T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK KÜMELERİN HALKA VE İDEAL YAPILARINA UYGULANMASI

GÜVEN KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2014

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Güven KARA tarafından ve Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK danışmanlığında hazırlanan "Bulanık Kümelerin Halka ve İdeal Yapılarına Uygulanması" adlı bu tez, jürimiz tarafından 29/ 12/ 2014 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN İmza :
Matematik Anabilim Dalı, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK İmza :
Matematik Anabilim Dalı, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN İmza :
Matematik Anabilim Dalı, Giresun Üniversitesi

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 06/01/2015 tarih ve 2015/05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

06/01/2015

Prof. Dr. M. Fikret BALTA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Güven KARA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BULANIK KÜMELERİN HALKA VE İDEAL YAPILARINA UYGULANMASI

Güven KARA

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2014
Yüksek Lisans Tezi, 47s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK

Bu tezin amacı, bulanık halka ve bulanık ideal yapılarının temel özelliklerini incelemek ve bu yapılardan elde edilen sonuçları ortaya koymaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2'de ise bulanık alt halka ve bulanık ideal kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, Bulanık alt halka, Bulanık ideal.

ABSTRACT

APPLICATION OF FUZZY SUBSETS ON STRUCTURES OF RINGS AND IDEALS

Güven KARA

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis, 47p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yıldıray ÇELİK

The aim of the present thesis is to investigate the basic features of the structures of fuzzy ring and fuzzy ideal, and is to present the results obtained from this structures.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. In Chapter 2, the notions of fuzzy subring and fuzzy ideal are given and algebraic properties belonging to these are examined.

Key Words: Fuzzy subset, Fuzzy subring, Fuzzy ideal.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında başta danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK' e ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELERVE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
S(G)	: G grubunun bütün alt gruplarının kümesi
A(R)	: R halkasının bütün alt halkalarının kümesi
I(R)	: R halkasının bütün ideallerinin kümesi
0_R	: R halkasının toplama işlemine göre birim elemanı
1_R	: R halkasının çarpma işlemine göre birim elemanı
$\times$	: Kartezyen çarpım
$\prod_{i\in\Lambda} X_i$	: $\{ X_i \mid i \in \Lambda \}$ ailesinin kartezyen çarpımı
$\sum_{i\in\Lambda} S_i$	: $\{S_i \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin toplamı
F(X)	:X'in bütün bulanık alt kümelerinin kümesi
$\mu_A(x)$	: x'in A kümesine ait olma derecesi
$\mu \leq \eta$	: η, μ 'yü kapsar
μ'	: μ bulanık alt kümesinin tümleyeni
μ_t	: μ bulanık alt kümesinin t-seviye alt kümesi
$\mu \otimes \eta$	: μ ve η bulanık alt kümelerinin cebirsel çarpımı
$\mu \oplus \eta$	: μ ve η bulanık alt kümelerinin cebirsel toplamı

$\mu \Theta \eta$	: μ ve η bulanık alt kümelerinin cebirsel farkı
$\mu_{[a]}$	: a elemanının denklik sınıfı
X/μ	: Bulanık bölüm kümesi
R/I	: R nin I tarafından üretilmiş bulanık bölüm halkası
$R \cong S$	: R halkası, S halkasına izomorftur.
Çek ϕ	: ϕ dönüşümünün çekirdeği
Res ϕ	: ϕ dönüşümünün resim kümesi

1. GİRİŞ

Belirsizlik problemi, filozoflar, mantıkçılar ve matematikçiler tarafından uzun zamandır ele alınmaktadır. Bu problem, özellikle yapay zeka alanında (risk analizi, tahmin, fonksiyonel aygıtların gelişimi) bilim adamları için önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok yaklaşım metotları geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan en önemlileri bulanık kümeler (Zadeh, 1965), yaklaşımlı kümeler (Pawlak, 1982) ve esnek kümeler (Molodtsov, 1992) dir.

Bulanık kümeler hakkında ilk bilgiler Lütfü Askerzade (Zadeh, 1965) tarafından ortaya konulmuştur. Bulanık mantığın dayandığı ana fikir, hayatın sadece doğru ve yanlıştan oluşmadığı ya da dünyada sadece siyahın ve beyazın var olmadığı, farklı renklerin de var olduğu ilkesine dayanır. Bulanık kümesi karakteristik fonksiyonla ifade edilen klasik kümeler yerine, dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edilen bir kavram olarak düşünülebilir. Yani bir çeşit çok-değerli küme kuramıdır. Bulanık mantık, makinelere insanların özel verilerini işleyebilme, onların deneyimlerinden ve önsezilerinden yararlanarak çalışabilme yeteneği verir. Bu yeteneği kazandırırken sayısal ifadeler yerine sözel ifadeler kullanılır. Bulanık mantığının temeli, bu tür sözlü ifadeler ve bunlar arasındaki mantıksal ilişkiler üzerine kurulmuştur. Bu nedenle bulanık mantık uygulanırken sistemin matematiksel modellenmesi şart değildir. Zadeh, insanların denetim alanında mevcut makinelerden daha iyi olduğunu ve kesin olmayan dilsel bilgilere bağlı olarak etkili kararlar alabildiklerini savunmuştur. Karmaşık sistemlerde karşılaşılan zorluklar nedeniyle, bulanık mantık alternatif yöntem olarak çok hızlı gelişmiş ve modern denetim alanında geniş uygulama alanı bulmuştur.

Bulanık küme kavramı uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır. Çok sayıda araştırmacı cebirsel yapıların bu yeni kavramın özelliklerini çalışmışlardır. Rosenfeld (1971) bulanık küme kavramını kullanarak bulanık grup teoriyi geliştirmiştir. Bulanık grup teorinin temel özellikleri klasik grup teorideki sonuçlar kullanılarak elde edilmiştir. Das (1981) seviye alt grupları üzerine çalısmıstır. Daha sonra birçok bilim adamı tarafından bulanık kavramı gelistirilmistir. Liu (1983) bulanık grupları kullanarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler üzerinde çalışmıştır. Mukherjee ve Bhattacharya (1984) bulanık normal alt grupları ve bulanık yan cümleleri, Mukherjee ve Sen (1987) bulanık idealleri, Malik ve Mordeson (1990) bulanık asal idealleri tanımlamıslardır. Nanda (1986) bulanık küme kavramını cisim ve lineer uzaylara uyarlamıştır. Dixit ve ark. (1992) bulanık halkaları, Kuraoka ve Kuroki (1992) bulanık bölüm halkalarını incelemistir. Ersoy (2003) bulanık alt grupların ve bulanık ideallerin kartezyen çarpımı üzerine çalısmıstır. De Gang (1998) çalışmasında bulanık halkalar ve bulanık bölüm halkalarını araştırmışlar ve bunlara ait sonuçları elde etmişlerdir.

Bu tezin amacı, bulanık halka ve bulanık ideal yapılarının temel özelliklerini incelemek ve bu yapılardan elde edilen sonuçları ortaya koymaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2'de ise bulanık alt halka ve bulanık ideal kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler değerlendirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar ve İdealler

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Hungerford (1974) ve Fraleigh (1994) den derlenmiştir.

Tanım 2.1.1. $\varnothing \neq$ R bir küme ve "+" ve "$\cdot$" R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. R'ye bir halka denir. $\Leftrightarrow$

R1) (R,+) değişmeli bir grup

R2) (R, $\cdot$) yarı grup

R3) $\forall\ a,b,c \in \mathrm{R}$ için $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ ve $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

R bir halka olsun. Eğer $\forall a \in \mathrm{R}$ için $1_{\mathrm{R}}\cdot a = a\cdot 1_{\mathrm{R}} = a$ olacak şekilde $1_{\mathrm{R}} \in \mathrm{R}$ mevcut ise R'ye birim elemanlı halka denir ve 1_{R} elamanına da R halkasının birim elemanı denir. Eğer R halkası, $\forall\ x,y \in \mathrm{R}$ için $x\cdot y = y\cdot x$ koşulunu gerçekliyor ise R'ye değişmeli (komutatif) halka denir.

(R,+) abel grubunun birim elemanına R halkasının sıfır elemanı denir ve $0_{\mathrm{R}}=0$ ile gösterilir. Bu çalışmada bütün halkalar en az iki elemana sahip birim elemanlı halka olarak ele alınacaktır.

Halkalara aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.1.2.

1) $\mathrm{n} \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ için $(\mathbb{Z}_{\mathrm{n}}, +, \cdot)$ birim elemanlı bir halkadır.

2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ birim elemanlı değişmeli halkalardır.

3) $\mathrm{n} \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ için $(\mathrm{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ birim elemanlı bir halkadır.

4) $\forall\ \mathrm{n}, \mathrm{m} \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ için $(\mathbb{Z}_{\mathrm{n}} \times \mathbb{Z}_{\mathrm{m}}, +, \cdot)$ birim elemanlı değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.1.3. $\{\mathrm{X}_i \mid i \in \Lambda\}$ boştan farklı kümelerin bir ailesi olsun.

$\prod_{\mathrm{i}\in\Lambda} \mathrm{X}_{\mathrm{i}} = \{(\mathrm{x}_{\mathrm{i}}) \mid \mathrm{i} \in \Lambda,\ \mathrm{x}_{\mathrm{i}} \in \mathrm{X}_{\mathrm{i}}\}$ kümesine $\{\mathrm{X}_{\mathrm{i}} \mid \mathrm{i} \in \Lambda\}$ ailesinin kartezyen çarpımı denir.

Teorem 2.1.4. $\{\mathrm{R}_{\mathrm{i}} \mid \mathrm{i} \in \Lambda\}$ halkaların bir ailesi ise

$$(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i)\,\text{ve}\,(a_i)\cdot(b_i)=(a_i\cdot b_i)$$

ikili işlemleri ile $\prod_{i\in\Lambda} R_i$ bir halkadır.

Teoremde ifade edilen $\prod_{i\in\Lambda} R_i$ halkasına $\{R_i \mid i\in\Lambda\}$ halkalar ailesinin kartezyen çarpımı denir.

(R,+) değişmeli bir grup ve $\{S_i \mid i\in\Lambda\}$ R'nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\{a_{i_1}+a_{i_2}+.......+a_{i_n} \mid \forall a_{i_j}\in S_{i_j},\, n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ kümesine $\{S_i \mid i\in\Lambda\}$ ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i\in\Lambda} S_i$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. (R, +, $\cdot$) bir halka ve $\varnothing\neq I\subseteq R$ olsun. I'ya R'nin bir alt halkası denir $\Leftrightarrow$ $\forall a,b\in I$ için $a-b\in I$ ve $a\cdot b\in I$.

Tanım 2.1.6. (R, +, $\cdot$) bir halka ve $\varnothing\neq I\subseteq R$ olsun. I'ya R'nin bir sol (sağ) ideali denir $\Leftrightarrow$ $\forall a,b\in I$ için $a-b\in I$ ve $r\cdot a\in I$ $(a\cdot r\in I)$. Eğer I, R'nin sol ve sağ ideali ise I'ya R'nin ideali denir. Açık olarak I, R'nin bir ideali ise I, R'nin bir alt halkasıdır.

$\{0\}$ ve R, R'nin idealleridir ve bu ideallere R halkasının trivial idealleri denir.

I,J R nin alt kümeleri olmak üzere, I⊙J=$\{\sum_{i\in\Lambda}^{n} y_i z_i = x \mid y_i\in I,\ z_i\in J,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ kümesine I ile J kümelerinin ideal çarpımı denir. Eğer I ve J R halkasının idealleri ise I⊙J kümesi de R halkasının idealidir.

Açık olarak R halkasının bütün alt halkalarının ve ideallerinin kümesi "$\subseteq$" bağıntısı ile sıralı kümedir ve bu kümeler sırasıyla A(R) ve I(R) notasyonları ile gösterilecektir.

Teorem 2.1.7. R bir halka $\{S_i \mid i\in\Lambda\}$ R'nin ideallerinin boştan farklı bir ailesi ise $\sum_{i\in\Lambda} S_i$ kümesi $\{S_i \mid i\in\Lambda\}$ ideallerini kapsayan en küçük idealdir.

Teorem 2.1.8. $\{S_i \mid i\in\Lambda\}$ R'nin alt halkalarının (ideallerinin) bir ailesi olsun. Bu taktirde $\bigcap_{i\in\Lambda} S_i$, R'nin bir alt halkası (ideali) dır.

Sonuç 2.1.9. $\{S_i \mid i \in \Lambda\}$ R'nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

$\operatorname{Sup}\{S_i \mid i \in \Lambda\} = \sum_{i\in\Lambda} S_i$ ve $\operatorname{Inf}\{S_i \mid i \in \Lambda\} = \bigcap_{i\in\Lambda} S_i$ şeklindedir.

Teorem 2.1.10. $\{R_i \mid i \in \Lambda\}$ halkaların bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\forall i \in \Lambda$ için $S_i \in A(R_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda} S_i \in A(\prod_{i\in\Lambda} R_i)$,

ii) $\forall i \in \Lambda$ için $S_i \in I(R_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda} S_i \in I(\prod_{i\in\Lambda} R_i)$.

Tanım 2.1.11. R ve S iki halka olsun. $\phi : R \to S$ fonksiyonuna R'den S'ye bir halka homomorfisi denir. $\Leftrightarrow \forall\ x, y \in R$ için $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$ ve $\phi(x\cdot y)=\phi(x)\cdot\phi(y)$.

Tanım 2.1.12. ϕ :R $\to$ S halka homomorfisi olsun. Eğer ϕ birebir ve örten ise ϕ'ye bir halka izomorfisi denir.

Eğer ϕ :R $\to$ S bir halka izomorfisi mevcut ise R ile S halkalarına izomorftur denir ve R $\cong$ S ile gösterilir.

Önerme 2.1.13. ϕ :R $\to$ S bir halka izomorfisi ise $\phi^{-1} : S \to R$ bir halka izomorfisidir.

Tanım 2.1.14. ϕ :R $\to$ S bir halka homomorfisi olmak üzere;

$\mathrm{Res}\phi = \{\ \phi(r) \mid r \in R\ \}$ ve $\text{Çek}\phi = \{r \in R \mid \phi(r) = 0_S\ \}$ kümelerine sırasıyla ϕ 'nin görüntüsü ve çekirdeği denir.

Teorem 2.1.15. ϕ :R$\to$S ve θ :S$\to$T halka homomorfileriolsun. Bu takdirde;

i) Çek$\phi \in$ I(R) ve Res$\phi \in$ A(S),

ii) $\theta \circ \phi$:R$\to$T halka homomorfisidir.

Teorem 2.1.16. f :R $\to$ R$'$ bir halka homomorfisi olsun. Bu takdirde;

i) $S \in A(R)$ ise $f(S) \in A(R')$

ii) $S \in I(R)$ ise $f(S) \in I(R')$

iii) $S' \in A(R')$ ise $f^{-1}(S') \in A(R)$

iv) $S' \in I(R')$ ise $f^{-1}(S') \in I(R)$

2.2. Bulanık Kümeler

Bu bölümde bulanık küme, bulanık kümelerin birleşimi, kesişimi, tümleyeni gibi kavramlar ve bu kavramların çeşitli özellikleri tanımlanmıştır.

Bulanık küme teorisi kesin olmayan, belirsiz faaliyet ve gözlemlerinin tanımlarını içeren problemleri çözmek için geliştirilmiştir. Bir bulanık küme sürekli üyelik dereceleri olan nesneler sınıfıdır. Bu küme, her bir elemanı 0 ve 1 arasında değişen bir üyelik derecesine tayin eden üyelik (karakteristik) fonksiyonu tarafından karakterize edilir.

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Kaufman (1975), Malik ve Mordeson (1991), Mordeson ve Malik (1998) ve Kumar (1992) dan derlenmiştir.

Tanım 2.2.1. X boştan farklı bir küme ve I=[0,1] $\subset \mathbb{R}$ olsun.

$\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$$A=\{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \subset X \times I$$

kümesine X de bir bulanık küme denir. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A ya ait olma derecesi denir. $\mu_A(x)$ in 1 e yaklaşması x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir (Zadeh, 1965).

Klasik küme teorisinde A bir küme ise üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$, $x \in A$ olduğunda 1, $x \notin A$ olduğunda 0 olmak üzere iki değer almaktadır. Bu şekilde üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerini alan kümelere adî küme veya basit küme denir.

$\mu_X : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ olarak tanımlanırsa X kümesi,

$$X = \{(x, 1) \mid x \in X\}$$

bulanık kümesi olarak yazılabilir.

$\mu_\varnothing : X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_\varnothing(x) = 0$ olarak tanımlanırsa boş küme,

$$\varnothing = \{(x, 0) \mid x \in X\}$$

bulanık kümesi olarak yazılabilir.

Üyelik fonksiyonu μ olan X de bir A bulanık kümeye kısaca X in μ bulanık alt kümesi denir ve $\mu = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$ olarak yazılır.

X in tüm bulanık alt kümelerinin kümesini F(X) ile gösterelim.

Tanım 2.2.2. Bir X kümesinin μ ve η bulanık alt kümeleri verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için,

$$\mu(x) = \eta(x)$$

ise μ ve η bulanık alt kümeleri eşittir denir ve $\mu = \eta$ yazılır.

Tanım 2.2.3. μ ve η bir X kümesinin bulanık alt kümeleri olsun. Eğer $\forall x \in X$ için,

$$\mu(x) \leq \eta(x)$$

ise η bulanık alt kümesi μ bulanık alt kümesini kapsıyor denir ve $\mu \subseteq \eta$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. Bir X kümesinin μ bulanık alt kümesinin μ' tümleyeni $\forall x \in X$ için,

$$\mu'(x) = 1 - \mu(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.5. μ ve η bir X kümesinin iki bulanık alt kümesi olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\beta(x) = \text{maks}\ \{\mu(x), \eta(x)\}$$

şeklinde tanımlı β bulanık alt kümesine, μ ve η bulanık alt kümelerinin birleşimi denir ve $\beta = \mu \cup \eta$ yazılır. $\forall x \in X$ için,

$$\varphi(x) = \min\ \{\mu(x), \eta(x)\}$$

şeklinde tanımlı φ bulanık alt kümesine μ ve η bulanık alt kümelerinin kesişimi denir ve $\varphi = \mu \cap \eta$ yazılır.

Genel olarak $\mu = \{\mu_i \mid i \in \Lambda, \mu_i \in F(X)\}$ bulanık alt kümeleri için, $\beta = \bigcup_{i \in \Lambda} \mu_i$ ve $\varphi = \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i$ bulanık alt kümeleri $\forall x \in X$ için,

$$\beta(x) = \sup_{i \in I}\ \{\mu_i(x)\}$$

$$\varphi(x) = \inf_{i \in I}\ \{\mu_i(x)\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.2.6.

1) X={1,2,3,4} olmak üzere X in μ ve ξ bulanık alt kümeleri,

$\mu(1) = \xi(4) = 0.7$
$\mu(2) = 0.9$
$\mu(3) = \xi(1) = \mu(4) = 0.5$
$\xi(2) = 1$
$\xi(3) = 0$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

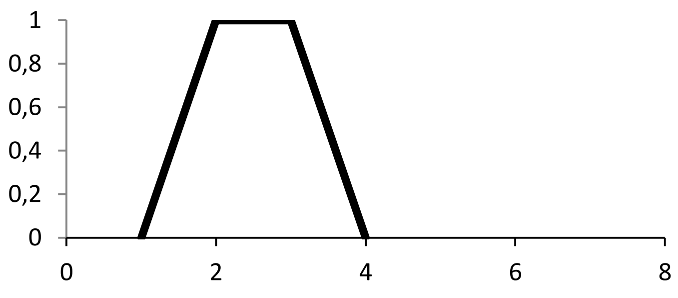
$\mu = \{(1, 0.7), (2, 0.9), (3, 0.5), (4, 0.5)\}$
$\xi = \{(1, 0.5), (2, 1), (3, 0), (4, 0.7)\}$
$\mu' = \{(1, 0.3), (2, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$
$\xi' = \{(1, 0.5), (2, 0), (3, 1), (4, 0.3)\}$
$\mu \cup \xi = \{(1, 0.7), (2, 1), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$
$\mu \cap \xi = \{(1, 0.5), (2, 0.9), (3, 0), (4, 0.5)\}$

olur.

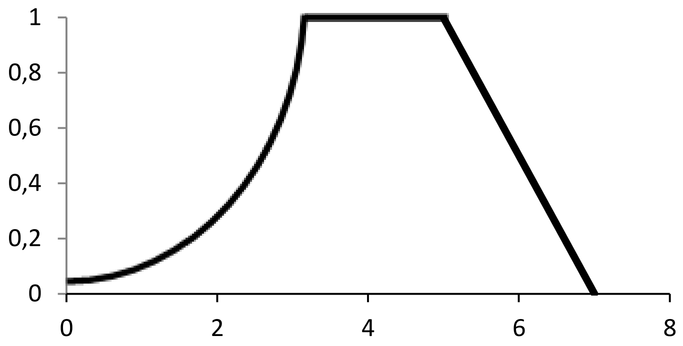
2) $\mu, \nu : \mathbb{R} \to [0,1]$ olmak üzere;

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ x\text{-}1, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x < 3 \\ 4 - x, & 3 \le x \le 4 \\ 0, & 4 < x \end{cases} \qquad \nu(x) = \begin{cases} e^{x-3}, & 0 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x < 5 \\ 1 - \dfrac{x-5}{2}, & 5 \le x \le 7 \\ 0, & 7 < x \end{cases}$$

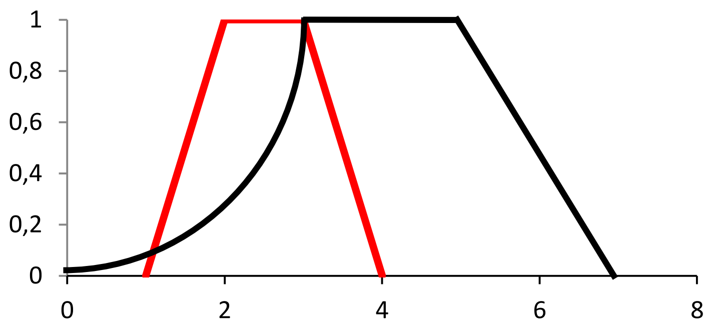
ise μ, ν, $\mu \cup \nu$, $\mu \cap \nu$ bulanık alt kümelerinin grafikleri aşağıdaki şekildedir.



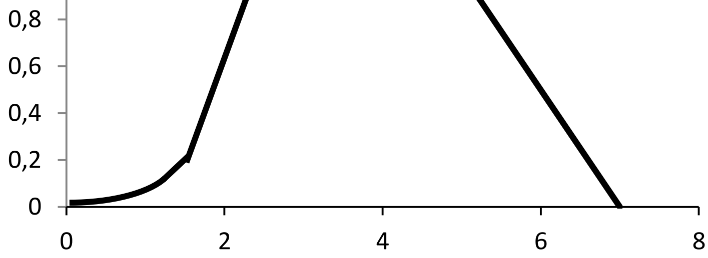
Şekil 2.1. Örnek 2.2.6. 2) deki μ bulanık alt kümesinin grafiği



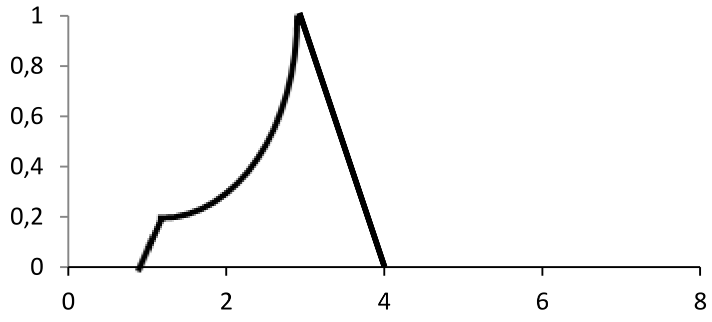
Şekil 2.2. Örnek 2.2.6. 2) deki ν bulanık alt kümesinin grafiği



Şekil 2.3. Örnek 2.2.6. 2) deki μ ve ν bulanık alt kümelerinin grafikleri



Şekil 2.4. Örnek 2.2.6. 2) deki $\mu \cup \nu$ bulanık alt kümesinin grafiği



Şekil 2.5. Örnek 2.2.6. 2) deki $\mu \cap \nu$ bulanık alt kümesinin grafiği

Lemma 2.2.7. Bir X kümesinin μ ve η bulanık alt künelerinin birleşimi, μ ve η yi içeren en küçük bulanık alt kümedir. Eğer β, X kümesinin, μ ve η yi içeren herhangi bir bulanık alt kümesi ise $\mu \cup \eta$ yi de içerir.

İspat: β, μ ve η yi içeren herhangi bir bulanık alt küme olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için, $\beta(x) \geq \mu(x)$ ve $\beta(x) \geq \eta(x)$ dir. Dolayısıyla $\beta(x) \geq \text{maks}\{\mu(x), \eta(x)\}$ olur. $\varphi = \mu \cup \eta$ bulanık alt kümesi $\varphi(x)=\text{maks}\{\mu(x), \eta(x)\}$ şeklinde tanımlı olduğundan $\beta(x) \geq \varphi(x)$ olup böylece $\varphi \subseteq \beta$ dir.

Lemma 2.2.8. Bir X kümesinin μ ve η bulanık alt kümelerinin kesişimi μ ve η tarafından içerilen en büyük bulanık alt kümedir (Zadeh, 1965).

İspat: α, μ ve η tarafından içerilen herhangi bir bulanık alt küme olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için, $\mu(x) \geq \alpha(x)$ ve $\eta(x) \geq \alpha(x)$ dir. Dolayısıyla $\min\{\mu(x), \eta(x)\} \geq \alpha(x)$ olur. $\psi = \mu \cap \eta$ bulanık alt kümesi $\psi(x) = \min\{\mu(x), \eta(x)\}$ şeklinde tanımlı olduğundan $\psi(x) \geq \alpha(x)$ olup böylece $\psi \supseteq \alpha$ elde edilir.

Teorem 2.2.9. X boş olmayan bir küme $\mu, \eta, \beta \in F(X)$ olsun. Bu durumda,

i) $\mu \subseteq \eta \Leftrightarrow \eta' \subseteq \mu'$

ii) $(\mu \cup \eta)' = \mu' \cap \eta'$

$(\mu \cap \eta)' = \mu' \cup \eta'$

iii) $\beta\cap(\mu\cup\eta)=(\beta\cap\mu)\cup(\beta\cap\eta)$

$\beta\cup(\mu\cap\eta)=(\beta\cup\mu)\cap(\beta\cup\eta)$

iv) $\mu\cap(\eta\cap\beta)=(\mu\cap\eta)\cap\beta$

$\mu\cup(\eta\cup\beta)=(\mu\cup\eta)\cup\beta$

v) $(\mu')'=\mu$

vi) $\mu\cap\eta=\varnothing\Leftrightarrow\mu\subseteq\eta'$

vii) $\{\mu_i \mid i\in\Lambda, \mu_i\in F(X)\}$ bulanık alt kümeleri için

$$(\bigcup_{i\in\Lambda}\mu_i)'=\bigcap_{i\in\Lambda}\mu_i'$$

$$(\bigcap_{i\in\Lambda}\mu_i)'=\bigcup_{i\in\Lambda}\mu_i'$$

viii) $\mu\subseteq\mu\cup\eta$ ve $\eta\subseteq\mu\cup\eta$

ix) $\mu\subseteq\beta$ ve $\eta\subseteq\beta\Rightarrow\mu\cup\eta\subseteq\beta$

dır.

İspat:

i) $\forall x\in X$ için $\mu'(x)=1-\mu(x)$ 'dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\mu\subseteq\eta &\Leftrightarrow \mu(x)\le\eta(x)\\ &\Leftrightarrow 1-\mu(x)\ge 1-\eta(x)\\ &\Leftrightarrow \mu'(x)\ge\eta'(x)\\ &\Leftrightarrow \eta'\subseteq\mu'\end{aligned}$$

olur.

ii) $\mu\cup\eta=\beta$ ve $\mu\cap\eta=\varphi$ dersek,

$$\beta(x)=\text{maks}\,\{\mu(x),\eta(x)\}$$
$$\varphi(x)=\min\,\{\mu(x),\eta(x)\}$$

olur. $\mu(x)\ge\eta(x)$ olsun. Bu durumda $\mu'(x)\le\eta'(x)$ dir. Dolayısıyla,

$(\mu\cup\eta)'(x)=1-(\mu\cup\eta)(x)=1-\text{maks}\,\{\mu(x),\eta(x)\}=1-\mu(x)=\mu'(x)$ ve

$(\mu'\cup\eta')(x)=\min\,\{\mu'(x),\eta'(x)\}=\mu'(x)$ olur.

Böylece $\forall x\in X$ için $(\mu\cup\eta)'(x)=(\mu'\cap\eta')(x)$ dir. Dolayısıyla

$(\mu\cup\eta)'=\mu'\cap\eta'$ dir. Ayrıca,

$(\mu\cap\eta)'(x)=1-(\mu\cap\eta)(x)=1-\min\,\{\mu(x),\eta(x)\}=1-\eta(x)=\eta'(x)$ ve

$(\mu'\cup\eta')(x)=\text{maks}\,\{\mu'(x),\eta'(x)\}=\eta'(x)$ olur.

Böylece $\forall x \in X$ için $(\mu \cap \eta)'(x) = (\mu' \cup \eta')(x)$ dir.

Dolayısıyla $(\mu \cap \eta)' = (\mu' \cup \eta')$ dir.

iii) $\mu(x) \le \eta(x) \le \beta(x)$ olsun. Bu durumda,

$\beta \cap (\mu \cup \eta) = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = \min\{\beta(x), \text{maks } \mu(x), \eta(x)\}\} = \eta(x)$

$(\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta) = \omega \Leftrightarrow \omega(x) = \text{maks } \{\min\{\beta(x), \mu(x)\}, \min\{\beta(x), \eta(x)\}\} = \eta(x)$

olur. Böylece $\forall x \in X$ için $\beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$ dir.

Aynı şekilde,

$$\begin{aligned}
\mu(x) \le \beta(x) \le \eta(x) &\Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta) \\
\eta(x) \le \mu(x) \le \beta(x) &\Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta) \\
\beta(x) \le \eta(x) \le \mu(x) &\Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta) \\
\eta(x) \le \beta(x) \le \mu(x) &\Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta) \\
\beta(x) \le \mu(x) \le \eta(x) &\Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)
\end{aligned}$$

dir.

$\beta \cup (\mu \cap \eta) = (\beta \cup \mu) \cap (\beta \cup \eta)$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

iv) $\mu \cap (\eta \cap \beta) = \xi \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\xi(x) = \min\{\mu(x), \min\{\eta(x), \beta(x)\}\}$

$= \min\{\mu(x), \eta(x), \beta(x)\}$ ve

$(\mu \cap \eta) \cap \beta = \chi \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\chi(x) = \min\{\min\{\mu(x), \eta(x)\}, \beta(x)\}$

$= \min\{\mu(x), \eta(x), \beta(x)\}$

olur. Böylece $\mu \cap (\eta \cap \beta) = (\mu \cap \eta) \cap \beta$ dır.

$\mu \cup (\eta \cup \beta) = \delta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\delta(x) = \text{maks } \{\mu(x), \text{maks } \{\eta(x), \beta(x)\}\}$

$= \text{maks } \{\mu(x), \eta(x), \beta(x)\}$ ve

$(\mu \cup \eta) \cup \beta = \zeta \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\zeta(x) = \text{maks } \{\text{maks } \mu(x), \eta(x)\}, \beta(x)\}\}$

$= \text{maks } \{\mu(x), \eta(x), \beta(x)\}$

olur. Böylece $\mu \cup (\eta \cup \beta) = (\mu \cup \eta) \cup \beta$ dır.

v) $\forall x \in X$ için $\mu'(x) = 1 - \mu(x)$ olduğundan

$(\mu')'(x) = 1 - \mu'(x) = 1 - (1 - \mu(x)) = 1 - 1 + \mu(x) = \mu(x)$

olur. Böylece $(\mu')' = \mu$ dir.

vi) $(\mu \cap \eta) = \varnothing \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $(\mu \cap \eta)(x) = 0 \Leftrightarrow \min\{\mu(x), \eta(x)\} = 0$ dır.

<u>1. Durum:</u> $\forall x \in X$ için $\mu(x) \le \eta(x)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $\mu(x) = 0$ olup

$\mu = \varnothing$ dir. $\eta \subseteq X$ olduğundan (i) den $X' \subseteq \eta' \Leftrightarrow \varnothing \subseteq \eta' \Leftrightarrow \mu \subseteq \eta'$ olur.

<u>2. Durum:</u> $\forall x \in X$ için $\eta(x) \le \mu(x)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $\eta(x) = 0$ olup $\eta = \varnothing$ dir. $\mu \subseteq X$ ve $X = \varnothing' = \eta'$ olduğundan $\mu \subseteq \eta'$ dir.

vii) $(\bigcup_{i\in\Lambda} \mu_i)(x) = \sup_{i\in\Lambda} \{\mu_i(x)\} \Rightarrow (\bigcup_{i\in\Lambda} \mu_i)'(x) = 1 - \sup_{i\in\Lambda} \{\mu_i(x)\}$

$$= \inf_{i\in\Lambda} \{1 - \mu_i(x)\}$$

$$= \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i'(x)\}$$

$$= (\bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i'(x))$$

olur. Böylece $(\bigcup_{i\in\Lambda} \mu_i)' = \bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i'$

$(\bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i)(x) = \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i(x)\} \Rightarrow (\bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i)'(x) = 1 - \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i(x)\}$

$$= \sup_{i\in\Lambda} \{1 - \mu_i(x)\}$$

$$= \sup_{i\in\Lambda} \{\mu_i'(x)\}$$

$$= (\bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i'(x))$$

olur. Böylece $(\bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i)' = \bigcup_{i\in\Lambda} \mu_i'$ dir.

viii) $\forall x \in X$ için $\mu(x) \le \text{maks}\,\{\mu(x), \eta(x)\}$ olduğundan $\mu \subseteq \mu \cup \eta$ dir. Benzer şekilde $\forall x \in X$ için $\eta(x) \le \text{maks}\,\{\mu(x), \eta(x)\}$ olduğundan $\eta \subseteq \mu \cup \eta$ olur.

ix) $\mu \subseteq \beta$ ve $\eta \subseteq \beta$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için,

$$\mu(x) \le \beta(x) \text{ ve } \eta(x) \le \beta(x)$$

olacağından $\text{maks}\,\{\mu(x), \eta(x)\} \le \beta(x)$ dir. Böylece $\mu \cup \eta \subseteq \beta$ dır.

Tanım 2.2.10. X boş olmayan bir küme olsun. $r \in (0,1]$ ve $\forall y \in X$ için,

$$x_r(y) = \begin{cases} r & , y = x \\ 0 & , y \ne x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı X in bulanık alt kümesine X de bir bulanık nokta denir.

Tanım 2.2.11. X boş olmayan bir küme ve μ, X in bir bulanık alt kümesi olsun. $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$$

kümesine μ nün bir seviye alt kümesi denir (Malik ve Mordeson, 1991).

Örnek 2.2.12. A={a, b, c} olmak üzere A nın bir μ bulanık alt kümesi,

$\mu(a) = 0.3$, $\mu(b) = 0.1$, $\mu(c) = 0.4$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$0 \leq t \leq 0.1$ için $\mu_t = \{a, b, c\} = A$

$0.1 < t \leq 0.3$ için $\mu_t = \{a, c\}$

$0.3 < t \leq 0.4$ için $\mu_t = \{c\}$

$0.4 < t \leq 1$ için $\mu_t = \varnothing$ olur.

Lemma 2.2.13. μ bir X kümesinin bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $k \in [0,1]$ olmak üzere, $\mu(x) = \sup\{k \mid x \in \mu_t\}$ dir (Kumar, 1992).

Tanım 2.2.14. "•" bir X kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem ve $\mu, \eta \in F(X)$ olsun. $\mu\eta$ çarpımı,

$$\mu\eta(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x=y \bullet z}\{\min\{\mu(y), \eta(z)\}\} & , y, z \in X \text{ için } x = y \bullet z \\ 0 & , y, z \in X \text{ için } x \neq y \bullet z \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 2.2.15. "•" işlemi X={a, b, c, d, e, f} kümesi üzerinde,

$a = e \bullet f = b \bullet d = a \bullet c$

$b = a \bullet f = d \bullet e$

$d = a \bullet a$

$e = a \bullet b = f \bullet d$

şeklinde tanımlı bir ikili işlem olsun. X kümesinin μ ve η alt kümeleri,

$\mu(a) = \mu(b) = \eta(c) = 0.1$

$\mu(c) = \eta(a) = 0.5$

$\mu(e) = \eta(b) = \eta(f) = 0.9$

$\mu(d) = 0.2$

$\mu(f) = \eta(d) = 1$

$\eta(e) = 0.6$

şeklinde tanımlansın. μ ve η fuzzy alt kümelerini

$$\mu = \{(a, 0.1), (b, 0.1), (c, 0.5), (d, 0.2), (e, 0.9), (f, 1)\}$$
$$\eta = \{(a, 0.5), (b, 0.9), (c, 0.1), (d, 0.2), (e, 0.6), (f, 0.9)\}$$

biçiminde de yazabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\mu\eta)(a) &= \sup\{\min\{\mu(e), \eta(f)\}, \min\{\mu(b), \eta(d)\}, \min\{\mu(a), \eta(c)\}\} \quad (a = e \bullet f = b \bullet d = a \bullet c)\\
&= \sup\{\min\{0.9, 0.9\}, \min\{0.1, 0.2\}, \min\{0.1, 0.1\}\}\\
&= \text{maks}\{0.9, 0.1, 0{,}1\}\\
&= 0.9\\
(\mu\eta)(b) &= \sup\{\min\{\mu(a), \eta(f)\}, \min\{\mu(d), \eta(e)\}\} \quad (b = a \bullet f = d \bullet e)\\
&= \sup\{\min\{0.1, 0.9\}, \min\{0.2, 0.6\}\}\\
&= \text{maks}\{0.1, 0.2\}\\
&= 0.2\\
(\mu\eta)(c) &= 0 \quad (\forall y, z \in X \text{ için } c \neq y \bullet z)\\
(\mu\eta)(d) &= \sup\{\min\{\mu(a), \eta(a)\}\}\\
&= \sup\{\min\{0.1, 0.5\}\}\\
&= 0.1\\
(\mu\eta)(e) &= \sup\{\min\{\mu(a), \eta(b)\}, \min\{\mu(f), \eta(d)\}\} \quad (e = a \bullet b = f \bullet d)\\
&= \sup\{\min\{0.1, 0.9\}, \min\{1, 0.2\}\}\\
&= \text{maks}\{0.1, 0.2\}\\
&= 0.2\\
(\mu\eta)(f) &= 0 \quad (\forall y, z \in X \text{ için } f \neq y \bullet z)
\end{aligned}$$

Tanım 2.2.16. X boş olmayan bir küme, μ ve η, X'in bulanık alt kümeleri olsun. μ ve η bulanık kümelerinin $\mu \otimes \eta$ cebirsel çarpımı $\forall x \in X$ için,

$$\mu \otimes \eta = \mu(x) \,.\, \eta(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.2.17. X herhangi bir küme olmak üzere, $\mu, \eta \in F(X)$ için $\mu \otimes \eta \subseteq \mu(x) \cap \eta(x)$ dir.

İspat: $\forall x \in X$ için $\mu(x), \eta(x) \in [0, 1]$ olduğundan,

$$\mu \otimes \eta(x) = \mu(x) \,.\, \eta(x) \leq \min\{\mu(x), \eta(x)\} = (\mu \cap \eta)(x)$$

olur. Böylece $\mu \otimes \eta \subseteq \mu \cap \eta$ dir.

Tanım 2.2.18. X boş olmayan bir küme, μ ve η, X in bulanık alt kümeleri olsun. μ ve η bulanık alt kümelerinin $\mu \oplus \eta$ cebirsel toplamı $\forall x \in X$ için,

$$\mu \oplus \eta = \mu(x) + \eta(x) - \mu(x) \, . \, \eta(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.2.19. X boş olmayan bir küme, μ ve η, X in bulanık alt kümeleri olsun. μ ve η bulanık alt kümelerinin $\mu \Theta \eta$ cebirsel farkı $\forall x \in X$ için,

$$(\mu \Theta \eta)(x) = \min \{\mu(x), 1 - \eta(x)\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 2.2.20. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere X kümesinin ω ve ξ bulanık alt kümeleri,

$\omega = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.1), (x_3, 0.8), (x_4, 0.5)\}$
$\xi = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.4), (x_3, 0.3), (x_4, 0.6)\}$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$(\omega \otimes \xi)(x_1) = \omega(x_1) \, . \, \xi(x_1) = 0.18$
$(\omega \otimes \xi)(x_2) = \omega(x_2) \, . \, \xi(x_2) = 0.04$
$(\omega \otimes \xi)(x_3) = 0.24$
$(\omega \otimes \xi)(x_4) = 0.3$

olur. Görüldüğü gibi $\omega \otimes \xi$ cebirsel çarpımı da X in bir bulanık alt kümesi olup,

$\omega \otimes \xi = \{(x_1, 0.18), (x_2, 0.04), (x_3, 0.24), (x_4, 0.3)\}$ şeklindedir. Benzer şekilde,

$\omega \oplus \xi = \{(x_1, 0.72), (x_2, 0.46), (x_3, 0.86), (x_4, 0.8)\}$

$\omega \Theta \xi = \{(x_1, 0.18), (x_2, 0.04), (x_3, 0.24), (x_4, 0.3)\}$ olur.

2.3 Bulanık Kümelerin Bir Fonksiyon Altındaki Görüntüsü ve Ters Görüntüsü

Bu kısımdaki Tanım ve Teoremler Rosenfeld (1971), Chang (1968), Malik ve Mordeson (1991), Kuraoka ve Kuroki (1992) den derlenmiştir.

Tanım 2.3.1. X ve Y iki küme, $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $\mu \in F(X)$, $\eta \in F(Y)$ olsun. Bu durumda,

(i) μ nün f altındaki görüntüsü $f(\mu)$, $\forall y \in Y$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & , f^{-1}(y) \neq \varnothing \text{ ise} \\ \\ 0 & , f^{-1}(y) = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Y nin bir bulanık alt kümesidir.

(ii) η nün f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(\eta)$, $\forall x \in X$ için,

$$f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x))$$

şeklinde tanımlı X in bir bulanık alt kümesidir.

Eğer f bir homomorfizma ise $f(\mu)$ ye μ nün homomorfik görüntüsü, $f^{-1}(\eta)$ ye ise η nün ters homomorfik görüntüsü denir (Rosenfeld, 1971).

Örnek 2.3.2. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ olsun. $f : X \to Y$ fonskyionu, $f(x_1) = f(x_2) = y_1$, $f(x_3) = y_2$ şeklinde tanımlansın.

(i) X in bir $\mu = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.9), (x_3, 0.5)\}$ bulanık alt kümesinin f altındaki görüntüsü,

$$\begin{array}{ll} f(\mu)(y_1) = \sup\{\mu(x_1), \mu(x_2)\} = 0.9 & (f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_2\}) \\ f(\mu)(y_2) = \mu(x_3) = 0.5 & (f^{-1}(y_2) = \{x_3\}) \\ f(\mu)(y_2) = 0 & (f^{-1}(y_3) = \varnothing) \end{array}$$

olmak üzere,

$$f(\mu) = \{(y_1, 0.9), (y_2, 0.5), (y_3, 0)\}$$

dir. Böylece $f(\mu)$ de Y nin bir bulanık alt kümesi olur.

(ii) Y nin bir $\eta = \{(y_1, 0.3), (y_2, 0.8), (y_3, 0.5)\}$ bulanık alt kümesinin f altındaki görüntüsü,

$$\begin{array}{l} f^{-1}(\eta)(x_1) = \eta(f(x_1)) = \eta(y_1) = 0.3 \\ f^{-1}(\eta)(x_2) = \eta(f(x_2)) = \eta(y_1) = 0.3 \\ f^{-1}(\eta)(x_3) = \eta(f(x_3)) = \eta(y_2) = 0.8 \end{array}$$

olmak üzere,

$$f^{-1}(\eta) = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.3), (x_3, 0.8)\}$$

dir. Böylece $f^{-1}(\eta)$ de X in bir bulanık alt kümesidir.

Teorem 2.3.2. X ve Y iki küme, $f: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi $\mu, \omega \in F(X)$ ve $\forall \eta, \xi \in F(Y)$ bulanık alt kümeleri için,

i) $f^{-1}(\eta') = (f^{-1}(\eta))'$

ii) $(f(\mu))' \subseteq f(\mu')$

iii) f birebir $\Rightarrow (f(\mu))' = f(\mu')$

iv) $\xi \subseteq \eta \Rightarrow f^{-1}(\xi) = f^{-1}(\eta)$

v) $\omega \subseteq \mu \Rightarrow f^{-1}(\omega) = f^{-1}(\mu)$

vi) $f(f^{-1}(\eta)) \subseteq \eta$

vii) f örten $\Rightarrow f(f^{-1}(\eta)) = \eta$

viii) $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$

ix) f birebir $\Rightarrow \mu = f^{-1}(f(\mu))$ dir.

İspat:

i) $\forall x \in X$ için $f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x))$ olduğundan

$$\begin{aligned} f^{-1}(\eta')(x) &= \eta'(f(x)) \\ &= 1 - \eta(f(x)) \\ &= 1 - f^{-1}(\eta)(x) \\ &= (f^{-1}(\eta)(x))' \end{aligned}$$

olur. O halde $f^{-1}(\eta') = (f^{-1}(\eta))'$ dir.

ii) $\forall y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ boştan farklı ise,

$$\begin{aligned} f(\mu')(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu'(z)\} &= \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{1 - \mu(z)\} \\ &= 1 - \inf_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu(z)\} \end{aligned} \tag{1}$$

μ, $X \to [0,1]$ bir bulanık küme olduğundan $f(\mu)$ de Y de bir bulanık kümedir. O halde,

$$(f(\mu))'(y) = 1 - f(\mu)(y) = 1 - \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu(z)\} \tag{2}$$

(1) ve (2) den $1 - \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu(z)\} \le 1 - \inf_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu(z)\} \Rightarrow (f(\mu))'(y) \le f(\mu')(y)$ olup

$(f(\mu))' \subseteq f(\mu')$ elde edilir.

iii) ii)'ye benzer şekilde yapılır.

iv) $\omega, \mu \in F(X)$ olarak verilmişti. Yani $\omega, \mu : X \to [0,1]$ bulanık kümeler ve

$f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere

$f(\omega)(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\omega(z)\}$ ve $f(\mu)(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu(z)\}$ dir.

$\omega \subseteq \mu$ olduğundan $\forall y \in Y$ için

$f(\omega)(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\omega(z)\} \leq \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\mu(z)\} = f(\mu)(y)$ olup $f(\omega) \subseteq f(\mu)$ elde edilir.

v) $y \in Y$ için $f^{-1}(y) \neq \varnothing$ ise

$f(f^{-1}(\eta))(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{f^{-1}(\eta)(z)\} = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \{\eta(f)(z))\} = \eta(y)$

$f^{-1}(y) \neq \varnothing$ ise $f(f^{-1}(\eta))(y) = 0$ dır.

Bundan dolayı $\forall y \in Y$ için,

$f(f^{-1}(\eta))(y) = 0$ ya da $f(f^{-1}(\eta))(y) = \eta(y)$ olduğundan

$f(f^{-1}(\eta))(y) \leq \eta(y) \Rightarrow f(f^{-1}(\eta) \subseteq \eta$ elde edilir.

Teorem 2.3.3. X, Y ve Z herhangi kümeler olmak üzere $f : X \to Y$ ve $h : Y \to Z$ herhangi iki fonksiyon olsun. Bu durumda "$\circ$" fonksiyonların bileşke işlemi olmak üzere X in her μ bulanık alt kümesi için,

$$(h \circ f)(\mu) = h(f(\mu))$$

dir.

İspat: $\forall z \in Z$ için,

$$h(f(\mu))(z) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in h^{-1}(z)} \{ \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu(x)\}\} & , h^{-1}(z) \neq \varnothing,\ f^{-1}(z) \neq \varnothing \\ \\ 0 & , h^{-1}(z) \neq \varnothing,\ f^{-1}(z) = \varnothing \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(h^{-1}(z))} \mu(x) & , f^{-1}(h^{-1}(z)) = (h \circ f)^{-1} \neq \varnothing \\ \\ 0 & , f^{-1}(h^{-1}(z)) = (h \circ f)^{-1} = \varnothing \end{cases}$$

$$= (h \circ f)(\mu)(z)$$

2.4 Bulanık Bağıntı

Tanım 2.4.1. X boş olmayan bir küme olsun. $\mu: X \times X \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için $\mu(x,y) \in [0,1]$ şeklinde tanımlı μ bulanık alt kümesine X üzerinde bir bulanık bağıntı denir.

Tanım 2.4.2. X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $\mu: X \times Y \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $\mu(x,y) \in [0,1]$ şeklinde tanımlı μ bulanık alt kümesine $X \times Y$ üzerinde bir bulanık bağıntı denir.

Örnek 2.4.3

$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e\}$

$X \times Y = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

$\mu = \{((a, d), 0.2), ((a, e), 0.9), ((b, d), 0.5), ((b, e), 0), ((c, d), 0.5), ((c, e), 1)\}$

ile tanımlı $X \times Y$ nin bir bulanık alt kümesi bir bulanık bağıntıdır. Burada μ nün üyelik fonksiyonu $\mu: X \times Y \rightarrow [0,1]$ ile tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 2.4.4. X boş olmayan bir küme olsun. $X^n = X \times X \times X \times ... \times X$ ve $\mu: X^n \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $\forall x_i \in X$, $i = 1, 2, ..., n$ için $\mu(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]$ şeklinde tanımlı μ bulanık alt kümesine X üzerinde bir n-li bulanık bağıntı denir.

Tanım 2.4.5. μ ve η, X üzerinde iki bulanık bağıntı olsun. $\forall x, y \in X$ için $(\eta \circ \mu)(x, y) = \sup_{z \in X} \{\min \{ \mu(x, z), \eta(y, z) \} \}$ şeklinde tanımlı

$$\eta \circ \mu: X \times X \rightarrow [0,1]$$

bulanık bağıntısına μ ve η bulanık bağıntılarının bileşkesi denir.

Lemma 2.4.6. μ, η ve ξ bir X kümesi üzerinde bulanık bağıntılar ise,

$$\mu \circ (\eta \circ \xi) = (\mu \circ \eta) \circ \xi$$

dır (Zadeh, 1965).

Tanım 2.4.7. X boş olmayan bir küme, μ, X üzerinde bir bulanık bağıntı ve σ, X in bir bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda eğer $\forall x, y \in X$ için,

$$\mu(x, y) \leq \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$$

ise μ ye σ üzerinde bir bulanık bağıntı denir (Malik ave Mordeson, 1991).

Tanım 2.4.8. X boş olmayan bir küme, μ ve η, X in bulanık alt kümeleri olsunlar. $\forall x, y \in X$ için $(\mu \times \eta)(x, y) = \min\{\mu(x), \eta(y)\}$ şeklinde tanımlı

$$\mu \times \eta \colon X \times X \to [0,1]$$

bulanık bağıntıya μ ve η bulanık alt kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Teorem 2.4.9. X boş olmayan bir küme, μ ve η, X in bulanık alt kümeleri olsunlar. Bu durumda $t \in [0,1]$ olmak üzere,

i) $\mu \times \eta$, X üzerinde bir bulanık bağıntıdır.

ii) $(\mu \times \eta)_t = \mu_t \times \eta_t$ dir.

İspat:

i) $\forall x, y \in X$ için $(\mu \times \eta)(x, y) = \min\{\mu(x), \eta(y)\} \in [0,1]$ olduğundan $\mu \times \eta : X \times X \to [0,1]$ dir. Buradan $\mu \times \eta$, X üzerinde bir bulanık bağıntıdır.

ii) $\mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$ ve $\eta_t = \{y \in X \mid \eta(y) \geq t\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\mu_t \times \eta_t &= \{(x, y) \mid \mu(x) \geq t \text{ ve } \eta(y) \geq t\} \\
&= \{(x, y) \mid \min\{\mu(x), \eta(y)\} \geq t\} \\
&= \{(x, y) \mid (\mu \times \eta)(x, y) \geq t\} \\
&= (\mu \times \eta)_t \quad \text{olur.}
\end{aligned}$$

Tanım 2.4.10. X boş olmayan bir küme ve μ, X üzerinde bir bulanık bağıntı olsun. Bu durumda eğer,

(i) $\mu(x, x) = 1, \quad \forall x \in X$

(ii) $\mu(x, y) = \mu(y, x), \quad \forall x, y \in X$

(iii) $\mu(x, y) \geq \sup_{z \in X}\{\min\{\mu(x, z), \mu(z, y)\}\}$

ise μ ye X üzerinde bir bulanık denklik bağıntısı denir.

Tanım 2.4.11. μ, X üzerinde bir bulanık denklik bağıntısı olsun. Her bir $a \in X$ için $\mu_{[a]}$ ya a'nın denklik sınıfı denir ve

$$\mu_{[a]}(x) = \mu(a, x), \quad \forall x \in X$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.12. μ, X üzerinde bir bulanık denklik bağıntısı olsun. Bu durumda,

$$X / \mu = \{ \mu_{[a]} \mid a \in X\}$$

kümesine bulanık bölüm kümesi denir.

Lemma 2.4.13. μ, X üzerinde bir bulanık denklik bağıntısı olsun. Bu durumda,

(i) $\mu(a, b) = 0 \Leftrightarrow \min \{\mu_{[a]}, \mu_{[b]}\} \equiv 0 \quad (a, b \in X)$

(ii) $\sup\limits_{a \in X} \mu_{[a]} \equiv 1$

(iii) $\mu_{[a]} = \mu_{[b]} \Leftrightarrow \mu(a, b) = 1$

(iv) $\forall x \in X$ için $p(x) = \mu_{[x]}$ şeklinde tanımlı bir $p : X \to X / \mu$ birebir ve örten dönüşümü vardır (Kuraoka ve Kuroki, 1992).

3. BULANIK HALKALAR VE İDEALLER

3.1 Bulanık Alt Halka ve Bulanık İdealler

Bu bölümde bulanık alt halka, bulanık ideal, bulanık seviye alt halka ve bulanık seviye idealleri incelenecektir. Ayrıca bulanık bölüm halkasının yapısı ve özellikleri araştırılacaktır.

Tanım 3.1.1 R bir halka, μ ve η, R halkasının bulanık alt kümeleri olsun. $\mu+\eta$, $-\mu$, $\mu-\eta$, $\mu\cdot\eta$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall x \in R$ için,

i) $(\mu+\eta)(x) = \sup\limits_{x=y+z} \{ \min \{ \mu(y), \eta(z)\} \mid y,z \in R\}$

ii) $(-\mu)(x) = \mu(-x)$

iii) $(\mu-\eta)(x) = \sup\limits_{x=y-z} \{ \min \{ \mu(y), \eta(z)\} \mid y,z \in R\}$

iv) $(\mu\cdot\eta)(x) = \sup\limits_{x=y\cdot z} \{ \min \{ \mu(y), \eta(z)\} \mid y,z \in R\}$

$\mu+\eta$, $\mu-\eta$ ve $\mu\cdot\eta$ sırasıyla μ ve η nün toplamı, farkı ve çarpımı olarak adlandırılır. $-\mu$, μ nün negatifi olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2. R bir halka ve μ, R nin bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için,

(i) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

ise μ ye R nin bir bulanık alt halkası denir (Gupta ve Kantroo, 2001).

Tanım 3.1.3. μ, R nin bulanık alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için,

(i) $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(xy) \geq \mu(x)$

ise μ ye R halkasının bir bulanık sağ ideali, (ii) yerine

(iii) $\mu(xy) \geq \mu(y)$

ise μ ye R halkasının bir bulanık sol ideali denir. Eğer μ, R halkasının hem sol hem sağ ideali ise μ ye R halkasının bulanık ideali denir (Gupta ve Kantroo, 2001).

Tanım 3.1.4. μ, R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için,

(i) $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(xy) \geq \text{maks}\{\mu(x), \mu(y)\}$

ise μ ye R halkasının bulanık ideali denir (De-Gang, 1998).

Örnekler 3.1.5

1. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası olmak üzere $\mu : \mathbb{Z} \to [0,1]$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $\mu(x) = 0.6$ olarak tanımlanan μ bulanık alt kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin bulanık idealidir.

2. $\mu : \mathbb{Z} \to [0,1]$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} 2/3 & , x \in 2\mathbb{Z} \\ \\ 0 & , x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

olarak tanımlanan μ bulanık alt kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bulanık idealidir.

3. $\mu : \mathbb{Z} \to [0,1]$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ 2/5 & , x \in 2\mathbb{Z} - \{0\} \\ 1/5 & , x \in \mathbb{Z} - 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

olarak tanımlanan μ bulanık alt kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bulanık idealidir.

Lemma 3.1.6. μ, R halkasının bulanık ideali olsun. Bu durumda 0_R, R nin toplamaya göre birim elemanı olmak üzere $\forall x \in R$ için,

(i) $\mu(0_R) \geq \mu(x)$

(ii) $\mu(-x) = \mu(x)$ dir (Dixit ve ark., 1992).

İspat:

(i) $\mu(0_R) = \mu(x - x) \geq \min\{\mu(x), \mu(x)\} = \mu(x) \Rightarrow \mu(0_R) \geq \mu(x)$

(ii) $\mu(x) = \mu(0_R - (-x)) \geq \min\{\mu(0_R), \mu(-x)\} \overset{(i)}{=} \mu(-x) \Rightarrow \mu(x) \geq \mu(-x)$ (1)

$\mu(-x) = \mu(0_R - x) \geq \min\{\mu(0_R), \mu(x)\} \overset{(i)}{=} \mu(x) \Rightarrow \mu(-x) \geq \mu(x)$ (2)

(1) ve (2) den $\mu(-x) = \mu(x)$ eşitliği elde edilir.

Lemma 3.1.7. μ, R halkasının bulanık ideali olsun. Eğer $x, y \in R$ için, $\mu(x) < \mu(y)$ ise,

$$\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$$

dir.

İspat: $x, y \in R$ için, $\mu(x) < \mu(y)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\mu(x - y) &\geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} \\
&= \mu(x) \\
&\Rightarrow \mu(x - y) \geq \mu(x) && (1) \\
\mu(x) = \mu(x - y - (-y)) &\geq \min \{\mu(x - y), \mu(-y)\} \\
&= \min \{\mu(x - y), \mu(y)\} && (\mu(x) < \mu(y)) \\
&= \mu(x - y) \\
&\Rightarrow \mu(x) \geq \mu(x - y) && (2)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (1) ve (2) den $\mu(x - y) = \mu(x)$ dir.

$$\begin{aligned}
\mu(y - x) &\geq \min \{\mu(y), \mu(x)\} \\
&= \mu(x) \\
&\Rightarrow \mu(y - x) \geq \mu(x) && (3) \\
\mu(x) = \mu(y - (y - x)) &\geq \min \{\mu(y), \mu(y - x)\} \\
&= \mu(y - x) \\
&\Rightarrow \mu(x) \geq \mu(y - x) && (4)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3) ve (4) den $\mu(y - x) = \mu(x)$ dir.

Sonuç olarak $\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$ elde edilir.

Lemma 3.1.8. μ, bir R halkasının bulanık alt halkası olsun. Eğer $x, y \in R$ için, $\mu(x) < \mu(y)$ ise,

$$\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$$

dir (Dixit ve ark., 1992).

Teorem 3.1.9. μ, R nin bir bulanık ideali olsun. $x, y \in R$ olmak üzere,

$$\mu(x - y) = \mu(0_R) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$$

dir.

İspat: $x, y \in R$ olmak üzere, $\mu(x - y) = \mu(0_R)$ olsun.

$$\begin{aligned}\mu(x) = \mu(x - y - (-y)) &\geq \min\{\mu(x - y), \mu(-y)\}\\ &= \min\{\mu(0_R), \mu(y)\}\\ &= \mu(y)\\ \mu(y) = \mu(y - x - (-x)) &\geq \min\{\mu(y - x), \mu(-x)\}\\ &= \min\{\mu(x - y), \mu(x)\}\\ &= \min\{\mu(0_R), \mu(x)\}\\ &= \mu(x)\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mu(x) = \mu(y)$ dir.

Aşağıdaki örnekte bir R halkasının bulanık alt halkasının, R nin bir bulanık ideali olamayabileceği gösterilmiştir.

Örnek 3.1.10. R reel sayıların bilinen anlamda toplama ve çarpma işlemi altında halkası olsun. R nin bir μ bulanık alt kümesi $t_0, t_1 \in [0,1]$ ve $t_0 > t_1$ olmak üzere,

$$\mu(x) = \begin{cases} t_0 & , \text{ x rasyonel ise} \\ t_1 & , \text{ x irrasyonel ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda x rasyonel ve y irrasyonel ise xy irrasyonel olup $\mu(xy) = t_1, \mu(x) = t_0, \mu(y) = t_1$ dir.

Dolayısıyla $t_1 = \mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} = t_1$ ancak $\mu(xy) \not\geq \text{maks}\{\mu(x), \mu(y)\} = t_0$ olup μ, R nin bir bulanık alt halkasıdır ancak bulanık ideali değildir.

Önerme 3.1.11. R halkasının bulanık alt halkalarının herhangi bir ailesinin kesişimi R nin bir bulanık alt halkasıdır (Dixit ve ark., 1992).

İspat: $\forall i \in \Lambda$ için $\{\mu_i\}$, R halkasının bulanık alt halkalarının bir ailesi olsun. $\{\mu_i\}$, bulanık alt halkalarının kesişimini $\mu = \bigcap_{i \in \Lambda} \mu_i$ ile gösterirsek, $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned}\mu(x - y) &= \inf_{i\in\Lambda}\{\mu_i(x - y)\}\\ &\geq \inf_{i\in\Lambda}\{\min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\}\\ &\geq \min\{\inf_{i\in\Lambda}\mu_i(x), \inf_{i\in\Lambda}\mu_i(y)\}\\ &= \min\{\mu(x), \mu(y)\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu(xy) &= \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i(xy)\} \\
&\geq \inf_{i\in\Lambda} \{\min\{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\} \\
&\geq \min\{\inf_{i\in\Lambda} \mu_i(x), \inf_{i\in\Lambda} \mu_i(y)\} \\
&= \min\{\mu(x), \mu(y)\}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece μ, R nin bir bulanık alt halkasıdır.

Önerme 3.1.12. μ bir R halkasının bulanık alt halkası, η ise bulanık ideali olsun. Bu durumda $\mu \cap \eta$, R nin $\{ x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R) \}$ alt halkasının bir bulanık idealidir.

İspat: Tanım 3.1.4 ve Lemma 3.1.6 ile Teoremin ispatı açıktır.

Teorem 3.1.13. μ ve η, R halkasının bulanık idealleri olsun. Bu durumda $\mu \cap \eta$ de R halkasının bir bulanık idealidir.

İspat: $\forall x, y \in R$ için,

$$
\begin{aligned}
(\mu \cap \eta)(x - y) &= \min\{\mu(x - y), \eta(x - y)\} \\
&\geq \min\{\min\{\mu(x), \mu(y)\}, \min\{\eta(x), \eta(y)\}\} \\
&= \min\{\min\{\mu(x), \eta(x)\}, \min\{\mu(y), \eta(y)\}\} \\
&= \min\{(\mu \cap \eta)(x), (\mu \cap \eta)(y)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mu \cap \eta)(xy) &= \min\{\mu(xy), \eta(xy)\} \\
&\geq \min\{\text{maks}\{\mu(x), \mu(y)\}, \text{maks}\{\eta(x), \eta(y)\}\} \\
&= \min\{\text{maks}\{\mu(x), \eta(x)\}, \text{maks}\{\mu(y), \eta(y)\}\} \\
&\geq \text{maks}\{\min\{\mu(x), \eta(x)\}, \min\{\mu(y), \eta(y)\}\} \\
&= \text{maks}\{(\mu \cap \eta)(x), (\mu \cap \eta)(y)\}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\mu \cap \eta$, R halkasının bir bulanık idealidir.

Teorem 3.1.14. μ, R nin bir bulanık sağ ideali, η ise bulanık sol ideali olsun. Bu durumda $\mu\eta \subseteq \mu \cap \eta$ dir.

İspat: Eğer $x \in R$ için, $\mu \cap \eta(x) = 0$ ise sonuç açıktır.

$\mu\eta(x) \neq 0$ olsun. μ bulanık sağ, η bulanık sol ideal olduğundan $\forall y, z \in R$ için,

$\mu(y) \leq \mu(yz)$ ve $\eta(z) \leq \eta(yz)$ dir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\mu\eta(x) &= \sup_{x=yz} \{\min \{\mu(y), \eta(z)\}\} \\
&\le \min \{\mu(yz), \eta(yz)\} \\
&= \min \{\mu(x), \eta(x)\} \\
&= \mu \cap \eta(x)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\mu\eta \subseteq \mu \cap \eta$ dir.

Teorem 3.1.15. $\forall i \in \Lambda$ için $\{\mu_i\}$, R halkasının bulanık ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda, $\mu = \bigcap_{i\in\Lambda} \mu_i$ R nin bir bulanık idealidir.

İspat: $x, y \in R$ için,

$$
\begin{aligned}
\mu(x-y) &= \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i(x-y)\} \\
&\ge \inf_{i\in\Lambda} \{\min \{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\} \\
&\ge \min \{\inf_{i\in\Lambda} \mu_i(x), \inf_{i\in\Lambda} \mu_i(y)\} \\
&= \min \{\mu(x), \mu(y)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu(xy) &= \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i(xy)\} \\
&\ge \inf_{i\in\Lambda} \{\text{maks} \{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\} \\
&\ge \text{maks} \{\inf_{i\in\Lambda} \mu_i(x), \inf_{i\in\Lambda} \mu_i(y)\} \qquad (*) \\
&= \text{maks} \{\mu(x), \mu(y)\}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece μ, R nin bir bulanık idealidir. Burada $(*)$ doğrudur, çünkü $\forall i \in \Lambda$ için,

$$
\begin{aligned}
& \mu_i(x) \ge \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i(xy)\} \text{ ve } \mu_i(y) \ge \inf_{i\in\Lambda} \{\mu_i(xy)\} \\
& \Rightarrow \text{maks} \{\mu_i(x), \mu_i(y)\} \ge \text{maks} \{\inf_{i\in\Lambda} \mu_i(x), \inf_{i\in\Lambda} \mu_i(y)\} \\
& \Rightarrow \inf_{i\in\Lambda} \{\text{maks} \{\mu_i(x), \mu_i(y)\}\} \ge \text{maks} \{\inf_{i\in\Lambda} \mu_i(x), \inf_{i\in\Lambda} \mu_i(y)\}
\end{aligned}
$$

dır.

Klasik halka teorisinden bilindiği gibi A ve B bir R halkasının iki ideali ise $A \cup B$ nin de R nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B$ veya $B \subseteq A$ olmasıdır. Ancak bu sonuç bulanık halka teorisine genişletilemememektedir. Birleşimleri bulanık ideal olan ancak birbirini içermeyen bulanık idealler mevcut olabilir. Genel olarak iki bulanık idealin birleşiminin bulanık ideal olup olmadığı, birleşimlerinin görüntü kümesine bağlıdır.

Aşağıdaki örnekte iki bulanık idealin birleşiminin bulanık ideal olmayabileceği gösterilmektedir.

Örnek 3.1.16. Z mod 6 da tamsayıların halkası olsun.

μ ve $\eta : \mathbb{Z} \to [0,1]$ bulanık alt kümeleri $t_i \in [0,1]$, $0 \le i \le 4$ için,

$t_4 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$ olmak üzere

$$\mu(0) = t_0$$
$$\mu(1) = \mu(2) = \mu(4) = \mu(5) = t_3$$
$$\mu(3) = t_2$$
$$\eta(0) = t_1$$
$$\eta(1) = \eta(3) = \eta(5) = t_4$$
$$\eta(2) = \eta(4) = t_2$$

olarak tanımlansın. μ, η ve $\mu \cup \eta$ kümelerini aşağıda olduğu gibi gösterebiliriz.

$$\mu = \{(0, t_0), (1, t_3), (2, t_3), (3, t_2), (4, t_3), (5, t_3)\}$$

$$\eta = \{(0, t_1), (1, t_4), (2, t_2), (3, t_4), (4, t_2), (5, t_4)\}$$

$$\mu \cup \eta = \{(0, t_1), (1, t_3), (2, t_2), (3, t_2), (4, t_2), (5, t_3)\}$$

Bu durumda μ ve η, Z nin bulanık idealleridir ancak $\mu \cup \eta$, Z nin bir bulanık ideali değildir. Gerçekten $x = 4, y = 3$ için,

$\mu \cup \eta(4-3) = \mu \cup \eta(1) = t_3$, $\mu \cup \eta(4) = t_2$, $\mu \cup \eta(3) = t_2$ olup

$\mu \cup \eta(4-3) = t_3 \not\geq \min\{\mu \cup \eta(4), \mu \cup \eta(3)\} = \min\{t_2, t_2\} = t_2$ çelişkisi elde edilir.

Bu durumda μ ve η, Z nin bulanık idealleridir ancak $\mu \cup \eta$, Z nin bir bulanık ideali değildir.

Sonuç 3.1.17. Eğer μ, R halkasının sabit bir bulanık ideali ise bu durumda μ bulanık ideali $A \not\subseteq B$ ve $B \not\subseteq A$ olmak üzere R nin A ve B bulanık ideallerinin birleşimi olarak ifade edilemez (Dixit ve ark., 1991).

Aşağıdaki örnekte birbirini içermeyen iki bulanık idealin birleşiminin bir bulanık ideal olabileceği gösterilmektedir.

Örnek 3.1.18. R herhangi bir halka ve 0_R, R nin toplamaya göre birim elemanı olsun.

μ ve $\eta: R \to [0,1]$ bulanık alt kümeleri $t_i \in [0,1], 0 \le i \le 3$ için, $t_3 < t_2 < t_1 < t_0$ olmak üzere,

$$\mu(x) = \begin{cases} t_0 & , x = 0_R \\ t_1 & , x \neq 0_R \end{cases}$$

$$\eta(x) = \begin{cases} t_1 & , x = 0_R \\ t_2 & , x \neq 0_R \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mu \not\subseteq \eta$ ve $\eta \not\subseteq \mu$ olup μ, η ve $\mu \cup \eta$, R nin bulanık idealleridir.

Teorem 3.1.19. R halkasının μ bulanık ideali için $t \in [0,1]$, $\mathrm{Im}(\mu) = \{0, t\}$ olsun. Bu durumda η ve θ, R nin bulanık idealleri olmak üzere,

$$\mu = \eta \cup \theta \Rightarrow \eta \subseteq \theta \text{ veya } \theta \subseteq \eta$$

dir.

İspat: $\eta \not\subseteq \theta$ ve $\theta \not\subseteq \eta$ ise $\mu \neq \eta \cup \theta$ olduğunu gösterelim. $x, y \in R$ için,

$\eta(x) > \theta(x)$ ve $\theta(y) > \eta(y)$ olsun. $\mu = \eta \cup \theta$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\mu(x) = \eta(x) > \theta(x) \ge 0 \text{ ve } \mu(y) = \theta(y) > \eta(y) \ge 0 \qquad \text{(a)}$$

olur. Ayrıca $\mathrm{Im}(\mu) = \{0, t\}$ ve (a) dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \eta(x) = t \\ \mu(y) &= \theta(y) = t \\ \mu(x - y) &= t \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

olur. Bu durumda,

$$t = \eta(x) > \eta(y) \text{ ve } t = \theta(y) > \theta(x)$$

dir. Böylece Lemma 3.1.7 den,

$$\eta(x - y) = \eta(y) < t \text{ ve } \theta(x - y) = \theta(x) < t$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mu(x - y) &= \text{maks}\,\{\eta(x - y), \theta(x - y)\} \\ &= \text{maks}\,\{\eta(y), \theta(x)\} \\ &< t\end{aligned}$$

olur. Bu ise (b) ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır.

Teorem 3.1.20. R ve R' iki halka, $f : R \to R'$ bir örten homomorfizma ve μ ve ξ, R nin herhangi bulanık idealleri olsunlar. Bu durumda,

(i) $f(\mu+\xi) = f(\mu) + f(\xi)$

(ii) $f(\mu\xi) = f(\mu)\, f(\xi)$

(iii) $f(\mu \cap \xi) \subseteq f(\mu) \cap f(\xi)$ dir (Kumar, 1992).

Teorem 3.1.21. R ve R' iki halka, $f : R \to R'$ bir homomorfizma ve μ, R nin, η ise R' nün bir bulanık ideali olsun. Eğer f birebir ve örten ise,

(i) $f(\mu)$, R' nün bir bulanık idealidir.

(ii) $f^{-1}(\eta)$, R nin bir bulanık idealidir.

İspat:

(i) $x', y' \in R'$ için,

$$\begin{aligned}f(\mu)(x' - y') &= \sup_{f(z)=x'-y'} \mu(z) \\ &= \sup_{\substack{f(x)=x' \\ f(y)=y'}} \mu(x - y) \\ &\geq \sup_{f(x)=x'} \sup_{f(y)=y'} \{\min\{\mu(x), \mu(y)\}\} \\ &= \min\{\sup_{f(x)=x'} \mu(x), \sup_{f(y)=y'} \mu(y)\} \\ &= \min\{f(\mu)(x'), f(\mu)(y')\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\mu)(x'y') &= \sup_{f(z)=x'y'} \mu(z) \\ &= \sup_{\substack{f(x)=x' \\ f(y)=y'}} \mu(xy) \\ &\geq \sup_{f(x)=x'} \sup_{f(y)=y'} \{\text{maks}\{\mu(x), \mu(y)\}\} \\ &= \text{maks}\{\sup_{f(x)=x'} \mu(x), \sup_{f(y)=y'} \mu(y)\} \\ &= \text{maks}\{f(\mu)(x'), f(\mu)(y')\}\end{aligned}$$

olur. Böylece $f(\mu)$, R' nün bir bulanık idealidir.

(ii) $x, y \in R$ için,

$$f^{-1}(\eta)(x - y) = \eta(f(x - y))$$
$$= \eta(f(x) - f(y))$$
$$\geq \min\{\eta(f(x)), \eta(f(y))\}$$
$$= \min\{f^{-1}(\eta)(x), f^{-1}(\eta)(y)\}$$

$$f^{-1}(\eta)(xy) = \eta(f(xy))$$
$$= \eta(f(x)f(y))$$
$$\geq \text{maks}\{\eta(f(x)), \eta(f(y))\}$$
$$= \text{maks}\{f^{-1}(\eta)(x), f^{-1}(\eta)(y)\}$$

olur. Böylece $f^{-1}(\eta)$, R nin bir bulanık idealidir.

Teorem 3.1.22. R ve R' iki halka, $f : R \to R'$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda,

(i) μ ve θ, R nin bulanık idealleri olmak üzere $f(\mu)f(\theta) \subseteq f(\mu\theta)$

(ii) η ve ξ, R' nün bulanık idealleri olmak üzere $f^{-1}(\eta)f^{-1}(\xi) \subseteq f^{-1}(\eta\xi)$

dır.

İspat:

(i) $y \in R'$, $\alpha = (f(\mu)f(\theta))(y)$ ve $\beta = (f(\mu\theta))(y)$ olsun.

Eğer $\forall y_1, y_2 \in R'$ için $y \neq y_1 y_2$ ise $\alpha = 0 \leq \beta$ dır.

$y_1, y_2 \in R'$ olmak üzere $y = y_1 y_2$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha = (f(\mu)f(\theta))(y)$$
$$= \sup_{y=y_1y_2}\{\min\{(f(\mu)(y_1, (f(\theta))(y_2)\}\}$$
$$= \sup_{y=y_1y_2}\{\min\{\sup_{x\in f^{-1}(y_1)}\mu(x), \sup_{x\in f^{-1}(y_2)}\theta(x)\}\}$$

dir. Böylece herhangi $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ ve $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ için,

$$\alpha - \varepsilon < \min\{\mu(x_1), \theta(x_2)\}$$
$$\leq (\mu\theta)(x_1 x_2)$$
$$\leq \sup_{x\in f^{-1}(y)}(\mu\theta)(x)$$
$$= (f(\mu\theta))(y) = \beta$$

dır. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\alpha \leq \beta$ dır.

(ii) $x \in R, \omega = (f^{-1}(\eta) f^{-1}(\xi))(x)$ ve $\gamma = (f^{-1}(\eta\xi))(x)$ olsun.

Eğer $\forall x_1, x_2 \in R$ için $x \neq x_1 x_2$ ise $\omega = 0 \leq \gamma$ dır.

$x_1, x_2 \in R$ olmak üzere $x = x_1 x_2$ ve $\delta > 0$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\omega &= (f^{-1}(\eta) f^{-1}(\xi))(x) \\
&= \sup_{x=x_1x_2} \{\min \{(f^{-1}(\eta))(x_1), (f^{-1}(\xi))(x_2))\}\} \\
&= \sup_{x=x_1x_2} \{\min \{\eta(f(x_1), \xi(f(x_2))\}\}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $x = x_1 x_2$ olmak üzere $x_1, x_2 \in R$ için,

$$
\begin{aligned}
\omega - \delta &< \min \{\eta(f(x_1), \xi(f(x_2)\} \\
&\leq (\eta\xi)(f(x)) \\
&= (f^{-1}(\eta\xi))(x) = \gamma
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla $\delta > 0$ keyfi olduğundan $\omega \leq \gamma$ dır.

3.2. Bulanık Seviye Alt Halkaları ve Bulanık Seviye İdealleri

Lemma 3.2.1. μ bir R halkasının bulanık alt halkası olsun. Bu durumda $t \leq \mu(0_R)$ olmak üzere her bir μ_t seviye alt kümesi R nin bir alt halkasıdır (Dixit ve ark., 1992).

Teorem 3.2.2. μ bir R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda, μ, R nin bir bulanık alt halkasıdır $\Leftrightarrow$ $t \in \mathrm{Im}(\mu)$ olmak üzere her bir μ_t seviye alt kümesi R nin bir alt halkasıdır (Dixit ve ark., 1992).

Teorem 3.2.3. μ bir R halkasının bulanık sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda $0 \leq t \leq \mu(0_R)$ olmak üzere μ_t seviye alt kümeleri R nin sol (sağ) idealleridir.

İspat: $0 \leq t \leq \mu(0_R)$ olsun.

(i) $\mu_t = \{x \mid \mu(x) \geq t\} \Rightarrow 0_R \in \mu_t$
$\Rightarrow \mu_t \neq \emptyset$ dir.

(ii) μ bir bulanık sol (sağ) ideal olduğundan,

$\mu(x - y) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} \geq t \Rightarrow x - y \in \mu_t$ dir.

$r \in R$ olsun. $\forall x \in R$ için,

$\mu(rx) \geq \mu(x) \geq t \Rightarrow rx \in \mu_t$ ($\mu(xr) \geq \mu(x) \geq t \Rightarrow xr \in \mu_t$)

dir. Böylece (i) ve (ii) den μ_t, R nin bir sol (sağ) idealidir.

Teorem 3.2.4. μ bir R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Eğer $\forall t \in \mathrm{Im}(\mu)$ için,

(i) μ_t, R nin bir sol ideali $\Rightarrow \mu$, R nin bir bulanık sol idealidir.

(ii) μ_t, R nin bir sağ ideali $\Rightarrow \mu$, R nin bir bulanık sağ idealidir.

İspat:

(i) $\forall t \in \mathrm{Im}(\mu)$ için μ_t, R nin bir sol ideali olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathrm{Im}(\mu)$ için $0_R \in \mu_t$ dir. Dolayısıyla $\mu(0_R) \geq t$ dir.

$x, y \in R$ ve $t, s \in \mathrm{Im}(\mu)$ için $\mu(x) = t$, $\mu(y) = s$ olsun. Genelliği bozmadan $s \geq t$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$\mu(y) = s \geq t \Rightarrow x, y \in \mu_t$

olur. μ_t, R nin bir sol ideali olduğundan $x - y \in \mu_t$ dir. Bu nedenle,

$\mu(x - y) \geq t = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

dir. $y \in \mu_s$ ve μ_s, R nin bir sol ideali olduğundan $xy \in \mu_s$ olur. Dolayısıyla,

$\mu(xy) \geq s = \mu(y)$

olur. Böylece μ, R nin bir bulanık sol idealidir.

(ii) Benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 3.2.5. μ bir R halkasının bulanık sol (sağ) ideali ve $t, s \in \mathrm{Im}(\mu)$ olsun. Bu durumda $\mu_t = \mu_s \Leftrightarrow t = s$ dir.

İspat: $(\Leftarrow)$ $t = s$ ise $\mu_t = \mu_s$ olur.

$(\Rightarrow)$ $\mu_t = \mu_s$ olsun. $t \in \mathrm{Im}(\mu)$ olduğundan $\mu(x) = t$ olacak biçimde $\exists x \in R$ vardır. Bu durumda $x \in \mu_s$ olup böylece $t = \mu(x) \geq s$ olur. Benzer şekilde $s \geq t$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $t = s$ dir.

Lemma 3.2.6. A bir R halkasının sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda $\exists t \in]0, 1]$ için R nin $\mu_t = A$ olacak biçimde bir μ bulanık sol (sağ) ideali vardır.

İspat: $t \in]0, 1]$ ve R nin bir μ bulanık alt kümesi

$$\mu(x)=\begin{cases} t & , x \in A \text{ ise} \\ 0 & , x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda μ, R nin bir bulanık sol (sağ) ideali ve $A=\mu_t$ dir.

Tanım 3.2.7. μ bir R halkasının bulanık alt halkası ve $0 \le t \le \mu(0_R)$ olsun. Bu durumda μ_t alt halkasına μ nün bir seviye alt halkası denir.

μ bir R halkasının bulanık alt halkası olsun. Eğer,

$\text{Im}(\mu)=\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, $t_0 > t_1 > \ldots > t_m$ ise μ nün seviye alt halkalarının zinciri,

$$\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \ldots \subseteq \mu_{t_m} = R$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.8. μ, R nin bir bulanık sol (sağ) ideali ve $t \in [0,1]$ olsun. Eğer μ_t, R nin bir sol (sağ) ideali ise bu durumda μ_t ye R nin bir seviye sol (sağ) ideali denir.

Tanım 3.2.9. μ bir R halkasının herhangi bir bulanık ideali olsun. $t \in [0,1]$ ve $t \le \mu(0_R)$ olmak üzere μ_t ideallerine μ nün seviye idealleri denir.

Lemma 3.2.10. A bir R halkasının bulanık sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda,

$$A_0 = \{x \in R \mid A(x) = A(0_R)\}$$

kümesi R nin bir sol (sağ) idealidir (Malik ve Mordeson, 1990).

Teorem 3.2.11. Eğer μ bir R halkasının herhangi bir bulanık ideali ise $s < t$ olmak üzere, μ nün μ_t ve μ_s seviye idealleri eşittir $\Leftrightarrow$ $s \le \mu(x) \le t$ olacak biçimde R nin bir x elemanı yoktur (Kumar, 1992).

İspat:

$(\Rightarrow)$: $\mu_t = \mu_s$ olsun. $s \le \mu(x) \le t$ şartını sağlayan bir $x \in R$ bulunduğunu varsayalım. O halde $\mu(x) \ge s$ ise $x \in \mu_s$ ve $\mu(x) \le t$ ise $x \notin \mu_t$ olduğundan $\mu_t \not\subseteq \mu_s$ dir. Bu da baştaki varsayımımız ile çelişir.

$(\Leftarrow)$: $s \le \mu(x) \le t$ şartını sağlayan bir $x \in R$ bulunmasın.

$s \le t$ olduğu için $\mu_t \subseteq \mu_s$ dir. (1)

$x \in \mu_s$ olsun. O halde $\mu(x) \ge s$ olur ve $\mu(x)$, s ile t arasında bir değer olmadığından $\mu(x) \ge t \Rightarrow x \in \mu_t$ dir. Böylece $\mu_s \subseteq \mu_t$ dir. (2)

(1) ve (2) den $\mu_t = \mu_s$ elde edilir.

Teorem 3.2.11 den bir μ bulanık idealinin seviye ideallerinin farklı olması gerekmediği anlaşılır. Dahası seviye idealleri bir zincir oluşturur. $\forall x \in R$ için $\mu(x) \le \mu(0_R)$ olduğundan $t = \mu(0_R)$ olmak üzere μ_t seviye ideali μ nün tüm seviye ideallerinin ailesinin en küçük elemanı olur. Eğer,

$\mathrm{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, $t_0 > t_1 > \ldots > t_m$ ise μ nün tüm seviye ideallerinin zinciri

$$\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \ldots \subseteq \mu_{t_m} = R$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.12. μ bir R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda, μ, R nin bir bulanık idealidir $\Leftrightarrow$ $t \in \mathrm{Im}(\mu)$ olmak üzere her bir μ_t seviye alt kümesi R nin bir idealidir (Dixit ve ark., 1992).

Teorem 3.2.13. R bir halka, $\varphi(a) = \{A \mid A, R \text{ nin bir ideali}, a \in A\}$ ve μ, R nin bir bulanık ideali olsun. Bu durumda $x, y \in R$ için,

(i) $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$ dir

(ii) $\varphi(x) \subseteq \varphi(y) \Rightarrow \mu(x) \le \mu(y)$ dir.

İspat:

(i) $x, y \in R$ için $\varphi(x) = \varphi(y)$ olsun. $\mu(x) > \mu(y)$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} \mu(x) = t &\Rightarrow x \in \mu_t \text{ ve } y \notin \mu_t \\ &\Rightarrow \mu_t \in \varphi(x) \text{ ve } \mu_t \notin \varphi(y) \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\varphi(x) = \varphi(y)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

(ii) $x, y \in R$ için $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu(x) = t &\Rightarrow x \in \mu_t \\ &\Rightarrow \mu_t \in \varphi(x) \\ &\Rightarrow \mu_t \in \varphi(y) \\ &\Rightarrow y \in \mu_t \Rightarrow \mu(y) \ge t = \mu(x) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\mu(x) \leq \mu(y)$ dir.

Teorem 3.2.14. R ve R' herhangi iki halka ve $f : R \to R'$ homomorfizması örten olsun. μ, R nin $\operatorname{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, $t_0 > t_1 > \ldots > t_m$ olacak biçimde bir bulanık ideali, η ise R' nün $\operatorname{Im}(\eta) = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_k$ olacak biçimde bir bulanık ideali olsun. Bu durumda,

(i) Eğer η nün seviye ideallerinin zinciri, $\eta_{\alpha_0} \subseteq \eta_{\alpha_1} \subseteq \ldots \subseteq \eta_{\alpha_k} = R'$ ise $f^{-1}(\eta)$ nün seviye ideallerinin zinciri, $f^{-1}(\eta_{\alpha_0}) \subseteq f^{-1}(\eta_{\alpha_1}) \subseteq \ldots \subseteq f^{-1}(\eta_{\alpha_k}) = R$ olur.

(ii) Eğer μ nün seviye ideallerinin zinciri, $\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \ldots \subseteq \mu_{t_m} = R$ ise $f(\mu)$ nün seviye ideallerinin zinciri, $f(\mu_{t_0}) \subseteq f(\mu_{t_1}) \subseteq \ldots \subseteq f(\mu_{t_m}) = R'$ olur.

İspat:

(i) $\eta(f(x)) = (f^{-1}(\eta))(x)$ olduğundan $\operatorname{Im}(\eta) = \operatorname{Im}(f^{-1}(\eta))$ dür. Ayrıca

$$\begin{aligned} x \in (f^{-1}(\eta))_{\alpha_i} &\Leftrightarrow (f^{-1}(\eta))(x) \geq \alpha_i \\ &\Leftrightarrow \eta(f(x)) \geq \alpha_i \\ &\Leftrightarrow f(x) \in \eta_{\alpha_i} \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\eta_{\alpha_i}) \end{aligned}$$

olduğundan,

$(f^{-1}(\eta))_{\alpha_i} = f^{-1}(\eta_{\alpha_i})$ olur.

Böylece $f^{-1}(\eta)$ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$f^{-1}(\eta_{\alpha_0}) \subseteq f^{-1}(\eta_{\alpha_1}) \subseteq \ldots \subseteq f^{-1}(\eta_{\alpha_k}) = R \text{ dir.}$$

(ii) Açıkça $\operatorname{Im}(f(\mu)) \subseteq \operatorname{Im}(\mu)$ dür. $(f(\mu))_{t_i} = f(\mu_{t_i})$ olduğunu göstermek için $y \in (f(\mu))_{t_i}$ olsun. Bu durumda,

$t_i \leq (f(\mu))(y) = \sup\limits_{z \in f^{-1}(y)} \mu(z)$ dir. Dolayısıyla $\exists x \in f^{-1}(y)$ için $t_i \leq \mu(x)$ dir.

Böylece $x \in \mu_{t_i}$ olup $y \in f(x) \in f(\mu_{t_i}) \Rightarrow (f(\mu))_{t_i} \subseteq f(\mu_{t_i})$ olur.

Sonuç olarak $(f(\mu))_{t_i} = f(\mu_{t_i})$ dir.

Böylece $f(\mu)$ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$f(\mu_{t_0}) \subseteq f(\mu_{t_1}) \subseteq \ldots \subseteq f(\mu_{t_m}) = R' \text{ dir.}$$

3.3. Bulanık Bölüm Halkaları

Teorem 3.3.1. I bir R halkasının bulanık ideali olmak üzere $\forall(x,y) \in R \times R$ için,

$$\mu(x,y) = I(x - y)$$

şeklinde tanımlı μ bulanık bağıntısı bir denklik bağıntısıdır (Kuraoka ve Kuroki, 1992).

Lemma 3.3.2. I bir R halkasının bulanık ideali ve $\forall(x,y) \in R \times R$ için μ denklik bağıntısı $\mu(x,y) = I(x - y)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\forall x, x' \in R$ için,

$$\mu_{[x]} = \mu_{[x']} \Leftrightarrow I(x - x') = 1 \text{ dir.}$$

İspat: Lemma 2.4.12 den $\forall(x,y) \in R \times R$ için,

$\mu_{[x]} = \mu_{[x']} \Leftrightarrow \mu(x, x') = 1$ dir. Bu durumda $\mu_{[x]} = \mu_{[x']} \Leftrightarrow I(x - x') = 1$ olur.

$R/\mu = \{\mu_{[x]} \mid x \in R\}$ olmak üzere R/μ üzerinde toplama ve çarpma sırasıyla $\forall x \in R$ için,

$$+: R/\mu \times R/\mu \to R/\mu \text{ olmak üzere } \mu_{[x]} + \mu_{[y]} = \mu_{[x+y]}$$

$$\cdot: R/\mu \times R/\mu \to R/\mu \text{ olmak üzere } \mu_{[x]} \cdot \mu_{[y]} = \mu_{[x \cdot y]}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(\mu_{[x]}, \mu_{[y]}) = (\mu_{[x']}, \mu_{[y']}) &\Rightarrow \mu_{[x]} = \mu_{[x']} \text{ ve } \mu_{[y]} = \mu_{[y']} \\ &\Rightarrow \mu_{[x]} + \mu_{[y]} = \mu_{[x']} + \mu_{[y']} \text{ ve } \mu_{[x]} \cdot \mu_{[y]} = \mu_{[x']} \cdot \mu_{[y']} \\ &\Rightarrow \mu_{[x+y]} = \mu_{[x'+y']} \text{ ve } \mu_{[xy]} = \mu_{[x'y']}\end{aligned}$$

dir. R/μ bu şekilde tanımlanan işlemler altında bir halkadır. Bu halkayı R/I ile göstereceğiz.

Tanım 3.3.3. R bir halka, I, R nin bir bulanık ideali ve μ, $\forall(x,y) \in R \times R$ için,

$$\mu(x,y) = I(x - y)$$

şeklinde tanımlı R nin bir bulanık denklik bağıntısı olsun. Bu durumda R/I halkasına R nin I tarafından üretilmiş bulanık bölüm halkası denir.

Lemma 3.3.4. R halka ve R/I bulanık bölüm halkası olmak üzere $\forall x \in R$ için $p(x)=\mu_{[x]}$ şeklinde tanımlı birebir ve örten $p: R \to R/I$ bir homomorfizmadır (Kuraoka ve Kuroki, 1992). Bu homomorfizmaya doğal homomorfizma denir.

Teorem 3.3.5. R ve R' iki halka $f: R \to R'$ homomorfizma ve $f(I) \subseteq I'$ olmak üzere I ve I' sırasıyla R ve R' nün bulanık idealleri olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \xrightarrow[f^*]{} & R'/I' \end{array}$$

diyagramı değişmeli olmak üzere $f^*: R/I \to R'/I'$ bir homomorfizmadır.

İspat: $f^*(\mu_{[x]})=\eta_{[f(x)]}$ olmak üzere μ ve η,

$\forall x, y \in R$ için $\mu(x, y)=I(x-y)$

$\forall x', y' \in R'$ için $\eta(x', y')=I(x'-y')$

şeklinde tanımlı bulanık denklik bağıntıları olsun. Eğer,

$\mu_{[x_1]}=\mu_{[x_2]} \Rightarrow I(x_1-x_2)=1$ olup,

$$\begin{aligned} \eta(f(x_1), f(x_2)) = I'(f(x_1)-f(x_2)) = I'(f(x_1-x_2)) &= f^{-1}(I')(x_1-x_2) \qquad (f(I)\subseteq I') \\ &\geq I(x_1-x_2) \\ &=1 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\eta(f(x_1), f(x_2))=1$ olup Lemma 2.4.12 den $\eta_{[f(x_1)]}=\eta_{[f(x_2)]}$ dir.

Dolayısıyla f^* iyi tanımlıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f^*(\mu_{[x]}+\mu_{[y]}) &= f^*(\mu_{[x+y]}) \\ &= \eta_{[f(x+y)]} \\ &= \eta_{[f(x)+f(y)]} \\ &= \eta_{[f(x)]}+\eta_{[f(y)]} \\ &= f^*(\mu_{[x]})+f^*(\mu_{[y]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(\mu_{[x]}\cdot\mu_{[y]}) = f^*(\mu_{[x\cdot y]}) \\ &= \eta_{[f(x\cdot y)]} \\ &= \eta_{[f(x)\cdot f(y)]} \\ &= \eta_{[f(x)]}\cdot\eta_{[f(y)]} \\ &= f^*(\mu_{[x]})\cdot f^*(\mu_{[y]}) \end{aligned}$$

olup f^* bir homomorfizmadır.

Teorem 3.3.6. (İzomorfizma Teoremi) R ve R' iki halka $f : R \to R'$ birebir ve örten bir homomorfizma, I', R' nün bulanık ideali ve $f^{-1}(I') = I$ olsun. Bu durumda, $R/I \cong R'/I'$ dir.

İspat: Teorem 3.1.21 den I, R nin bir bulanık idealidir. Ayrıca $f(I) = f(f^{-1}(I')) = I'$ dür. Teorem 3.3.5 den $f^* : R/I \to R'/I'$ bir homomorfizmadır. f^* ın bir örten fonksiyon olduğu açıktır. f^* ın birebir olduğunu göstermek için $\mu_{[a]} \in$ Çek f olsun.

$$\begin{aligned} f^*(\mu_{[a]}) = \eta_{[f(a)]} = \eta_{[0_{R'}]} &\Rightarrow I'(f(a)) = 1 \\ &\Rightarrow I(a - 0_R) = I(a) = f^{-1}(I')(a) = I'(f(a)) = 1 \\ &\Rightarrow \mu_{[a]} = \mu_{[0_R]} \end{aligned}$$

olur. Böylece f^* birebir olup bir izomorfizmadır.

Dolayısıyla $R/I \cong R'/I'$ dir.

Tanım 3.3.7. R ve R' iki halka $f : R \to R'$ homomorfizma olsun.

(i) R' nün 0_1 bulanık noktası için Çek $f = f^{-1}(0_1)$ şeklinde tanımlanan Çek f kümesine f nin bulanık çekirdeği denir.

(ii) R nin R bulanık kümesi için $\operatorname{Im} f = f(R)$ şeklinde tanımlanan $\operatorname{Im} f$ kümesine f nin bulanık görüntüsü denir.

Teorem 3.3.8. (Homomorfizma Teoremi)

R ve R' iki halka $f : R \to R'$ birebir ve örten homomorfizma olsun. Bu durumda R/Çek $f \cong R'$ olur.

İspat: $f^{-1}(0_1) = \text{Çek}\, f$ olduğu için Teorem 3.3.6 (İzomorfizma Teoremi) den $\text{R/Çek}\, f \cong R'/0_1$ dir.

$R'/0_1 = \{ x_1' \mid x' \in R' \}$ olduğundan $R' \cong R'/0_1$ olup böylece $\text{R/Çek}\, f \cong R'$ dir.

Teorem 3.3.9. I, R halkasının bir bulanık ideali olmak üzere $I_* = \{ x \in R \mid I(x) = 1 \}$ ise $R/I_* \cong R/I$ dır.

İspat: $\varphi : R \to R/I$ doğal homomorfizma olsun.

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\varphi &= \{ x \in R \mid \varphi(x) = \mu_{[0_R]} \} \\
&= \{ x \in R \mid \mu_{[x]} = \mu_{[0_R]} \} \\
&= \{ x \in R \mid I(x) = 1 \} = I_*
\end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.3.9 dan $R/I_* \cong R/I$ dır.

Teorem 3.3.10. R ve R' iki halka $f : R \to R'$ homomorfizma ve I, R nin, I' de R' nün bulanık ideali olsun.

(i) $f^{-1}(f(I)) = I + \text{Çek}\, f$

(ii) $f(f^{-1}(I')) = I' \cap \text{Im}\, f$ dir.

İspat:

(i) $z \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
(I + \text{Çek}\, f)(z) &= \sup_{z=a+b} \{ \min \{ I(a), \text{Çek}\, f(b) \} \} \\
&= \sup_{\substack{z=a+b \\ b \in \text{Çek}\, f}} I(a) \\
&= \sup_{f(a+b)=f(z)} I(a) \qquad (b \in \text{Çek}\, f \Rightarrow f(b) = 0_{R'}) \\
&= \sup_{f(a+b)=f(z)} I(a) \\
&= f(I)(f(z)) = f^{-1}(f(I))(z)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $f^{-1}(f(I)) = I + \text{Çek}\, f$ dir.

(ii) $\forall x' \in R'$ için,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}' \cap \operatorname{Im} f)(x') &= \min\{\mathrm{I}'(x'), \operatorname{Im} f(x')\} \\
&= \mathrm{I}'(x') \qquad\qquad (x' \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists y' \in \mathrm{R}' \text{ için } f(y') = x') \\
&= \mathrm{I}'(f(y')) \\
&= f^{-1}(\mathrm{I}')(y') \\
&= (f^{-1}(\mathrm{I}'))(f^{-1}(x')) \\
&= f(f^{-1}(\mathrm{I}'))(x')
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $f(f^{-1}(\mathrm{I}')) = \mathrm{I}' \cap \operatorname{Im} f$ dir.

Teorem 3.3.11. R ve R' iki halka $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ birebir ve örten bir homomorfizma ve

$$\mathcal{A} = \{\, \mathrm{I} \mid \mathrm{I}, \text{ R nin bulanık ideali, Çek } f \subseteq \mathrm{I} \,\}$$

$$\mathcal{B} = \{\, \mathrm{I}' \mid \mathrm{I}', \text{ R' nin bulanık ideali} \,\}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ ye birebir ve örten bir dönüşüm vardır.

İspat: $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dönüşümü $\forall \mathrm{I} \in \mathcal{A}$ için $\Psi(\mathrm{I}) = f(\mathrm{I})$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $f(\mathrm{I})$, R' nün bir bulanık ideali olup $\forall \mathrm{I} \in \mathcal{A}$ için $\Psi(\mathrm{I}) = f(\mathrm{I}) \in \mathcal{B}$ olur.

Ψ nin birebir olduğunu göstermek için $\Psi(\mathrm{I}) = \Psi(\mathrm{J})$ olsun.

Bu durumda $f(\mathrm{I}) = f(\mathrm{J})$ dir.

Ayrıca f birebir ve örten olduğundan $\mathrm{I} = \mathrm{I} + \text{Çek } f$ ve $\mathrm{J} = \mathrm{J} + \text{Çek } f$ olup,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} = \mathrm{I} + \text{Çek } f &= f^{-1}(f(\mathrm{I})) \\
&= f^{-1}(f(\mathrm{J})) \\
&= \mathrm{J} + \text{Çek } f \\
&= \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece Ψ birebirdir.

Ψ nin örten olduğunu göstermek için $\mathrm{I}' \in \mathcal{B}$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(\mathrm{I}')$, R nin bir bulanık idealidir. $z \in \text{Çek } f$ olsun. Bu durumda,

$f^{-1}(\mathrm{I}')(z) = \mathrm{I}'(f(z)) = \mathrm{I}'(0_{\mathrm{R}'}) = 1$ olur. Böylece

$$\text{Çek } f \subseteq f^{-1}(\mathrm{I}')$$

dir. Ayrıca Teorem 3.3.10 dan

$$\begin{aligned}\Psi(f^{-1}(\mathrm{I}')) &= f(f^{-1}(\mathrm{I}')) \\ &= \mathrm{I}' \cap \mathrm{Im}\, f \\ &= \mathrm{I}'\end{aligned}$$

olur. Böylece Ψ örtendir.

Teorem 3.3.12. R bir halka, I ve J, $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{J}$ olmak üzere R nin bulanık idealleri olsun. Herhangi bir $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R/I}$ doğal homomorfizması için, $\mathrm{R/I} \cong (\mathrm{R/I}) / (\varphi(\mathrm{J}))$ dır.

İspat: $\text{Çek}\varphi \subseteq \mathrm{I} \subseteq \mathrm{J}$ olduğu için $\varphi(\mathrm{J})$, R/I nın bulanık idealidir.

Ayrıca $\varphi^{-1}(\varphi(\mathrm{J})) = \mathrm{J} + \text{Çek}\varphi = \mathrm{J}$ olduğu için $\mathrm{R/I} \cong (\mathrm{R/I}) / (\varphi(\mathrm{J}))$ dir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bulanık kümeler üzerindeki ikili işlemler yardımıyla bulanık alt halka (ideal), bulanık seviye alt halkası (ideali) ve bulanık bölüm halkası kavramları verilerek, bu yapıların temel özellikleri detaylarıyla incelenmiş ve bunlara ait bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bulanık cebir teorisindeki bulanık halka ve bulanık ideal yapıları ile klasik cebirde yer alan klasik halka ve ideal yapılarının benzer özellikler taşıdığı gözlemlenmiştir. Bir bakıma, klasik halka teorisi genelleştirilerek, bulanık mantık adı verilen farklı bir mantık sistemi üzerine inşa edilen yeni halka yapılarının da aynı cebirsel özelliklerin korunduğu söylenebilmektedir.

Bu çalışma, bulanık cebirsel yapılardan birisi olan bulanık halkalar üzerine olması sebebiyle, bulanık mantık sistemi üzerine kurulan diğer bulanık cebirsel yapılarla çalışmak için önem taşımaktadır. Bu yönüyle farklı cebirsel yapılar üzerinde yeniden ele alınarak bu yapılar üzerinde yeniden değerlendirilebilir.

5. KAYNAKLAR

Bhattacharya, P.B. and Jain, S.K., 1972. First Course in Group Theory, New Delhi.

Das, P.S., 1981. Fuzzy groups and level subgroups, Journal Of Mathematical Analysis and Aplications, 84, 264-269.

De-Gang, C. and Su-Yun, L., 1998. Fuzzy factor rings, Fuzzy Sets and Systems, 94, 125-127.

Dixit, V.N., Kumar, R. and Ajmal, N., 1990. Level subgroups and union of fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 37, 359-371.

Dixit, V.N., Kumar, R. and Ajmal, N., 1991. Fuzzy ideals and fuzzy prime ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 44, 127-138.

Dixit, V.N., Kumar, R. and Ajmal, N., 1992. On fuzzy rings, Fuzzy Sets and Systems, 49, 205-213.

Ersoy, B.A., 2003. A generalization of cartesian product of fuzzy subgroups and ideals, Pakistan Journal of Applied Sciences, 3(2), 100-102.

Fraleigh J. B., 1994. A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, New York.

Gupta, K.C., Kantroo, M.K. 2001. Generalized product of fuzzy subsets of a Ring, Fuzzy Sets and Systems, 117, 419-429.

Hungerford T. W.,.1974 Algebra, Springer, New York.

Kaufmann A., 1.975. Introduction to the Theory Of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London.

Kumar, R., 1992. Fuzzy subgroups, fuzzy ideals, and fuzzy cosets: Some properties. Fuzzy Sets and Systems, 48, 267-274.

Kumar, R., 1992. Certain fuzzy ideals of rings redefined. Fuzzy Sets and Systems, 46, 251-260.

Kuraoka, T. and Kuroki, N., 1992. On fuzzy quotient rings induced by fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems, 47, 381-386

Liu W. J.,1983. Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets Systems, 11 31-41.

Malik, D.S. and Mordeson, J.N. 1990. Fuzzy prime ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 37, 93-9887

Malik, D.S. and Mordeson, J.N., 1991. Fuzzy relations on rings and groups, Fuzzy Sets and Systems, 43, 117-123

Molodtsov D., 1999.Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37, 1 19-31pp.

Mordeson J. N. and Malik D. S., 1998. Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London.

Mukherjee, N. and Bhattacharya, P., 1984. Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets, Information Science, 34, 225-239

Mukherjee, T.K. and Sen, M.K., 1987. On fuzzy ideals of a ring I, Fuzzy Sets and Systems, 21, 99-104

Nanda S., 1986. Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 19 89-94.

Pawlak Z.,1982. Rough sets, International Journal of Information and Computer Sciences, 11, 1 341-356pp.

Rosenfeld, A., 1971. Fuzzy groups, Journal Of Mathematical Analysis and Aplications, 35, 512-517

Zadeh L. A., 1965. Fuzzy Sets, Information and Control, 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Güven KARA
Doğum Yeri	**:**	Tonya / TRABZON
Doğum Tarihi	**:**	31/07/1986
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	guvenkara@live.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniv. Fen Edebiyat Fak. Matematik Böl. ORDU

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2010
Y. Lisans			