür Araştırması

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir kısmını oluşturan iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçlerinin özel bir durumu ele alınmıştır. Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri yarı-Markov süreçlerin özel bir halidir. Yarı-Markov süreç kavramı ise ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, Levy (1954), Smith (1955) ve Takacs (1954) gibi olasılıkçılar tarafından ortaya atılmıştır. Fakat bunların hepsinde durum uzayı sonlu olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlendiğinden bu kavramın genelleştirilmesi gerekliydi. Bu nedenle Çınlar (1968), Gihman ve Skorohod (1975), Serfoza (1971) ve Ezhov ve Korolyuk (1967) çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov rasgele süreç tanımları vermişlerdir. Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu tanımı kısaca verelim:

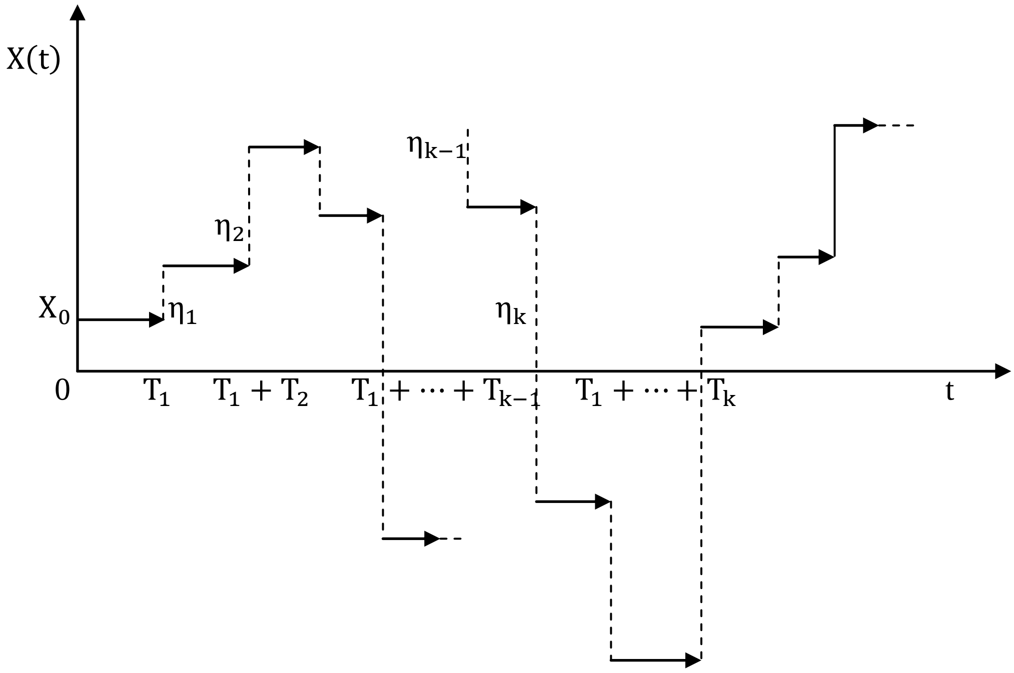
$(\Omega, \Im, P_x), x \in X$, olasılık uzayları ailesi verilmiş olsun ve bir (Ω, σ, P_x) olasılık uzayında tanımlanmış bir $\{X_n : n \geq 0\}$ Markov zincirinin verilmiş olduğunu kabul edelim. Bu zincirin $P_x\{X_0(w) = x\} = 1$ olmak üzere durum uzayı (X, B) ve geçiş olasılığı ise $\Pi(x, B)$ olsun. $\eta_1(w), \eta_2(w), \eta_3(w), \dots$ bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$ nin negatif olmayan herhangi bir rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olduğunu varsayalım. $\varphi_{x,y}(t)$ ise $F_{x,y}(t)$ fonksiyonu $\varphi_{x,y}(\xi)$ nin $[0,1]$ aralığında dağılım fonksiyonu olacak şekilde negatif olmayan bir fonksiyon olsun, burada ξ rastgele değişkeni $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişkendir. Bu takdirde

$$T_k = \varphi_{x_{k-1}, x_k}(\eta_k)$$

olmak üzere

$$X(t) = X_{k-1}(w), \qquad \text{eğer} \sum_{i=1}^{k-1} T_i \leq t < \sum_{i=1}^{k} T_i \ \text{ ise}, \quad \left(\sum_{i=1}^{0} = 0\right)$$

ifadesiyle tanımlanan süreç bir yarı-Markov süreç oluşturur. Bu sürecin bir görünüşü Şekil 2.1. de görüldüğü gibidir.



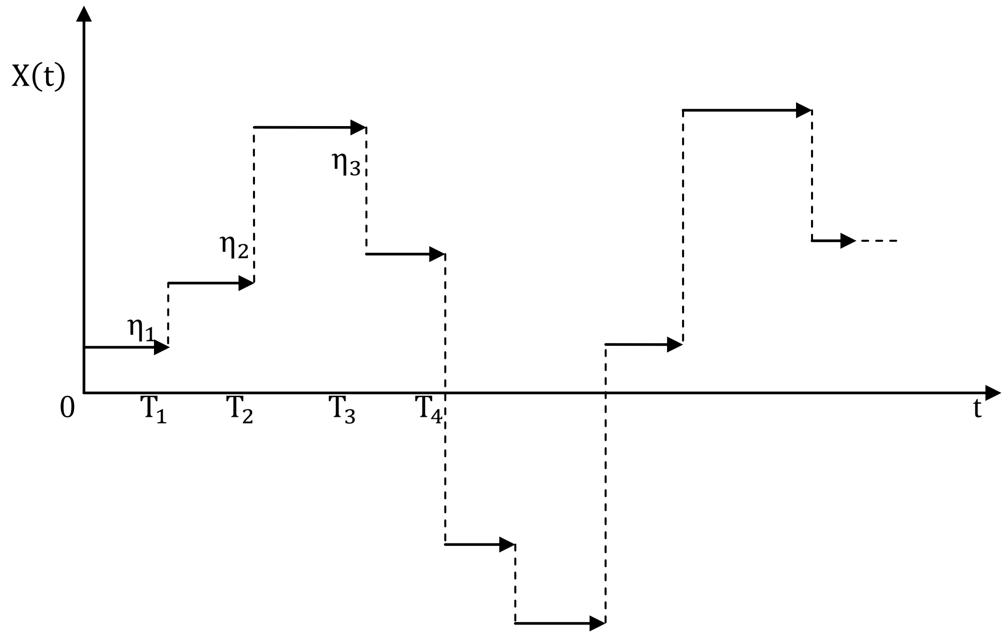
Şekil 2.1. Yarı-Markov süreç

Nasirova (1970) yılında Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu yarı-Markov süreç tanımının özel bir durumu olan yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci tanımını vermiştir. Şimdi bu tanımı verelim:

$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2, \ldots\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1, i = 1,2, \ldots$ olsun. Bu takdirde

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \text{ , eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 2.2. de verildiği gibidir.



Şekil 2.2. Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci

Nasirova bu şekilde inşa ettiği yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin dağılımını, sürecin supremumunun dağılımını, sürecin verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anı ile sıçramasının ortak dağılımını, sürecin supremumu ile infimumun ortak dağılımını ve süreç için limit teoremlerini çalışmıştır.

Yarı-Markov süreçleri ile ilgili birçok önemli problemi Borovkov (1965, 1976), Korolyuk ve Turbin (1976), Çınlar (1968, a.1975, b.1975), Takacs (1954, 1977), Korolyuk ve Pirliev (1984), Tomko (1989), Smith (1955, 1958), Spitzer (1956, 1964), Feller (1964, 1971), Anisimov (1970, 1973), Gnedenko ve Kovalenko (1968), Shurenkov (1984, 1989) v.s., çalışmalarında detaylarıyla incelemişlerdir.

Stokastik süreçlerin esas sınır fonksiyonlarının incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu konuda ilk çalışmayı Spitzer (1956) yapmıştır. Onun çalışmalarını Rogozin (1964) ile Gusak ve Korolyuk (1968) toplam dizisi için genelleştirmiştir. Daha sonra Rogozin (1965) aynı çalışmaları artımları bağımsız olan süreçler için de genelleştirmiştir. Gusak (1969) sıçrama anı ve değerinin ortak dağılımı için genel sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca Gusak ve Korolyuk (1969) sürecin değerinin ve supremumunun ortak dağılımını vermiştir. Skorohod (1967) sıçramalarının işareti aynı olan süreçlerin karakteristikleri ile verilen bir seviyeye ilk kez ulaşması anı arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur. Borovkov (1965) sıçramalarının işareti aynı ve artımları bağımsız olan süreçlerin belirli bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımı ile sürecin değerinin dağılımı arasındaki ilişkileri vermiştir. Levy (1954) ise böyle bir sürecin değerinin infimumu ile supremumunun ortak dağılımını vermiştir.

İncelenen bu tip süreçler, stokastik süreçlerin yeni tiplerinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Örneğin Ezhov (1966) "yarı-Markov karışımlı Markov süreçleri" olarak adlandırılan stokastik süreçler sınıfını ortaya koyarken Pyke ve Schaufele (1964) "Markov yenileme süreçleri" kavramını ortaya koydular ve incelediler.

Aynı yıllarda, yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin çalışılmasıyla paralel olarak, bu süreçlerle ilgisi olan ve "yarı-sürekli (yani pozitif ya da negatif akımlı yarı-Markov süreci" olarak adlandırılan özel bir stokastik süreçler sınıfı çalışılmaya başlanmıştır. Şimdi bunlardan bir kaç tanesini özetleyelim.

Dzhafaroz ve Skorohod (1976) aşağıdaki süreci ele almışlardır:

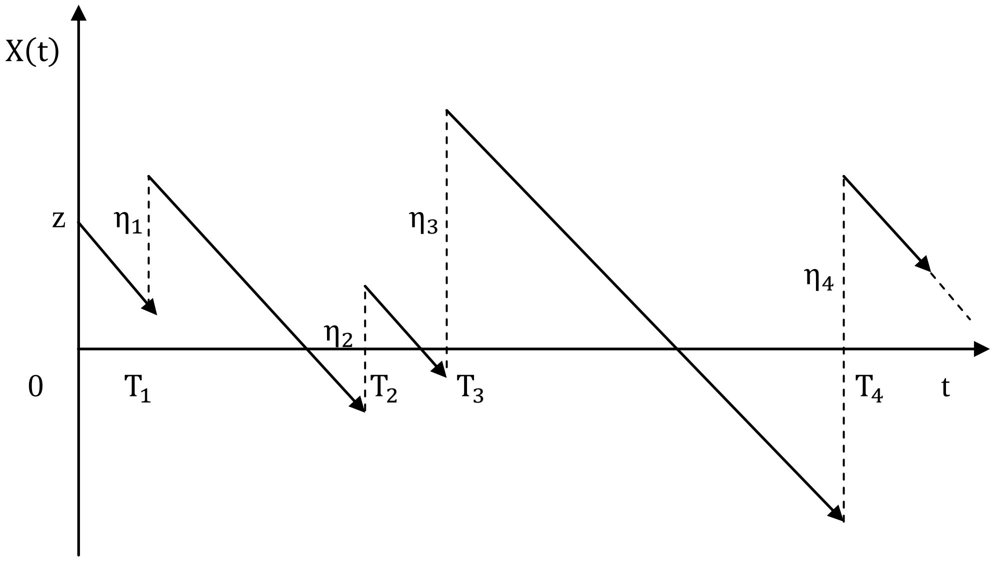
$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2, \ldots\}$ $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi ve ξ_i, η_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde $\zeta(t)$ yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci yani

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \text{ , eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \text{ , } n \geq 1, \; T_0 = 0$$

olmak üzere

$$X(t) = z + \zeta(t) - t, \qquad \text{eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise}$$

ile tanımlanan $X(t)$ süreci negatif akımlı pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreç oluşturur. Burada $z \geq 0$ sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu tip süreçlerin esas olasılık özellikleri incelenmiştir. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 2.3. de görülmektedir.



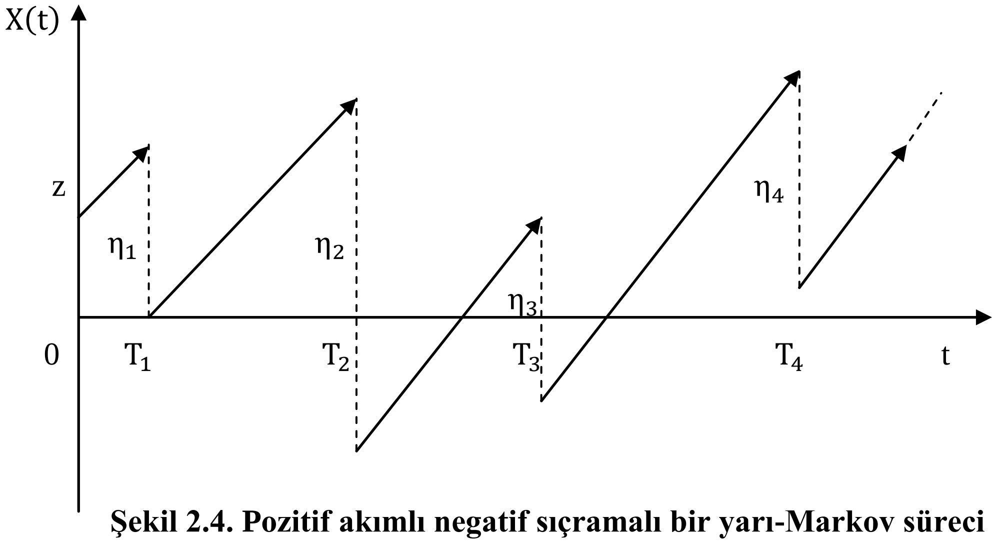
Şekil 2.3. Negatif akımlı pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreç

Ahmedova (1983) ise aşağıdaki süreci ele almıştır.

$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2, \dots\}, (\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi ve ξ_i ler pozitif, η_i ler negatif değerli olsun. Bu takdirde $\zeta(t)$ yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olmak üzere

$X(t) = z + t - \zeta(t) = z - (\zeta(t) - t)$, eğer $T_n \leq t < T_{n+1}$ ise

ile tanımlanan $X(t)$ süreci pozitif akımlı negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreci oluşturur. Burada $z \geq 0$ sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu tip süreçlerin de esas olasılık özellikleri incelenmiştir. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 2.4. de görülmektedir.



Şekil 2.4. Pozitif akımlı negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreci

Hem pratik hem de teorik bakımdan yarı-Markov süreçler için ergodik teoremler ve süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Yarı-Markov sınıfına ait olan yenileme süreçleri için esas ergodik teorem 1975 yılında Smith tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca Ezhov ve Shurenkov (1977) tarafından da yarı-Markov süreçler için ergodik teoremler ispatlanmıştır. Shurenkov (1989) yarı-Markov süreçlerin ergodik dağılımının varlığı için gerek ve yeter şart elde etmiştir.

Yarı-Markov süreçler için en genel durumda limit teoremleri Anisimov (1973), Sil'vestrov (a.1975, b.1975), Dzhafarov ve ark. (1976), Korolyuk ve Svishchuk (1989) tarafından verilmiştir. Rastgele yürüyüş süreçleri için limit teoremleri ise Skorohod ve Slobodenyuk (1970), Nasirova (1970) ve Harlamov (1977) tarafından verilmiştir.

Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleriyle ilgili, fakat daha karmaşık olan süreçlerden biri de yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçtir. Bu süreçlere örnek olarak Nasirova (1970)'nın ele aldığı süreç gösterilebilir. Bu süreci kısaca aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

$(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-) : i = 1,2, \dots\}$, bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. $\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-$ rastgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rastgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$X^+(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^+, \ \ eğer \ T_n^+ = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^+ \le t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^+ = T_{n+1}^+, \ \ n \ge 1 \ ise$$

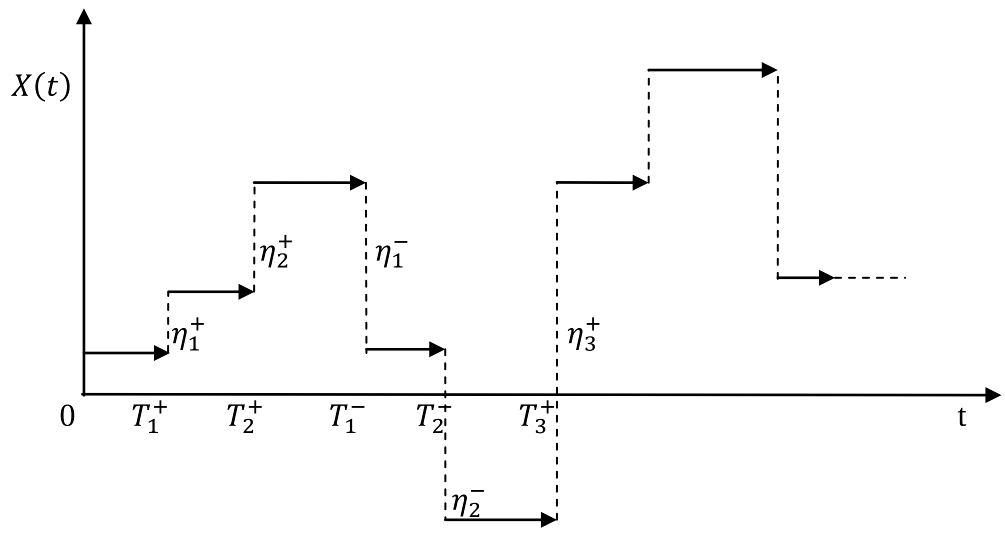
ve

$$X^-(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^-, \ \ eğer \ T_n^- = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^- \le t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^- = T_{n+1}^-, \ \ n \ge 1 \ ise$$

olmak üzere (burada $T_0^+ = T_0^- = 0$ dır.)

$X(t) = X^+(t) + X^-(t)$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılır. Bu süreç için önemli olan bütün olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 2.5. de verildiği gibidir.



Şekil 2.5. Yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci

Yarı-Markov süreçlerinin incelenmesinden sonra, uygulamada ortaya çıkan bazı problemlerin incelenmesi ve çözümlenmesi için yarı-Markov sürecinin kendisi değil onun değişik tipleri, yani bariyerli tipleri incelenmeye başlandı. Bunlar ise bir bariyerli veya iki bariyerli olarak sınıflandırılabilir. Bu bariyerler ise ortaya çıkan somut problemlere bağlı olarak yansıtan, tutan, yutan, v.s., olabilir.

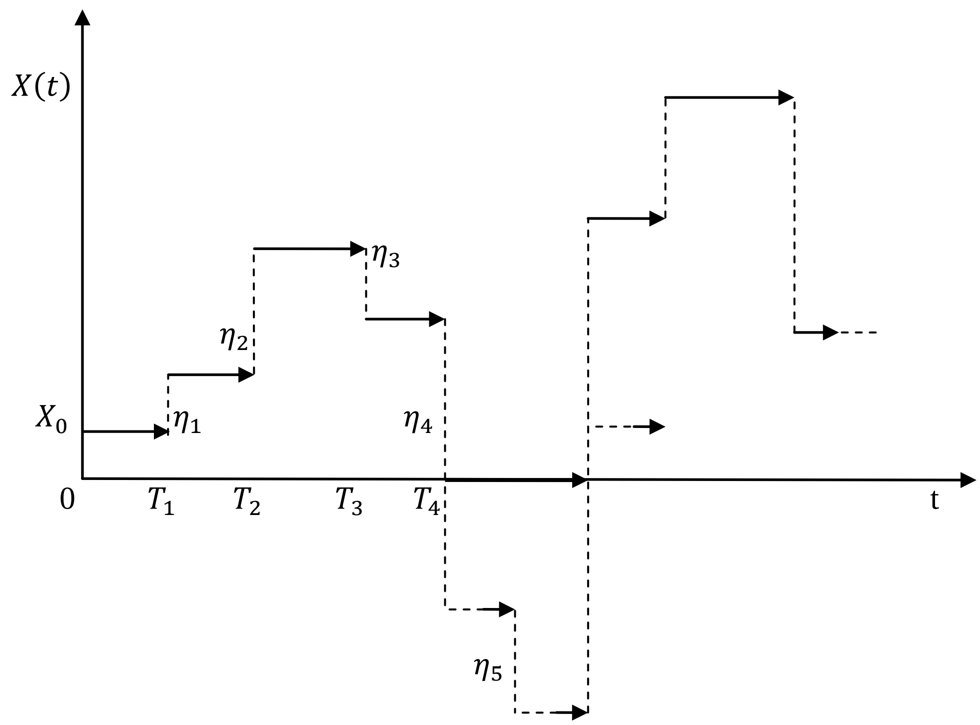
Nasirova (1970) sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip olan bir bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecini şu şekilde kurmuştur: $\{(\xi_i, \eta_i) : i = 1,2, \dots\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1,\ i = 1,2, \dots$ olsun. Bu takdirde

$$X_n = max\{0, X_{n-1} + \eta_n\}, n \geq 1\,; X_0 = z > 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \quad eğer\ T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1}\ ise,$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci sıfır seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç oluşturacaktır. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 2.6. da verilmiştir.



Şekil 2.6. Sıfır seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç

Nasirova (1970) bu sürecin dağılımı ile sürecin esas sınır fonksiyonlarının dağılımını incelemiştir. Nasirova ve Skorohod (1978) bu süreç için ergodik teoremi ispatlamışlar ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu elde etmişlerdir. Nasirova (1970) ve Borovkov (1975) bu süreç için seriler şeklinde limit teoremlerini ifade ve ispat etmişlerdir.

Benzer şekilde $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci de kurulmuş ve incelenmiştir: $\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2, ...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1,\ i = 1,2, ...$ olsun. Bu taktirde

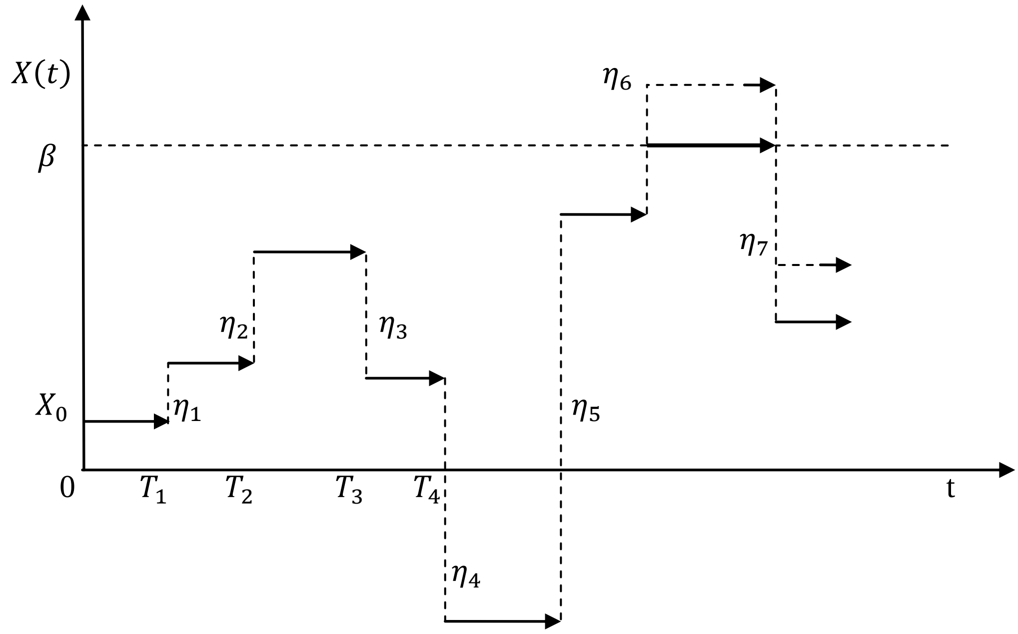
$X_n = min\{\beta, X_{n-1} + \eta_n\}, n \geq 1\ ; X_0 = z \leq \beta$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \ \ , eğer\ \ T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1}\ \ ise,$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturacaktır. Bu sürecin bir görünüşü Şekil 2.7. de verilmiştir.

Nasirova ve Skorohod (1978) bu süreç için ergodik teoremini ispatlamışlar ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu vermişlerdir. Ayrıca bu tipten stokastik süreçler Feller (1971), Spitzer (1964), Smith (1958) gibi olasılıkçılar tarafından da çalışılmıştır.



Şekil 2.7. $\boldsymbol{\beta} > 0$ seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci

Nasirova (1970) daha sonra, 0 seviyesinde tutan bariyerli daha karmaşık süreçleri de ele almıştır.

Dzhafarov (1979) aşağıdaki süreci tanımlamış ve sürecin esas olasılık karakteristikleri incelenmiştir:

$\{(\xi_i, \eta_i^+) : i = 1,2, \dots\}$ $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi ve ξ_i, η_i^+ler pozitif değerli olsun. Bu taktirde

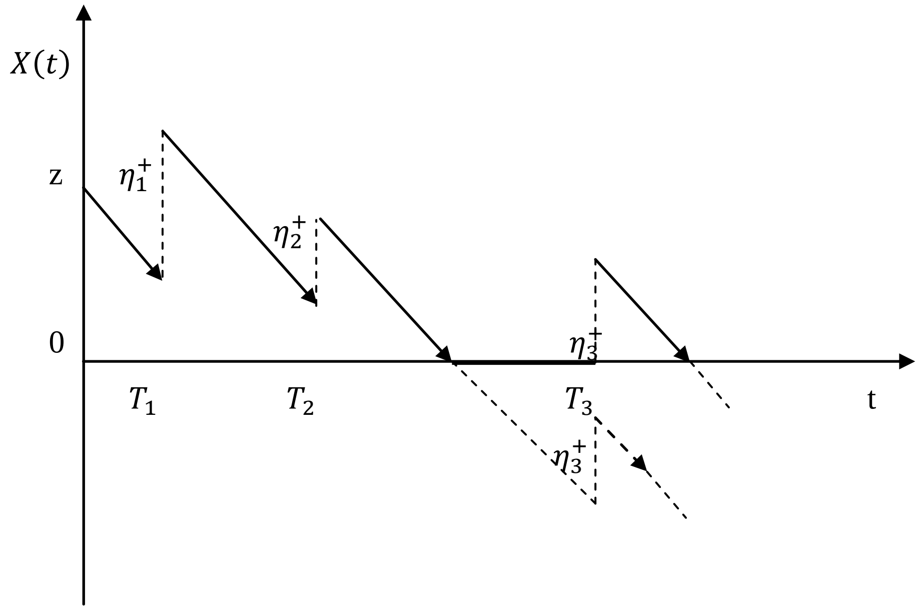
$X_n = maks\{0, X_{n-1} + \eta_n^+ - t\}, \qquad n \geq 1\,; X_0 = maks\{0, z - t\}$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \ , eğer \ T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1}\,, \ \ n \geq 1\,; T_0 = 0$$

ile tanımlanan $X(t)$ sürecine sıfır seviyesinde tutan bariyerli negatif akımlı, pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreci denir. Burada $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur.

Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 2.8. de görülmektedir.



Şekil 2.8. Sıfır seviyesinde tutan bariyerli negatif akımlı, pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreci

Ahmedova (1981) ise, sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip pozitif akımlı yarı-Markov sürecini ele almıştır. Bu süreç için de ilginç olan olasılık karakteristikleri detayları ile incelenmiştir. Şimdi bu sürecin tanımını verelim:

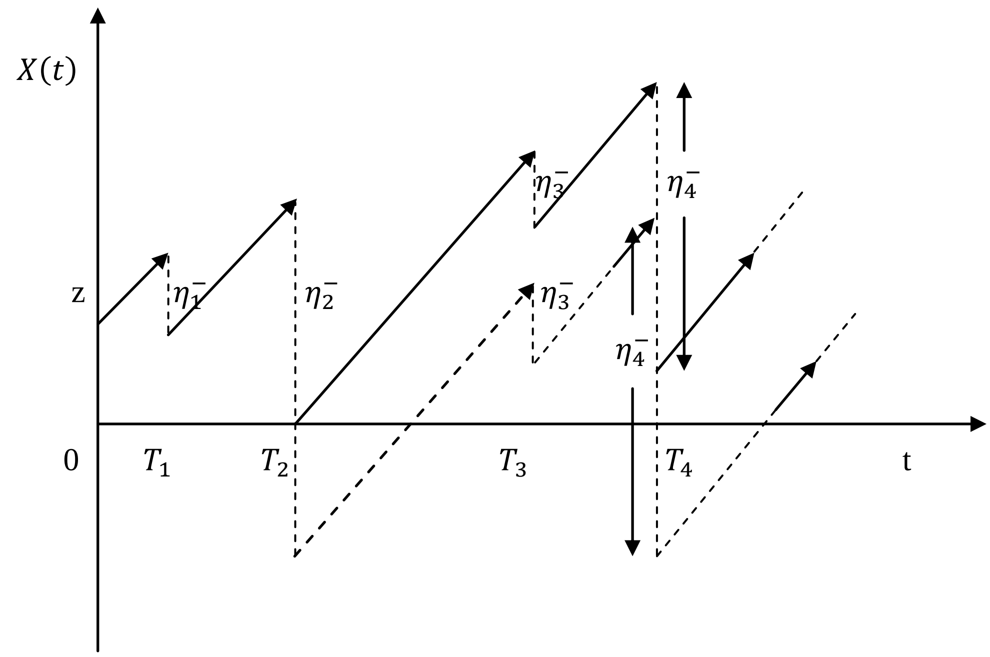
$\{(\xi_i, \eta_i^-): i = 1,2, ...\}$ $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi ve ξ_i ler pozitif, η_i^- ler negatif değerli olsun. Bu taktirde

$X_n = maks\{0, X_{n-1} - \eta_n^- + t\}, \qquad n \geq 1\,; X_0 = maks\{0, t - z\}$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \ , eğer \ T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1}\,, \ \ n \geq 1\,; T_0 = 0$$

ile tanımlanan $X(t)$ sürecine sıfır seviyesinde tutan bariyerli pozitif akımlı, negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreç denir. Burada $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 2.9. da görülmektedir.



Şekil 2.9. Sıfır seviyesinde tutan bariyerli pozitif akımlı, negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreç

Ayrıca Nasirova (1970) sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli bir yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecini aşağıdaki şekilde kurmuş ve çalışmıştır: $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-): i = 1,2, \dots\}$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. ξ_i^+, η_i^+ ve ξ_i^- rastgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rastgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım.

$$T_k^+ = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^+ \quad ve \; T_k^- = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^-$$

olmak üzere T_k^+ ve T_k^- rastgele değişkenlerini artan sırada yeniden düzenleyelim ve bu düzenlemeyi T_k ile gösterelim.

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^+ , & T_k = T_i^+ \\ \eta_j^- , & T_k = T_j^- \end{cases}$$

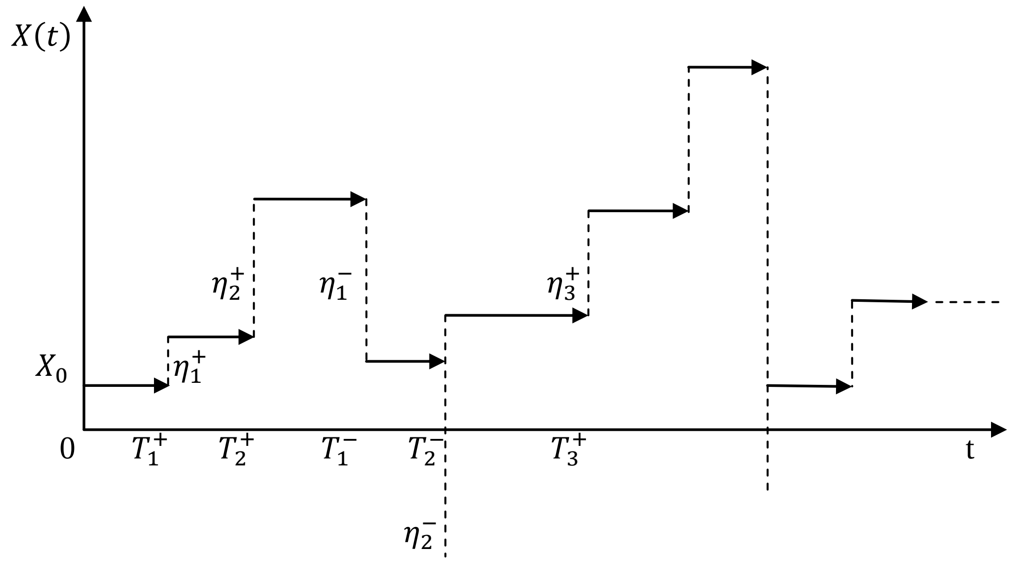
olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$X_k = |X_{k-1} + \eta_k| \, , k \geq 1 \, , X_0 = z > 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_k, eğer \;\; T_k \leq t < T_{k+1} \; ise$$

ile tanımlanan stokastik süreç sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli bir yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci oluşturur. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 2.10. daki gibidir.



Şekil 2.10. Sıfır seviyesinde yansıtan bariyerli bir yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci

Nasirova (1970) bu süreç için, sürecin yansıtan bariyere ilk kez düşme anının dağılımını, sürecin verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını, sürecin sonlu boyutlu dağılımının Laplace dönüşümünü çalışmış ve sürecin ergodikliğini incelemiştir. Ayrıca süreç için limit teoremini ifade ve ispat etmiştir.

Stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin birçok önemli problemi iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla verilir öyle ki bu bariyerler muhtelif türlerden olabilirler. Hem teorik hem de pratik bakımdan önemli olmasından dolayı iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri hakkında da birçok ilginç bilimsel çalışmalar yapılmıştır. Ancak yapılan bu çalışmaların çoğu sonlu durum uzayına sahip rastgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemlerine yoğunlaşmıştır (Korolyuk ve Borovskikh (1981), Lotov (a.1991, b.1991), Prabhu (1980), Zhang (1992), El-Shehawey (1992), Weesakul (1961), Kastenbaum (1966), v.s.).

Sınır-değer problemlerinin incelenmesi önemli olmasına rağmen ele alınan süreçlerin kendi karakteristiklerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu nedenle iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçlerinin kendi karakteristiklerine ait bazı bilimsel çalışmalar da mevcuttur (Feller (1971), Spitzer (1964), Borovkov (1975), Lotov (1982), Afanas'eva ve Bulinskaya (1980, 1981, 1984), Khaniev (1984, a.1986, b.1986, 1988), Zhang (1992), v.s.). Bunlardan Borovkov (1975) iki bariyerli bir boyutlu rastgele yürüyüş süreçleri için ergodik teoremini ispatlamış ve ergodik dağılım fonksiyonu için bir formül ortaya koymuştur. Feller (1971) bariyerlerinin her ikisi de yansıtan olan veya her ikisi de yutan olan bir boyutlu rastgele yürüyüş süreçlerini kurmuş ve bu süreçlerin bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamıştır.

Literatürde iki bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri hakkında da bazı bilimsel çalışmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmalarda bariyerlerinin her ikisinin de tutan veya yutan olduğu durumlar ele alınmıştır. Khaniev (1986, 1988) iki tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecini aşağıdaki gibi kurmuş ve incelemiştir:

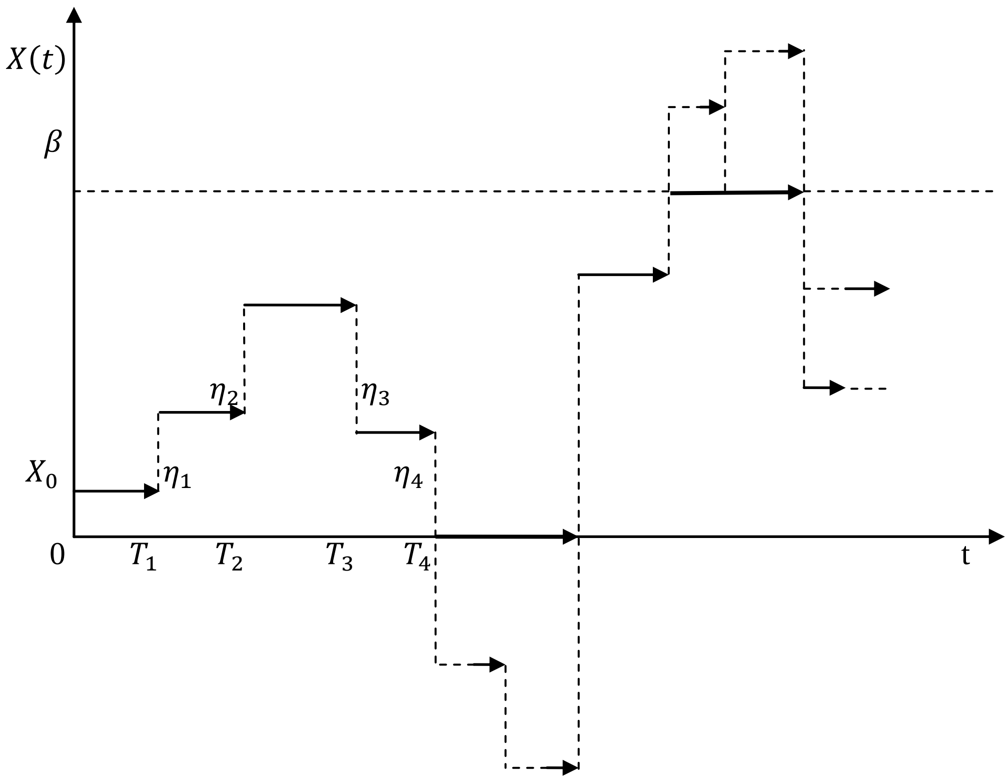
$\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2, \ldots\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i ler pozitif değerli, yani, $P\{\xi_i > 0\} = 1$, $i = 1,2, \ldots$ olsun. Bu takdirde

$X_n = min\{\beta, max\{0, X_{n-1}, \eta_n\}\}, n \geq 1 \,; X_0 = z \in [0, \beta]$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \,, eğer \;\; T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \;\; ise,$$

ile tanımlanan $X(t)$ stokastik süreci sıfır ve $\beta > 0$ seviyelerinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç oluşturacaktır. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 2.11. de verilmiştir.



Şekil 2.11. Sıfır ve $\beta > 0$ seviyelerinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreç

Khaniev (1986, 1988) bu süreç için, sürecin dağılımını, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını ve sürecin beklenen değer ve varyans gibi bazı önemli olasılık karakteristiklerini hesaplamış ve süreç için ergodik teoremini ifade ve ispat etmiştir. Ayrıca bu süreç için limit teoremlerini vermiş ve sürecin asimptotik durumunu incelemiştir.

Ayrıca Nasirova ve ark. (1996) sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta, \beta > 0$, seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecini şu şekilde kurmuş ve çalışmışlardır: $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-): i = 1,2, \ldots\}$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. ξ_i^+, η_i^+ ve ξ_i^- rastgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rastgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım.

$$T_k^+ = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^+ \ ve \ T_k^- = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^- \ , k \geq 1 \ , T_0^+ = T_0^- = 0$$

olmak üzere T_k^+ ve T_k^- rastgele değişkenlerini artan sırada yeniden düzenleyelim ve bu düzenlemeyi T_k ile gösterelim.

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^+ , & T_k = T_i^+ \\ \eta_j^- , & T_k = T_j^- \end{cases}$$

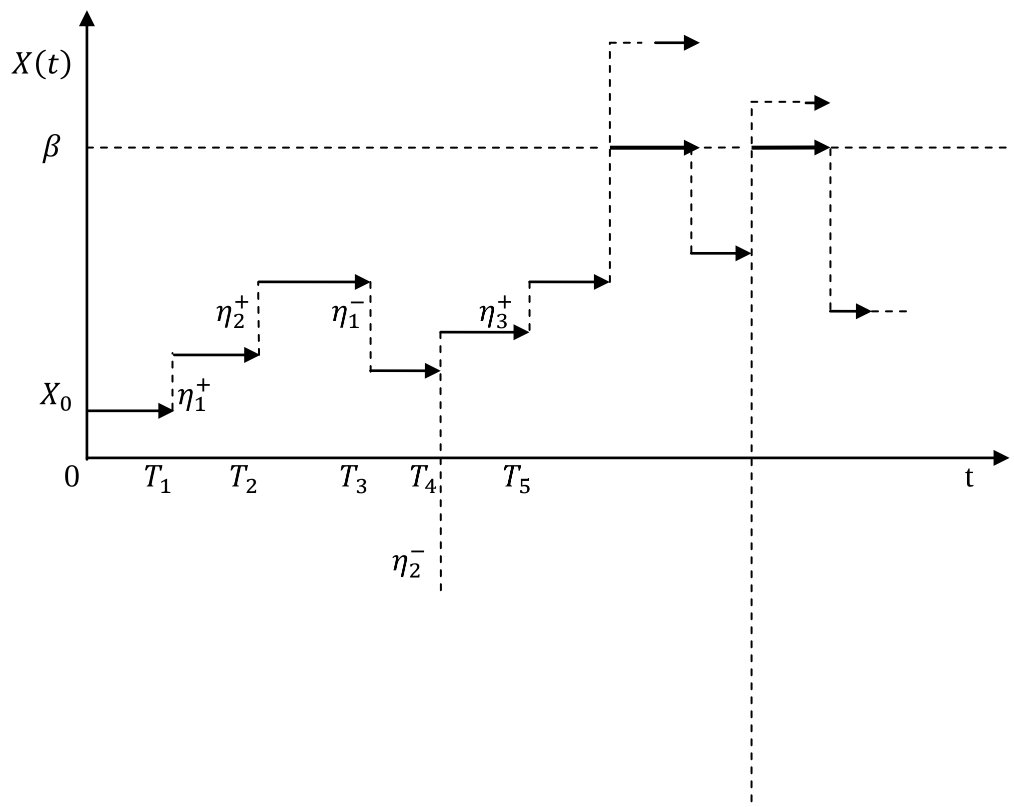
olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$X_k = min\{\beta, |X_{k-1}, \eta_k|\}, k \geq 1, X_0 = z > 0$

olmak üzere

$X(t) = X_k, eğer\ T_k \leq t < T_{k+1}\ ise$

ile tanımlanan stokastik süreç sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-markov toplam rastgele yürüyüş süreci oluşturur. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 2.12. de görüldüğü gibidir.



Şekil 2.12. Sıfır seviyesinde yansıtan ve $\boldsymbol{\beta} > 0$ seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-markov toplam rastgele yürüyüş süreci

Nasirova ve ark. (1996), bu sürecin dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümü ile sürecin ilk kez yansıma anının ve ilk kez tutulma anının dağılımlarını vermişlerdir. Ayrıca süreç için seriler şeklinde limit teoremlerini ispatlamışlardır.

Maden (1997) ise, yansıtan ve tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreci şu şekilde kurmuş ve incelemiştir: $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2, \dots\}$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişken ikilileri dizisi olsun. Ayrıca ξ_i ler pozitif değerli, yani, $P\{\xi_i > 0\} = 1$ olsun. Bu rastgele değişkenler ikilileri yardımıyla

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \,, Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \,, n \geq 1;\ Y_0 = T_0 = 0$$

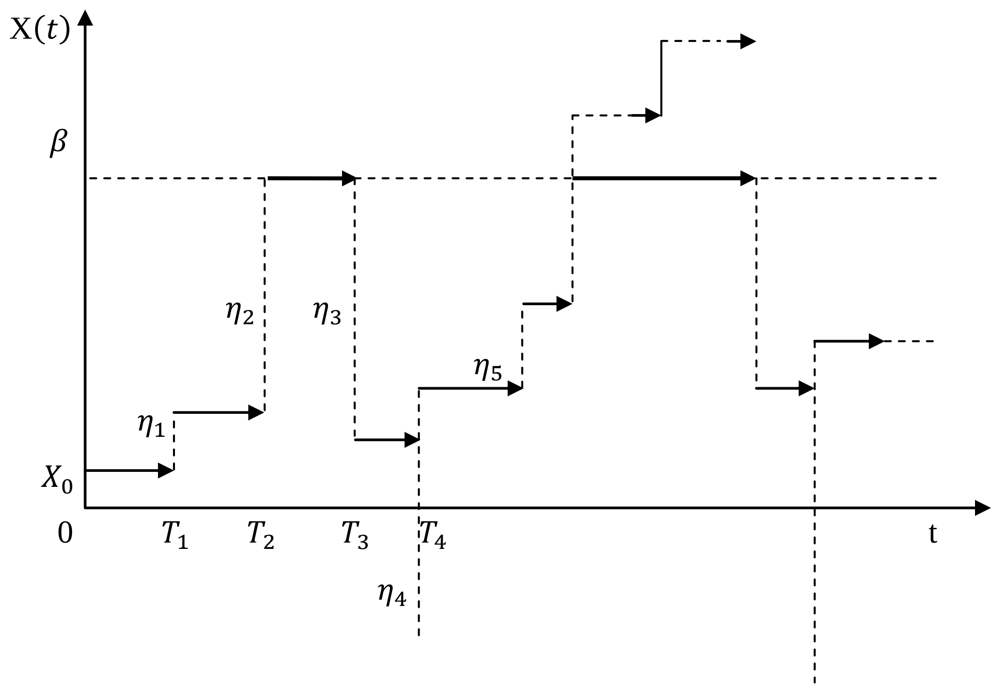
ve

$$X_n = min\{\beta; |X_{n-1} + \eta_n|\}, n \geq 1\,; X_0 \in [0, \beta], \beta > 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \,, eğer\ t \in [T_n, T_{n+1}), n \geq 0\ \ ise$$

ile tanımlanan $X(t)$ süreci sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur. Bu sürecin görünüşlerinden biri Şekil 2.13. deki gibidir.



Şekil 2.13. Sıfır seviyesinde yansıtan ve $\boldsymbol{\beta} > 0$ seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci

Maden (1997) bu sürecin önemli sınır fonksiyonalları sayılan, γ_1-sürecin ilk kez tutan bariyere düşme anını ve γ_2-sürecin ilk kez yansıtan bariyerden yansıma anını matematiksel olarak kurmuş, γ_1 ve γ_2 nin dağılım fonksiyonları, moment çıkaran fonksiyonları, beklenen değer ve varyansları için açık formüller vermiştir. $X(t)$ sürecinin bir boyutlu stasyoner olmayan dağılım fonksiyonlarını bir $\{T_n\}$ yenileme sürecinin ve bir $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade etmiştir. Sürecin iki sıçrama anı arasındaki sürenin, üstel, Erlang veya Ki-kare dağılımına sahip olması özel durumlarında γ_1 ve γ_2 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları ve $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları için formüller elde etmiştir. Ayrıca, bazı varsayımlar altında $X(t)$ süreci için ergodik teoremi ispatlamış ve sürecin ergodik dağılımını elde etmiştir.

2.2. Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 2.1. Bir rastgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine **örnek uzay**, örnek uzaydaki her bir noktaya **örnek nokta**, örnek uzayın herhangi bir altkümesine ise **olay** denir. Her küme kendisinin altkümesi ve boş küme her kümenin altkümesi olacağından örnek uzayın kendisi ve boş küme de birer olay olacaktır. Örnek uzaya **kesin olay** ve boş kümeye **imkansız olay** denir. A ve B gibi herhangi iki olayın aynı anda gerçekleşmemesi durumunda bu iki olaya **ayrık olaylar** adı verilir.

Tanım 2.2. Bir deneyin birbirinden ayrık ve her biri aynı şansa sahip olmak koşuluyla n tane mümkün sonucundan m tanesi bir A olayının olmasını gerektiriyorsa bu taktirde $P(A) = \frac{m}{n}$ oranına A olayının **olasılığı** denir.

Tanım 2.3. A ve B olayları bir S örnek uzayında iki olay olsun. B olayının gerçekleşmesi şartı altında A olayının gerçekleşmesi olasılığına **şartlı olasılık** denir. Bir A olayının bir B olayına göre şartlı olasılığı $P(A|B)$ ile gösterilir ve

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ , P(B) > 0 \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Şartlı olasılığın yukarıdaki tanımının en önemli sonucu aşağıdaki formda yazılarak elde edilebilmesidir:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A), P(A) > 0 \tag{2.2}$$

veya buna denk olarak

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B), P(B) > 0 \tag{2.3}$$

dır.

Tanım 2.4. Bir örnek uzay üzerinde tanımlanmış gerçek değerli bir fonksiyona **rastgele değişken** adı verilir.

Tanım 2.5. X bir rastgele değişken olmak üzere X'in alabileceği değerlerin kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir küme ise X'e bir **kesikli rastgele değişken** denir. X rastgele değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi bir aralık yada aralıkların birleşimi şeklinde ise X'e **sürekli rastgele değişken** adı verilir.

Tanım 2.6. X bir kesikli rastgele değişken ve bu rastgele değişkenin değer kümesi $R_x = \{x_1, x_2, \dots\}$ olmak üzere $P(X = x_i) = p(x_i), i = 1,2, \dots$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen koşulların sağlanması halinde $p: R_x \to [0,1]$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin **olasılık fonksiyonu** denir.

$i)\ p(x_i) \geq 0, i = 1,2, \dots$

$$ii) \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1. \tag{2.4}$$

Tanım 2.7. X bir sürekli rastgele değişken olsun. Genelliği sağlamak için bu X rastgele değişkenin $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler aldığı varsayılır. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f(x)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** adı verilir.

$i)\ f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{2.5}$$

Tanım 2.8. E bir deney ve S de bu deneyle ilgili örnek uzay olsun. $X = X(s)$ ve $Y = Y(s)$ ise her biri her bir $s \in S$ neticesine bir gerçek sayı karşılık getiren iki fonksiyon olsun. Bu durumda (X, Y) ikilisine **iki boyutlu bir rastgele değişken** adı verilir.

Eğer $X_1 = X_1(s)$, $X_2 = X_2(s), \dots, X_n = X_n(s)$ fonksiyonları her biri her bir $s \in S$ neticesine bir gerçek sayı karşılık getiren n tane fonksiyon ise $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ye $\boldsymbol{n}$ **boyutlu bir rastgele değişken** veya $\boldsymbol{n}$ **boyutlu bir rastgele vektör** denir.

Tanım 2.9. Eğer (X, Y) nin mümkün değerleri sonlu ya da sayılabilir sonsuz ise (X, Y) ye **iki boyutlu kesikli rastgele değişken** denir.

Tanım 2.10.

a) (X, Y) iki boyutlu kesikli bir rastgele değişken olsun. Her bir (x_i, y_j) mümkün neticesi ile aşağıdaki koşulları sağlayan ve $P(X = x_i, Y = y_j)$ yi gösteren bir $p(x_i, y_j)$ sayısını eşleyelim.

$i)$ Her (x_i, y_j) için $p(x_i, y_j) \geq 0$

$$ii) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1 \tag{2.6}$$

(X, Y) nin ranj uzayındaki her (x_i, y_j) için tanımlı olan p fonksiyonuna (X, Y) nin **ortak olasılık fonksiyonu** denir. $\left(x_i, y_j, p(x_i, y_j)\right)$, $i, j = 1,2,3, \dots$ üçlülerinin kümesine bazen (X, Y) nin **olasılık dağılımı** da denir.

b) (X, Y) Öklid düzlemin bir R bölgesindeki tüm değerleri alan iki boyutlu sürekli bir rastgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir f fonksiyonuna (X, Y) nin **ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir.

$iii)$ Her $(X, Y) \in R$ $için$ $f(x, y) \geq 0$

$$iv) \quad \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = 1 \tag{2.7}$$

Tanım 2.11. (X, Y) iki boyutlu bir rastgele değişken olsun. (X, Y) rastgele değişkeninin **kümülatif dağılım fonksiyonu** F yi

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlarız.

Tanım 2.12.

a) (X, Y) iki boyutlu kesikli bir rastgele değişken olsun. Eğer her i ve j için $p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot q(y_j)$ oluyorsa bu takdirde X ve Y rastgele değişkenlerine **bağımsızdır denir**. Başka bir deyişle

$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$

eşitliği sağlanıyorsa X ve Y rastgele değişkenleri **bağımsızdır**.

b) (X, Y) iki boyutlu sürekli bir rastgele değişken olsun. Eğer her (x, y) için $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda X ve Y rastgele değişkenlerine **bağımsızdır** denir. Burada f, (X, Y) iki boyutlu rastgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ve g ve h sırasıyla bir boyutlu X ve Y rastgele değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Teorem 2.1.

a) (X, Y) iki boyutlu kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart her i ve her j için $p(x_i | y_j) = p(x_i)$ veya $q(y_j | x_i) = q(y_j)$ olmasıdır.

b) (X, Y) iki boyutlu sürekli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart her (x, y) için $g(x|y) = g(x)\ \ veya\ \ h(y|x) = h(y)$ olmasıdır.

Teorem 2.2. (X, Y) iki boyutlu bir rastgele değişken olsun. A ve B olaylarının meydana gelmeleri (ya da gelmemeleri) sırasıyla yalnızca X'e ve Y'ye bağlı olaylar olsun. Yani A kümesi X'in ranj uzayı R_x'in bir alt kümesi ve B kümesi de Y'nin ranj uzayı R_y'nin bir alt kümesi olsun. Eğer X ve Y bağımsız rastgele değişkenler ise bu taktirde

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

yazılabilir.

Tanım 2.13. X rastgele değişkeni $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ mümkün değerlerini $p(x_i) = P(X = x_i),\ i = 1,2, \ldots, n, \ldots$ olasılıklarıyla alan kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde X rastgele değişkeninin $E(X)$ ile gösterilen **beklenen değeri** (veya matematiksel beklentisi)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i) \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(x_i)$$

serisi mutlak yakınsak, yani

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot p(x_i) < \infty$$

olmalıdır. Burada bu sayıya X'in ortalama değeri olarak da müracaat edilir.

Tanım 2.14. X rastgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken olsun. Bu durumda X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{2.10}$$

olarak tanımlanır. Yine bu genelleştirilmiş integral yakınsak olmayabilir. Bu nedenle $E(X)$'in mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx \tag{2.11}$$

integralinin sonlu olmasıdır.

Teorem 2.3 X rastgele değişkeni $[a, b]$ aralığında düzgün olarak dağılmış olsun. Bu durumda X'in beklenen değeri

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.15. X bir rastgele değişken ve $Y = H(X)$ olsun.

a) Eğer Y rastgele değişkeni $y_1, y_2, \ldots$ mümkün değerlerini alan kesikli bir rastgele değişken ve $q(y_i) = P(Y = y_i)$ ise bu taktirde $E(Y)$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i q(y_i) \tag{2.12}$$

olarak tanımlanır.

b) Eğer Y rastgele değişkeni g olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken ise bu taktirde $E(Y)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y)dy \tag{2.13}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.16. Bir X rastgele değişkeninin $\mathrm{V}(X)$ veya σ_x^2 ile gösterilen **varyansı** aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$V(X) = \sigma_x^2 = E[X - E(X)]^2 \tag{2.14}$$

Bu şekilde tanımlanan $V(X)$ sayısının pozitif kareköküne ise X rastgele değişkeninin **standart sapması** denir ve σ_x ile gösterilir.

Teorem 2.4 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ dir.

Tanım 2.17. Sürekli bir X rastgele değişkeni aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise bu rastgele değişkene **normal dağılıma** sahiptir denir:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left(-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2\right), -\infty < x < \infty \tag{2.15}$$

burada μ ve σ parametreleri $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ şartlarını sağlamalıdır.

Tanım 2.18. Negatif olmayan tüm değerleri alan sürekli bir X rastgele değişkenine $\alpha > 0$ parametreli bir **Üstel dağılıma** sahiptir denir, şayet X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \alpha . e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases} \tag{2.16}$$

ile veriliyorsa. Doğru bir integrasyon hesaplayarak $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle bu bağıntı bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Tanım 2.19. X sadece negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun. Eğer X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha.x)^{r-1}e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases} \tag{2.17}$$

ile verilirse X'e bir **Gamma olasılık dağılımına** sahiptir denir. Bu dağılım iki parametreye bağlıdır, bunlar r ve α olup $r > 0$ ve $\alpha > 0$ olmaları gerekmektedir.

Eğer $r = 1$ ise (2.17) bağıntısı $f(x) = \alpha.e^{-\alpha x}$ olacaktır. Bu nedenle **Üstel dağılım**, Gamma dağılımının özel bir durumudur. Eğer $r > 1$ bir tam sayı ise Gamma dağılımı yine üstel dağılım ile ilgilidir ancak biraz farklıdır.

Tanım 2.20. X sadece negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun. Eğer X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\alpha x}, & \alpha > 0, x > 0 \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases} \tag{2.18}$$

şeklinde ise X'e n-yinci mertebeden **Erlang dağılımına** sahiptir denir.

Tanım 2.21. $\boldsymbol{X}$ rastgele değişkeni $P(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots$ olasılık dağılımına sahip kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde $\boldsymbol{X}$ 'in **moment çıkaran fonksiyonu $\boldsymbol{M_x}$**,

$$M_x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j}.p(x_j) \tag{2.19}$$

ile tanımlanır.

Eğer $\boldsymbol{X}$ rastgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken ise bu durumda moment çıkaran fonksiyon

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f(x)dx \tag{2.20}$$

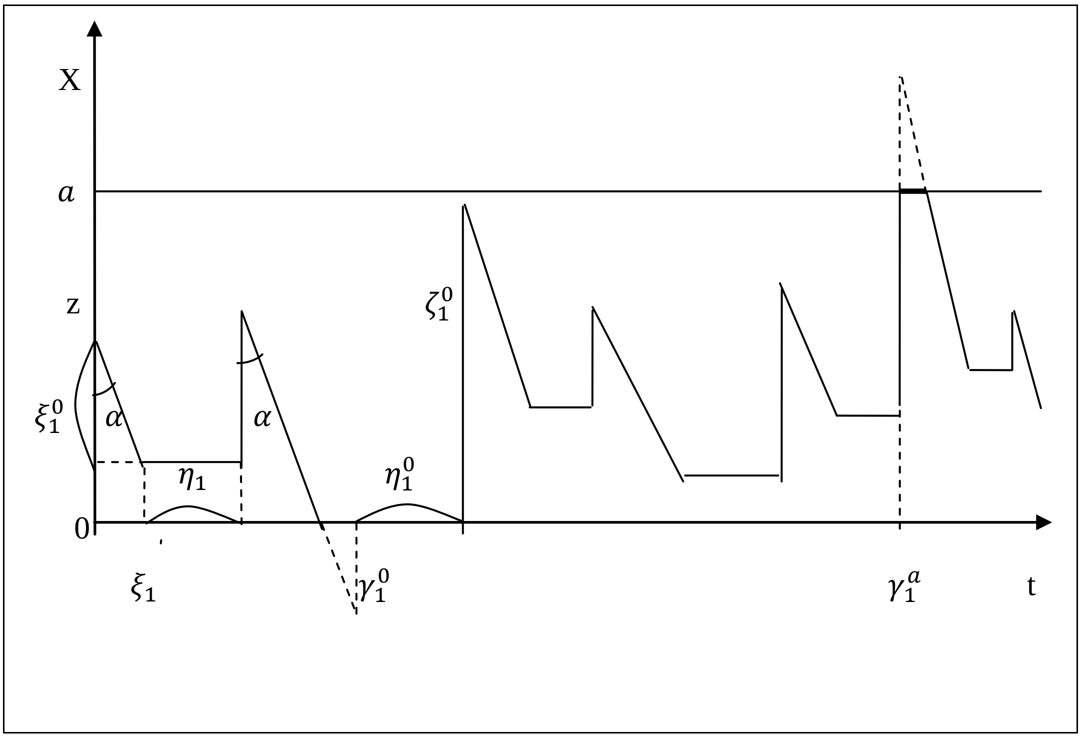
ile verilir.

3. NEGATİF AKIMLI POZİTİF SIÇRAMALI İKİ TUTAN BARİYERLİ YARI MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜREÇLERİ

3.1. Modelin Tanımı

Başlangıç anında z, $0 \leq z \leq a$ seviyesinde bulunan sonlu $a > 0$ hacimli bir depo göz önüne alınsın. Bu durumda depodaki envater seviyesini $X(t)$ ile gösterirsek $X(t)$ bir rastgele süreç olacaktır (Şekil 3.1.). ξ_1^0 rastgele değişkeni depodan yapılan talebi göstersin ve bu talep $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ açısı altında sürekli olarak karşılansın. Eğer bir talep karşılandıktan sonra depo boş değilse bu durumda depo yeni bir parti ürünün kabulü için hazırlık moduna geçer ve bu durum η_1 zaman aralığı süresince devam eder. Bu modun tamamlanması sonucunda ζ_1 rastgele miktarında ürün depoya eklenir. Bu aşamada depodaki stok seviyesi $min(a\,, z - \xi_1^0 + \zeta_1)$ ile ifade edilir. Eğer depo tam olarak dolu ise, bu durum da depodaki stok seviyesi rastgele bir zaman aralığından sonra $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ açısıyla azalmaya başlar. Öte yandan eğer bir talep karşılandıktan sonra depo tamamen boşalmışsa, bu durumda depo yeni ürünün kabulü için hazırlık moduna geçer ve bu durum η_1^0 rastgele zaman aralığı süresince devam eder ve bu süre sonunda depoya ζ_1^0 rastgele miktarında ürün derhal eklenir. Doğal olarak bu durumda depodaki stok miktarı, $min\,(a, \zeta_1^0)$ ile belirlenir. Olasılık anlamında, deponun tükenmeden önceki ve sonraki işleyiş ritimleri aynıdır.

γ_1^a ve γ_1^0 rastgele değişkenle sırasıyla, deponun ilk kez tam olarak dolma ve tükenme anlarını göstersin (Şekil 3.1.). Bu kısımdaki amacımız γ_1^a rastgele değişkeninin dağılımını bulup bunun birinci ve ikinci momentlerini hesaplamaktır.



Şekil 3.1.

3.2. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

(Ω, F, P) bir olasılık uzayı olmak üzere $\{\xi_k^0,\ \eta_k,\ \zeta_k\}_{k=\overline{1,\infty}}$, üç boyutlu dizisi ve $\{\eta_k^0,\ \zeta_k^0\}_{k=\overline{1,\infty}}$ iki boyutlu dizisi bu uzayda tanımlı özdeş dağılmış bağımsız pozitif rastgele değişkenler ve $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ olsun.

$\xi_k = \xi_k^0 . \tan\alpha\,, k = \overline{1,\infty}$ rastgele değişkenler dizisini göz önüne alalım ve aşağıdaki süreci oluşturalım. $z > 0$ olmak üzere

$$X_1(t) = \begin{cases} z + \sum_{i=1}^{k-1} \zeta_i - \left[t - \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i\right] \cot\alpha\ , & \sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i + \eta_i) \le t < \sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i + \eta_i) + \xi_k \\ z + \sum_{i=1}^{k-1} \zeta_i - \cot a \sum_{i=1}^{k} \xi_i\ , & \sum_{i=1}^{k-1}(\xi_i + \eta_i) + \xi_k \le t < \sum_{i=1}^{k}(\xi_i + \eta_i) \end{cases}$$

olsun. $X_1(t)$ sürecinin bir görünümü Şekil 3.2. de gösterilir. Bu durumda

$$\nu_1^0 = min\left\{k: z - \sum_{i=1}^{k} \xi_1^0 + \sum_{i=1}^{k-1} \zeta_i \le 0\right\}\ ,\ \nu_k^0 = \nu_{k-1}^0 + A_{\nu_{k-1}^0} . \nu_1^0\ , \dots\ \ ve\ \ A_{\nu^0}$$

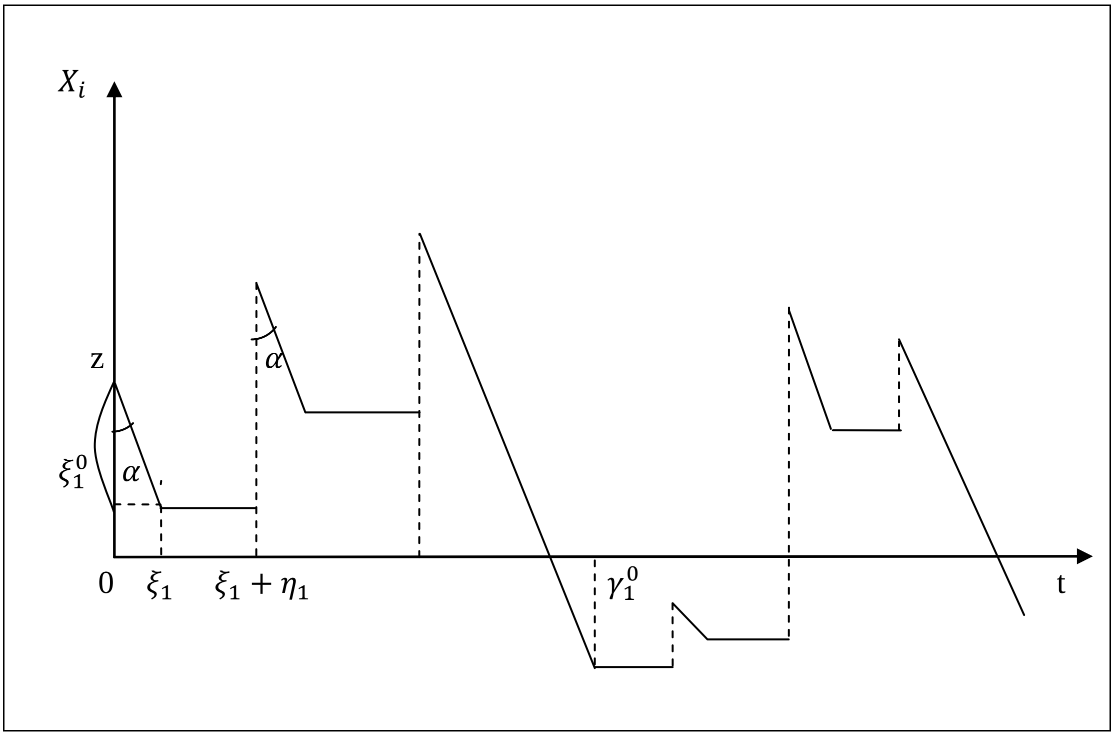
bir değişim operatörü olmak üzere γ_1^0 rastgele değişkenini

$$\gamma_1^0 = \sum_{i=1}^{\nu_1^0} \xi_i + \sum_{i=1}^{\nu_1^0 - 1} \eta_i$$

olarak tanımlayalım. Bu operatörü de dikkate alarak $X_2(t)$ sürecini

$$X_2(t) \begin{cases} X_1(t)\,, & 0 < t < \gamma_1^o - \xi_{\nu_1^0}^n \\ 0, & \gamma_1^0 - \xi_{\nu_1^0}^n \leq t < \gamma_1^o + \eta_1^o \\ \zeta_k^0 + \mathrm{X}_1(t) - X_1(\gamma_k^o + \eta_k^0), & \gamma_k^0 - \eta_k^0 < t < \gamma_{k+1}^o - \xi_{\nu_{k+1}^0}^n \\ 0, & \gamma_{k+1}^0 - \xi_{\nu_{k+1}^0}^n \leq t < \gamma_{k+1}^o - \xi_{\nu_{k+1}^0}^n + \eta_{k+1}^o \end{cases}$$

şeklinde oluşturalım.



Şekil 3.2.

Burada $\xi_{\nu_1^0}^n$, $X_1(t)$ sürecinin t eksenini ilk kez kesme anındaki stok seviyesindeki $\xi_{\nu_1^0}$ sıçrama miktarıdır. Eğer $X_2(t)$ süreci a $(a > 0)$ noktasında tutulursa bu durumda aşağıdaki süreci elde ederiz.

$$X(t) = a + X_2(t) - \sup_{0 \leq s \leq t} (a\,, X_2(s))$$

Herhangi bir t anında depodaki ürünün seviyesi bir stokastik süreç oluşturur. $X(t)$ sürecini, $a > 0$ noktasında ve sıfırda tutan bariyerli, bir $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ açısıyla negatif akımlı ve pozitif sıçramalı gecikmeli yarı-Markov yürüyüş süreci olarak adlandırırız. Bizim bu kısımdaki amacımız

$$\gamma_1^a = \sum_{i=1}^{\nu_1^a} (\xi_i + \eta_i) \tag{3.1}$$

rastgele değişkeninin dağılımının Laplace dönüşümünü bulmak ve bu dağılımın birinci ve ikinci momentlerini hesaplamaktır. Burada ν_1^a rastgele değişkeni $X(t)$ sürecinin a seviyesine ilk kez ulaşıncaya kadarki sıçrayışlarının sayısıdır.

3.3. γ_1^a Rastgele Değişkeninin Laplace Dönüşümü

$$\left.\begin{aligned} &L(\theta, z) = E\left(e^{-\theta\gamma_1^a} \mid X(0) = z\right), && \theta > 0, \quad z \geq 0 \\ &\psi(u, z) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P\{\nu_1^a = k \mid X(0) = z\}, && 0 < u \leq 1 \\ &\varphi_\xi(\theta) = E\left(e^{-\theta\xi}\right) && \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

olsun. Bu takdirde (3.1) ve (3.2) den

$$L(\theta, z) = \psi\left(\varphi_{\xi_1}(\theta).\varphi_{\eta_1}(\theta), z\right) \tag{3.3}$$

elde edilir. $L(\theta, z)$ yi elde etmek için $\psi(u, z)$ yi bulmamız gerektiği açıktır. $k \geq 2$ olduğunda ortak olasılık formülünden

$$P\{\nu_1^a = k | X\,(0) = z\} = \int_{y=0}^{a} [P\{z - \xi_1^0 > 0; z - \xi_1^0 + \zeta_1 < a; z - \xi_1^0 + \zeta_1 \in dy\,\}$$
$$+P\{z - \xi_1^0 < 0; \zeta_1^0 \in dy\,\}]P\{\nu_1^a = k - 1 | \, X(0) = y\}$$

olduğu görülür. Bazı dönüşümlerden sonra

$$\psi(u, z) = u[P\{z - \xi_1^0 > 0; z - \xi_1^0 + \zeta_1 > a\} + P\{z - \xi_1^0 < 0; \zeta_1^0 > a\}]$$
$$+u \int_{y=0}^{a} \psi(u, y)[P\{z - \xi_1^0 > 0; z - \xi_1^0 + \zeta_1 \in dy\} + P\{z - \xi_1^0 < 0; \zeta_1^0 \in dy\}]$$

elde edilir. Bu denklem sadeleştirilerek

$$\psi(u,z) = uP\{\xi_1^0 > z\}P\{\zeta_1^0 > a\} + u \int_{x=0}^{z} P\{\zeta_1 > a + x - z\}P\{\xi_1^0 \in dx\}$$

$$+u\left[\int_{y=z}^{a} \psi(u,y)dy \int_{x=0}^{z} P\{\zeta_1 > x + y - z\}P\{\xi_1^0 \in dx\} + \int_{y=0}^{z} \psi(u,y)dy\right.$$

$$\left.\times \int_{x=z-y}^{z} P\{\zeta_1 < x + y - z\}P\{\xi_1^0 \in dx\} + P\{\xi_1^0 > z\} \int_{y=0}^{a} \psi(u,y)dy\, P\{\zeta_1^0 < y\}\right] \quad (3.4)$$

olduğu görülür. Bu denklem ardışık yaklaşımlar metodu ile çözülebilir. Bu şekildeki bir denklem uygulamalar için uygun olmadığından burada denklemi sadece Erlang dağılım sınıfları için çözmek daha uygundur. ξ_1^0, ζ_1 ve ζ_1^0 rastgele değişkenlerinin sırasıyla μ, λ ve λ_0 parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda (3.4) denklemi

$$\psi(u,z) = \frac{\mu u}{\lambda+\mu} e^{-\lambda(a-z)}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)z}\right] + ue^{-\mu z - \lambda_0 a}$$

$$+\frac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu} e^{\lambda z} \int_{y=z}^{a} e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy - \frac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu} e^{-\mu z} \int_{y=0}^{a} e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy$$

$$+\frac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu} e^{-\mu z} \int_{y=0}^{z} e^{+\mu y}\psi(u,y)dy + \lambda_0 u e^{-\mu z} \int_{y=0}^{a} e^{-\lambda_0 y}\psi(u,y)dy \quad (3.5)$$

şeklini alacaktır. Bu integral denkleminden

$$\psi_z''(u,z) - (\lambda - \mu)\psi_z'(u,z) - \lambda\mu(1-u)\psi(u,z) = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\psi(u,z) = c_1(u)e^{k_1(u)z} + c_2(u)e^{k_2(u)z} \quad (3.6)$$

şeklinde olacaktır, burada

$$k_{1,2}(u) = \frac{\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4\lambda\mu(1-u)}}{2}$$

dır. $z = 0$ ve $z = \alpha$ olduğunda (3.5) bağıntısından aşağıdaki sınır şartları elde edilir.

$$\begin{cases} \psi(u,0) = ue^{-\lambda_0 a} + \lambda_0 u \displaystyle\int_{y=0}^{a} e^{-\lambda_0 y}\psi(u,y)dy, \\ \psi(u,a) = \dfrac{\mu u}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)a}\right] + ue^{-(\lambda_0+\mu)a} \\ \qquad + \dfrac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu} e^{-\mu a}\left[\displaystyle\int_{y=0}^{a} (e^{\mu y} - e^{-\lambda y})\psi(u,y)dy\right] + \lambda_0 u e^{-\mu a} \displaystyle\int_{y=0}^{a} e^{-\lambda_0 y}\psi(u,y)dy \end{cases} \quad (3.7)$$

$z = 0 \; ve \; z = a$ olduğunda (3.6) dan ve (3.7) den

$$\begin{cases} c_1(u) + c_2(u) = ue^{-\lambda_0 a} + \lambda_0 u \displaystyle\int_{y=0}^{a} e^{-\lambda_0 y}\left[c_1(u)e^{k_1(u)y} + c_2(u)e^{k_2(u)y}\right]dy \\ e^{k_1(u)a}c_1(u)e^{k_2(u)a}c_2(u) = \dfrac{\mu u}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)a}\right] + ue^{-(\lambda_0+\mu)a} + \dfrac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu}e^{-\mu a} \\ \qquad \times \left[\displaystyle\int_{y=0}^{a}\left(e^{\mu z} - e^{-\lambda y}\right)\left[c_1(u)e^{k_1(u)y} + c_2(u)e^{k_2(u)y}\right]dy\right] \\ \qquad +\lambda_0 u e^{-\mu a} \displaystyle\int_{y=0}^{a} e^{-\lambda_0 y}\left[c_1(u)e^{k_1(u)y} + c_2(u)e^{k_2(u)y}\right]dy \end{cases} \quad (3.8)$$

elde edilir. Bu cebirsel denklem sisteminden

$$c_1(u) = \frac{d_1 b_2 - d_2 h_2}{h_1 b_2 - h_2 b_1}$$

$$c_2(u) = \frac{d_2 h_1 - d_1 b_1}{h_1 b_2 - h_2 b_1}$$

olduğu görülür, burada

$$h_1 = 1 - \frac{\lambda_0 u}{\lambda_0 - k_1(u)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_1(u)]a}\right],$$

$$h_2 = 1 - \frac{\lambda_0 u}{\lambda_0 - k_2(u)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_2(u)]a}\right],$$

$$b_1 = e^{k_1(u)a} + \frac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu}e^{-\mu a}\left\{\frac{1}{\mu - k_1(u)}\left[1 - e^{-[\mu - k_1(u)]a}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\lambda - k_1(u)}\left[1 - e^{-[\lambda - k_1(u)]a}\right] - \frac{\lambda_0 u}{\lambda_0 - k_1(u)}e^{-\mu a}\left[1 - e^{-[\mu - k_1(u)]a}\right]\right\}$$

$$b_2 = e^{k_2(u)a} + \frac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu}e^{-\mu a}\left\{\frac{1}{\mu - k_2(u)}\left[1 - e^{-[\mu - k_2(u)]a}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\lambda - k_2(u)}\left[1 - e^{-[\lambda - k_2(u)]a}\right] - \frac{\lambda_0 u}{\lambda_0 - k_2(u)}e^{-\mu a}\left[1 - e^{-[\mu - k_2(u)]a}\right]\right\}$$

$$d_1 = ue^{-\lambda_0 a}$$

$$d_2 = ue^{-(\lambda_0+\mu)a} + \frac{\mu u}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)a}\right]$$

dır. $c_1(u) \; ve \; c_2(u)$ değerleri (3.6) da dolayısıyla (3.3) de yerine konularak γ_1^a rastgele değişkeninin dağılımının Laplace dönüşümü elde edilir.

3.4. γ_1^a Rastgele Değişkeninin Beklenen Değer ve Varyansı

(3.1) bağıntısından $E\gamma_1^a$ ve $D\gamma_1^a$ sayısal karakteristikleri

$$E\gamma_1^a = (E\xi_1 + E\eta_1)Ev_1^a \tag{3.9}$$

$$D\gamma_1^a = (D\xi_1 + D\eta_1)Ev_1^a + [E\xi_1 + E\eta_1]^2 Dv_1^a \tag{3.10}$$

olarak bulunur. Öte yandan

$$\begin{cases} Ev_1^a = \psi_u'(1) \\ Dv_1^a = E(v_1^a)^2 - (Ev_1^a)^2 = \psi_u''(1) + \psi_u'(1)[1 - \psi_u'(1)] \end{cases} \tag{3.11}$$

olduğu bilinmektedir. $X(t)$ sürecinin başlangıç dağılımı $\min(a, \zeta_1^0)$ miktarının dağılımıyla çakışacağından

$$\psi_u'(1) = Ev_1^a = \int_{z=0}^{a} E_z v_1^a dP\{min(a, \zeta_1^0) < z\}$$

$$= E_a v_1^a . P\{\zeta_1^0 > a\} + \int_{z=0}^{a} E_z v_1^a dP\{\zeta_1^0 < z\} \tag{3.12}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$E_z v_1^a = \psi_u'(1, z)$$

$$\psi_u''(1) = \psi_u''(1, a)P\{\zeta_1^a > a\} + \int_{z=0}^{a} \psi_u''(1, z)dP\{\zeta_1^a < z\} \tag{3.13}$$

olacaktır, burada

$$\begin{aligned} \psi_u'(1, z) = {} & c_1'(1)e^{k_1(1)z} + c_2'(1)e^{k_2(1)z} \\ & +\left[c_1(1)k_1'(1)e^{k_1(1)z} + c_2(1)k_2'(1)e^{k_2(1)z}\right]z \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \psi_u''(1, z) = {} & c_1''(1)e^{k_1(1)z} + c_2''(1)e^{k_2(1)z} \\ & + 2\left[c_1'(1)k_1'(1)e^{k_1(1)z} + c_2'(1)k_2'(1)e^{k_2(1)z}\right]z \\ & +\left[c_1(1)k_1''(1)e^{k_1(1)z} + c_2(1)k_2''(1)e^{k_2(1)z}\right]z \\ & +\left[c_1(1)[k_1'(1)]^2 e^{k_1(1)z} + c_2(1)[k_2'(1)]^2 e^{k_2(1)z}\right]z^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

dır. $\psi_u'(1)$ ve $\psi_u''(1)$ yi belirlemek için $k_i(1), k_i'(1), k_i''(1), c_i(1), c_i'(1)\ ve\ c_i''(1)$ $i = 1,2$ değerlerini bilmemiz gerekir. $u = 1$ olduğunda $k_1(u)$ ve $k_2(u)$ için verilen ifadelerden bu katsayıların değerlerini Çizelge 3.1. deki biçimde oluştururuz.

$u = 1$ olduğunda (3.8) bağıntısından

$$c_1(1) = \begin{cases} 0, & \lambda > \mu \\ 1, & \lambda < \mu \end{cases} \qquad c_2(1) = \begin{cases} 0, & \lambda < \mu \\ 1, & \lambda > \mu \end{cases}$$

elde edilir. $c_1(u)$ ve $c_2(u)$ değerleri (3.8) sisteminde simetrik olarak verildiğinden ve Çizelge 3.1. deki öğeler de simetrik olarak ifade edildiğinden $u = 1$ olduğunda (3.8) cebirsel sisteminden Çizelge 3.2 yi oluştururuz.

Çizelge 3.1.

Şart	$k_1(1)$	$k_1'(1)$	$k_1''(1)$	$k_2(1)$	$k_2'(1)$	$k_2''(1)$
$\lambda < \mu$ $(E\xi_1 < E\zeta_1)$	0	$\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$	$\lambda-\mu$	$-\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$-\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$
$\lambda > \mu$ $(E\xi_1 > E\zeta_1)$	$\lambda-\mu$	$-\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$-\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$	0	$\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$

Çizelge 3.2.

Şart	$c_1(1)$	$c_1'(1)$	$c_1''(1)$	$c_2(1)$	$c_2'(1)$	$c_2''(1)$
$\lambda < \mu$ $(E\xi_1 < E\zeta_1)$	1	A_1	A_2	0	B_1	B_2
$\lambda > \mu$ $(E\xi_1 > E\zeta_1)$	0	B_1	B_2	1	A_1	A_2

A_1 , A_2 , B_1 ve B_2'nin değerleri aşağıda bulunacaktır. (3.6) bağıntısından $\psi(u,z)$ fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{cases} \psi_u'(u,0) = c_1'(u) + c_2'(u) \\ \psi_u'(u,a) = e^{k_1(u)a}c_1'(u) + ak_1'(u)e^{k_1(u)a}c_1(u) \\ \qquad\qquad +e^{k_2(u)a}c_2'(u) + ak_2'(u)e^{k_2(u)a}c_2(u) \end{cases} \tag{3.16}$$

elde edilir. $u = 1\ ve\ \lambda < \mu$ olduğunda

$$\psi_u'(1,0) = c_1'(1) + c_2'(1) \tag{3.17}$$

$$\psi_u'(1,a) = ak_1'(1)c_1'(1) + e^{(\lambda-\mu)\alpha}c_2'(1) \tag{3.18}$$

olduğu görülür.

(3.16) ifadesinin ikinci türevi alınarak

$$\begin{cases} \psi_u''(u,0) = c_1''(u) + c_2''(u) \\ \psi_u''(u,a) = e^{k_1(u)a}c_1''(u) + 2ak_1'(u)e^{k_1(u)a}c_1'(u) + a^2[k_1'(u)]^2e^{k_1(u)a}c_1(u) \\ \qquad\qquad +e^{k_2(u)a}c_2''(u) + 2ak_2'(u)e^{k_2(u)a}c_2'(u) + a^2[k_2'(u)]^2e^{k_2(u)a}c_2(u) \end{cases} \quad (3.19)$$

elde edilir.

$$\psi_u''(1,0) = c_1''(1) + c_2''(1) \quad (3.20)$$

$$\psi_u''(1,a) = c_1''(1) + 2ak_1'(1)c_1'(1) + e^{(\lambda-\mu)a}c_2''(1) - 2ak_1'(1)e^{(\lambda-\mu)a}c_2'(1)$$
$$+ak_1''(1) + a^2[k_1'(1)]^2 \quad (3.21)$$

$\lambda < \mu$ olduğunda (3.8), (3.16) ve (3.19) bağıntılarından

$$B_1 = c_2'(1) = (\lambda+\mu)(1-e^{-\mu a})$$
$$\times \frac{\left\{\mu a\left[1-e^{-(\lambda+\mu)a}\right] - e^{-\mu a}\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu a}) - \frac{\mu}{\lambda}\left(1-e^{\lambda-a}\right)\right]\right\}k_1'(1) + (\lambda_0-\lambda+\mu)}{\lambda[e^{(\lambda-\mu)a} - e^{-2\mu a}] + \mu(1-e^{-\mu a})[(\lambda-\mu)e^{\lambda_0 a} - \lambda_0 e^{(\lambda-\mu)a}]}$$
$$\times \frac{\left\{\left[\mu(1-e^{-\mu a})e^{\lambda_0 a} + \mu(1-e^{-\mu a})\left[a + \frac{1}{\lambda_0}(1-\lambda_0 e^{-a})\right]\right]\right\}k_1'(1)}{\lambda[e^{(\lambda-\mu)a} - e^{-2\mu a}] + \mu(1-e^{-\mu a})[(\lambda-\mu)e^{\lambda_0 a} - \lambda_0 e^{(\lambda-\mu)a}]} \quad (3.22)$$

$$A_1 = c_1'(1) = e^{\lambda_0 a} - \left[a + \frac{1}{\lambda_0}\left(1-e^{\lambda_0 a}\right)\right]k_1'(1)$$
$$+ \frac{1}{\lambda_0-\lambda+\mu}\left[(\lambda-\mu)e^{\lambda_0 a} - \lambda_0 e^{(\lambda-\mu)a}\right]c_2'(1) \quad (3.23)$$

$$A_2 = c_1''(1) = [a_2c_2'(1) - a_1c_1'(1) - a_3 - a_4]e^{\lambda_0 a}$$
$$-\left[\frac{\lambda-\mu-\lambda_0 e^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}}{\lambda_0-\lambda+\mu}\right]e^{\lambda_0 a}c_2''(1) \quad (3.24)$$

$$B_2 = c_2''(1)$$
$$= \frac{\left\{\alpha_1 - \mu\left[1-e^{-(\lambda-\mu)a}\right]\right\}c_1'(1)}{\lambda(\lambda_0-\lambda+\mu)(e^{\lambda a} - e^{-\mu a}) - \mu[1-e^{-(\lambda-\mu)a}][\lambda-\mu-\lambda_0 e^{(\lambda-\mu)a}]e^{\lambda_0 a}}$$
$$+ \frac{-\left\{\alpha_2 + \mu\left[1-e^{-(\lambda-\mu)a}\right]\alpha_2 e^{\lambda_0 a}\right\}c_2'(1) + \alpha_3 + \alpha_4 - (a_3+a_4)e^{\lambda_0 a}}{\lambda(\lambda_0-\lambda+\mu)(e^{\lambda a} - e^{-\mu a}) - \mu[1-e^{-(\lambda-\mu)a}][\lambda-\mu-\lambda_0 e^{(\lambda-\mu)a}]e^{\lambda_0 a}} \quad (3.25)$$

elde edilir, burada a_i $i = 1,2,3,4$ katsayıları

$$a_1 = 2\left\{1 - e^{-\lambda_0 a} - \left[ae^{-\lambda_0 a} - \frac{1}{\lambda_0}\left(1-e^{-\lambda_0 a}\right)\right]k_1'(1)\right\}c_1'(1)$$

$$a_2 = \frac{2\lambda_0}{\lambda_0-\lambda+\mu}\Bigg\{1-e^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}$$

$$+\left[ae^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}-\frac{1}{\lambda_0-\lambda+\mu}\left[1-e^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}\right]\right]k_1''(1)\Bigg\}c_2'(1)$$

$$a_3 = \left[a^2e^{-\lambda_0 a}+2ae^{-\lambda_0 a}+\frac{2}{\lambda_0^2}\left(1-e^{-\lambda_0 a}\right)\right][k_1(1)]^2$$

$$a_4 = \left[ae^{-\lambda_0 a}-\frac{1}{\lambda_0}\left(1-e^{-\lambda_0 a}\right)\right][2k_1(1)+k_1''(1)]$$

ve α_i $i = 1,2,3,4$ katsayıları ise

$$\alpha_1 = 2\left\{\left[[\lambda+\mu e^{-(\lambda+\mu)a}-(\lambda+\mu)]a+\frac{\lambda}{\mu}(e^{-\mu\alpha}-1)-\frac{\mu}{\lambda}\left[e^{-\mu\alpha}-e^{-(\lambda+\mu)a}\right]\right]k_1'(1)\right\}$$

$$+(\lambda+\mu)(1-e^{-\mu\alpha})$$

$$\alpha_3 = \left[[\lambda+\mu e^{-(\lambda+\mu)a}-(\lambda+\mu)]a+\frac{\lambda}{\mu}(e^{-\mu\alpha}-1)-\frac{\mu}{\lambda}\left[e^{-\mu\alpha}-e^{-(\lambda+\mu)a}\right]\right]k_1''(1)$$

$$\alpha_4 = \Bigg[[\lambda+\mu e^{-(\lambda+\mu)a}-(\lambda+\mu)]a^2+\frac{2\lambda}{\mu^2}(e^{-\mu\alpha}-1)+\frac{2\mu}{\lambda^2}\left[e^{-\mu\alpha}-e^{-(\lambda+\mu)a}\right]$$

$$+2\left[\frac{\mu}{\lambda}e^{-(\lambda+\mu)a}-\frac{\lambda}{\mu}\right]a\Bigg][k_1'(1)]^2+2(\lambda+\mu)[ak_1'(1)-(1-e^{-\mu\alpha})]$$

dır. $\lambda<\mu,\ P\{\zeta_1^0>z\}=e^{-\lambda_0 z}$ ve $z>0$ olduğunda (3.12) ve (3.13) formülleri aşağıdaki şekli alır.

$$\psi_u'(1) = E\nu_1^a = e^{\lambda_0 a}-\frac{a}{E\xi_1^0-E\zeta_1}-\frac{E\zeta_1^0}{E\xi_1^0-E\zeta_1}\left(e^{\lambda_0 a}-e^{-\lambda_0 a}\right)$$

$$+\frac{1}{\lambda_0-\lambda+\mu}\left\{\lambda_0\left[1-e^{(\lambda-\mu)a}\right]+(\lambda-\mu)\left[e^{\lambda_0 a}-e^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}\right]\right\}c_2'(1) \qquad (3.26)$$

$$\psi_u''(1) = c_1''(1)+\frac{1}{\lambda_0-\lambda+\mu}\left[\lambda_0-(\lambda-\mu)e^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}\right]c_2''(1)$$

$$+\frac{2}{\lambda_0}\left(1-e^{-\lambda_0 a}\right)k_1'(1)c_1'(1)$$

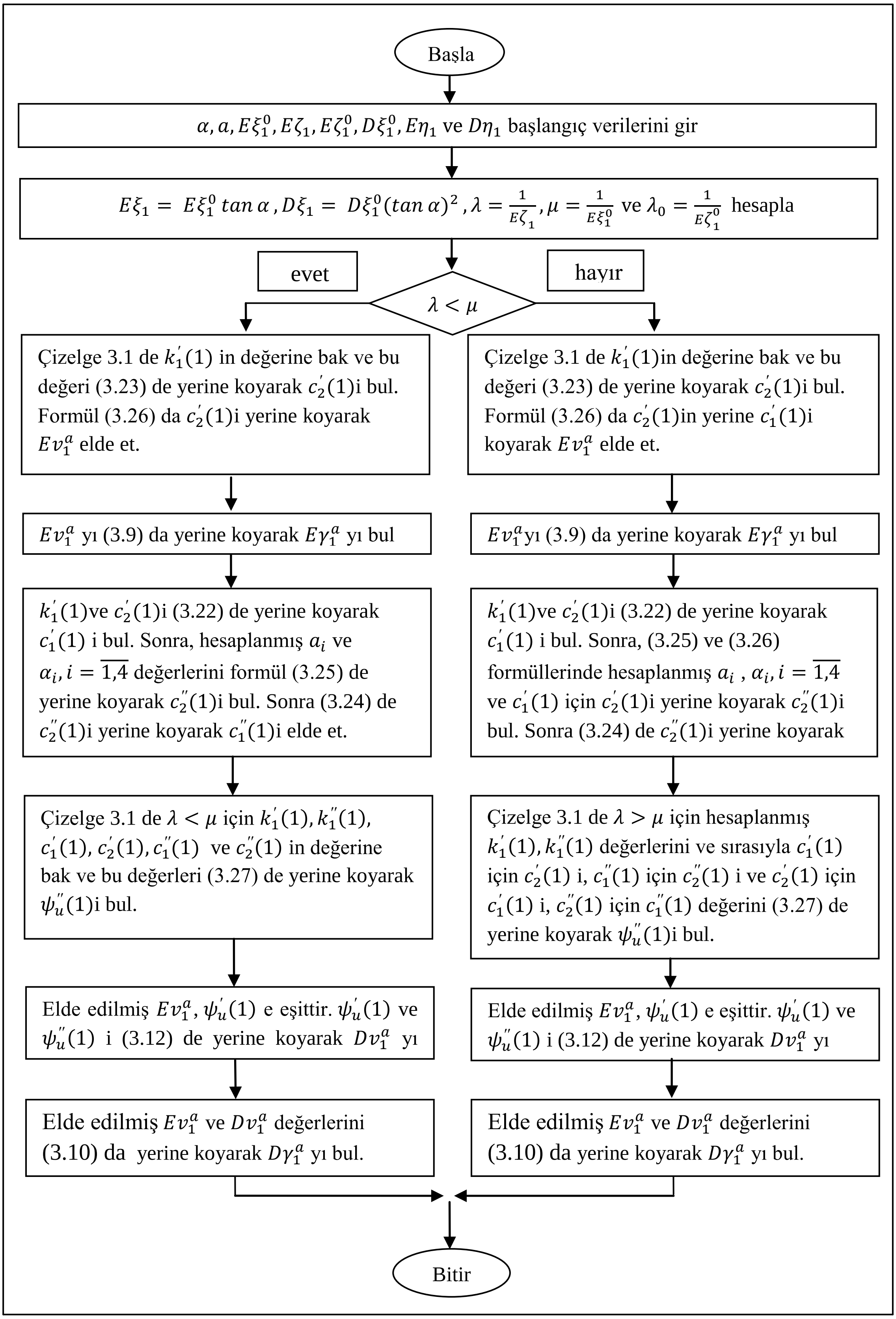
$$+\frac{2}{\lambda_0-\lambda+\mu}\left[(\lambda-\mu)ae^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}+\frac{\lambda_0}{\lambda_0-\lambda+\mu}\left[1-e^{-(\lambda_0-\lambda+\mu)a}\right]\right]k_1'(1)c_2'(1)$$

$$+\frac{1}{\lambda_0}\left(1-e^{-\lambda_0 a}\right)k_1''(1)-\frac{2}{\lambda_0}\left[ae^{-\lambda_0 a}+\frac{1}{\lambda_0}\left(1-e^{-\lambda_0 a}\right)\right][k_1'(1)]^2 \qquad (3.27)$$

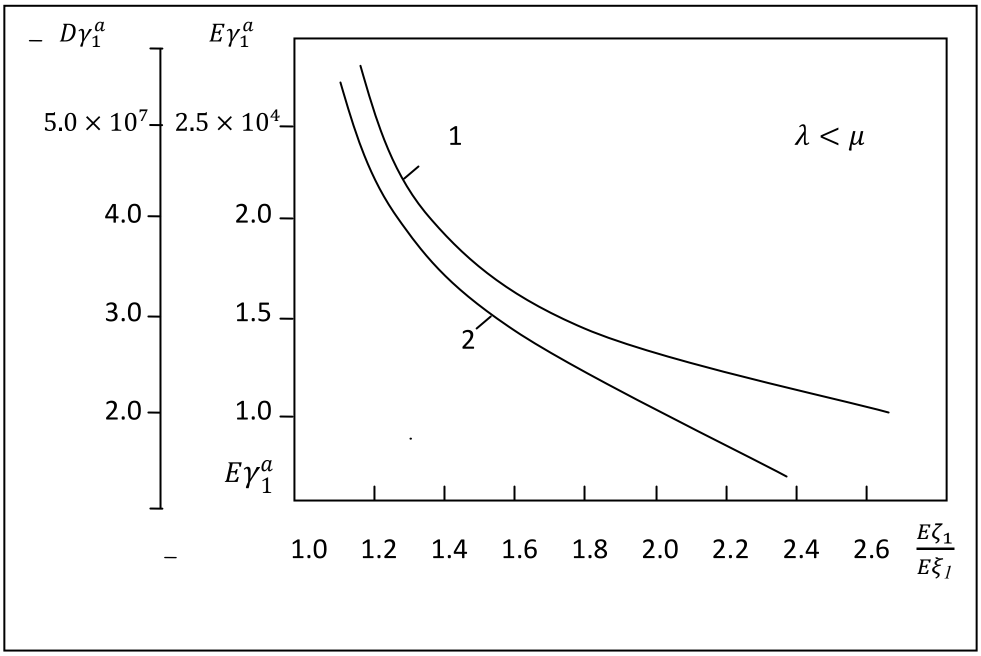
(3.26) ve (3.27) ifadeleri (3.11) de yerine konulursa $D\nu_1^a$ değeri elde edilir. Daha sonra sırasıyla, (3.9) da $E\nu_1^a$ yı ve (3.10) da $D\nu_1^a$ yı yerine konularak $E\gamma_1^a$ ve $D\gamma_1^a$ elde edilir.

Yukarıda elde edilen sonuç kullanılarak $\lambda < \mu$ ve $\lambda > \mu$ olduğunda, $E\gamma_1^a$ ve $D\gamma_1^a$'nın hesaplanması için bir algoritma verilebilir (Şekil 3.3.). Elde edilen sonucu analiz etmek için ileride MATLAB 4'ü kullanarak bu algoritmaya dayanan programlar yazılmış ve sayısal hesaplamalar yapılmıştır. Şekil 3.4. de $\lambda < \mu$ olduğunda, $\frac{E\zeta_1}{E\xi_1}$ parametresinin fonksiyonu olarak, $E\gamma_1^a(1)$ ve $D\gamma_1^a(2)$ dönüşümlerinin eğrileri verilmiştir.

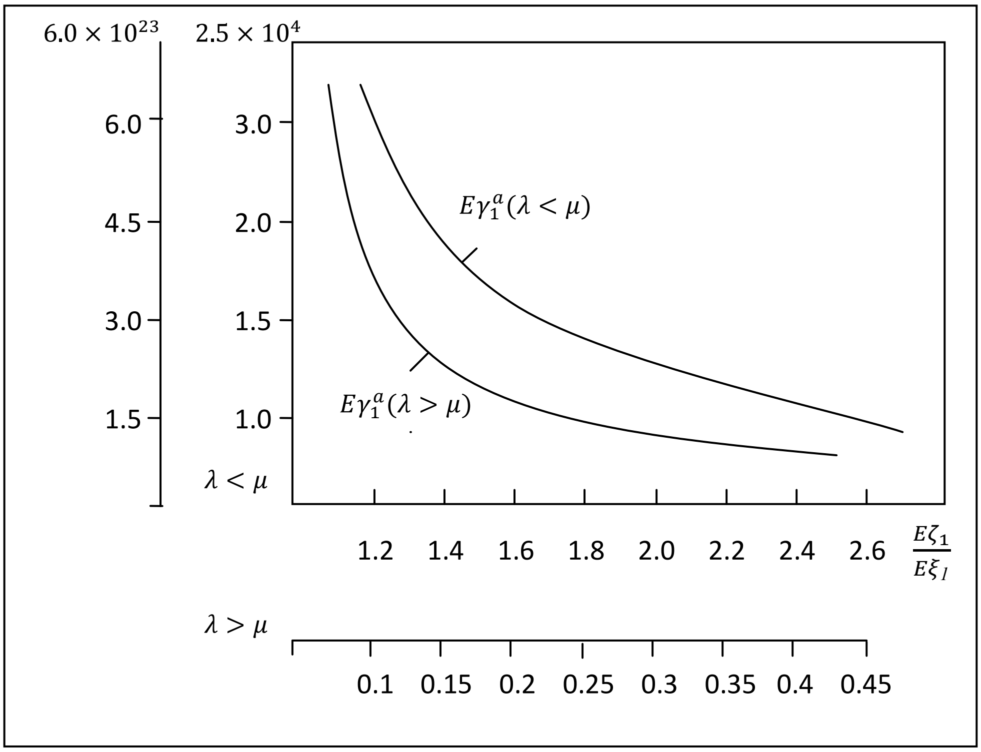
Şekil 3.5. de $\lambda < \mu$ ve $\lambda > \mu$ olduğunda, $\frac{E\zeta_1}{E\xi_1}$ parametresinin bir fonksiyonu olarak $E\gamma_1^a$ deki dönüşümlerinin eğrileri verilmiştir. Kolayca görüldüğü gibi, $\lambda < \mu$ olduğunda, a seviyesine ilk kez ulaşma anının beklenen değeri, $\lambda > \mu$ olduğunda, a seviyesine ilk kez ulaşma anının beklenen değerinden çok daha küçüktür. Bu durum ise elde edilen sonucun doğruluğunu ispatlar.


Başla
$\alpha, a, E\xi_1^0, E\zeta_1, E\zeta_1^0, D\xi_1^0, E\eta_1$ ve $D\eta_1$ başlangıç verilerini gir
$E\xi_1 = E\xi_1^0 \tan\alpha, D\xi_1 = D\xi_1^0(\tan\alpha)^2, \lambda = \frac{1}{E\zeta_1}, \mu = \frac{1}{E\xi_1^0}$ ve $\lambda_0 = \frac{1}{E\zeta_1^0}$ hesapla
evet
$\lambda < \mu$
hayır
Çizelge 3.1 de $k_1^{'}(1)$ in değerine bak ve bu değeri (3.23) de yerine koyarak $c_2^{'}(1)$i bul. Formül (3.26) da $c_2^{'}(1)$i yerine koyarak Ev_1^a elde et.
Çizelge 3.1 de $k_1^{'}(1)$in değerine bak ve bu değeri (3.23) de yerine koyarak $c_2^{'}(1)$i bul. Formül (3.26) da $c_2^{'}(1)$in yerine $c_1^{'}(1)$i koyarak Ev_1^a elde et.
Ev_1^a yı (3.9) da yerine koyarak $E\gamma_1^a$ yı bul
Ev_1^ayı (3.9) da yerine koyarak $E\gamma_1^a$ yı bul
$k_1^{'}(1)$ve $c_2^{'}(1)$i (3.22) de yerine koyarak $c_1^{'}(1)$ i bul. Sonra, hesaplanmış a_i ve $\alpha_i, i = \overline{1,4}$ değerlerini formül (3.25) de yerine koyarak $c_2^{''}(1)$i bul. Sonra (3.24) de $c_2^{''}(1)$i yerine koyarak $c_1^{''}(1)$i elde et.
$k_1^{'}(1)$ve $c_2^{'}(1)$i (3.22) de yerine koyarak $c_1^{'}(1)$ i bul. Sonra, (3.25) ve (3.26) formüllerinde hesaplanmış a_i , $\alpha_i, i = \overline{1,4}$ ve $c_1^{'}(1)$ için $c_2^{'}(1)$i yerine koyarak $c_2^{''}(1)$i bul. Sonra (3.24) de $c_2^{''}(1)$i yerine koyarak
Çizelge 3.1 de $\lambda < \mu$ için $k_1^{'}(1), k_1^{''}(1)$, $c_1^{'}(1)$, $c_2^{'}(1), c_1^{''}(1)$ ve $c_2^{''}(1)$ in değerine bak ve bu değerleri (3.27) de yerine koyarak $\psi_u^{''}(1)$i bul.
Çizelge 3.1 de $\lambda > \mu$ için hesaplanmış $k_1^{'}(1), k_1^{''}(1)$ değerlerini ve sırasıyla $c_1^{'}(1)$ için $c_2^{'}(1)$ i, $c_1^{''}(1)$ için $c_2^{''}(1)$ i ve $c_2^{'}(1)$ için $c_1^{'}(1)$ i, $c_2^{''}(1)$ için $c_1^{''}(1)$ değerini (3.27) de yerine koyarak $\psi_u^{''}(1)$i bul.
Elde edilmiş $Ev_1^a, \psi_u^{'}(1)$ e eşittir. $\psi_u^{'}(1)$ ve $\psi_u^{''}(1)$ i (3.12) de yerine koyarak Dv_1^a yı
Elde edilmiş $Ev_1^a, \psi_u^{'}(1)$ e eşittir. $\psi_u^{'}(1)$ ve $\psi_u^{''}(1)$ i (3.12) de yerine koyarak Dv_1^a yı
Elde edilmiş Ev_1^a ve Dv_1^a değerlerini (3.10) da yerine koyarak $D\gamma_1^a$ yı bul.
Elde edilmiş Ev_1^a ve Dv_1^a değerlerini (3.10) da yerine koyarak $D\gamma_1^a$ yı bul.
Bitir

Şekil 3.3.



Şekil 3.4.



Şekil 3.5.

3.5. γ_1^0 Rastgele Değişkeninin Laplace Dönüşümü

Bizim bu kısımdaki amacımız

$$\gamma_1^0 = \sum_{i=1}^{\nu_1^0} \xi_i + \sum_{i=1}^{\nu_1^0 - 1} \eta_i \tag{3.28}$$

rastgele değişkeninin dağılımının Laplace dönüşümünü bulmak ve bu dağılımın birinci ve ikinci momentlerini hesaplamaktır. Burada ν_1^0, $X(t)$ sürecinin sıfır seviyesine ilk kez düşünceye kadar gerçekleşen sıçramalarının sayısını göstersin. Ayrıca aşağıdaki gösterimleri verelim:

$$\left.\begin{aligned} &L(\theta, z) = E\left(e^{-\theta\gamma_1^0} \mid X(0) = z\right) \\ &\psi(u, z) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P\{\nu_1^0 = k \mid X(0) = z\}, 0 < u \leq 1 \\ &\varphi_\xi(\theta) = E\left(e^{-\theta\xi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

olsun. Bu takdirde (3.28) ve (3.29) dan

$$L(\theta, z) = \varphi_{\eta_1}^{-1}(\theta)\psi\left(\varphi_{\xi_1}(\theta).\varphi_{\eta_1}(\theta), z\right) \tag{3.30}$$

elde edilir. $L(\theta, z)$ yi elde etmek için $\psi(u, z)$ yi bulmamız gerektiği açıktır. $k \geq 2$ olduğunda ortak olasılık formülünden

$$P\{\nu_1^0 = k | X\,(0) = z\}$$
$$= \int_{y=0}^{a} P\{z - \xi_1^0 > 0; (a, z - \xi_1^0 + \zeta_1) \in dy\} P\{\nu_1^0 = k - 1 | X(0) = y\}$$

olduğu görülür. Bazı dönüşümlerden sonra

$$\psi(u, z) = uP\{z - \xi_1^0 < 0\} + u \int_{y=0}^{a} \psi(u, y) P\{z - \xi_1^0 > 0; (a, z - \xi_1^0 + \zeta_1) \in dy\}$$

veya

$$\begin{aligned} \psi(u, z) &= uP\{z - \xi_1^0 < 0\} + \psi(u, z) \\ &= uP\{z - \xi_1^0 > 0; z - \xi_1^0 + \zeta_1 > a\}\psi(u, a) \\ &\quad + u \int_{y=0}^{z} \psi(u, y) dy \int_{x=z-y}^{z} P\{\zeta_1^0 < x + y - z\} dx\, P\{\xi_1^0 < x\} \\ &\quad + u \int_{y=z}^{a} \psi(u, y) dy \int_{x=0}^{z} P\{\zeta_1 < x + y - z\} dx\, P\{\xi_1^0 < x\} \end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir.

Bu kısımda da ξ_1^0 ve ζ_1^0 rastgele değişkenlerinin sırasıyla $\mu\, ve\, \lambda$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumu göz önüne alınacaktır. Bu durumda (3.31) denklemi

$$\psi(u,z) = ue^{-\mu z} + \frac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu}e^{-\mu z}\int_{y=0}^{z}\left[e^{\mu y} - e^{-\lambda y}\right]\psi(u,y)dy$$

$$+\frac{\lambda\mu u}{\lambda+\mu}\left[e^{\lambda z} - e^{-\mu z}\right]\int_{y=z}^{a} e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy - \frac{\mu u}{\lambda+\mu}e^{-\lambda a}\psi(u,a)\left[e^{\mu y} - e^{-\lambda y}\right]$$

şeklini alacaktır. Bu integral denkleminden

$$\psi_z''(u,z) - (\lambda-\mu)\psi_z'(u,z) - \lambda\mu(1-u)\psi(u,z) = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\psi(u,z) = c_1(u)e^{k_1(u)z} + c_2(u)e^{k_2(u)z}$$

şeklinde olacaktır, burada

$$k_{1,2}(u) = \frac{\lambda-\mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4\lambda\mu(1-u)}}{2}$$

dır.

$$\psi(u,0) = u$$

$$\psi_z'(u,0) = -u\mu + u\mu e^{-\lambda a}\psi(u,a) + \lambda u\mu\int_{y=0}^{a}\left[e^{-\lambda y}\psi(u,y)\right]dy$$

sınır şartlarından $c_1(u)$ ve $c_2(u)$ katsayılarının

$$c_1(u) = \frac{u[u\mu - \lambda + k_1(u)]}{[u\mu - \lambda + k_1(u)] - [u\mu - \lambda + k_2(u)]e^{[k_1(u)-k_2(u)]a}} \tag{3.32}$$

$$c_2(u) = \frac{-u[u\mu - \lambda + k_2(u)]e^{[k_1(u)-k_2(u)]a}}{[u\mu - \lambda + k_1(u)] - [u\mu - \lambda + k_2(u)]e^{[k_1(u)-k_2(u)]a}} \tag{3.33}$$

olduğu elde edilir.

$k_1(u), k_2(u), c_1(u)$ ve $c_2(u)$ değerleri (3.6) genel çözümünde dolayısıyla (3.30) ifadesinde yerine yazılırsa γ_1^0 rasgele değişkeninin Laplace dönüşümünün

$$L(\theta,z) = \varphi_{\eta_1}^{-1}(\theta)\left\{c_1\left[\varphi_{\xi_1}(\theta).\varphi_{\eta_1}(\theta)\right]e^{zk_1\left[\varphi_{\xi_1}(\theta).\varphi_{\eta_1}(\theta)\right]}\right.$$

$$\left.+c_2\left[\varphi_{\xi_1}(\theta).\varphi_{\eta_1}(\theta)\right]e^{zk_2\left[\varphi_{\xi_1}(\theta).\varphi_{\eta_1}(\theta)\right]}\right\}$$

olarak yazılabileceği görülür. Uygulamada γ_1^0 rasgele değişkeninin Laplace dönüşümü yerine genellikle $E_z\gamma_1^0$ beklenen değeri ve $D_z\gamma_1^0$ standart sapması kullanılır.

3.6. γ_1^0 Rastgele Değişkeninin Beklenen Değer ve Varyansı

γ_1^0 rasgele değişkeninin birinci ve ikinci momentleri

$$\gamma_1^0 = \sum_{i=1}^{\nu_1^0} \xi_i + \sum_{i=1}^{\nu_1^0 - 1} \eta_i$$

bağıntısından

$$E\gamma_1^0 = (E\xi_1 + E\eta_1)E\nu_1^0 - E\eta_1 \tag{3.34}$$

$$D\gamma_1^0 = (D\xi_1 + D\eta_1 - 2E\xi_1 E\eta_1)E\nu_1^0 + (E\xi_1 + E\eta_1)^2 D\nu_1^0$$
$$+2E\xi_1 E\eta_1[D\nu_1^0 + (E\nu_1^0)^2] - D\eta_1 \tag{3.35}$$

olarak bulunur. Diğer yandan

$$E\nu_1^0 = \psi_u'(1,z) \tag{3.36}$$

$$D\nu_1^0 = \psi_u''(1,z) + \psi_u'(1,z)[1 - \psi_u'(1,z)] \tag{3.37}$$

olduğu bilinmektedir, burada

$$\psi_u'(1,z) = c_1'(1)e^{k_1(1)z} + c_2'(1)e^{k_2(1)z}$$
$$+\left[c_1(1)k_1'(1)e^{k_1(1)z} + c_2(1)k_2'(1)e^{k_2(1)z}\right]z \tag{3.38}$$

$$\psi_u''(1,z) = c_1''(1)e^{k_1(1)z} + c_2''(1)e^{k_2(1)z}$$
$$+2\left[c_1'(1)k_1'(1)e^{k_1(1)z} + c_2'(1)k_2'(1)e^{k_2(1)z}\right]z$$
$$+\left[c_1(1)k_1''(1)e^{k_1(1)z} + c_2(1)k_2''(1)e^{k_2(1)z}\right]z$$
$$+\left[c_1(1)[k_1']^2 e^{k_1(1)z} + c_2(1)[k_2']^2 e^{k_2(1)z}\right]z^2 \tag{3.39}$$

dir.

$$k_{1,2}(u) = \frac{\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4\lambda\mu(1-u)}}{2}$$

ve

$$c_2(u) = \frac{-u[u\mu - \lambda + k_2(u)]e^{[k_1(u)-k_2(u)]a}}{[u\mu - \lambda + k_1(u)] - [u\mu - \lambda + k_2(u)]e^{[k_1(u)-k_2(u)]a}}$$

bağıntılarından $u = 1$ için $k_1'(1), k_1''(1), c_1'(1)$ ve $c_1''(1)$ değerleri $\lambda < \mu$ veya $E\xi_1 < E\zeta_1$ durumunda Çizelge 3.3. deki biçimde, $\lambda > \mu$ veya $E\xi_1 > E\zeta_1$ durumunda ise Çizelge 3.4. deki biçimde oluşturulur.

Çizelge 3.5. de $\psi_u'(1,z)$ ve $\psi_u''(1,z)$ değerleri verilmiştir. (3.38) bağıntısından $\lambda < \mu$ olduğunda

$$\psi_u'(1,z) = c_1'(1) + c_2'(1)e^{(\lambda-\mu)z} + \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}z$$

ve $\lambda > \mu$ olduğunda

$$\psi_u'(1,z) = c_1'(1)e^{(\lambda-\mu)z} + c_2'(1) + \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}z$$

elde edilir.

Dikkat edildiğinde $\lambda > \mu$ için $c_2'(1)$, $\lambda < \mu$ için $c_1'(1)$ e eşittir. Bu yüzden $\lambda > \mu$ ve $\lambda < \mu$ olduğunda $\psi_u'(1,z)$yi hesaplamak için Çizelge 3.3. ün kullanılması yeterlidir. Bu durumda (3.39) bağıntısından $\lambda < \mu$ olduğunda

$$\psi_u''(1,z) = c_1''(1)\left[1 - e^{(\lambda-\mu)z}\right] + 2k_1'(1)z\left[c_1'(1) + c_2'(1)e^{(\lambda-\mu)z}\right] + k_1''(1)z$$
$$+[k_1'(1)]^2z^2$$

ve $\lambda > \mu$ olduğunda

$$\psi_u''(1,z) = c_1''(1)\left[e^{(\lambda-\mu)z} - 1\right] + 2k_1'(1)z\left[c_1'(1)e^{(\lambda-\mu)z} - c_2'(1)\right] + k_1''(1)z$$
$$+[k_1'(1)]^2z^2$$

elde edilir.

Çizelge 3.3.

$c_1(1)$	$c_1'(1)$	$k_1(1)$	$k_1'(1)$	$k_1''(1)$	$c_2(1)$	$c_2'(1)$	$k_2(1)$	$k_2'(1)$	$k_2''(1)$
1	$1+\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 e^{-(\lambda-\mu)a}$	0	$\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$	0	$-\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 e^{-(\lambda-\mu)a}$	$\lambda-\mu$	$-\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$-\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$

$c_1''(1)$	$\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^4}e^{-(\lambda-\mu)a} + \frac{2\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}e^{-(\lambda-\mu)a}c_1'(1) - \frac{\mu[2\lambda-\mu+\lambda a(\lambda-\mu)]}{(\lambda-\mu)^2}c_2'(1)$
$c_2''(1)$	$-c_1''(1)$

Çizelge 3.4.

$c_1(1)$	$c_1'(1)$	$k_1(1)$	$k_1'(1)$	$k_1''(1)$	$c_2(1)$	$c_2'(1)$	$k_2(1)$	$k_2'(1)$	$k_2''(1)$
0	$-\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 e^{-(\lambda-\mu)a}$	$\lambda-\mu$	$-\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$-\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$	1	$1+\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 e^{-(\lambda-\mu)a}$	0	$\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$	$\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$

$c_1''(1)$	$-\frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^4}e^{-(\lambda-\mu)a}+\frac{\mu[2\lambda-\mu+\lambda a(\lambda-\mu)]}{(\lambda-\mu)^2}c_1'(1)-\frac{2\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}e^{-(\lambda-\mu)a}c_2'(1)$
$c_2''(1)$	$-c_1''(1)$

Çizelge 3.5.

$\psi_1'(1,z)$	$1+\frac{\lambda\mu z}{\lambda-\mu}+\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 e^{-(\lambda-\mu)a}\left[1-e^{(\lambda-\mu)z}\right]$
$\psi_1''(1,z)$	$c_1''(1)\left[1-e^{(\lambda-\mu)z}\right]+\frac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left\{1+\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^2}+\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 e^{-(\lambda-\mu)a}\left[1+e^{-(\lambda-\mu)z}\right]\right\}+\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 z^2$

Çizelge 3.6.

a_1	$c_1'(1)$
a_2	$\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$
b_1	$c_1''(1)+c_1'(1)[1-c_1'(1)]$
b_2	$\frac{\lambda\mu(\lambda^2+\mu^2)}{(\lambda-\mu)^3}$
b_3	$\frac{4\lambda\mu}{\lambda-\mu}[1-c_1'(1)]$
b_4	$c_1''(1)-[1-c_1'(1)][1-2c_1'(1)]$
b_5	$[1-c_1'(1)]^2$

Dikkat edildiğinde $\lambda > \mu$ için $c_1'(1)$, $\lambda < \mu$ için $c_2'(1)$ e ve $\lambda > \mu$ için $c_2'(1)$, $\lambda < \mu$ için $c_1'(1)$ e eşittir. $\lambda > \mu$ için $c_1''(1)$ in ters işaretlisi, $\lambda > \mu$ için $c_2''(1)$ e eşit olduğu görülür. Bu yüzden $\lambda > \mu$ ve $\lambda < \mu$ olduğunda $\psi_u''(1,z)$yi hesaplamak için Çizelge 3.3. ün kullanılması yeterlidir. Böylece

$$\psi_u'(1,z) = c_1'(1) + c_2'(1)e^{(\lambda-\mu)z} + \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}z,$$

$$\psi_u''(1,z) = c_1''(1)\left[1 - e^{(\lambda-\mu)z}\right] + \frac{2\lambda\mu}{\lambda-\mu}z\left[c_1'(1) - c_2'(1)e^{(\lambda-\mu)z}\right] + \frac{2(\lambda\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3} + \left[\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\right]^2 z^2$$

olacaktır. Bu formüllerden

$$E_z\nu_1^0 = c_1'(1) + \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}z + [1 - c_1'(1)]e^{(\lambda-\mu)z} \tag{3.40}$$

$$D_z\nu_1^0 = c_1''(1) + c_1'(1)[1 - c_1'(1)] - \{c_1''(1) - c_2'(1)[1 - 2c_1'(1)]\}e^{(\lambda-\mu)z} - \frac{4\lambda\mu}{\lambda-\mu}c_2'(1)ze^{(\lambda-\mu)z} + \frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^3}(\lambda^2+\mu^2)z - [c_2'(1)]^2e^{2(\lambda-\mu)z} \tag{3.41}$$

elde edilir. Daha sade şekilde bu ifadeleri

$$E_z\nu_1^0 = a_1 + a_2 z + (1 - a_1)e^{(\lambda-\mu)z} \tag{3.42}$$

$$D_z\nu_1^0 = b_1 + b_2 z + b_3 z e^{(\lambda-\mu)z} - b_4 e^{(\lambda-\mu)z} - b_5 e^{2(\lambda-\mu)z} \tag{3.43}$$

olarak yazabiliriz. Buradaki $a_i, i = 1,2$ ve $b_i, i = \overline{1,5}$ katsayıları Çizelge 3.6. da verilmiştir.

Şimdi de sürecin başlangıç durumunun bilinmediği varsayımı altında ν_1^0 rastgele değişkeninin birinci ve ikinci momentlerini hesaplayalım. $X(t)$ sürecinin başlangıç durumunun dağılımı $min(a, \zeta_1^0)$ miktarının dağılımı ile çakışacağından

$$E\nu_1^0 = \int_{z=0}^{a} E_z\nu_1^0 dP\{min(a,\zeta_1^0) < z\}$$

ve

$$D\nu_1^0 = \int_{z=0}^{a} D_z\nu_1^0 dP\{min(a,\zeta_1^0) < z\}$$

yazılabilir. Bu durumda γ_1^0 rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$E\gamma_1^0 = (E\xi_1 + E\eta_1)E\nu_1^0 - E\eta_1 \tag{3.44}$$

ve

$$D\gamma_1^0 = (D\xi_1 + D\eta_1 - 2E\xi_1 E\eta_1)E\nu_1^0 + (E\xi_1 + E\eta_1)^2 \mathrm{D}\nu_1^0$$
$$+2E\xi_1 E\eta_1[D\nu_1^0 + (E\nu_1^0)^2] - D\eta_1 \quad (3.45)$$

şekinde yazılabilir. Burada

$$E\nu_1^0 = E_a\nu_1^0 P\{\zeta_1^0 > a\} + \int_{z=0}^{a} E_z\nu_1^0 dP\{\zeta_1^0 < z\} \quad (3.46)$$

ve

$$D\nu_1^0 = D_a\nu_1^0 P\{\zeta_1^0 > a\} + \int_{z=0}^{a} D_z\nu_1^0 dP\{\zeta_1^0 < z\} \quad (3.47)$$

dir.

Çizelge 3.7.

d_1	$(1+\lambda_0 a)e^{-\lambda_0 a}$
d_2	$\frac{2}{\lambda_0} - \lambda_0\left(a^2 + \frac{2a}{\lambda_0} - \frac{2}{\lambda_0{}^2}\right)e^{-\lambda_0 a}$
d_3	$\lambda_0^2\left\{-\frac{2}{(\lambda-\lambda_0-\mu)^3} + \left[\frac{a^2}{\lambda-\lambda_0-\mu} - \frac{2}{(\lambda-\lambda_0-\mu)^2}\left(a - \frac{1}{\lambda-\lambda_0-\mu}\right)\right]e^{(\lambda-\lambda_0-\mu)a}\right\}$
d_4	$\lambda_0^2\left[\frac{1}{(\lambda-\lambda_0-\mu)^2} + \frac{1}{\lambda-\lambda_0-\mu}\left(a - \frac{1}{\lambda-\lambda_0-\mu}\right)e^{(\lambda-\lambda_0-\mu)a}\right]$
d_5	$\lambda_0^2\left\{\frac{1}{(2\lambda-\lambda_0-2\mu)^2} + \left[\frac{1}{2\lambda-\lambda_0-2\mu}\left(a - \frac{1}{2\lambda-\lambda_0-2\mu}\right)\right]e^{(2\lambda-\lambda_0-2\mu)a}\right\}$

Bu durumda (3.42), (3.43), (3.46) ve (3.47) formülleri kullanılarak

$$E\nu_1^0 = a_1 + \left[aa_2 + (1-a_1)e^{(\lambda-\mu)a}\right]d_1 + a_2 d_2 + (1-a_1)d_4 \quad (3.48)$$

$$D\nu_1^0 = b_1 + \left[ab_2 - ab_3 e^{(\lambda-\mu)a} - b_4 e^{(\lambda-\mu)a} - b_5 e^{2(\lambda-\mu)a}\right]d_1$$
$$+b_2 d_2 - b_3 d_3 - b_4 d_4 - b_5 d_5 \quad (3.49)$$

elde edilir. Burada d_1, d_2, d_3, d_4 ve d_5 değerleri

$$d_1 = P\{\zeta_1^0 < z\}$$

$$d_2 = \int_{z=0}^{a} z dP\{\zeta_1^0 < z\}$$

$$d_3 = \int_{z=0}^{a} z e^{(\lambda-\mu)z} dP\{\zeta_1^0 < z\}$$

$$d_4 = \int_{z=0}^{a} e^{(\lambda-\mu)z} dP\{\zeta_1^0 < z\}$$

$$d_5 = \int_{z=0}^{a} e^{2(\lambda-\mu)z} dP\{\zeta_1^0 < z\}$$

şeklinde olacaktır.

Böylece $E\gamma_1^0$ ve $D\gamma_1^0$ değerlerini hesaplamak için (3.44), (3.45), (3.48) ve (3.49) formüllerinin kullanılması gerekir. ζ_1^0 rasgele değişkeni λ_0 parametreli iki–boyutlu Erlang dağılımına sahip olduğunda $d_i\,, i = \overline{1,5}$ değerleri Çizelge 3.7. de verilmiştir. Yani $z > 0$ ve $\lambda_0 > 0$ olmak üzere

$$P\{\zeta_1^0 < z\} = 1 - (1 + \lambda_0 z)e^{-\lambda_0 z}, \qquad \lambda_0 = \frac{2}{E\zeta_1^0},\ P_{\zeta_1^0}(z) = \lambda_0^2 z e^{-\lambda_0 z}$$

dır.

Yukarıda, ζ_1^0 rastgele değişkeninin iki-boyutlu Erlang dağılımına sahip olması durumunda $E\gamma_1^0$ ve $D\gamma_1^0$ birinci ve ikinci momentleri bulunmuştur. Bu sonuçları ζ_1^0 in üstel dağılıma sahip olması durumuna uyarlayalım. $E\gamma_1^0$ ve $D\gamma_1^0$ için aşağıdaki ifadeler elde edilmiştir.

$$E\gamma_1^0 = (E\xi_1 + E\eta_1)E\nu_1^0 - E\eta_1 \tag{3.50}$$

$$D\gamma_1^0 = [D\xi_1 + D\eta_1]E\nu_1^0 + [E\xi_1 + E\eta_1]^2 D\nu_1^0 - D\eta_1 \tag{3.51}$$

$P\{\zeta_1^0 > z\} = e^{-\lambda_0 z},\ \lambda_0 > 0,\ z > 0$ için (3.11), (3.14) ve (3.18) formülleri kullanılarak

$$\psi_u'(1) = \frac{1}{\lambda_0 - k_1(1)}\left[\lambda_0 - k_1(1)e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}\right]c_1'(1)$$
$$+\frac{1}{\lambda_0 - k_2(1)}\left[\lambda_0 - k_2(1)e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a}\right]c_2'(1) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - k_1(1)}\Big\{-ae^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}$$
$$+\frac{1}{\lambda_0 - k_1(1)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}\right]\Big\}c_1(1)k_1'(1) \tag{3.52}$$
$$+\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - k_2(1)}\left\{-ae^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a} + \frac{1}{\lambda_0 - k_2(1)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a}\right]\right\}c_2(1)k_2'(1)$$

elde edilir.

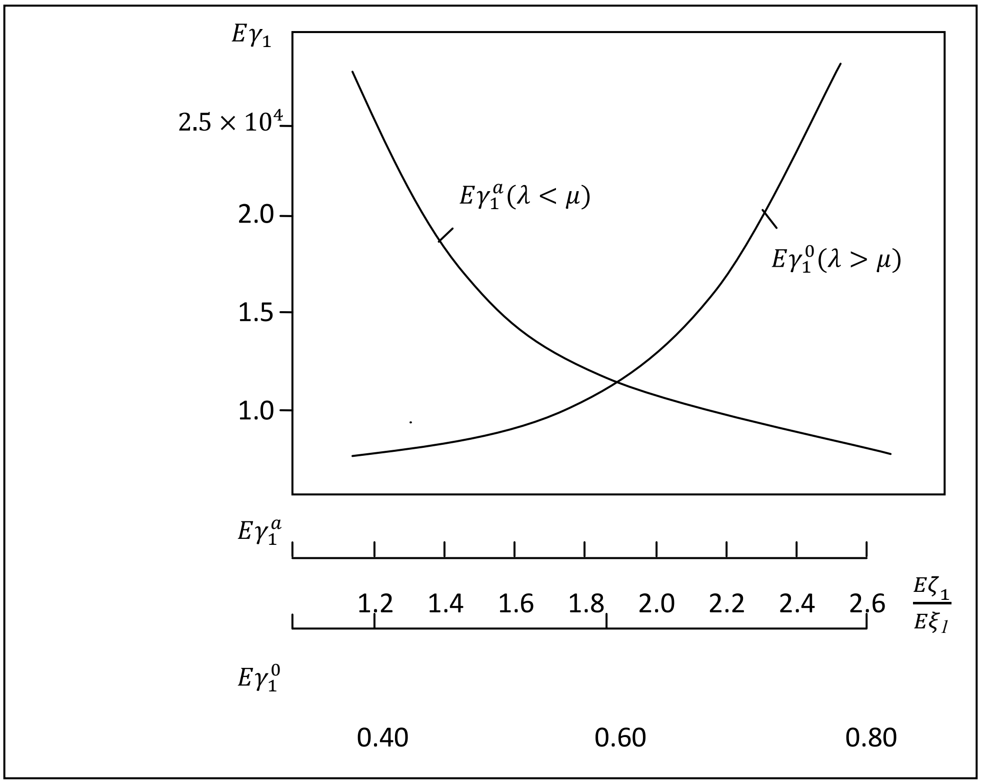
(3.13), (3.15), (3.21) formülleri ve ζ_1^0 rastgele değişkeninin dağılımı kullanılarak

$$\psi_u''(1) = \frac{1}{\lambda_0 - k_1(1)}\left[\lambda_0 - k_1(1)e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}\right]c_1''(1)$$
$$+\frac{1}{\lambda_0 - k_2(1)}\left[\lambda_0 - k_2(1)e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}\right]c_2''(1)$$
$$+\frac{2}{\lambda_0 - k_1(1)}\left[-ak_1'(1)e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a} + \frac{1}{\lambda_0 - k_1(1)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}\right]\right]c_1'(1)k_1'(1)$$
$$+\frac{2}{\lambda_0 - k_2(1)}\left[-ak_2'(1)e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a} + \frac{1}{\lambda_0 - k_2(1)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a}\right]\right]c_2'(1)k_2'(1)$$
$$+\frac{1}{\lambda_0 - k_1(1)}\left[-ak_1'(1)e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a} + \frac{1}{\lambda_0 - k_1(1)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}\right]\right]c_1(1)k_1''(1)$$
$$+\frac{1}{\lambda_0 - k_2(1)}\left[-ak_2'(1)e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a} + \frac{1}{\lambda_0 - k_2(1)}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a}\right]\right]c_2(1)k_2''(1)$$
$$+\frac{1}{\lambda_0 - k_1(1)}\Bigg[a^2k_1(1)e^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a} + \frac{2}{\lambda_0 - k_1(1)}ae^{-[\lambda_0 - k_1(1)]a}$$
$$-\frac{2}{\left(\lambda_0 - k_1(1)\right)^2}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a}\right]\Bigg]c_1(1)(k_1'(1))^2$$
$$-\frac{1}{\lambda_0 - k_2(1)}\Bigg[a^2k_2(1)e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a} + \frac{2}{\lambda_0 - k_2(1)}ae^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a}$$
$$-\frac{2}{\left(\lambda_0 - k_2(1)\right)^2}\left[1 - e^{-[\lambda_0 - k_2(1)]a}\right]\Bigg]c_1(1)(k_2'(1))^2 \tag{3.53}$$

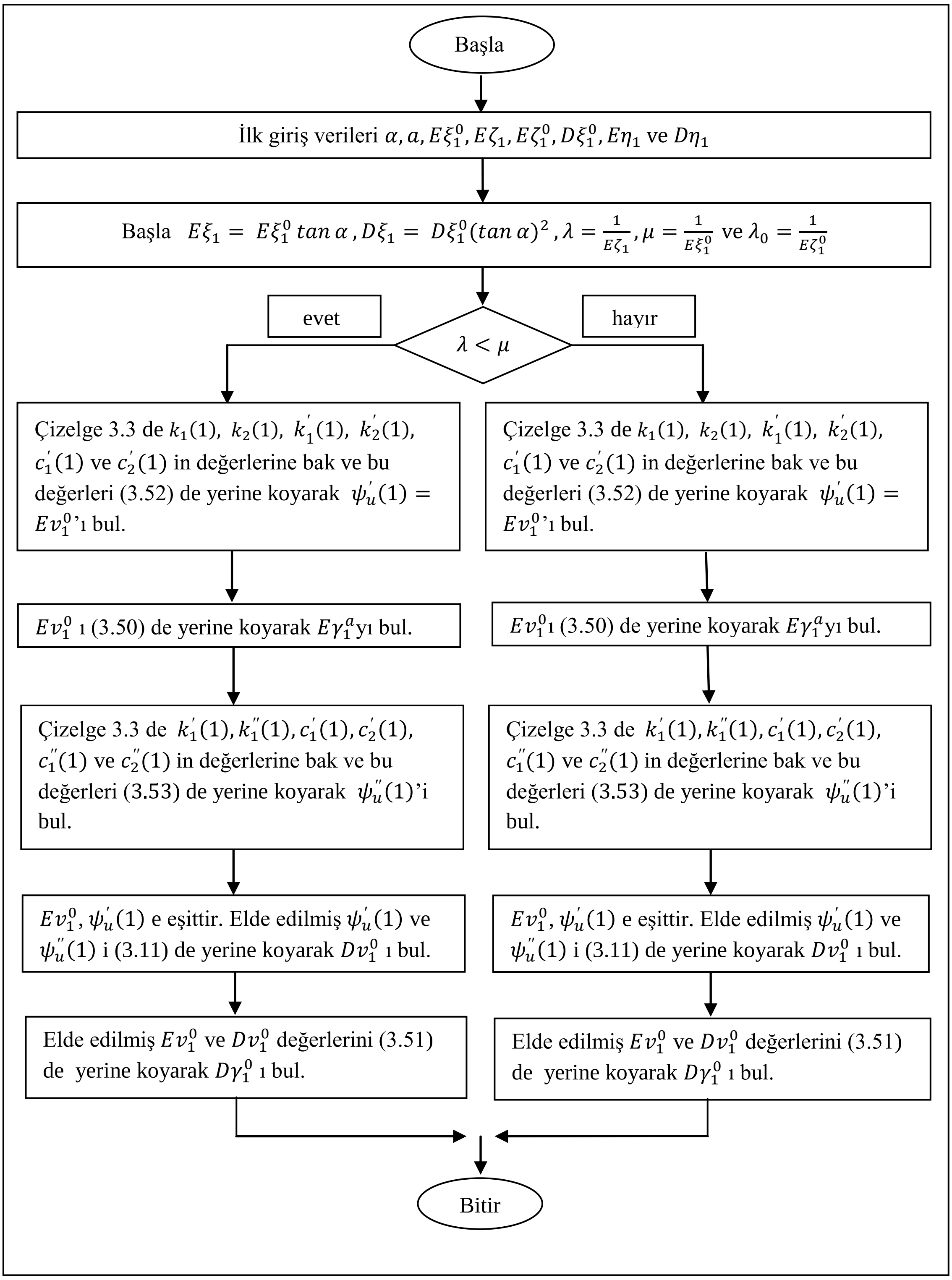
elde edilir.

Şekil 3.6. da, $\frac{E\zeta_1}{E\xi_1}$ parametresinin fonksiyonu olarak $\lambda < \mu$ olduğunda $E\gamma_1^a$ ve $\lambda > \mu$ olduğunda $E\gamma_1^0$ dönüşümlerinin eğrileri verilmiştir.

(3.52) ve (3.53) bağıntılarını kullanarak $E\gamma_1^0$ ve $D\gamma_1^0$ ın sayısal değerlerini belirlemek için yazılan algoritma Şekil 3.7. de verilmiştir.



Şekil 3.6.


Başla
İlk giriş verileri $\alpha, a, E\xi_1^0, E\zeta_1, E\zeta_1^0, D\xi_1^0, E\eta_1$ ve $D\eta_1$
Başla $E\xi_1 = E\xi_1^0 \tan\alpha, D\xi_1 = D\xi_1^0(\tan\alpha)^2, \lambda = \frac{1}{E\zeta_1}, \mu = \frac{1}{E\xi_1^0}$ ve $\lambda_0 = \frac{1}{E\zeta_1^0}$
evet
$\lambda < \mu$
hayır
Çizelge 3.3 de $k_1(1)$, $k_2(1)$, $k_1'(1)$, $k_2'(1)$, $c_1'(1)$ ve $c_2'(1)$ in değerlerine bak ve bu değerleri (3.52) de yerine koyarak $\psi_u'(1) = Ev_1^0$'ı bul.
Çizelge 3.3 de $k_1(1)$, $k_2(1)$, $k_1'(1)$, $k_2'(1)$, $c_1'(1)$ ve $c_2'(1)$ in değerlerine bak ve bu değerleri (3.52) de yerine koyarak $\psi_u'(1) = Ev_1^0$'ı bul.
Ev_1^0 ı (3.50) de yerine koyarak $E\gamma_1^a$yı bul.
Ev_1^0ı (3.50) de yerine koyarak $E\gamma_1^a$yı bul.
Çizelge 3.3 de $k_1'(1), k_1''(1), c_1'(1), c_2'(1)$, $c_1''(1)$ ve $c_2''(1)$ in değerlerine bak ve bu değerleri (3.53) de yerine koyarak $\psi_u''(1)$'i bul.
Çizelge 3.3 de $k_1'(1), k_1''(1), c_1'(1), c_2'(1)$, $c_1''(1)$ ve $c_2''(1)$ in değerlerine bak ve bu değerleri (3.53) de yerine koyarak $\psi_u''(1)$'i bul.
Ev_1^0, $\psi_u'(1)$ e eşittir. Elde edilmiş $\psi_u'(1)$ ve $\psi_u''(1)$ i (3.11) de yerine koyarak Dv_1^0 ı bul.
Ev_1^0, $\psi_u'(1)$ e eşittir. Elde edilmiş $\psi_u'(1)$ ve $\psi_u''(1)$ i (3.11) de yerine koyarak Dv_1^0 ı bul.
Elde edilmiş Ev_1^0 ve Dv_1^0 değerlerini (3.51) de yerine koyarak $D\gamma_1^0$ ı bul.
Elde edilmiş Ev_1^0 ve Dv_1^0 değerlerini (3.51) de yerine koyarak $D\gamma_1^0$ ı bul.
Bitir

Şekil 3.7.

Yukarıda ξ_1^0 ve ζ_1^0 rastgele değişkenlerinin üstel dağılıma ve ζ_1^0 rastgele değişkeninin λ_0 parametreli iki–boyutlu Erlang dağılımına sahip olması özel durumları incelendi. Bu kısımdaki amacımız ξ_1^0 rasgele değişkeninin μ parametreli ikinci mertebeden Erlang dağılımına sahip ve ζ_1^0 rasgele değişkeninin λ parametreli üstel dağılıma sahip olması varsayımı altında, γ_1^0 rastgele değişkeninin Laplace dönüşümü bulmak ve bunun beklenen değer ve varyansını hesaplamaktır. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\gamma_1^0 = \sum_{i=1}^{\nu_1^0 - 1} (\xi_i + \eta_i) + \xi'_{\nu_1^0} \tag{3.54}$$

$$\psi(u) = Eu^{\nu_1^0} = \sum_{k=1}^{\infty} u^k P\{\nu_1^0 = k\}, 0 \le u \le 1 \tag{3.55}$$

$$L_{\gamma_1^0}(\theta) = Ee^{-\theta \gamma_1^0}, \theta > 0 \tag{3.56}$$

Burada $\xi'_{\nu_1^0}$ rastgele değişkeni, $\xi_{\nu_1^0}$ rastgele değişkeninin bir parçasıdır.

$\psi(u)$ moment çıkaran fonksiyonu bulmak için koşullu(şartlı) beklenen değerden yararlanacağız, yani

$$E\xi = \int_{z=0}^{a} E(\xi / X(0) = z) P\{X(0) \in dz\} \tag{3.57}$$

formülünü kullanacağız. ν_1^0 rastgele değişkeni için $\psi(u, z)$ şartlı moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\psi(u, z) = E\left(u^{\nu_1^0} / X(0) = z\right)$$

Bu durumda (3.57) ifadesinden $\psi(u)$ moment çıkaran fonksiyonu

$$\psi(u) = \int_{z=0}^{a} \psi(u, z) P\{X(0) \in dz\} = \int_{z=0}^{a} \psi(u, z) P\{min(a, \zeta_1^0) \in dz\} \tag{3.58}$$

olacaktır. $L_{\gamma_1^0}(\theta)$ yı bulmak için $\psi(u)$ moment çıkaran fonksiyonu bulmak gerekir. $\psi(u)$ yu bulmak için ise $\psi(u, z)$ moment çıkaran fonksiyonunun bulunması gerekmektedir.

ξ_1^0 rasgele değişkeninin μ parametreli ikinci mertebeden Erlang dağılımına sahip ve ζ_1^0 rasgele değişkeninin λ parametreli üstel dağılıma sahip olması varsayımı altında, γ_1^0 rastgele değişkeninin Laplace dönüşümü bulunacaktır. Bu durumda

$$P_{\xi_1^0}(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}, \quad t > 0, \mu > 0 \tag{3.59}$$

$$P_{\zeta_1^0}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \lambda > 0 \tag{3.60}$$

elde edilir. Bunun la birlikte

$$\mathrm{E}\nu_1^0 = \psi_u'(1) \tag{3.61}$$

$$D\nu_1^0 = E(\nu_1^0)^2 - (\mathrm{E}\nu_1^0)^2 = \psi_u''(1) + \psi_u'(1)[1 - \psi_u'(1)\,] \tag{3.62}$$

olduğu bilinmektedir.

ζ_1^0 rastgele değişkeni λ parametreli üstel dağılıma sahip olduğundan (3.58) ifadesinden aşağıdaki denklemler yazılır.

$$\psi(u) = e^{-\lambda a}\psi(u,a) + \lambda \int_{z=0+}^{a} e^{-\lambda z}\psi(u,z)dz \tag{3.63}$$

$$\psi_u'(u) = e^{-\lambda a}\psi_u'(u,a) + \lambda \int_{z=0+}^{a} e^{-\lambda z}\psi_u'(u,z)dz \tag{3.64}$$

$$\psi_u''(u) = e^{-\lambda a}\psi_u''(u,a) + \lambda \int_{z=0+}^{a} e^{-\lambda z}\psi_u''(u,z)dz \tag{3.65}$$

Böylece (3.54) ve (3.56) dan γ_1^0 rastgele değişkeninin Laplace dönüşümünü

$$L_{\gamma_1^0}(\theta) = \frac{\psi\left(L_{\xi_1}(\theta).L_{\eta_1}(\theta)\right)}{L_{\xi_1}(\theta).L_{\eta_1}(\theta)} L_{\xi_{\nu_1^0}}(\theta) \tag{3.66}$$

olarak yazmak mümkündür. Bu eşitlikten γ_1^0 rastgele değişkeninin Laplace dönüşümü bulmak için ν_1^0 rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonunu bulmak gerekir.

$X(t)$ sürecinin alt bariyere ilk kez ulaşma anın moment çıkaran fonksiyonunu bulmak için bir integral denklemi kurulmalıdır. Bu nedenle ν_1^0 rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu için aşağıdaki integral denklemi yazılabilir. $\zeta_1^0 > 0$ olduğundan toplam olasılık formulünü kullanarak $k \geq 2$ için

$$P\{\nu_1^0 = k/X(0) = z\} = \int_{y=0}^{a} P\{z - \xi_1^0 > 0, min(a, z - \xi_1^0 + \zeta_1^0) \in dy\}$$

$$\times P\{\nu_1^0 = k - 1/X(0) = y\} \tag{3.67}$$

elde edilir. Bu denklemin iki tarafı u^k ile çarpılıp $k = 2$ den ∞ a kadar toplam alınırsa $\psi(u,z)$ moment çıkaran fonksiyonu için aşağıdaki integral denklemi elde edilir.

$$\psi(u,z) = uP\{z-\xi_1^0<0\}z + u\int_{y=0+}^{a}\psi(u,y)P\{z-\xi_1^0>0, min(a,z-\xi_1^0+\zeta_1^0)\in dy\} \quad (3.68)$$

Bu denklemi

$$\psi(u,z) = uP\{\xi_1^0>z\}z + u\psi(u,a)P\{z-\xi_1^0>0, z-\xi_1^0+\zeta_1^0>a\} + u\int_{y=0+}^{a}\psi(u,y)dyP\{z-\xi_1^0+\zeta_1^0<y\} \quad (3.69)$$

olarak yazabiliriz. (3.69) denklemi ise

$$\sup_z\left\{\int_{y=0+}^{a}P\{z-\xi_1^0>0, min(a,z-\xi_1^0+\zeta_1^0)\in dy\}\right\}<1$$

olmak koşuluyla ardışık yaklaşım metodu ile çözülebilir. Fakat bu çözümü kullanmak uygulamada çok zordur.

ξ_1^0 rasgele değişkeni μ parametreli ikinci mertebeden Erlang dağılımına ve ζ_1^0 rasgele değişkeni ise λ parametreli üstel dağılıma sahip olduğundan (3.69) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\psi(u,z) &= u(1+\mu z)e^{-\mu z}\\ &+u\mu^2\psi(u,a)\left\{-\left[\frac{z}{\lambda+\mu}+\frac{1}{(\lambda+\mu)^2}\right]e^{-\lambda a-\mu z}+\frac{1}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\lambda a+\lambda z}\right\}\\ &-\frac{\lambda\mu^2u}{\lambda+\mu}ze^{-\mu z}\int_{y=0+}^{z}e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy-\frac{\lambda\mu^2u}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu z}\int_{y=0+}^{z}e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy\\ &+\frac{\lambda\mu^2u}{\lambda+\mu}ze^{-\mu z}\int_{y=0+}^{z}e^{-\mu y}\psi(u,y)dy-\frac{\lambda\mu^2u}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu z}\int_{y=0+}^{z}ye^{\mu y}\psi(u,y)dy \quad (3.70)\\ &+\frac{\lambda\mu^2u}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu z}\int_{y=0+}^{z}e^{\mu y}\psi(u,y)dy-\frac{\lambda\mu^2u}{\lambda+\mu}ze^{-\mu z}\int_{y=z}^{a}e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy\\ &-\frac{\lambda\mu^2u}{(\lambda+\mu)^2}e^{-\mu z}\int_{y=z}^{a}e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy+\frac{\lambda\mu^2u}{(\lambda+\mu)^2}e^{\lambda z}\int_{y=z}^{a}e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy\end{aligned}$$

integral denkleminden

$$\psi_u'''(u,z)-(\lambda-2\mu)\psi_u'''(u,z)-\mu(2\lambda-\mu)\psi_u'(u,z)-\lambda\mu^2(1-u)\psi(u,z)=0 \quad (3.71)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\psi(u,z)=\sum_{i=1}^{3}c_i(u)e^{zk_i(u)} \tag{3.72}$$

şeklinde olacaktır. Burada $k_1(u), k_2(u)\ ve\ k_3(u)$

$$k^3(u)-(\lambda-2\mu)k^2(u)-\mu(2\lambda-\mu)k(u)-\lambda\mu^2(1-u)=0 \tag{3.73}$$

karakteristik denkleminin kökleridir. (3.73) denklemi (3.71) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemidir. Öte yandan (3.73) denklemi

$$\begin{aligned} &k_1(u)-P(u)+Q(u)-\frac{a_1}{3}\\ &k_2(u)=w_1P(u)+w_1^2Q(u)-\frac{a_1}{3}\\ &k_3(u)=w_2P(u)+w_2^2Q(u)-\frac{a_1}{3}\end{aligned} \tag{3.74}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$w_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\qquad w_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\qquad a_1=-(\lambda-2\mu),\qquad a_2=-\mu(2\lambda-\mu),$$

$$p=a_2-\frac{a_1^3}{3},\qquad q(u)=\frac{2a_1^3}{27}-\frac{a_1a_2}{3}-\lambda\mu^2(1-u),\qquad \sqrt{i}=-1,$$

$$P(u)=\sqrt[3]{-\frac{q(u)}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2(u)}{4}}},\qquad Q(u)=\sqrt[3]{-\frac{q(u)}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2(u)}{4}}}.$$

olacaktır. Bu ifadeler, $c_i(u), (i=1,2,3)$ ler için aşağıdaki sınır şartlarından elde edilir.

$$\begin{aligned} &\psi(u,0)=u,\qquad \psi_z'(u,0)=0\\ &\psi_z''(u,0)=-\mu^2u+\mu^2e^{-\lambda a}u\psi(u,a)-\lambda\mu^2u\int_{y=0+}^{a}e^{-\lambda y}\psi(u,y)dy\end{aligned} \tag{3.75}$$

(3.75) ve (3.72) ifadelerinden

$$\sum_{i=1}^{3}c_i(u)=u,\qquad \sum_{i=1}^{3}k_i(u)c_i(u)=0,\qquad \sum_{i=1}^{3}A_i(u)c_i(u)=-\mu^2u. \tag{3.76}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} &c_1(u)=u\frac{k_2(u)[\mu^2+A_3(u)]-k_3(u)[\mu^2+A_2(u)]}{\Delta(u)},\\ &c_2(u)=-u\frac{k_1(u)[\mu^2+A_3(u)]-k_3(u)[\mu^2+A_2(u)]}{\Delta(u)},\\ &c_3(u)=u\frac{k_1(u)[\mu^2+A_2(u)]-k_2(u)[\mu^2+A_2(u)]}{\Delta(u)},\end{aligned} \tag{3.77}$$

elde edilir ki burada

$$A_i(u) = k_i^2(u) - \frac{\lambda\mu^2 u}{\lambda - k_i(u)} + \mu^2 \frac{u k_i(u)}{\lambda - k_i(u)} e^{-[\lambda - k_i(u)]a}, \quad i = 1,2,3$$

$$\Delta(u) = k_1(u)[A_2(u) - A_3(u)] + k_2(u)[A_3(u) - A_1(u)] - k_3(u)[A_2(u) - A_1(u)]$$

dur.

(3.72) de bu değerleri yerine koyarak $\psi(u,z)$ yi, (3.63) de $\psi(u,z)$ yi yerine koyarak $\psi(u)$ yu ve son olarak (3.66) da $\psi(u)$ yu yerine koyarak γ_1^0 rastgele değişkeninin Laplace dönüşümünü elde ederiz.

(3.54) ifadesinden

$$E\gamma_1^0 = (E\xi_1 + E\eta_1)(E\nu_1^0 - 1) + E\xi'_{\nu_1^0} \tag{3.78}$$

$$D\gamma_1^0 = (D\xi_1 + D\eta_1)(E\nu_1^0 - 1) + (E\xi_1 + E\eta_1)^2 D\nu_1^0 + D\xi'_{\nu_1^0} \tag{3.79}$$

elde edilir.

ξ_1 rastgele değişkeni μ parametreli ikinci mertebeden Erlang dağılımına sahip olduğundan

$$E\xi'_{\nu_1^0} = \frac{3}{2\mu} tan\,\alpha, \qquad \left(E\xi'_{\nu_1^0}\right)^2 = \frac{4}{\mu^2} tan^2\alpha, \qquad D\xi'_{\nu_1^0} = \frac{7}{4\mu^2} tan^2\alpha \tag{3.80}$$

elde edilir. Bu durumda yukarıda verilen (3.78) ve (3.79) eşitlikleri

$$E\gamma_1^0 = (E\xi_1 + E\eta_1)(E\nu_1^0 - 1) + \frac{3}{2\mu} tan\alpha$$

$$D\gamma_1^0 = (D\xi_1 + D\eta_1)(E\nu_1^0 - 1) + (E\xi_1 + E\eta_1)^2 D\nu_1^0 + \frac{7}{4\mu^2} tan^2\alpha$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $E\nu_1^0$ ve $D\nu_1^0$ ı bulalım. Bunun için $k_i(1)$, $k_i'(1)$, $k_i''(1)$, $c_i(1)$, $c_i'(1)$, $c_i''(1)$, $(i = 1,2,3)$ değerleri bulunduktan sonra $\psi_z'(1,z)$ ve $\psi_z''(1,z)$ fonksiyonları elde edilir. Bu fonksiyonlar yardımıyla (3.64) ve (3.65) den $\psi_u'(1)$ ve $\psi_u''(1)$ değerleri bulunur. Bu durumda (3.73) ve (3.75) ifadelerinden aşağıdaki Çizelge elde edilir.

Çizelge 3.8 ($2\lambda < \mu$ için)

$k_1(1)$	0
$k_2(1)$	$\frac{(\lambda-2\mu)+\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}{2}$
$k_3(1)$	$\frac{(\lambda-2\mu)+\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}{2}$
$k_1'(1)$	$\frac{\lambda\mu}{2\lambda-\mu}$
$k_2'(1)$	$\frac{-2\lambda\mu^2}{\lambda^2+4\lambda\mu+(\lambda-2\mu)+\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}$
$k_3'(1)$	$\frac{-2\lambda\mu^2}{\lambda^2+4\lambda\mu+(\lambda-2\mu)+\sqrt{\lambda^2+4\lambda\mu}}$
$k_1''(1)$	$\frac{2[3k_1(1)-(\lambda-2\mu)]}{\lambda\mu^2}[k_1'(1)]^3$
$k_2''(1)$	$\frac{2[3k_2(1)-(\lambda-2\mu)]}{\lambda\mu^2}[k_2'(1)]^3$
$k_3''(1)$	$\frac{2[3k_1(1)-(\lambda-2\mu)]}{\lambda\mu^2}[k_3'(1)]^3$
$c_1(1)$	1
$c_2(1)$	0
$c_3(1)$	0
$c_1'(1)$	$\frac{[\mu^2+\alpha_0][k_2(1)-k_3(1)]+[k_1'(1)+k_3(1)]\alpha_2+[k_1'(1)+k_2(1)]\alpha_3}{\mu^2[k_2(1)-k_3(1)]+\alpha_1-\alpha_2k_3(1)}$
$c_2'(1)$	$-\frac{k_1'(1)+k_3(1)}{k_2(1)-k_3(1)}+\frac{k_3(1)}{k_2(1)-k_3(1)}c_1'(1)$
$c_3'(1)$	$-\frac{k_1'(1)}{k_2(1)}-\frac{k_2(1)}{k_3(1)}c_2'(1)$

Çizelge 3.8 ($2\lambda < \mu$ için) (devamı)

$c_1''(1)$	$-\dfrac{k_2(1)-k_3(1)}{-[k_2(1)-k_3(1)]\mu^2+k_3(1)\beta_4+k_2(1)\beta_5}-[k_2(1)-k_3(1)]\beta_1$ $-2k_1'(1)(\beta_4-\beta_5)c_1'(1)-[k_2(1)-k_3(1)]\beta_2-2k_2'(1)(\beta_4-\beta_5)c_2'(1)$ $-[k_2(1)-k_3(1)]\beta_3-2k_3'(1)(\beta_4-\beta_5)c_3'(1)$
$c_2''(1)$	$\dfrac{k_1''(1)}{k_3(1)-k_2(1)}+\dfrac{2k_1'(1)}{k_3(1)-k_2(1)}c_1'(1)+\dfrac{2k_2'(1)}{k_3(1)-k_2(1)}c_2'(1)$ $+\dfrac{2k_3'(1)}{k_3(1)-k_2(1)}c_3'(1)-\dfrac{k_3(1)}{k_3(1)-k_2(1)}c_1''(1)$
$c_3''(1)$	$-\dfrac{k_2(1)-k_3(1)}{-[k_2(1)-k_3(1)]\mu^2+k_3(1)\beta_4+k_2(1)\beta_5}$ $-\dfrac{[k_2(1)-k_3(1)]\beta_1-2k_1'(1)(\beta_4-\beta_5)}{-[k_2(1)-k_3(1)]\mu^2+k_3(1)\beta_4+k_2(1)\beta_5}c_1'(1)$ $-\dfrac{[k_2(1)-k_3(1)]\beta_2-2k_2'(1)(\beta_4-\beta_5)}{-[k_2(1)-k_3(1)]\mu^2+k_3(1)\beta_4+k_2(1)\beta_5}c_2'(1)$ $-\dfrac{[k_2(1)-k_3(1)]\beta_3-2k_1'(1)(\beta_4-\beta_5)}{-[k_2(1)-k_3(1)]\mu^2+k_3(1)\beta_4+k_2(1)\beta_5}c_3'(1)$

Burada

$$\alpha_0=-[\lambda k_1'(1)+k_2'(1)k_3(1)+k_2(1)k_3'(1)]\left(1-e^{-\lambda a}\right)-\mu^2 e^{-\lambda a}$$

$$\alpha_1=k_2^2(1)-\mu^2$$

$$\alpha_2=k_3^2(1)-\lambda[\lambda-k_2(1)]-\left[\mu^2-\lambda[\lambda-k_2(1)]\right]e^{-[\lambda-k_2(1)]a}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 2[k_1'(1)]^2-[\lambda k_1''(1)+k_2''(1)k_3(1)+k_3(1)k_3''(1)+2k_2'(1)k_3'(1)]\left(1-e^{-\lambda a}\right)\\ &\quad -2k_1'(1)[\mu^2-\lambda k_1'(1)k_3(1)-k_2(1)k_3'(1)]e^{-\lambda a}\end{aligned}$$

$$\beta_1=2\left[-\mu^2 e^{-\lambda a}-[\lambda k_1'(1)+k_2'(1)+k_1'k_3(1)+k_2(1)k_3'(1)]\right]\left(1-e^{-\lambda a}\right)$$

$$\beta_2=2\left\{\begin{aligned}&k_2(1)k_2'(1)-[\lambda k_2'(1)+k_1'(1)k_3(1)]\left[1-e^{-[\lambda-k_2(1)]a}\right]\\ &\quad-\left[\mu^2+ak_2'(1)\left[\mu^2-\lambda[\lambda-k_3(1)]\right]\right]e^{-[\lambda-k_2(1)]a}\end{aligned}\right\}$$

$$\beta_3=2\left\{\begin{aligned}&k_3(1)k_3'(1)-[\lambda k_3'(1)+k_1'(1)k_3(1)]\left[1-e^{-[\lambda-k_3(1)]a}\right]\\ &\quad-\left[\mu^2+ak_2'(1)\left[\mu^2-\lambda[\lambda-k_2(1)]\right]\right]e^{-[\lambda-k_3(1)]a}\end{aligned}\right\}$$

$\beta_4 = k_2^2(1) - \lambda[\lambda - k_3(1)] - [\lambda[\lambda - k_3(1)] - \mu^2]e^{-[\lambda - k_2(1)]a}$

$\beta_5 = k_3^2(1) - \lambda[\lambda - k_2(1)] - [\lambda[\lambda - k_2(1)] - \mu^2]e^{-[\lambda - k_3(1)]a}$

dir.

$\psi_u'(1)$ ve $\psi_u''(1)$ değerleri için (3.75) ile birlikte (3.64) ve (3.65) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\lambda \int_{z=0+}^{a} e^{-\lambda a}\psi_u'(1,y)dy = \frac{1}{\mu^2}\psi_{zu}''(1,0) - e^{-\lambda a}\psi_u''(1,a)$$

$$\lambda \int_{z=0+}^{a} e^{-\lambda a}\psi_u''(1,y)dy = \frac{1}{\mu^2}\left[\psi_{zu^2}'''(1,0) - 2\psi_{zu}''(1,0)\right]e^{-\lambda a}\psi_u''(1,a) \tag{3.81}$$

(3.81) eşitlikleri (3.64) ve (3.65) ifadelerinde yerine konularak

$$\psi_u'(1) = \frac{1}{\mu^2}\psi_{zu}''(1,0) \quad \text{ve} \quad \psi_u''(1) = \frac{1}{\mu^2}\left[\psi_{z^2u}''(1,0) - 2\psi_{zu}''(1,0)\right]$$

veya

$$E\nu_1^0 = \frac{1}{\mu^2}\psi_{zu}''(1,0) \quad \text{ve} \quad D\nu_1^0 = \frac{1}{\mu^2}\psi_{zu^2}''(1,0) - E\nu_1^0(1 + E\nu_1^0) \tag{3.82}$$

olduğu görülür.

Burada $c_i(1),\ c_i'(1),\ c_i''(1),\ i = 1,2,3$ sayıları ile $\psi_{zu}''(1,0)$ ve $\psi_{zu^2}'''(1,0)$ değerleri göz önüne alındığında

$$\mathrm{E}\nu_1^0 = \frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{3}[k_i'(1)c_i(1) + k_i(1)c_i'(1)], \tag{3.83}$$

$$\mathrm{D}\nu_1^0 = \frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{3}[k_i''(1)c_i(1) + 2k_i'(1)c_i'(1) + k_i(1)c_i''(1)] - \mathrm{E}\nu_1^0(1 + \mathrm{E}\nu_1^0) \tag{3.84}$$

elde edilir.

Son olarak, $2\lambda < \mu$ veya $\mathrm{E}\xi_1^0 < E\zeta_1^0$ olduğundan $c_1(1) = 1, c_2(1) = c_3(1) = 0$, $k_1(1) = 0$ elde edilir ki buradan

$$\mathrm{E}\nu_1^0 = \frac{1}{\mu^2}\left[k_1'(1) + \sum_{i=2}^{3}k_i(1)c_i'(1)\right], \tag{3.85}$$

$$\mathrm{D}\nu_1^0 = \frac{1}{\mu^2}\left[k_1''(1) + 2\sum_{i=2}^{3}k_i'(1)c_i'(1) + \sum_{i=2}^{3}k_i(1)c_i''(1)\right] - \mathrm{E}(\nu_1^0)(1 + \mathrm{E}\nu_1^0) \tag{3.86}$$

olduğu görülür.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerindeki önemli bazı problemlerin çözümlenmesinde kullanılabilecek olan özel bir stokastik süreç ele alınmıştır. 0 (sıfır) ve $a(a > 0)$ seviyelerinde iki tutan bariyere sahip negatif akımlı pozitif sıçramalı yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir X(t) süreci matematiksel olarak kurulmuş ve bu süreç ile ilgili aşağıdaki teorik sonuçlar elde edilmiştir.

$X(t)$ sürecinin önemli sınır fonksiyonelleri sayılan, sürecin ilk kez $a(a > 0)$ seviyesindeki tutan bariyere ulaşma anı γ_1^a ve sürecin ilk kez 0 (sıfır) seviyesindeki tutan bariyere düşme anı γ_1^0 matematiksel olarak kurulmuştur. Ayrıca γ_1^a ve γ_1^0 rasgele değişkenlerinin Laplace dönüşümleri, beklenen değerleri ve varyansları için açık formüller verilmiştir. Ayrıca Sürecin iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel ve Erlang dağılımlarına sahip olması özel durumlarında, γ_1^a ve γ_1^0 ın Laplace dönüşümleri, beklenen değerleri ve varyansları için formüller elde edilmiştir.

Yapılan bu çalışmada ele alınan konunun aşağıdaki şekilde geliştirilmesi mümkündür:

- ❖ Sürecin bariyerlerinin değiştirilmesi. Örneğin, 0 (sıfır) seviyesinde tutan, $a(a > 0)$ seviyesinde yansıtan bariyer olması, tutan bariyerin $a(a > 0)$ yansıtan bariyerin 0 (sıfır) seviyesinde olması veya her iki bariyerinde yansıtan olması durumlarında benzer incelemelerin yapılması.
- ❖ Süreçle ilgili bazı sayısal karakteristiklerin hesaplanması için gerekli olan bilgisayar programlarının geliştirilmesi.
- ❖ Çalışmada ele alınan özel dağılımların (üstel, Erlang) dışındaki bazı dağılımlar için de benzer hesaplamaların yapılması.
- ❖ Ele alınacak olan sürecin dağılım fonksiyonunun hesaplanmasının güç olduğu durumlarda, dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümünün hesaplanması.
- ❖ Yapılan çalışmada teorik olarak ortaya konulmuş sonuçların uygulanabileceği alanların tespit edilmesi ve uygulanması.

KAYNAKLAR

Afanas'eva, L.G., Bulinskaya, E. V., 1980. Stochastic processes in the theory of queues and inventory Control (Russian), Moskova.

Afanas'eva, L.G., Bulinskaya, E. V., 1981. Storage capacity optimization, Eng. Cybern., 19, 5, 49-57.

Afanas'eva, L.G., Bulinskaya, E. V., 1984. Some asyptotic results on random walks in a stripe, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 4, 654-668.

Ahmedova, H. M., 1981. The distribution of main functionals of generalized poisson process with delaying screen (Russian, English Summary), Theor. Verojatn. Mat. Stat., 20, 3-10.

Ahmedova, H. M., 1983. Processes with negative jumps and a positive drift (Russian), problems of the theory of probability distributions. Kiev, Collect. Sci. Works, 106-123.

Anisimov, V. V., 1970. Limit distributions of functionals of a semi-Markov process given on a fixed set of states, up to the time of first exit, Überstzung in Soviet Math., 11, 1002-1004.

Anisimov, V. V., 1973. The limiting behaviour of a semi-Markov process with a decomposable state space, Soviet Math., 13, 1276-1279.

Borovkov, A. A., 1965. On the first passage time for one class of processes with independend and increments, Theor. Prob. Appl., 10, 331-334.

Borovkov, A. A., 1975. On a walk in a strip with inhibitory boundaries, Math. Notes, 17, 385-389.

Borovkov, A.A., 1976. Stochastic in Queueing Theory., X1, Springer-Verlag. X1., New York.

Çınlar, E., 1968. Some joint distributions for Markov renewal processes 2, Springer-Verlag, New York.

Çınlar, E., 1975. Introduction to stochastic processes, Englewood Cliffs, New Jersey.

Çınlar, E., 1975. Markov renewal theory, Adv. Appl. Probab., 1, 123-187.

Dzhafarov, K. M., 1979. A distribution of the time of lowest level reaching for a process with positive jumps and negative drift (Russian), Teor. Sluchainykh Protsessov, 7, 7-13.

Dzhafarov, V. S., 1976. Nasirova, T. H., Skorohod, A. V., On the limit of certain process with semi independent increments, Theor. Probab. Math. Statist., 5, 52-57.

El-Shehawey, M. A., 1992. Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Ind. Soc. Oper. Res., 13, 1-4, 63-72.

Ezhov, I. I., 1966. Markov chains with discrete interference of an event forming a semi-Markov process, Ukrain. Mat. Zurn. 18, 1 (Russisch) 48-65.

Ezhov, I. I., Korolyuk, V. S., 1967. Semi-Markovian processes and their applications (Russian), Cybernetica, 5, 58-65.

Ezhov, I. I., Shurenkov V. S., 1977. Ergodic theorems connected with the Markov property of random, Theor. Probab. Appl., 21, 620-624.

Feller, W., 1964. On semi-Markov processes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 51, 4.

Feller, W., 1971. An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, 2nd Ed., Wiley, New York.

Gihman, I. I., Skorohod, A. V., 1975. Theory of Stochastic Processes 2, Springer-Verlag, New York.

Gnedenke, I. I., Kovalenko, I. N., 1968. Introduction to queing theory, IX, Translation edited by D. Louvish, Jerussalem: Israel Program for Scientific Translation.

Gusak, D. V., 1969. On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous process with independent increments, Theor. Probab. Appl., 14, 14-23.

Gusak, D. V., Korolyuk, V. S., 1968. On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theor. Probab. Appl., 13, 448-456.

Gusak, D. V., Korolyuk, V. S., 1969. On the joint distribution of the process with stationary movements and its maximum, Theor. Probab. Appl., 14, 400-469.

Harlamov, B. P., 1977. On convergence of semi-Markov walks to a continuous semi-Markov process, Theor. Probab. Appl., 21, 482-498.

Kastenbaum, M. A., 1966. A dialysis system with one absorbing and one semireflecting state, J. Appl. Probab., 3, 363-370.

Khaniev, T. A., 1984. Distribution of a semi-Markov walk with two delay screens (Russian), Some questions of the theory of stochastic processes, Kiev, Collect sci. Works, 106-113.

Khaniev, T. A., 1986a. The explicit form of the ergodic distribution of the process of semi-Markov walk dependent components (Russian), Probabilistic method for the investigation of systems with an infinite number of degrees of freedom, Kiev, Collect. Sci. Works, 119-125.

Khaniev, T. A., 1986b. An ergodic theorem for a semi-Markov walk with two delay screens (Russian), Izv. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 4, 37-42.

Khaniev, T. A., 1988. Distribution of a Process of semi-Markov walk on a closed interval with exponentially distributed components, Izv. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 1, 45-50.

Korolyuk, V. S., Turbin, A. F., 1976. Semi-Markov processes and their applications (Russian), Kiev: Izdatel'stvo, Nauka Dumka, R. 1. 12.

Korolyuk, V. S., Borovskikh, Y. U., 1981. Analytical problems for asymptotics of probability distributions, Nauka Dumka, Kiev, 240 shf.

Korolyuk, V. S., Pirliev, B., 1984. Random walk on a semi-axis on a superposition of two renewal processes (Russian), Ukr. Math. Zh., 36, 4, 433-436.

Korolyuk, V. S., Svishchuk, A. V., 1989. Limit representation of continuous semi-Markovian random evolutions in a scheme of series (Russian), Ukr. Math. Zh., 41, 11, 1476-1482.

Levy, P., 1954. Processus semi-Markoviens. Proc. III. Internat. Congr. Math., Amsterdam, 416-426.

Lotov, V. I., 1982. On asymptotics of distributions related to the departure of a non-discrete random walk from an interval (Russian), Predel'nye Teoremy Teory Veroyatnoste i Smezhnye Vpoprosy, 1, 18-25.

Lotov, V. I., 1991a. On random walks within a stripe, Theor. Veroyatn. Primen., 36, 1, 160-165.

Lotov, V. I., 1991b. On the asymptotics of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain, Sib. Adv. Math., 1, 3, 26-51.

Maden, S., 1997. Yansıtan ve tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci üzerine. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 79 s.

Maden, S., 2006. Olasılığa Giriş. Seçkin Yayıncılık, 342 s, Ankara.
Nasirova, T.H., 1970. Processes of semi-Markov Walk (Russian), Baku : EHLM.
Nasirova, T. H., Skorohod, A. V., 1978. On a class of jump processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16, 81-94.
Nasirova, T. H., 1979a. Distribution of a semi-Markov walk process with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20, 90-97.
Nasirova, T. H., 1979b. On ergodic theorems for some semi-Markov processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20, 90-97.
Nasirova, T. H., Yapar, C., Khaniev, T. A., 1996. On some probability characteristics of the complex semi-Markovian random walk with reflecting and delaying screens, Cybernetica and System Analysis.
Prabhu, N. U., 1980. Stochastic storage processes, New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 140 s.
Pyke, R., Schaufele, R. A., 1964. Limit theorems for markov renewal processes, Ann. Math. Stat., 35, 4.
Rogozin, B.A., 1964. On the distribution of the first jump, Theory Probab. Appl., 9, 450-464.
Rogozin, B. A., 1965. On some classes of processes with independent increments, Theory Probab. Appl., 10, 479-483.
Serfoza, R. F., 1971. Functions of semi-Markov processes, SIAM J. April. Math.
Shurenkov, V. M., 1981. Ergodic Theorems and related questions of the theory of random processes (Russian), Kiev, Naukova Dumka.
Shurenkov, V. M., 1984. On the Markov renewal theory, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 2, 248-263.
Shurenkov, V. M., 1989. Ergodic Markov processes (Russian), Ed. By A. N. Kolmogorov, Teoriya, Veroyatnosteji Matematichheskaya statistica, 41, Moskova Nauka.
Sil'vestrov, D. S., 1975a. Limit theorems for semi-Markov processes and their applications I., Theor. Probab. Math. Statist., 3, 159-176.
Sil'vestrov, D. S., 1975b. Limit theorems for semi-Markov processes and their applications II., Theor. Probab. Math. Statist., 3, 177-198.
Skorohod, A. V., 1967. Random processes with independent increments, Moscow: Nauka.
Skorohod, A. V. and Slobodenyuk, N. P., 1970. Limit theorems for random walks, Ukr. SSSR; Nauka Dumka.
Smith, W.L., 1955. Regenerative stochastic processes, Proc. Roy. Soc. Edinburg Ser. A, 232, 6-31.
Smith, W.L., 1958. Renewal theory and its ramifications, Journ. Roy. Statist. Soc., 20, 2 243-302.
Smith, W.L., 1965-1966. Some peculier semi-Markov processes, Proc.5-Th Berkelly Symp. Math. Statist. And Probab., 2, 2, 255-263.
Spitzer, F., 1956. A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, 323-339.
Spitzer, F., 1964. Principles of random walk, Princeton, N.J.:D. Van Nostrand.
Takacs, L., 1954. Bizonyus tipusu requrrens sztochasztikus folyamotok vizsgalatarol Magyartud. Akad. Math. Kutato. Int. Kozl., 1-2.
Takacs, L., 1977. Combinatorial methods in theory of stochastic processes, 2nd ed, Huntington, New York : Robert E. Krieger Publishing Co. X1.

Tomko, J., 1989. On the theory of semi-Markov processes with a general state space (Russian), Teor. Veroyatn. Primen., 34, 2, 314-329.

Weesakul, B., 1961. The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, Ann. Math. Statist., 23, 765-780.

Zhang, Y. L., 1992. Some problems on a one-dimensional correlated random walk with various types of barriers, J. Appl. Probab., 29, 196-201.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğba ALP

Doğum Yeri : Samsun

Doğum Tarihi : 28. 07. 1985

Medeni Hali : Bekar

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Ordu Fen Lisesi

Lisans : Atatürk Üniversitesi

Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi

İletişim Bilgileri

Adres : Şirinevler Mah. Yıldız Kent Sitesi E/Blok No:10
ORDU/Merkez