TİMELİKE-SPACELİKE MANNHEIM EĞRİ

ÇİFTLERİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN

GEODEZİK EĞRİLİKLERİ VE TABİİ LİFTLERİ

SELMA DEMET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TİMELİKE-SPACELİKE MANNHEIM EĞRİ ÇİFTLERİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN GEODEZİK EĞRİLİKLERİ VE TABİİ LİFTLERİ

SELMA DEMET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Ordu-2012

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Genel bilgiler bölümünde Öklid uzayı ve Lorentz uzayı ile ilgili bilgilere yer verildi. Materyal ve yöntem bölümünde Öklid uzayında Mannheim eğri çiftleri ile ilgili temel kavramlara yer verilerek, bu eğrilerin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin E^3e ve S^2ye göre yay uzunlukları ve geodezik eğriliklerinin hesabı verildi. Ayrıca bu iki eğrinin yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılarına yer verildi.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde Mannheim eğrisi timelike, partner eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri alınarak bu eğri çiftlerinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin IL^3 e göre yay uzunlukları, S_1^2 ve H_0^2ye göre geodezik eğrilikleri hesaplandı ve bu iki eğrinin yay uzunlukları ile geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca Mannheim partner eğrisinin küresel göstergelerinin tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartı Mannheim eğrisine bağlı olarak ifade edildi.

Anahtar Sözcükler: Lorentz uzayı, Mannheim eğrisi, Geodezik eğrilik, Geodezik spray, Tabii lift.

ABSTRACT

This study consists four fundamental chapter. In introduction, it is discussed aim of and why this study is taken into consideration. In general in formation part, the basic consepts of Euclidean space and Lorentzian space have been pointed out. In material and method part, Mannheim curves are defined in the 3-dimensional Euclidean space. Arc-lengths and geodesic curvatures of the spherical indicatrix curves with the fixed pole curve of Mannheim partner curve are given with respect to E^3 and S^2. In addition, the relations among the geodesic curvatures and arc-lengths are given.

In the last chapter is the original part of the study. In this chapter, Arc-lengths and geodesic curvatures of the spherical indicatrix curves with the fixed pole curve of Mannheim curves have been obtained with respect to IL^3 and S_1^2 or H_0^2. In addition, the relations among the geodesic curvatures and arc-lengths are given. Finally, the condition being the natural lifts of the spherical indicatrix curves of the Mannheim partner curve are an integral curve of the geodesic spray has expressed depending on Manheim curve.

Key Words: Lorentzian space, Mannheim curve, Geodesic spray, Geodesic curvatures, Natural lift.

TEŞEKKÜR

Yoğun çalışmaları arasında danışmanlığımı yapan ve çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT' a en içten minnet duygularımı ve teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca çalışmalarım boyunca desteğini gördüğüm Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN' e ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından (proje numarası: TF-1217) desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

D : Levi-Civita konneksiyonu

$\bar{D}$: S_1^2 deki konneksiyon

$\bar{\bar{D}}$: H_0^2 daki konneksiyon

E^3 : 3-boyutlu Öklid uzayı

g : Lorentz metriği

H_0^{n-1} : (n-1)-boyutlu Hiperbolik uzay

S_1^{n-1} : (n-1)-boyutlu Lorentz uzay

H_0^2 : Hiperbolik birim küre

S_1^2 : Birim Lorentz küresi

k_g : IL^3 deki geodezik eğrilik

IL^n : n- boyutlu Lorentz uzayı

$\| \|_{IL}$: norm

S: şekil operatörü

W : Darboux vektörü

γ_g : H_0^2 (veya) S_1^2 deki geodezik eğrilik

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

3-Boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Özellikle iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak, birçok teoriler geliştirilmiştir, [10],[12],[17]. Bunlardan en iyi bilineni Bertrand eğrileri ve İnvolüt-Evolüt eğrilerdir, [21],[22],[23],[24],[25]. Bu eğriler, farklı uzaylarda da ele alınarak incelenmiş ve birçok karakterizasyonlar elde edilmiştir. Öklid uzayı ve Minkowski uzayında Bertrand eğrileri ile İnvolüt-Evolut eğrilerin küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri, tabii liftleri ve tabii lift eğrilerinin tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisi olma şartları [1],[2],[6],[7],[18] kaynaklarında verilmiştir.

Mannheim eğrisi ilk olarak; 1878 de A. Mannheim tarafından ortaya atılmış ve herhangi bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şartın

$$\kappa = \lambda\left(\kappa^2 + \tau^2\right), \lambda \neq 0 = sb,$$

olduğu gösterilmiştir. Burada κ eğrinin eğriliği, τ eğrinin torsiyonudur (burulma).

Son yıllarda, Mannheim eğrisi Liu ve Wang tarafından yeniden tanımlanmıştır. Verilen bu yeni tanıma göre birinci eğrinin asli normal vektörü ile ikinci eğrinin binormal vektörü lineer bağımlı olduğunda birinci eğriye Mannheim eğrisi, ikinci eğriye Mannheim partner eğrisi adı verilmiştir,[4],[5]. Liu ve Wang'ın bu tanımından sonra bu eğriler üzerinde birçok yeni çalışmalar yapılmıştır, [3],[19],[8],[20].

Bu çalışmada, Mannheim eğrisi timelike bir eğri, partner eğrisi spacelike binormalli spacelike bir eğri olarak alınarak Mannheim partner eğrisinin $\left(T^*\right),\left(N^*\right),\left(B^*\right)$ küresel gösterge eğrileri ile $\left(C^*\right)$ sabit pol eğrisinin IL^3 Lorentz uzayına, S_1^2 Lorentz küresine veya H_0^2 Hiperbolik küreye göre yay uzunlukları ile geodezik eğrilikleri hesaplandı ve bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca, Mannheim partner eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin tabii liftleri geodezik sprayın integral eğrisi olması için, Mannheim eğrisinin nasıl bir eğri olması gerektiği ifade edildi. Mannheim eğrisinin teğet vektörü ile partner eğrisinin Darboux vektörünün lineer bağımlı olduğu görüldü.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayı ile Minkowski uzayına ait temel kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1: A boş olmayan bir cümle ve V de $\Im$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f: A\times A \to V$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir:

$A_1: \forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$,

$A_2: \forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in$ V için $f(P,Q)=\alpha$ olacak şekilde bir tek $Q\in A$ noktası vardır.

Tanım 2.1.2: V, A ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, ..., P_0P_n\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta (n+1)-lisine A afin uzayının bir **afin çatısı** denir. Burada P_0 noktasına çatının **başlangıç noktası** ve P_i, $1\le i\le n$, noktalarına da çatının **birim noktaları** denir. $boyV=n$ ise A ya **n-boyutlu bir afin uzay** denir.

Tanım 2.1.3: V, A ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle , \rangle : V\times V \to IR$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir: $\forall x,y,z \in V$ için

i)Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax+by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle,$$
$$\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x,y\rangle = \langle y,z\rangle,$$

iii) Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x,x\rangle \ge 0,\ \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=\vec{0}.$$

Örnek 2.1.1: $X,Y\in IR^2$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : IR^2\times IR^2 \to IR,\ \langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cos\theta,\ 0\le\theta\le\pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 2.1.4: IR^n ,standart reel afin uzayı olsun. $\forall X,Y \in IR^n$ için

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \to IR,\ \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma IR^n de **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpım** denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu IR^n vektör uzayı ile birleşen afin uzayına **n-boyutlu standart Öklid uzayı** denir. ve E^n ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: $X \in E^n$ noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları $(x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. $x_i : E^n \to IR$,$1 \le i \le n$, fonksiyonuna E^n nin **i-yinci koordinat fonksiyonu** denir.

Tanım 2.1.6: $d : E^n \times E^n \to IR,\ d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(X, Y) \in IR$ sayısına da X ile Y noktaları arasındaki **uzaklık** denir.

Tanım 2.1.7: IR^n iç çarpım uzayı birleşen Öklid uzayı E^n olsun. $\{P_0, P_1, ..., P_n\} \in E^n$ nokta (n+1)-lisi için, $\{P_0P_1, P_0P_2, ..., P_0P_n\}$ cümlesi E^n nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ cümlesine E^n de bir **Öklid çatı** veya **dik çatı** denir.

Tanım 2.1.8: $\alpha : I \subset IR \to E^n$, $\alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)\right)$ diferensiyellenebilen fonksiyona E^n de bir **eğri** denir. Burada I aralığına α eğrisinin **parametre aralığı** ve $t \in I$ değişkenine de α **eğrisinin parametresi** denir.

Tanım 2.1.9: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\| : I \to IR,\ \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna **skaler hız fonksiyonu**, $\|\alpha'(t)\| \in IR$ sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **skaler hızı,**

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n(t)}{dt}\right)\Big|_t$$

vektörüne de α eğrisinin **hız vektörü** denir.

Tanım 2.1.10: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ eğrisi için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye **birim hızlı eğri**, $s \in I$ parametresine de **eğrinin yay parametresi** denir.

Tanım 2.1.11: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eğri ve $a, b \in I$ için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \tag{2.1.1}$$

reel sayısına $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ noktaları arasındaki **yay uzunluğu** denir.

Tanım 2.1.12: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eğri ve $\phi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', ... \alpha^{(r)}\}$ cümlesi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\phi\}, \; k > r \text{ olmak üzere}$$

ϕ cümlesinden **Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi** ile elde edilen $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Serret Frenet r-ayaklısı,** $\forall V_i, \; 1 \le i \le r,$ vektörüne de **Serret Frenet** vektörü denir.

Teorem 2.1.1: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

1) $s \in I$ yay parametresi ise

$$\begin{cases} V_1(s) = \alpha'(s) \\ V_2(s) = \dfrac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s) \\ V_3(s) = T(s) \times N(s) \end{cases}$$

2) $s \in I$ yay parametresi değilse

$$\begin{cases} V_1(s) = \dfrac{1}{\|\alpha'(s)\|} \alpha'(s) \\ \\ V_2(s) = B(s) \times N(s) \\ \\ V_3(s) = \dfrac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} (\alpha'(s) \times \alpha''(s)) \end{cases}$$

şeklindedir,[9].

Tanım 2.1.13: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun.

$$\begin{aligned} k_i : I &\to IR, \quad 1 \le i < r \\ s &\to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu**, $\forall s \in I$ için $k_i(s) \in IR$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **i-yinci eğriliği** denir.

Teorem 2.1.2: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve i-yinci eğriliği $k_i(s)$ olsun. Bu durumda, Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} V_1'(s) = k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \qquad 1 \le i < r \\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_r(s) \end{cases}$$

bağıntısı vardır, [9].

$n=3$ özel halinde α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilir ve T ye teğet vektörü, N ye asli normal vektörü ve B ye de binormal vektörü denir. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla κ ve τ ile gösterilir ve κ ya eğrinin eğriliği, τ ya da burulması adı verilir. Bu halde Frenet formülleri

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s), \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

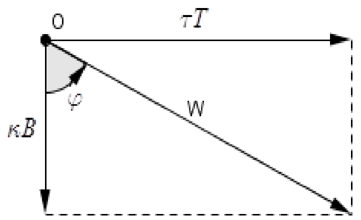
olur, [9].

Diğer taraftan, bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı her s anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) ekseni** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = N \wedge N',$$

$$W = \tau T + \kappa B \qquad (2.1.3)$$

şeklinde olup Darboux vektörü adını alır, (Şekil.2.1.1).



Şekil.2.1.1 Darboux vektörü

W ile B arasındaki açı φ ile gösterilirse şekilden,

$$\sin\varphi = \frac{\tau}{\|W\|} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \qquad (2.1.4)$$

dır. W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C=\frac{\tau}{\|\vec{W}\|}T+\frac{\kappa}{\|\vec{W}\|}B$$

olur. Burada κ ile τ nun yerine (2.1.4) deki karşılıkları yazılırsa

$$C=\sin\varphi T+\cos\varphi B \tag{2.1.5}$$

bulunur.

Tanım 2.1.14: $\alpha: I\rightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki 1. ve 2. eğrilikleri sırasıyla $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun.

$$H_1: I\rightarrow IR$$
$$s\rightarrow H_1(s)=\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna α eğrisinin **1-inci harmonik eğriliği** denir.

Tanım 2.1.15: $\alpha: I\rightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye bir **eğilim çizgisi** (helis), $S_p\{U\}$ ya da eğilim çizgisinin **eğilim ekseni** denir.

Teorem 2.1.3: $\alpha: I\rightarrow E^3$ eğrisi bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\mathrm{H}_1(\mathrm{s})=\mathrm{sbt}$.

İspat: "$\Rightarrow$"Kabul edelim ki α bir eğilim çizgisi olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s),N(s),B(s)\}$ olmak üzere, eğilim çizgisi tanımına göre

$$\langle T(s),U\rangle=\cos\theta$$

olur. Bu ifadenin s' ye göre türevi alınırsa

$$\langle T'(s),U\rangle=0,$$

$$\kappa\langle N(s),U\rangle=0$$

bulunur ve buradan $N\perp U$ olduğu görülür. $U\in S_p\{T(s),B(s)\}$ olduğundan

$$U=aT(s)+bB(s)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılırsa

$$\langle U, T(s)\rangle = a = \cos\theta,$$

$$\langle U, B(s)\rangle = b = \sin\theta$$

olur ve buradan da

$$U = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\langle N(s), U\rangle = 0$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$\langle N'(s), U\rangle + \langle N(s), U'\rangle = 0,$$

$$\left\langle \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U\right\rangle = 0,$$

$$\kappa(s)\left\langle T(s), U\right\rangle - \tau(s)\left\langle B(s), U\right\rangle = 0,$$

$$\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0,$$

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = sbt,$$

$$H_1(s)=\text{sbt}.$$

"$\Leftarrow$" Kabul edelim ki $\forall s \in I$ için $H_1(s)=\text{sbt}$ olsun. İddia ediliyor ki α bir eğilim çizgisidir.

$H_1(s)=\text{sbt}$ ise $H_1(s)=\tan\theta=\text{sbt}$ alınabilir. Buradan

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \;\Rightarrow\; \cos\theta\kappa(s) - \sin\theta\tau(s) = 0.$$

olur.

$$\vec{U} = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

vektörünü tanımlayalım. Türev alınırsa

$$U' = \cos\theta T' + \sin\theta B',$$

$$U' = (\cos\theta\kappa(s) - \sin\theta\tau(s))N(s)$$

olur ve norm alınırsa

$$\|U'\| = 0 \;\Rightarrow\; U = sbt.$$

bulunur. Buradan da

$$\langle \alpha'(s), U\rangle = \langle T(s), U\rangle$$

$$= \langle T(s), \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)\rangle$$

$$= \cos\theta = sbt.$$

olur ki bu da α bir eğilim çizgisi olması demektir.

Teorem 2.1.4: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır,[26].

İspat: "$\Rightarrow$" Kabul edelim ki α birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktalarının tümü bir E düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali q, düzlem üzerinde herhangi bir nokta p olsun. Bu durumda

$$\langle \alpha(s) - p, q\rangle = 0$$

olur. Türev alınırsa

$$\langle \alpha'(s), q\rangle + \langle \alpha(s) - p, q'\rangle = 0,$$

$$\langle \alpha'(s), q\rangle = 0$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$\langle \alpha''(s), q\rangle = 0.$$

Buradan q vektörünün T ve N vektörlerine dik olduğu görülür. O halde T ve N vektörleri α eğrisinin içinde bulunduğu düzlemin içindedir. B vektörü her $\alpha(s)$ noktasında T ve N vektörlerine dik olduğundan q vektörüne paraleldir. Öyleyse

$$B(s) = \pm \frac{q}{\|q\|}$$

alınabilir. Buradan türev alınırsa

$$B' = 0$$

bulunur ve

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\tau(s) = 0$$

elde edilir.

"$\Leftarrow$" Kabul edelim ki $\tau(s) = 0$ olsun. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ idi. Buradan

$$B'(s) = 0,$$

$$B(s) = c = sbt.$$

$$\begin{aligned} F &: I \to IR \\ s &\to F(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. $s = 0$ ise $F(0) = 0$ dır. F nin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} F'(s) &= \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha'(s) - \alpha(0), B'(s) \rangle \\ &= \langle T(s), B(s) \rangle + < T(s), -\kappa(s)N(s) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$F(s) = sbt.$$

Buna göre

$$\langle \alpha(s)-\alpha(0), B(s)\rangle = 0$$

eşitliği, α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasından geçen ve B vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.5: $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır,[26].

İspat: $\alpha: I \to E^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

$$= \|T'(s)\|$$

olduğundan

$$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0 \;, \quad \Rightarrow \quad \alpha'(s) = b.$$

$$\alpha(s)=bs+c, \quad b,c \in IR.$$

Tanım 2.1.16: E^n n-boyutlu Öklid uzayında $\forall p \in M$ için $\nabla f|_p \neq 0$ olmak üzere

$$M = \left\{ x \in E^n \mid f: U \to IR,\ x \to f(x) = c,\ c \in IR,\ f \text{ dif.bilir fonk., } U \text{ açık alt cümle} \right\}$$

ile tanımlanan boş olmayan bir M cümlesine de **(n-1)- boyutlu yüzey** veya **(n-1)- yüzey** denir. Bu yüzey için **hiperyüzey** olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.2: E^n de birim küre S^{n-1} ile gösterilir ve denklemi

$$S^{n-1} = \left\{ X = (x_1, x_2, ..., x_n \mid f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu küre yüzeyine E^n de bir hiperküre adı verilir. Burada

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

olmak üzere

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \langle (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}), (2x_1, 2x_2, ..., 2x_n) \rangle$$

şeklinde ve $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ için daima $\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ dır.

Tanım 2.1.17: $M \subset E^3$de bir yüzey, $\alpha : I \to M$ birim hızlı bir eğri ve M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı X olsun.

$$\frac{d}{ds}\left(\alpha(s)\right) = X\left(\alpha(s)\right) \tag{2.1.7}$$

ise α eğrisine X in bir **integral eğrisi** denir. M yüzeyinin P noktasındaki tanjant uzayı $T_M(P)$, vektör alanı uzayı $\chi(M) = \bigcup_{P \in M} T_M(P)$ olmak üzere

$$\overline{\alpha} : I \to \chi(M) \ , \ \overline{\alpha}(s) = \left(\alpha(s), \alpha'(s)\right)$$

şeklinde tanımlı eğriye, $\alpha : I \to M$ eğrisinin **tabii lifti** denir. M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X \mathrm{N} \tag{2.1.8}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme **şekil operatörü (Weingarten Dönüşümü)** denir. $v \in \chi(M)$ için

$$X(v) = -\langle v, S(v) \rangle \mathrm{N}|_P \tag{2.1.9}$$

şeklinde tanımlanan $X \in \chi(M)$ vektör alanına **geodezik spray** denir[1].

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y \rangle \mathrm{N} \tag{2.1.10}$$

şeklinde tanımlanan denkleme de M üzerinde **Gauss denklemi** denir. Burada; $\overline{D}$ Gauss anlamında kovaryant türev operatörü olup, bu operatör M üzerinde bir Riemann konneksiyonudur.

$\alpha : I \to M$ eğrisinin birim teğet vektörü T olsun.

$$D_T T = 0 \tag{2.1.11}$$

ise α eğrisine E^3 **de bir geodezik eğri**,

$$\overline{D}_T T = 0 \tag{2.1.12}$$

ise α eğrisine M **üzerinde bir geodezik eğri** denir. Buna göre;

$$k_g = \left\| D_T T \right\| \tag{2.1.13}$$

ifadesine α eğrisinin E^3 **'e göre geodezik eğriliği** ve

$$\gamma_g = \left\| \overline{D}_T T \right\| \tag{2.1.14}$$

ifadesine de α eğrisinin M **'ye göre geodezik eğriliği** denir.

α eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet vektörlerinin küre üzerinde çizdiği $(T),(N)$ ve (B) küresel gösterge eğrileri ile C birim Darboux vektörünün küre üzerinde çizdiği sabit (C) pol eğrisinin E^3 e göre yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri sırasıyla,

$$\begin{cases} s_T = \int_0^s \kappa ds \\ s_N = \int_0^s \|W\| ds \end{cases}, \quad \begin{cases} s_B = \int_0^s \tau ds \\ s_C = \int_0^s \varphi' ds \end{cases}, \tag{2.1.15}$$

$$\begin{cases} k_T = \dfrac{1}{\cos\varphi} \\ k_N = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\varphi'}{\|W\|} \right)^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} k_B = \dfrac{1}{\sin\varphi} \\ k_C = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\|W\|}{\varphi'} \right)^2} \end{cases}. \tag{2.1.16}$$

S^2 ye göre geodezik eğrilikleri,

$$\begin{cases} \gamma_T = \tan\varphi, \\ \gamma_N = \dfrac{\varphi'}{\|W\|} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \gamma_B = \cot\varphi, \\ \gamma_C = \dfrac{\|W\|}{\varphi'} \end{cases} \qquad (2.1.17)$$

şeklinde verilir, $[4]$.

Teorem 2.1.6: $\alpha : I \to M$ eğrisinin $\overline{\alpha} : I \to \chi(M)$ tabii lifti, X geodezik sprayının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart M üzerinde bir geodezik eğri olmasıdır, $[1]$.

İspat: : "$\Rightarrow$" X geodezik sprayının bir integral eğrisi olsun. Bu durumda

$$X(\overline{\alpha}(t)) = \frac{d}{dt}(\overline{\alpha}(t))\big|_{\alpha(t)}$$

olur. X , $\chi(M)$ üzerinde bir geodezik spray olduğundan

$$X(\overline{\alpha}(t)) = -\langle \overline{\alpha}(t), S(\overline{\alpha}(t)) \rangle N\big|_{\alpha(t)}$$

yazılır. Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}) = -\left\langle \dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}, S(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}) \right\rangle \frac{d}{dt} N\big|_{\alpha(t)}$$

bulunur. Bu son eşitlik bütün $\alpha(t)$ ler için doğru olduğundan ve

$$\frac{d\overline{\alpha}}{ds} = D_{\alpha'(s)}\left(\alpha'(s)\right)$$

eşitliği de göz önüne alındığında

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = -\langle \dot{\alpha}(t), S(\dot{\alpha}(t)) \rangle N$$

olur. Gauss denkleminden

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0$$

bulunur. Böylece α nın M üzerinde bir geodezik olduğu görülür.

"$\Leftarrow$" α nın M üzerinde bir geodezik olsun. Bu durumda

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)=0$$

olur. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)\Big|_{\alpha(t)}+\left\langle \dot{\alpha}(t),S(\dot{\alpha}(t))\right\rangle N\Big|_{\alpha(t)}=0$$

yazılır. X bir geodezik spray olduğundan

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)})-X(\dot{\alpha}(t))\big|_{\alpha(t)}=0,$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)})=X(\dot{\alpha}(t))\big|_{\alpha(t)}$$

olur. Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}(t))\big|_{\alpha(t)}=X(\bar{\alpha}(t))$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Bir α eğrisinin (T) teğetler göstergesinin tabii lifti $(\bar{T})$ olmak üzere bu eğrinin geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T=0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T+\left\langle \dot{\alpha}_T,S(\dot{\alpha}_T)\right\rangle T(s)=0$$

yazılır. Birim küre için $S=I_2$ olduğundan

$$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T+\left\|\dot{\alpha}_T\right\|^2 T(s)=0,$$

$$D_{\dot{\alpha}_T}\kappa N+\kappa^2 T(s)=0,$$

$$\frac{d}{ds_T}(\kappa N)+\kappa^2 T(s)=0$$

bulunur. Türev alınırsa,

$$(\kappa^2-\kappa)T+(\frac{\kappa'}{\kappa})N-\tau B=0$$

$\bar{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T=0$ olması için

$$\begin{cases}\kappa^2-\kappa=0\ , \quad (\kappa=0,1)\\[2ex] \dfrac{\kappa'}{\kappa}=0 \quad , \quad (\kappa=sbt\ ,\ \kappa\neq 0)\\[2ex] \tau=0\end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.1.1: α eğrisi bir birim çember ise α eğrisinin teğetler göstergesi birim küre yüzeyi üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $\left(\bar{T}\right)$ tabii lifti $T\left(S^2\right)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir, [1].

α eğrisinin (N) asli normaller göstergesinin tabii lifti $(\bar{N})$ olmak üzere geodezik spray için bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N=0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N+\langle\dot{\alpha}_N,S(\dot{\alpha}_N)\rangle N(s)=0,$$

$$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N+\|\dot{\alpha}_N\|^2 N(s)=0,$$

$$D_{\dot{\alpha}_N}(-\kappa T+\tau B)+(\kappa^2+\tau^2)N(s)=0,$$

$$\frac{d}{ds_N}(-\kappa T+\tau B)+(\|W\|^2)N(s)=0,$$

olur. Türev alınırsa,

$$-\kappa T+(\|W\|^{3}-\|W\|^{2})N+\tau B=0$$

bulunur. $\bar{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N=0$ olması için

$$\begin{cases}\kappa'=0\ , & (\kappa=sbt)\\ \tau'=0\ \ , & (\tau=sbt)\\ \kappa=\tau=0 & \text{veya}\ \kappa^2+\tau^2=1\end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.1.2: α eğrisi bir dairesel helis ise α nın asli normaller göstergesi, birim küre yüzeyi üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $(\overline{N})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir, [1].

α eğrisinin (B) binormaller göstergesinin tabii lifti $(\bar{B})$ olmak üzere geodezik spray için bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B=0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B+\langle\dot{\alpha}_B,S(\dot{\alpha}_B)\rangle B(s)=0,$$

$$\frac{d}{ds_B}(\dot{\alpha}_B)+\|\dot{\alpha}_B\|^{2}B(s)=0,$$

olur. Türev alınırsa,

$$\kappa T+(\frac{\tau'}{\tau})N+(\tau^2-\tau)B=0$$

bulunur. $\bar{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B=0$ olması için

$$\begin{cases} \kappa = 0 \ , \\ \dfrac{\tau'}{\tau} = 0 \quad , \\ \tau^2 - \tau = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.1.3: (B) binormaller göstergesi, birim küre üzerinde bir büyük çember olacak şekilde herhangi bir α eğrisi yoktur. Bu durumda, $(\overline{B})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisi olamaz, [1].

α eğrisinin (C) sabit pol eğrisinin tabii lifti $(\overline{C})$ olmak üzere geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_C} \dot{\alpha}_C = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_C} \dot{\alpha}_C + \langle \dot{\alpha}_C, S(\dot{\alpha}_C) \rangle C(s) = 0,$$

$$\frac{d}{ds_C}(\dot{\alpha}_C) + \|\dot{\alpha}_C\|^2 C(s) = 0$$

olur. $C = \sin\theta T + \cos\theta B$ olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa;

$$(\theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta + \theta'^3 \sin\theta)T + (\kappa\theta' \cos\theta + \theta' \sin\theta)N$$

$$+(\theta'' \sin\theta - \theta'^2 \cos\theta + \theta'^3 \cos\theta)B = 0,$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_C} \dot{\alpha}_C = 0$ olması için

$$\begin{cases} \theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta + \theta'^3 \sin\theta = 0 \ , \\ \kappa\theta' \cos\theta + \theta' \sin\theta = 0, \\ \theta'' \sin\theta - \theta'^2 \cos\theta + \theta'^3 \cos\theta = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Bu son denklemler $\theta' = 0$ veya $\kappa = \tau = 0$ olduğunu gösterir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.1.4: α eğrisi bir helis ise (C) sabit pol eğrisi birim küre üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $(\overline{C})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir, [1].

2.2 Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to IR$$

dönüşümü $\forall a, b \in IR$ ve $\forall u, v, w \in IR$ için;

i) $g(u,v) = g(v,u),$

ii) $g(au + bv, w) = ag(u,w) + bg(v,w)$

$g(u, av + bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.2.2: V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form g olsun.

i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v)>0$ ise g simetrik bilineer formuna **pozitif tanımlı**,

ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v)<0$ ise g simetrik bilineer formuna **negatif tanımlı**,

iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna **yarı-pozitif tanımlı**,

iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna **yarı-negatif tanımlı**,

v) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,w)=0 \Rightarrow W=0$ ise g simetrik bilineer formuna **non-dejeneredir** denir, [13].

Tanım 2.2.3: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to IR$$

dönüşümü simetrik, bilineer ve non-dejenere ise g'ye V üzerinde bir **skalar çarpım**, bu durumda V vektör uzayına da **skalar çarpım uzayı** denir, [13].

Tanım 2.2.4: V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to IR$ simetrik bilineer form olsun.

$$g_w : W \times W \to IR$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formunun **indeksi** denir ve v ile gösterilir. g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \le v \le boyV$ dir.

Tanım 2.2.5: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v = 1$ ve $boyV \ge 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir, [13].

Tanım 2.2.6: IR^n, n-boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ için,

$$g : IR^n \times IR^n \to IR$$
$$(X,Y) \to g(X,Y) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir skalar çarpım fonksiyonudur ve bu fonksiyona **Lorentz metriği** denir.

Tanım 2.2.7: IR^n üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte $\{IR^n, g\}$ ikilisine n-boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca **Lorentz uzayı** denir ve IL^n ile gösterilir.

Tanım 2.2.8: IL^n , n-boyutlu bir Lorentz uzayı olsun. Bir $X \in IL^n$ vektörü için;

i) $g(X,X) > 0$ veya $X = 0$ ise X vektörüne **spacelike vektör,** (uzay benzeri)

ii) $g(X,X) < 0$ ise X vektörüne **timelike vektör,** (zaman benzeri)

iii) $g(X,X) = 0$ ise X vektörüne **lightlike veya null vektör** (ışık benzeri) denir, [13].

Tanım 2.2.9: Bir $X \in IL^n$ vektörünün normu

$$\|X\|_{IL} = \sqrt{|g(X,X)|}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona denir.

Tanım 2.2.10: $e=(0,0,...,0,1)$ olmak üzere $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in IL^n$ time-like vektörünün **future pointing (past pointing)** olması için gerekli ve yeterli koşul $g(X,e)<0$ $(g(X,e)>0)$ olmasıdır, [13].

Tanım 2.2.11: $X,Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $\mathrm{Y} \neq 0$ olmak üzere; $g(X,Y)=0$ ise, bu durumda X ve Y vektörlerine **ortogonal vektör** denir, [13].

Teorem 2.2.1: $X,Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $\mathrm{Y} \neq 0$ olmak üzere; $g(X,Y)=0$ olsun. Eğer X time-like vektör ise bu durumda Y spacelike vektördür, [15].

Teorem 2.2.2: IL^n , n-boyutlu bir Lorentz uzayı ve $X \in IL^n$ olsun. Bu durumda,

i) $\|X\|_{IL} > 0.$

ii) $\|X\|_{IL} > 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür.

iii) X bir timelike vektör ise $\|X\|_{IL}^2 = -g(X,X)$ dir.

iv) X bir spacelike vektör ise $\|X\|_{IL}^2 = g(X,X)$ dir, [13].

Tanım 2.2.12: IL^n , n-boyutlu bir Lorentz uzayı, $M \subset IL^n$ bir eğri olsun. M eğrisinin teğet vektörü T olmak üzere;

i) $g(T,T)>0$ ise M eğrisine **spacelike eğri**,

ii) $g(T,T)<0$ ise M eğrisine **timelike eğri**,

iii) $g(T,T)=0$ ise M eğrisine **lightlike** veya **null eğri** denir, [13].

Tanım 2.2.13: $\alpha : I \to M \subset IL^n$ bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu;

$$\int_a^b \left\| \alpha'(t) \right\| dt \tag{2.2.1}$$

dır, [13].

Tanım 2.2.14: IL^3 , 3-boyutlu bir Lorentz uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$

olmak üzere

$$X \times Y = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

vektörüne X ve Y nin vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir. $X \times Y$ veya $X \Lambda Y$ şeklinde gösterilir, [11].

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathrm{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}$$

olmak üzere vektörel çarpım

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & \mathrm{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & \mathrm{y}_2 & \mathrm{y}_3 \end{bmatrix}.$$

Buna göre e_1, e_2 ve e_3 birim vektörlerin vektörel çarpımı

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = -e_1, \quad \mathrm{e}_3 \times e_1 = -e_2$$

dir. Burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Eğer saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilirse,

$$e_1 \times e_2 = -e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad \mathrm{e}_3 \times e_1 = e_2$$

olur. Bu durumda vektörel çarpım

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.15: $\alpha : I \to M \subset IL^n$ diferensiyellenebilir eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun.

i) α **timelike bir eğri ise;**

Bu durumda α nın Frenet vektörleri; T timelike, N ve B spacelike vektörlerdir. Bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$T \times N = -B \; , N \times B = T \; , B \times T = -N.$$

dır. Buna bağlı olarak Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T - \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \tag{2.2.2}$$

şeklinde olur, [17]. Bu durumda Frenet ani dönme vektörü de

$$W = \tau T - \kappa B$$

şeklinde bulunur, [16].

ii) α **spacelike bir eğri ise;**

Bu durumda α eğrisi iki farklı Frenet denklem sistemine sahiptir.

a) α eğrisinin Frenet vektörleri; T ve B spacelike, N timelike vektör olsun. Bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$T \times N = -B \; , N \times B = -T \; , B \times T = N$$

olur ve Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ \\ N' = \kappa T + \tau B \\ \\ B' = \tau N \end{cases} \tag{2.2.3}$$

şeklinde bulunur, [17]. Bu durumda Frenet ani dönme vektörü

$$W = -\tau T + \kappa B$$

şeklinde olur, [16].

b) α eğrisinin Frenet vektörleri; T ve N spacelike, B timelike vektör olsun. Bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$T \times N = B \ , N \times B = -T \ , B \times T = -N$$

olur ve buna bağlı olarak Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklinde bulunur, [17]. Frenet ani dönme vektörü de

$$W = \tau T - \kappa B$$

olur, [16].

Teorem 2.2.3:

i) $X, Y \in IL^n$ pozitif (negatif) timelike vektör olsun. Bu durumda

$$g(X,Y) \leq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart X ve Y nin lineer bağımlı olmasıdır. X ve Y pozitif(negatif) timelike vektörler ise

$$g(X,Y) = \|X\|\|Y\|\cosh\varphi, \ \ \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

ii) $X, Y \in IL^n$ spacelike vektörler olsun. Bu durumda

$$|g(X,Y)| \leq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Eğer X ve Y nin gerdiği düzlem spacelike ise

$$g(X,Y) = \|X\|\|Y\|\cos\varphi, \ \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \varphi \leq \pi$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı denir.

iii) $X, Y \in IL^n$ spacelike vektör olsun. Eğer X ve Y nin gerdiği düzlem timelike ise

$$|g(X,Y)| \geq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda

$$g(X,Y) = \|X\|\|Y\|\cosh\varphi, \ \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

iv) $X \in IL^n$ spacelike ve $Y \in IL^n$ pozitif timelike vektör olsun. Bu durumda

$$|g(X,Y)| = \|X\|\|Y\|\sinh\varphi, \ \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı denir, [14].

Teorem 2.2.4. IL^3, 3-boyutlu bir Lorentz uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu durumda

i) $g(X \times Y, Z) = -\det(X, Y, Z)$,

ii) $(X \times Y) \times Z = -g(X,Z)Y + g(Y,Z)X$,

iii) $g(X \times Y, X) = 0$ ve $g(X \times Y, Y) = 0,$

iv) $g(X \times Y, X \times Y) = -g(X, X)g(Y, Y) + (g(X, Y))^2$

bağıntıları vardır, [15].

Teorem 2.2.5. IL^3, 3-boyutlu bir Lorentz uzayında iki vektör X ve Y olsun. Bu durumda

i) X ve Y spacelike vektör ise $X \times Y$ bir timelike vektördür.

ii) X ve Y timelike vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

iii) X spacelike ve Y timelike vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

iv) X ve Y null vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

v) X timelike ve Y null vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

vi) X spacelike ve Y null vektör olmak üzere $g(X, Y) = 0$ ise $X \times Y$ bir null vektör, eğer $g(X, Y) \neq 0$ ise $X \times Y$ spacelike vektördür, [15].

2.3. Yarı-Riemann Manifoldu

Tanım 2.3.1: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde simetrik non-dejenere ve sabit indeksli

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, IR)$$

fonksiyonuna bir **metrik tensör** denir.

Tanım 2.3.2: IR^n, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall P \in IR^n$ ve $X_P = (x_1, x_2, ..., x_n),\ Y_P = (y_1, y_2, ..., y_n) \in T_{IR^n}(P)$ için

$$g(X_P, Y_P) = \sum_{i=0}^{n-v} x_i y_i - \sum_{i=n-v+1}^{n} x_i y_i$$

eşitliğiyle verilen v-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **yarı-Öklidyen uzay** denir ve IR_v^n ile gösterilir, [13].

Tanım 2.3.3: IR_v^n, yarı-Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise IR_1^n yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n-uzay denir.

Tanım 2.3.4: M, bir diferensiyellenebilir manifold g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olsun. (M,g) ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir ve M ile gösterilir.

Tanım 2.3.5: M, bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir.

Tanım 2.3.6: M, bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\text{boy}M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir.

Tanım 2.3.7: M bir Lorentz manifoldu ve $\overline{M}$ de M nin bir Lorentz altmanifoldu olsun. M üzerindeki konneksiyon D olsun.

$$D : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \to \chi(\overline{M})$$

fonksiyonuna $\overline{M}$ Lorentz alt manifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir.

Tanım 2.3.8: $\overline{M}$, M nin bir Lorentz altmanifoldu ve M üzerindeki konneksiyon D olsun. $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için

$$\bar{D}_X Y = \tan D_X Y$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu denir, [13].

Tanım 2.3.9: $\overline{M}$, M nin bir Lorentz altmanifoldu olsun.

$$II : \chi(\overline{M}) \times \chi(\overline{M}) \to \chi(\overline{M})^{\perp}$$

$$(X, Y) \to II(X, Y) = nor D_X Y$$

şeklinde tanımlı fonksiyona $\overline{M}$ nin **ikinci temel form tensörü** denir, [13].

Tanım 2.3.10: n-boyutlu bir M Lorentz manifoldunun (n-1)-boyutlu bir $\overline{M}$ Lorentz altmanifolduna M nin **Lorentz hiperyüzeyi** denir.

Tanım 2.3.11: M nin bir Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. $\forall X, Y \in \chi(\overline{M})$ için

$$g(S(X), Y) = g(II(X, Y), N)$$

şeklinde tanımlı S ye $\overline{M}$ nin N den elde edilen **şekil operatörü** denir.

S şekil operatörü $\overline{M}$ nin her P noktasında

$$S_P : T_{\overline{M}}(P) \to T_{\overline{M}}(P)$$

lineer ve self adjoint (eki kendisine eşit) bir dönüşümdür, [13].

Teorem 2.3.1: M nin Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$, $\overline{M}$ nin N birim normal vektör alanından elde edilen şekil operatörü S olsun. Bu durumda $X \in \chi(\overline{M})$ için

$$S(X) = -D_X N$$

dir, [13].

Tanım 2.3.12: M bir Lorentz manifoldu, $\overline{M}$ de M nin bir hiperyüzeyi olsun. $\overline{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S, M üzerindeki konneksiyon D ve $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\bar{D}$ olmak üzere, $X, Y \in \chi(\overline{M})$ için Gauss denklemi

$$D_X Y = \bar{D}_X Y + \varepsilon g(S(X), Y) N \qquad (2.3.1)$$

şeklindedir. Burada $\varepsilon = g(N, N)$ dir, [13].

Tanım 2.3.13: M Lorentz manifoldunun bir Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere

$$g(S(T), T) = 0$$

ise α eğrisine **asimptotik çizgi** denir.

Tanım 2.3.14: M Lorentz manifoldunun bir Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. M üzerindeki konneksiyon D ve $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\bar{D}$ olsun. $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere

$$\bar{D}_T T = 0 \tag{2.3.2}$$

İse α eğrisine $\overline{M}$ üzerinde **geodezik eğri**,

$$D_T T = 0 \tag{2.3.3}$$

ise α eğrisine M üzerinde **geodezik eğri** denir.

Tanım 2.3.15: IR_1^{n+1}, Minkowski (n+1)-uzayında

$$S_1^n(r) = \left\{ X \in IR_1^{n+1} \middle| g(X,X) = r^2,\ r \in IR,\ r = sabit \right\}$$

ile tanımlanan hiperkuadriğe **n-boyutlu Lorentz hipeküresi** veya **n-Lorentz hiperküresi** denir.

$$H_0^n(r) = \left\{ X \in IR_1^{n+1} \middle| g(X,X) = -r^2,\ r \in IR,\ r = sabit \right\}$$

nokta kümesine de **n-boyutlu r-yarıçaplı hiperbolik küre** denir.

n=2 için özel halinde

$$S_1^2(r) = \left\{ X \in IR_1^3 \middle| g(X,X) = r^2,\ r \in IR,\ r = sabit \right\}$$

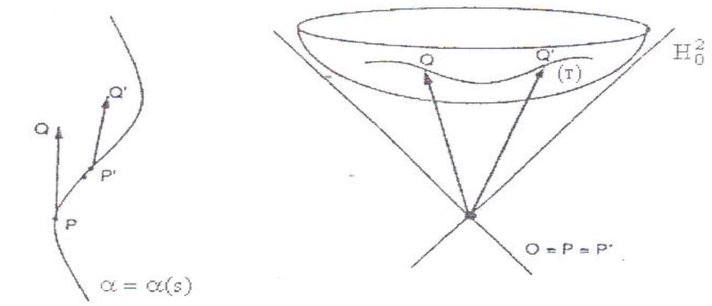
nokta kümesine **r-yarıçaplı Lorentz küresi**,

$$H_0^2(r) = \left\{ X \in IR_1^3 \middle| g(X,X) = -r^2,\ r \in IR,\ r = sabit \right\}$$

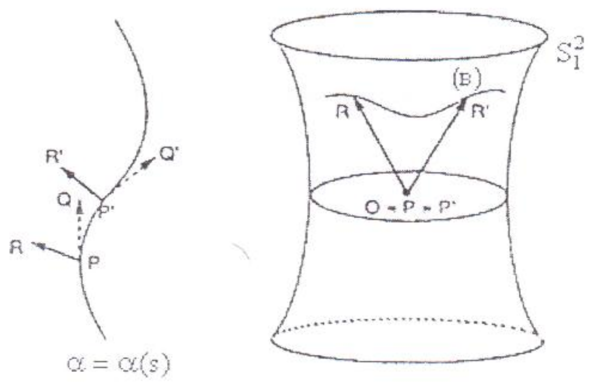
nokta kümesine de **r-yarıçaplı hiperbolik küre** denir.

Tanım 2.3.15: $\alpha : I \to IL^3$ birim hızlı non-null eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. T, N, B Frenet vektörlerinin başlangıç noktaları eğriyi çizerken uç noktalarının cümlesi S_1^2 birim Lorentz küresi veya H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerinde çizdiği eğrilere α eğrisinin **teğetler göstergesi** (birinci küresel göstergesi), **asli normaller**

göstergesi (ikinci küresel göstergesi) ve **binormaller göstergesi** (üçüncü küresel göstergesi) denir ve sırasıyla $(T),(N),(B)$ ile gösterilir.



Şekil 2.3.1. Timelike bir eğrinin (Time konisi üzerinde) teğetler göstergesi



Şekil 2.3.2. Timelike bir eğrinin (Lorentzian küresi üzerinde) binormaller göstergesi

C birim Darboux vektörünün S_1^2 veya H_0^2 üzerinde çizdiği eğriye **sabit pol eğrisi** denir ve (C) ile gösterilir.

Tanım 2.3.16:

1) $\alpha : I \to IL^3$ birim hızlı timelike eğrisinin Frenet çatısı $\{T,N,B\}$, eğriliği κ ve burulması τ olsun. Bu durumda T timelike, N ve B spacelike vektörlerdir. Buna bağlı olarak α eğrisinin Frenet ani dönme vektörü

$$W = \tau T - \kappa B, \qquad \|W\|_{IL} = \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} \tag{2.3.4}$$

şeklinde olur. Bu halde birim Darboux vektörü için iki durum vardır:

a) W spacelike ise $\left(|\kappa|>|\tau|\right)$ $-B$ ile W arasındaki Lorentzian timelike açı φ olmak üzere

$$\begin{cases} \kappa = \|W\|\cosh\varphi \\ \\ \tau = \|W\|\sinh\varphi \end{cases}, \qquad \|W\|^2 = g(W,W) = \kappa^2 - \tau^2 \tag{2.3.5}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B \tag{2.3.6}$$

şeklinde bulunur.

b) W timelike $\left(|\kappa|<|\tau|\right)$ ise

$$\begin{cases} \kappa = \|W\|\sinh\varphi \\ \\ \tau = \|W\|\cosh\varphi \end{cases}, \qquad \|W\|^2 = -g(W,W) = -\left(\kappa^2 - \tau^2\right) \tag{2.3.7}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C = \cosh\varphi T - \sinh\varphi B \tag{2.3.8}$$

şeklinde bulunur.

2) $\alpha : I \to IL^3$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. T ve B spacelike, N timelike vektör olarak alınırsa α eğrisinin Frenet ani dönme vektörü ve normu

$$W = -\tau T + \kappa B, \qquad \|W\| = \sqrt{\left|\kappa^2 - \tau^2\right|} \tag{2.3.9}$$

şeklinde olur. Burada $g(W,W) = \tau^2 - \kappa^2 > 0$ olduğundan W spacelike vektördür. B ile W arasındaki Lorentzian spacelike açı φ ile gösterilirse,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\|\cos\varphi \\ \\ \tau = \|W\|\sin\varphi \end{cases} \tag{2.3.10}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C = -\sin\varphi T + \cos\varphi B \tag{2.3.11}$$

şeklinde bulunur.

3) $\alpha : I \to IL^3$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. T ve N spacelike, B timelike vektör olarak alınırsa α eğrisinin Frenet ani dönme vektörü ve normu

$$W = \tau T - \kappa B, \qquad \|W\| = \sqrt{\left|\tau^2 - \kappa^2\right|} \tag{2.3.12}$$

şeklinde olur. Bu halde birim Darboux vektörü için iki durum vardır:

a) W spacelike $\left(|\tau| > |\kappa|\right)$ ise

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh\varphi \\ \\ \tau = \|W\| \cosh\varphi \end{cases}, \qquad \|W\|^2 = g(W,W) = \tau^2 - \kappa^2 \tag{2.3.13}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C = \cosh\varphi T - \sinh\varphi B \tag{2.3.14}$$

olur.

b) W timelike $\left(|\tau| < |\kappa|\right)$ ise

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh\varphi \\ \\ \tau = \|W\| \sinh\varphi \end{cases}, \qquad \|W\|^2 = -g(W,W) = -\left(\tau^2 - \kappa^2\right) \tag{2.3.15}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B \tag{2.3.16}$$

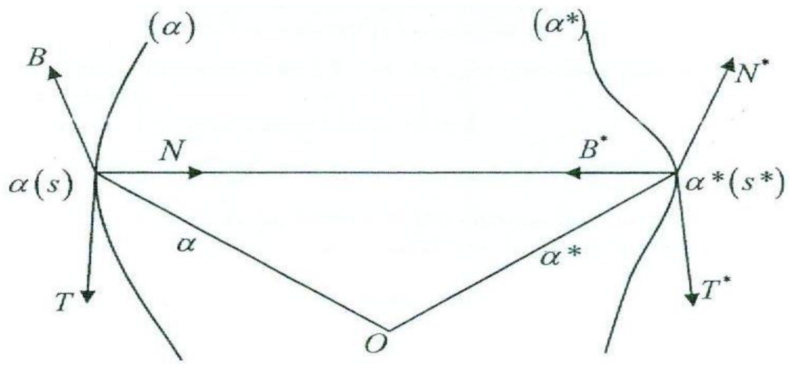
şeklinde bulunur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde Öklid uzayında Mannheim eğri çiftleri ile ilgili temel kavramlara yer verildi. Bu eğrilerin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin E^3e ve S^2ye göre yay uzunlukları, geodezik eğrilikleri ve tabii liftleri hesaplanarak bunlar arasındaki bağıntılara yer verildi.

3.1 E^3 de Mannheim Eğri Çiftlerinin Küresel Göstergelerinin Eğrilikleri ve Tabii Liftleri

Tanım 3.1.1 $\alpha : I \to E^3$ ve $\alpha^* : I \to E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. α eğrisinin asli normal vektörü ile α^* eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise, α eğrisine Mannheim eğrisi ve α^* eğrisine Mannheim partner eğrisi denir, $[4]$. (Şekil 3.1.1)



Şekil 3.1.1 Mannheim Eğri Çifti

Bu tanıma göre Mannheim eğrisinin denklemi;

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) - \lambda N(s)$$

veya

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda B^*(s^*)$$

şeklindedir, [3]. Bu eğrilerin Frenet çatıları arasında

$$\begin{cases} T = \cos\theta T^* + \sin\theta N^* \\ N = B^* \\ B = -\sin\theta T^* + \cos\theta N^* \end{cases}, \qquad (3.1.1)$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{ds^*}{ds} \\ \sin\theta = \lambda\tau^* \dfrac{ds^*}{ds} \end{cases}, \qquad (3.1.2)$$

$$\begin{cases} T^* = \cos\theta T - \sin\theta B \\ N^* = \sin\theta T + \cos\theta B \\ B^* = N \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

bağıntıları mevcuttur. Burada, S (T, T^*)= θ, [3].

Teorem 3.1.1 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğriler arasındaki uzaklık sabittir, [5].

Teorem 3.1.2 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere

$$\mu\tau - \kappa\lambda = 1\ ,\ \mu = \lambda\cot\theta\cdot \qquad (3.1.4)$$

bağıntısı vardır, [3].

Teorem 3.1.3 (α, α^*) Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ , α^* eğrisinin eğriliği κ^* ve burulması τ^* olmak üzere eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa = \tau^* \sin\theta \cdot \dfrac{ds^*}{ds} \\ \tau = -\tau^* \cos\theta \cdot \dfrac{ds^*}{ds} \end{cases} \qquad (3.1.5)$$

$$\begin{cases} \kappa^* = \dfrac{d\theta}{ds^*} \\ \tau^* = (\kappa\sin\theta - \tau\cos\theta)\cdot \dfrac{ds^*}{ds} \end{cases} \qquad (3.1.6)$$

bağıntıları vardır, [3].

Teorem 3.1.4. $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ Mannheim eğri çifti olsun olsun. α^{*} eğrisinin burulması τ^{*} ise

$$\tau^{*}=\frac{\kappa}{\lambda\tau} \tag{3.1.7}$$

dır, [3].

Teorem 3.1.5. $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim Darboux vektör C ve α^{*} partner eğrisinin teğet vektörü T^{*} olmak üzere

$$C=T^{*} \tag{3.1.8}$$

dır, [19].

Bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.1: $\alpha: I\rightarrow E^{3}$ Mannheim eğrisi ile $\alpha^{*}: I\rightarrow E^{3}$ Mannheim partner eğrisinin Frenet 3-ayaklısı, sırasıyla $\{T(s),N(s),B(s)\}$ ve $\{T^{*}(s),N^{*}(s),B^{*}(s)\}$ olsun. T ile T^{*} vektörleri arasındaki açı θ, B ile W Darboux vektörü arasındaki φ açı olmak üzere bu açılar arasında

$$\begin{cases}\sin\varphi=\cos\theta\\ \cos\varphi=-\sin\theta\end{cases} \tag{3.1.9}$$

bağıntısı vardır.

Sonuç 3.1.1 dikkate alındığında, (2.1.4), (2.1.16), (2.1.17), (3.1.2) ve (3.1.3) bağıntıları

$$\cos\theta=\frac{\tau}{\|W\|} \quad , \quad -\sin\theta=\frac{\kappa}{\|W\|} \tag{3.1.10}$$

$$\begin{cases} k_T = -\dfrac{1}{\sin\theta}, \\ k_N = \sqrt{1+\left(\dfrac{\theta'}{\|W\|}\right)^2}, \\ k_B = \dfrac{1}{\cos\theta}, \\ k_C = \sqrt{1+\left(\dfrac{\|W\|}{\theta'}\right)^2}, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{cases} \gamma_T = -\cot\theta, \\ \gamma_N = \dfrac{\theta'}{\|W\|}, \\ \gamma_B = -\tan\theta, \\ \gamma_C = \dfrac{\|W\|}{\theta'}, \end{cases}, \tag{3.1.12}$$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{ds^*}{ds}, \\ \cos\varphi = \lambda\tau^* \dfrac{ds^*}{ds}, \end{cases} \tag{3.1.13}$$

$$\begin{cases} T^* = \sin\varphi T + \cos\varphi B \\ N^* = -\cos\varphi T + \sin\varphi B \cdot \\ B^* = N \end{cases} \tag{3.1.14}$$

şekline dönüşmüş olur. (3.1.9) bağıntısının bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.2: (α,α^*) Mannheim eğri çiftinin $\alpha(s)$ ve $\alpha^*(s)$ noktalarındaki Frenet vektörleri sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. $B(s)$ binormal vektörü ile $W(s)$ Darboux vektörü arasındaki açı φ olmak üzere bu çatılar arasında,

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & o & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır.

Teorem 3.1.6: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin W Darboux vektörü ile α^* eğrisinin W^* Darboux vektörü arasında

$$W^* = -\sec\theta W + \frac{\kappa}{\lambda\tau\|W\|}N$$

bağıntısı vardır, [19].

Teorem 3.1.7: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin C birim Darboux vektörü ile α^* eğrisinin C^* birim Darboux vektörü arasında

$$C^* = \frac{1}{k_N}C + \frac{1}{k_C}N$$

bağıntısı vardır, [19].

α^* Mannheim partner eğrisinin $\left(T^*\right),\left(N^*\right)$ ve $\left(B^*\right)$ küresel gösterge eğrileri ile $\left(C^*\right)$ sabit pol eğrisinin E^3 e göre yay uzunlukları,

1) $s_{T^*} = s_C = \int\limits_0^s \theta' ds,$

2) $s_{N^*} = \int\limits_0^s \sqrt{\left(\theta'\right)^2 + \|W\|^2}\, ds = \int\limits_0^s k_N \|W\| ds = \int\limits_0^s k_C \theta' ds$

3) $s_{B^*} = s_N,$

4) $s_{C^*} = \int\limits_0^s \frac{\left(\sqrt{k_C^2 - 1}\right)'}{k_C^2} ds,$

geodezik eğrilikleri,

1) $k_{T^*} = k_C = \sqrt{1 + \frac{\|W\|^2 k_T^2 \left(k_T^2 - 1\right)}{\left(k_T'\right)^2}},$

$$2)\ k_{N^*}=\sqrt{\left[\left(\frac{\cos\theta}{k_C}\right)'+\frac{\kappa}{k_N}\right]^2+\left[\left(\frac{1}{k_N}\right)'\right]^2+\left[\left(\frac{\sin\theta}{k_C}\right)'+\frac{\tau}{k_N}\right]^2},$$

$$3)\ k_{B^*}=k_N=\sqrt{1+\frac{\left(k_B'\right)^2}{\|W\|^2 k_B^2\left(k_B^2-1\right)}},$$

$$4)\ k_{C^*}=\sqrt{1+\left(\frac{\kappa k_N k_C^2}{\lambda\tau\left(\sqrt{k_C^2-1}\right)'}\right)^2}.$$

S^2 ye göre geodezik eğrilikleri,

$$1)\ \gamma_{T^*}=\frac{\|W\|\left(k_T\right)^2}{\gamma_T'},$$

$$2)\ \gamma_{N^*}=\sqrt{\left[\left(\frac{\cos\theta}{k_C}\right)'+\frac{\kappa}{k_N}+\cos\theta\right]^2+\left[\left(\frac{1}{k_N}\right)'\right]^2+\left[\left(\frac{\sin\theta}{k_C}\right)'+\frac{\tau}{k_N}+\sin\theta\right]^2}$$

$$3)\ \gamma_{B^*}=-\frac{\gamma_B'}{\|W\|\left(k_B\right)^2}\ ,$$

$$4)\ \gamma_{c^*}=\frac{\kappa k_N k_C^2}{\lambda\ \tau\left(\sqrt{k_C^2-1}\right)'}$$

şeklinde ifade edilir, [19].

4.BULGULAR

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada Mannheim eğrisi timelike, partner eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri alındığında ilk olarak Mannheim eğrisinin teğet vektörü ile partner eğrisinin Darboux vektörünün lineer bağımlı olduğu gösterildi. İkinci olarak Mannheim partner eğrisinin $\left(T^*\right),\left(N^*\right),\left(B^*\right)$ küresel gösterge eğrileri ile $\left(C^*\right)$ sabit pol eğrisinin IL^3 Lorentz uzayına, S_1^2 Lorentz küresine veya H_0^2 Hiperbolik küreye göre yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri hesaplanarak, bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Son olarak partner eğrisinin küresel göstergelerinin tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartı araştırılarak Mannheim eğrisinin nasıl bir eğri olması gerektiği ifade edildi.

4.1. Timelike-Spacelike Mannheım Eğri Çiftleri

Tanım 4.1.1 : $\alpha : I \to IL^3$ ve, $\alpha^* : I \to IL^3$ diferensiyellenebilir iki eğri olsun. α eğrisinin $\alpha\left(s\right)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\left\{T(s), N(s), B(s)\right\}$ ve α^* eğrisinin $\alpha^*\left(s\right)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\left\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\right\}$ ile gösterilsin. α eğrisinin aslinormal vektörü ile α^* eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise, α eğrisine **Mannheim eğrisi** ve α^* eğrisine **Mannheim partner eğrisi** denir ve $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ ile gösterilir.

Lorentz uzayında $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ Mannheim eğri çifti için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

1. $\alpha : I \to IL^3$ Mannheim eğrisi, timelike bir eğri olduğunda $\alpha^* : I \to IL^3$ partner eğrisi timelike veya spacelike olabilir. Buna göre

a) T^* timelike vektör, N^* ile B^* spacelike vektördür.

b) T^* ile B^* spacelike vektör, N^* timelike vektördür.

Bu durumda

$$\begin{cases} g(T,T)=-1 \\ g(N,N)=+1 \\ g(B,B)=+1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} g(T^*,T^*)=\pm 1=\varepsilon_0 \\ g(N^*,N^*)=\pm 1=\varepsilon_0 \\ g(B^*,B^*)=+1. \end{cases}$$

2. $\alpha : I \to IL^3$ Mannheim eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri olduğunda $\alpha^* : I \to IL^3$ partner eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olur. Bu durumda

$$\begin{cases} g(T,T)=+1 \\ g(N,N)=-1 \\ g(B,B)=+1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} g(T^*,T^*)=+1 \\ g(N^*,N^*)=-1 \\ g(B^*,B^*)=+1. \end{cases}$$

3. $\alpha : I \to IL^3$ Mannheim eğrisi timelike binormalli spacelike eğri olduğunda $\alpha^* : I \to IL^3$ timelike veya spacelike olabilir. Buna göre

a) T^* timelike vektör, N^* ile B^* spacelike vektördür.

b) T^* ile B^* spacelike vektör, N^* timelike vektördür.

Bu durumda

$$\begin{cases} g(T,T)=+1 \\ g(N,N)=+1 \\ g(B,B)=-1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} g(T^*,T^*)=\pm 1=\varepsilon_0 \\ g(N^*,N^*)=\pm 1=\varepsilon_0 \\ g(B^*,B^*)=+1. \end{cases}$$

Çalışmamız boyunca $\alpha : I \to IL^3$ Mannheim eğrisi timelike eğri, $\alpha^* : I \to IL^3$ partner eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri olarak alınacaktır. Bundan sonra bu eğri çifti kısaca, (α, α^*) timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.1.1: (α, α^*) timelike-spacelike Mannheim eğri çiftleri arasındaki uzaklık sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda(s^*) B^*(s^*)$ yazılabilir. s^* a göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} T\frac{ds}{ds^*} &= T^* + \lambda'(s^*)B^*(s^*) + \lambda(s^*)B^{*\prime}(s^*) \\ &= T^* + \lambda' B^* + \lambda(\tau^* N^*) \\ &= T^* + \lambda\tau^* N^* + \lambda' B^* \end{aligned}$$

olur ve B^* ile iç çarpılırsa

$$\langle T\frac{ds}{ds^*},B^*\rangle=\langle T^*,B^*\rangle+\lambda\tau^*\langle N^*,B^*\rangle+\lambda'\langle B^*,B^*\rangle,$$

$$\lambda'=0$$

$$\lambda=sbt.$$

olur. Diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} d(\alpha^*(s^*),\alpha(s)) &= \left\|\alpha(s)-\alpha^*(s^*)\right\| \\ &= \left\|\lambda B^*\right\| \\ &= |\lambda| = sbt. \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisi ile α^* eğrisinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T,N,B\}$ ve $\{T^*,N^*,B^*\}$ olsun. Bu çatılar arasında

$$\begin{cases} T^*=-\sinh\theta T+\cosh\theta B \\ N^*=-\cosh\theta T+\sinh\theta B \\ B^*=N \end{cases}, \tag{4.1.1}$$

$$\begin{cases} \sinh\theta=\dfrac{ds^*}{ds} \\ \cosh\theta=-\lambda\tau^*\dfrac{ds^*}{ds} \end{cases}, \tag{4.1.2}$$

$$\begin{cases} T=\sinh\theta T^*-\cosh\theta N^* \\ N=B^* \\ B^*=\cosh\theta T^*-\sinh\theta N^* \end{cases} \tag{4.1.3}$$

bağıntıları vardır. Buradaki θ açısı, T ile T^* arasındaki açıdır.

İspat: $\alpha^*(s^*)=\alpha(s)-\lambda N(s)$ denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$T^*\frac{ds^*}{ds}=(1-\lambda\kappa)T(s)-\lambda\tau B \tag{4.1.5}$$

olur. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılırsa

$$-\sinh\theta\frac{ds^*}{ds}=1-\lambda\kappa, \tag{4.1.6}$$

$$\cosh\theta\frac{ds^*}{ds}=\lambda\tau \tag{4.1.7}$$

bulunur ve bu değerler (4.1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$T^*=-\sinh\theta T+\cosh\theta B$$

olur . Benzer şekilde Teorem (2.1.1) deki Frenet formüllerinden

$$N^*=\frac{\alpha^{*\prime\prime}(s^*)}{\left\|\alpha^{*\prime\prime}(s^*)\right\|},$$

$$N^*=-\cosh\theta T+\sinh\theta B$$

ve $B^*=T^*\times N^*$ ifadesinden

$$B^*=N$$

elde edilir. Böylece (4.1.1) bağıntısı gösterilmiş olur. Bu bağıntıdan T ve B değerleri çekilirse (4.3.1) bağıntısı bulunur.

$$\alpha(s)=\alpha^*(s^*)+\lambda B^*(s^*)$$

denkleminin s parametresine göre türevi alınırsa

$$T=T^*\frac{ds^*}{ds}+\lambda\tau^*\frac{ds^*}{ds}N^*$$

olur ve (4.1.3) deki T nin değeri dikkate alındığında

$$\begin{cases}\sinh\theta=\dfrac{ds^*}{ds}\\[2ex]\cosh\theta=-\lambda\tau^*\dfrac{ds^*}{ds}\end{cases}$$

bulunur. Böylece (4.1.2) nin de ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere, bunlar arasında

$$\lambda\kappa-\mu\tau=1$$

bağıntısı vardır.

İspat: (4.1.6) ve (4.1.7) bağıntıları oranlanırsa

$$\frac{-\sinh\theta}{1-\lambda\kappa}=\frac{\cosh\theta}{\lambda\tau}$$

veya bu eşitlikten

$$\tanh\theta=\frac{\lambda\kappa-1}{\lambda\tau}$$

yazılabilir ve $\mu=\lambda\tanh\theta$ alınırsa

$$\lambda\kappa-\mu\tau=1$$

bulunur.

Teorem 4.1.4: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda eğrilikler arsında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\begin{cases}\kappa=-\tau^*\cosh\theta\dfrac{ds^*}{ds}\\ \tau=-\tau^*\sinh\theta\dfrac{ds^*}{ds}\end{cases}, \tag{4.1.8}$$

$$\begin{cases}\kappa^*=\dfrac{d\theta}{ds^*}=\theta'\dfrac{ds}{ds^*}\\ \tau^*=-\kappa\cosh\theta\dfrac{ds}{ds^*}+\tau\sinh\theta\dfrac{ds}{ds^*}\end{cases} \tag{4.1.9}$$

İspat: $\langle T,B^*\rangle=0$ ifadesinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle T',B^*\rangle+\langle T,(B^*)'\rangle=0$$

olur. (2.2.2), (2.2.3), (4.1.1) ve (4.1.3) bağıntılarından T', B^*, T ve $(B^*)'$ ın karşılıkları yerine yazılırsa

$$\langle \kappa N \frac{ds}{ds^*}, N\rangle + \langle \sinh\theta T^* - \cosh\theta N^*, \tau^* N^*\rangle = 0,$$

$$\kappa \frac{ds}{ds^*} + \tau^* \cosh\theta = 0,$$

$$\kappa = -\tau^* \cosh\theta \frac{ds^*}{ds}$$

bulunur.

$\langle B, B^*\rangle = 0$ ifadesinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle B', B^*\rangle + \langle B, (B^*)'\rangle = 0$$

olur. (2.2.2), (2.2.3), (4.1.1) ve (4.1.3) bağıntılarından B', B^*, B ve $(B^*)'$ ın karşılıkları yerine yazılırsa

$$\langle \tau N \frac{ds}{ds^*}, N\rangle + \langle \cosh\theta T^* - \sinh\theta N^*, \tau^* N^*\rangle = 0,$$
$$\tau \frac{ds}{ds^*} + \tau^* \sinh\theta = 0,$$
$$\tau = -\tau^* \sinh\theta \frac{ds^*}{ds}$$

bulunur.

$\langle T, T^*\rangle = \sinh\theta$ ifadesinin s^* parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle T', T^*\rangle + \langle T, (T^*)'\rangle = 0$$

olur. (2.2.2), (2.2.3), (4.1.1) ve (4.1.3) bağıntılarından T', T^*, T ve $(\mathrm{T}^*)'$ ın karşılıkları yerine yazılırsa

$$\langle \kappa N \frac{ds}{ds^*}, T^*\rangle + \langle T, \kappa^* N^*\rangle = \cosh\theta \frac{d\theta}{ds^*},$$

$$\kappa^{*}\langle T,-\cosh\theta T+\sinh\theta B\rangle=\cosh\theta\frac{d\theta}{ds^{*}},$$

$$\kappa^{*}\cosh\theta=\cosh\theta\frac{d\theta}{ds^{*}},$$

$$\kappa^{*}=\frac{d\theta}{ds^{*}}=\theta'\frac{ds}{ds^{*}}$$

olur. Benzer şekilde $\langle N,N^{*}\rangle=0$ ifadesinin türevini alınırsa

$$\langle\kappa T-\tau B\frac{ds}{ds^{*}},N^{*}\rangle+\langle N,\kappa^{*}T^{*}+\tau^{*}B^{*}\rangle=0,$$

$$\langle\kappa T-\tau B\frac{ds}{ds^{*}},-\cosh\theta T+\sinh\theta B\rangle+\langle B^{*},\kappa^{*}T^{*}+\tau^{*}B^{*}\rangle=0,$$

$$\kappa\cosh\theta\frac{ds}{ds^{*}}-\tau\sinh\theta\frac{ds}{ds^{*}}+\tau^{*}=0,$$

$$\tau^{*}=-\kappa\cosh\theta\frac{ds}{ds^{*}}+\tau\sinh\theta\frac{ds}{ds^{*}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5: (α,α^{*}) timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α^{*} eğrisinin eğriliği κ^{*}, burulması τ^{*}, α eğrisinin burulması τ olmak üzere bunlar arasında

$$\tau^{*}=-\frac{\kappa}{\lambda\tau} \tag{4.1.10}$$

bağıntısı vardır.

İspat: (4.1.2) deki ifadeler (4.1.6) ve (4.1.7) deki bağıntılarla taraf tarafa çarpılırsa

$$-\sinh^{2}\theta=1-\lambda\kappa$$

$$\cosh^{2}\theta=-\lambda\tau\tau^{*}$$

olur ve bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa;

$$1=1-\lambda\tau-\lambda^{2}\tau\tau^{*},$$

$$\tau^{*}=-\frac{\kappa}{\lambda\tau}$$

bulunur.

Teorem 4.1.6: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin W Darboux vektörü ile α^* eğrisinin T^* teğeti arasında

$$W=\tau^*\frac{ds^*}{ds}T^* \tag{4.1.11}$$

bağıntısı vardır.

İspat:

$$W=\tau T-\kappa B$$

ifadesinde T ve B nin yerine (4.1.3) bağıntısından, κ ve τ nun yerine de (4.1.8) bağıntısından karşılıkları yazılırsa

$$W=\tau^*\frac{ds^*}{ds}T^*$$

olur. Bu teoremin bir neticesi olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.1: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α Mannheim eğrisinin C birim Darboux vektörü ile α^* partner eğrisinin T^* teğet vektörü lineer bağımlıdır.

Sonuç 4.1.2: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin Darboux vektörü ile binormal vektörü arasındaki açı φ olmak üzere θ ile φ açısı arasında;

W spacelike vektör ise

$$\begin{cases}\sinh\varphi=-\sinh\theta\\-\cosh\varphi=\cosh\theta\end{cases}, \qquad , \tag{4.1.12}$$

W timelike vektör ise

$$\begin{cases}\cosh\varphi=-\sinh\theta\\-\sinh\varphi=\cosh\theta\end{cases}, \tag{4.1.13}$$

bağıntıları vardır.

İspat: W spacelike vektör ise (2.3.6) ve (4.1.1) bağıntılarından

$$C = \sinh\varphi T - \cos h\varphi B,$$

$$T^* = -\sinh\theta T + \cosh\theta B$$

dır. $C = T^*$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \sinh\varphi = -\sinh\theta \\ -\cosh\varphi = \cosh\theta \end{cases},$$

olur. Benzer şekilde W timelike vektör ise (2.3.7) bağıntısından

$$C = \cosh\varphi T - \sin h\varphi B$$

dır. $C = T^*$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \cos h\varphi = -\sinh\theta \\ -\sin h\varphi = \cosh\theta \end{cases}$$

olur. Bu son ifade oranlanırsa

$$\cot h\varphi = \tanh\theta,$$

olur. Türev alınır ve $-\sin h\varphi = \cosh\theta$ olduğu dikkate alınırsa

$$\varphi' \frac{1}{\sinh^2\varphi} = \theta' \frac{-1}{\cosh^2\theta},$$

$$\varphi' = -\theta' \tag{4.1.14}$$

bulunur.

Teorem 4.1.7 : (α, α^*) timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin W Darboux vektörü ile α^* eğrisinin W^* Darboux vektörü arasında

$$W^* = \frac{-1}{\sinh\theta} W + \frac{\theta'\kappa}{\lambda\kappa\|W\|} N$$

bağıntısı vardır.

İspat: $W^* = -\tau^* T^* + \kappa^* B^* \Rightarrow \tau^* T^* = -W^* + \kappa^* B^*$

yazılabilir. Bu ifade (4.1.11) de yerine yazılır ve B^*=N eşitliği de göz önüne alınırsa

$$W = \frac{ds^*}{ds}(-W^* + \kappa^* N)$$

olur. Buradan $\frac{ds}{ds^*}$ ın yerine (4.1.2) deki değeri yazılırsa

$$W^* = \frac{-1}{\sinh\theta} W - \kappa^* N \tag{4.1.15}$$

bulunur. Diğer yandan (4.1.8) bağıntısından

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{\tau^*}{\|W\|}$$

olur ve burada τ^* ın yerine (4.1.10) daki karşılığı yazılırsa

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{-\kappa}{\lambda\tau\|W\|}$$

bulunur. Bu eşitlik $\kappa^* = \theta' \frac{ds}{ds^*}$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\kappa^* = -\theta' \frac{\kappa}{\lambda\tau\|W\|} \tag{4.1.16}$$

olur ve κ^* ın bu değeri (4.1.15) de yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

4.2 Timelike Mannheim Eğrisinin Küresel Göstergelerinin Yay Uzunlukları

Çalışmamızın bu bölümünde α timelike Mannheim eğrisinin $(T),(N),(B)$ küresel gösterge eğrileri ile (C) sabit pol eğrisinin yay uzunlukları hesaplanmıştır. Burada T timelike vektör, N ve B spacelike vektörlerdir.

(T) Teğetler göstergesinin yay uzunluğu s_T ile gösterilirse Tanım 2.2.13 den,

$$s_T = \int_0^s \left\| \frac{dT}{ds} \right\| ds = \int_0^s \|\kappa N\| ds,$$

$$s_T = \int_0^s |\kappa| ds \tag{4.2.1}$$

olur.

(N) asli normaller göstergesinin yay uzunluğu s_N ile gösterilirse,

$$s_N = \int_0^s \left\| \frac{dN}{ds} \right\| ds,$$

$$s_N = \int_0^s \|\kappa T - \tau B\| ds = \int_0^s \left| -\kappa^2 + \tau^2 \right| ds,$$

$$s_N = \int_0^s \|W\| ds \tag{4.2.2}$$

şeklinde bulunur.

(B) binormaller göstergesinin yay uzunluğu s_B ile gösterilirse,

$$s_B = \int_0^s \left\| \frac{dB}{ds} \right\| ds = \int_0^s \|\tau N\| ds,$$

$$s_B = \int_0^s |\tau| ds \tag{4.2.3}$$

olur.

(C) sabit pol eğrisinin yay uzunluğu s_C ile gösterilirse,

$$s_T = \int_0^s \left\| \frac{dC}{ds} \right\| ds,$$

$$s_T = \int_0^s |\phi'| ds \tag{4.2.4}$$

şeklinde bulunur.

4.3 Timelike Mannheim Eğrisinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e göre Geodezik Eğrilikleri

(T) teğetler göstergesinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_T ile gösterilsin. (T) nin yay parametresi s_T ve birim teğet vektörü T_T olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_T = \left\| D_{T_T} T_T \right\|$$

şeklinde yazılır. (T) teğetler göstergesinin denklemi

$$\alpha_T(s_T) = T(s)$$

dir. Her iki tarafın s_T parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\alpha_T}{ds_T} = \frac{d\alpha_T}{ds}\frac{ds}{ds_T},$$

$$T_T = \kappa N \frac{ds}{ds_T}$$

olur. Norm alınırsa

$$1 = \kappa \frac{ds}{ds_T}$$

veya

$$\frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa}$$

bulunur. Bu ifade T_T de yerine yazılırsa

$$T_T = N \tag{4.3.1}$$

olur. Tekrar türev alınırsa

$$D_{T_T} T_T = \frac{dT_T}{ds_T} = \frac{dT_T}{ds}\frac{ds}{ds_T},$$

$$D_{T_T} T_T = \frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds_T}$$

olur. Burada (2.2.2) ve (4.3.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$D_{T_T} T_T = T - \frac{\tau}{\kappa} B \qquad (4.3.2)$$

bulunur. Geodezik eğrilik tanımından

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2} \right|} \qquad (4.3.3)$$

şeklinde olur. Burada W spacelike ise (2.3.5) denkleminden

$$\frac{\tau}{\kappa} = \tanh\theta$$

olur ve geodezik eğrilik

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \tanh^2\theta \right|},$$

$$k_T = \frac{1}{\cosh\theta} \qquad (4.3.4)$$

şeklinde bulunur. W timelike ise (2.3.7) denkleminden

$$\frac{\tau}{\kappa} = \coth\theta$$

olur ve bu durumda geodezik eğrilik

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \coth^2\theta \right|},$$

$$k_T = \frac{1}{\sinh\theta} \qquad (4.3.5)$$

şeklinde olur.

(N) asli normaller göstergesinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_N ile gösterilsin. (N) nin yay parametresi s_N ve birim teğet vektörü T_N olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_N = \left\| D_{T_N} T_N \right\|$$

şeklinde yazılır. (N) eğrisinin denklemi

$$\alpha_N(s_N) = N(s)$$

dir. Burada s_N ye göre türev alınırsa

$$T_N = \kappa T - \tau B \frac{ds}{ds_N}$$

olur. Norm alınırsa,

$$\frac{ds}{ds_N} = \frac{1}{\|W\|}$$

olur ve bu değer T_N ifadesinde yerine yazılırsa

$$T_N = \frac{\kappa}{\|W\|} T - \frac{\tau}{\|W\|} B \tag{4.3.6}$$

bulunur. W spacelike ise (4.3.6) ifadesi (2.3.5) denkleminden

$$T_N = -\cosh\theta T + \sinh\theta B$$

şekline dönüşür ve tekrar türev alınırsa

$$D_{T_N} T_N = \left(\theta' \sinh\theta T + \|W\| N - \theta' \cosh\theta B\right) \frac{1}{\|W\|} \tag{4.3.7}$$

olur. Geodezik eğrilik tanımından,

$$k_N = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{\left|\theta'^2 + \|W\|^2\right|} \tag{4.3.8}$$

olduğu görülür. W timelike ise (4.3.6) ifadesi (2.3.7) denkleminden

$$T_N = -\sinh\theta T + \cosh\theta B$$

şekline dönüşür. T_N nin tekrar türev alınırsa

$$D_{T_N} T_N = \frac{\theta'}{\|W\|}\left(-\cosh\theta T + \sinh\theta B\right) + N$$

olur. Geodezik eğrilik tanımından,

$$k_N = \frac{1}{\|W\|}\sqrt{\left|-\theta'^2 + \|W\|^2\right|} \tag{4.3.9}$$

şeklinde bulunur.

(B) binormaller göstergesinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_B ile gösterilsin. (B) nin yay parametresi s_B ve birim teğet vektörü T_B olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_B = \left\| D_{T_B} T_B \right\|$$

şeklinde yazılır. (B) nin denklemi

$$\alpha_B(s_B) = B(s)$$

dir. Her iki tarafın s_B parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_B = \tau N \frac{ds}{ds_B}$$

olur ve norm alınırsa,

$$\frac{ds}{ds_B} = \frac{1}{|\tau|}$$

bulunur. Bu değer T_B ifadesinde yerine yazılırsa

$$T_B = \pm N$$

olur. Pozitif yönlendirme seçilirse,

$$T_B = N$$

alınabilir. Buradan tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_B}T_B = \frac{\kappa}{\tau}T - B \tag{4.3.10}$$

olur. W spacelike ise (2.3.5) denkleminden

$$\frac{\kappa}{\tau} = \coth\theta$$

olur. Bu değer (4.310) da yerine yazılır ve norm alınırsa

$$k_B = \frac{1}{\sinh\theta} \tag{4.3.11}$$

şeklinde bulunur. W timelike ise (2.3.7) denkleminden

$$\frac{\kappa}{\tau} = \sinh\theta$$

olur. Bu değer (4.3.10) da yerine yazılır ve norm alınırsa

$$k_B = \frac{1}{\cosh\theta} \tag{4.3.12}$$

elde edilir.

(C) sabit pol eğrisinin IL^3e göre geodezik eğriliği k_C ile gösterilsin. (C)nin yay parametresi s_C ve birim teğet vektörü T_C olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_C = \left\| D_{T_C}T_C \right\|$$

şeklinde yazılır. (C)nin denklemi

$$\alpha_C(s_C) = C(s)$$

dir. W spacelike ise (2.3.6) dan

$$C = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B$$

dır. Her iki tarafın s_C parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_C = \cosh\varphi T - \sinh\varphi B$$

olur ve tekrar türev alınırsa,

$$D_{T_C} T_C = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B + \frac{\|W\|}{\varphi'} N \tag{4.3.13}$$

bulunur. Geodezik eğrilik tanımı dikkate alınırsa

$$k_C = \sqrt{\left| 1 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'} \right)^2 \right|} \tag{4.3.14}$$

olur. W timelike ise (2.3.8) den

$$C = \cosh\varphi T - \sinh\varphi B$$

dır. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$T_C = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B$$

olur ve tekrar türev alınırsa,

$$D_{T_C} T_C = \cosh\varphi T - \sinh\varphi B - \frac{\|W\|}{\varphi'} N \tag{4.3.15}$$

bulunur. Geodezik eğrilik tanımından

$$k_C = \sqrt{\left| -1 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'} \right)^2 \right|} \tag{4.3.16}$$

şeklinde olur. Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.3.1: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α Mannheim eğrisinin (C) sabit pol eğrisinin geodezik eğriliği

W spacelike ise

$$k_C = \sqrt{\left| 1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2 \right|},$$

W timelike ise

$$k_C = \sqrt{\left| -1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2 \right|}$$

dir.

4.4 Timelike Mannheim Eğrisinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 göre Geodezik Eğrilikleri

S_1^2 Lorentz küresi veya H_0^2 hiperbolik küreye göre $(T),(N),(B)$ küresel gösterge eğrilerinin geodezik eğriliklerini hesaplayabilmek için IL^3 deki konneksiyon D, S_1^2 deki konneksiyon $\bar{D}$, H_0^2 deki konneksiyon $\bar{\bar{D}}$, S_1^2 ve H_0^2 ın birim normal vektör alanı ξ olmak üzere

$$D_X Y = \bar{D}_X Y + \varepsilon g(S(X),Y)\xi, \qquad \varepsilon = g(\xi,\xi)$$

$$D_X Y = \bar{\bar{D}}_X Y + \varepsilon g(S(X),Y)\xi, \qquad \varepsilon = g(\xi,\xi)$$

Gauss denklemlerinden yararlanacağız. Burada S, S_1^2 ve H_0^2 ın şekil operatörü olup, buna karşılık gelen matris

$$S = I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dır, [18].

(T) teğetler göstergesinin H_0^2 daki geodezik eğriliği γ_T ile gösterilirse,

$$\gamma_T = \left\| \bar{\bar{D}}_{T_T} T_T \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_T} T_T = \bar{\bar{D}}_{T_T} T_T + \varepsilon g(S(T_T),T_T)T$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(T,T) = -1, \quad S(T_T) = -T_T, \text{ ve } \mathrm{g}(S(T_T),T_T) = -1$$

dir ve bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{\bar{D}}_{T_T} T_T = D_{T_T} T_T - T$$

olur. (4.3.3) denklemi bu son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\bar{\bar{D}}_{T_T} T_T = -\frac{\tau}{\kappa} B \tag{4.4.1}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\gamma_T = \left|\frac{\tau}{\kappa}\right|$$

olur. W spacelike ise (2.3.5) denkleminden

$$\gamma_T = \tanh\theta \tag{4.4.2}$$

ve W timelike ise (2.3.7) denkleminden

$$\gamma_T = \coth\theta \tag{4.4.3}$$

şeklinde bulunur. (N) asli normaller göstergesinin S_1^2 daki geodezik eğriliği γ_N ile gösterilirse,

$$\gamma_N = \left\|\bar{D}_{T_N} T_N\right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_N} T_N = \bar{D}_{T_N} T_N + \varepsilon g(S(T_N),T_N)N$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(N,N) = +1, \quad S(T_N) = -T_N, \text{ ve } \mathrm{g}(S(T_N),T_N) = +1$$

dir ve bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_N} T_N = D_{T_N} T_N - N$$

olur. (4.3.7) denklemi bu son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\bar{D}_{T_N} T_N = \frac{\theta'}{\|W\|}(\sinh\theta T - \cosh B) \tag{4.4.4}$$

olur ve norm alınırsa geodezik eğrilik

$$\gamma_N = \frac{\theta'}{\|W\|} \tag{4.4.5}$$

şeklinde bulunur. (B) binormaller göstergesinin S_1^2 daki geodezik eğriliği γ_B ile gösterilirse,

$$\gamma_B = \left\|\bar{D}_{T_B} T_B\right\| .$$

Gauss denkleminden

$$D_{T_B} T_B = \bar{D}_{T_B} T_B + \varepsilon g(S(T_B), T_B) B$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(B,B) = +1, \quad S(T_B) = -T_B \ \text{ ve } \ \mathrm{g}(S(T_B), T_B) = -1$$

dir ve bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_B} T_B = D_{T_B} T_B + B$$

olur. (4.3.12) denklemi bu son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\bar{D}_{T_B} T_B = \frac{\kappa}{\tau} T \tag{4.4.6}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\gamma_B = \left|\frac{\kappa}{\tau}\right|$$

olur. W spacelike ise (2.3.5) denkleminden geodezik eğrilik

$$\gamma_B = \coth\theta \tag{4.4.7}$$

ve W timelike ise (2.3.5) denkleminden geodezik eğrilik

$$\gamma_B = \tanh\theta \tag{4.4.8}$$

şeklinde bulunur. (C) sabit pol eğrisinin S_1^2 daki geodezik eğriliği γ_C ile gösterilirse,

$$\gamma_C = \left\| \bar{D}_{T_C} T_C \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_C} T_C = \bar{D}_{T_C} T_C + \varepsilon g(S(T_C), T_C) C$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(C,C) = +1, \quad S(T_C) = -T_C, \text{ ve } g(S(T_C), T_C) = -1$$

dir. Bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_C} T_C = D_{T_C} T_C - C$$

olur. W spacelike ise (4.3.13) ve (2.3.6) bağıntılarından

$$\bar{D}_{T_C} T_C = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B + \frac{\|W\|}{\varphi'} N - (\sinh\varphi T - \cosh\varphi B),$$

$$\bar{D}_{T_C} T_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} N \qquad (4.4.9)$$

olur ve norm alınırsa

$$\gamma_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} \qquad (4.4.10)$$

bulunur. W timelike ise (4.3.15) ve (2.3.8) bağıntılarından

$$\bar{D}_{T_C} T_C = \cos\varphi T - \sinh\varphi B - \frac{\|W\|}{\varphi'} N - (\cosh\varphi T - \sinh\varphi B),$$

$$\bar{D}_{T_C} T_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} N\,, \qquad (4.4.11)$$

$$\gamma_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} \qquad (4.4.12)$$

şeklinde bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç verilir:

Sonuç 4.4.1: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α Mannheim eğrisinin (C) sabit pol eğrisinin S_1^2 deki geodezik eğriliği

$$\gamma_C = \frac{\|W\|}{\theta'} .$$

4.5 Spacelike Binormalli Spacelike Mannheim Partner Eğrisinin Küresel Göstergelerinin Yay Uzunlukları

Çalışmamızın bu bölümünde α^* spacelike binormalli spacelike Mannheim partner eğrisinin $(T^*),(N^*),(B^*)$ küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin yay uzunlukları hesaplanmıştır.

(T^*) eğrisinin yay uzunluğu s_{T^*} ile gösterilirse Tanım 2.2.13 den,

$$s_{T^*} = \int_0^{s^*} \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| ds^*$$

veya

$$s_{T^*} = \int_0^{s} \left\| \frac{dT^*}{ds} \right\| ds$$

yazılır. (4.1.1) bağıntısından T^* ın türevi alınırsa

$$\frac{dT^*}{ds} = -\theta' \cosh\theta T + \theta' \sinh\theta B + (-\kappa\sinh\theta + \tau\cosh\theta)N$$

olur. W spacelike ise

$$-\kappa\sinh\theta + \tau\cosh\theta = 0$$

olduğundan

$$\frac{dT^*}{ds} = \theta'(-\cosh\theta T + \sinh\theta B)$$

olur ve norm alınırsa

$$s_{T^*} = \int_0^s |\theta'|\, ds \tag{4.5.1}$$

olur.

(N^*) eğrisinin yay uzunluğu s_{N^*} ile gösterilirse,

$$s_{N^*} = \int_0^s \left\| \frac{dN^*}{ds} \right\| ds$$

olur. (4.1.1) bağıntısından N^* ın türevi alınırsa,

$$\frac{dN^*}{ds} = \theta'(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + (-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta)N$$

olur. W spacelike ise

$$-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta = \|W\|$$

olduğundan

$$\frac{dN^*}{ds} = \theta'(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + \|W\| N$$

olur ve norm alınırsa

$$s_{N^*} = \int_0^s \sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}\, ds \tag{4.5.2}$$

bulunur. Benzer şekilde W timelike ise

$$-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta = 0$$

olduğundan

$$\frac{dN^*}{ds} = \theta'(-\sinh\theta T + \cosh\theta B)$$

olur ve

$$s_{N^*} = \int_0^s |\theta'| ds$$

bulunur.

(B^*) eğrisinin yay uzunluğu s_{B^*} ile gösterilirse,

$$s_{B^*} = \int_0^s \left\| \frac{dB^*}{ds} \right\| ds$$

dır. (4.1.1) den B^* ın türevi alınırsa,

$$\frac{dB^*}{ds} = \kappa T - \tau B$$

olur ve norm alınırsa

$$s_{B^*} = \int_0^s \|W\| ds \tag{4.5.3}$$

şeklinde bulunur.

(C^*) eğrisinin yay uzunluğu s_{C^*} ile gösterilirse,

$$s_{C^*} = \int_0^s \left\| \frac{dC^*}{ds} \right\| ds$$

veya

$$s_{C^*} = \int_0^s |(\varphi^*)'| ds \tag{4.5.4}$$

olur. Diğer yandan (2.3.9) bağıntısından

$$W^* = -\tau^* T^* + \kappa^* B^*$$

yazılır. W^* ile B^* arasındaki açı φ^* olmak üzere, (2.3.11) bağıntısına benzer olarak

$$\sin\varphi^* = \frac{\tau^*}{\|W^*\|}, \qquad \cos\varphi^* = \frac{\kappa^*}{\|W^*\|}$$

ve

$$C^* = -\sin\varphi^* T^* + \cos\varphi^* B^*$$

yazılır. Buradan

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi^* &= \frac{\tau^*}{\|W^*\|} \\ \cos\varphi^* &= \frac{\kappa^*}{\|W^*\|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\varphi^* = \frac{\tau^*}{\kappa^*}$$

olur. Türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$(\varphi^*)' = \frac{\left(\dfrac{\tau^*}{\kappa^*}\right)'}{1+\left(\dfrac{\tau^*}{\kappa^*}\right)^2}$$

bulunur. Burada κ^* ve τ^* ın yerine (4.1.9) ve (4.1.13) deki karşılıkları yazılır ve (4.2.9) dikkate alınırsa

$$(\varphi^*)' = \frac{\left(\dfrac{\|W\|}{\theta'}\right)'}{1+\left(\dfrac{\|W\|}{\theta'}\right)^2} \tag{4.5.5}$$

şeklinde bulunur. (4.5.5) ifadesi (4.5.4) de yerine yazılırsa

$$s_{C^*} = \int_0^s \left| \frac{\left(\dfrac{\|W\|}{\theta'}\right)'}{1+\left(\dfrac{\|W\|}{\theta'}\right)^2} \right| ds \tag{4.5.6}$$

olur. (4.3.14) ifadesi (4.5.5) de yerine yazılırsa

$$(\varphi^*)' = \frac{{k_C}'}{{k_C}^2} \tag{4.5.7}$$

olur. (4.5.7) ifadesi (4.5.4) de yerine yazılırsa

$$s_{C^*} = \int_0^s \left| \frac{k'_C}{k^2_C} \right| ds \qquad (4.5.8)$$

şeklinde bulunur. Böylece şu sonuçlar verilebilir:

Sonuç 4.5.1: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki $\{T^*, N^*, B^*\}$ Frenet vektörlerinin $(T^*), (N^*)$ ve (B^*) küresel gösterge eğrileri ile birim Darboux vektörünün çizdiği (C^*) sabit pol eğrisinin IL^3 e göre yay uzunlukları, sırasıyla

1) W spacelike ise

$$s_{T^*} = s_c = \int_0^s |\theta'| ds,$$

W timelike ise

$$s_{T^*} = \int_0^s \sqrt{\left| \|W\|^2 - (\theta')^2 \right|} ds,$$

2) W spacelike ise

$$s_{N^*} = \int_0^s \sqrt{\left| (\theta')^2 + \|W\|^2 \right|} ds,$$

W timelike ise

$$s_{N^*} = \int_0^s |\theta'| ds,$$

3) $$s_{B^*} = s_N = \int_0^s \|W\| ds \, ,$$

4) $$s_{C^*} = \int_0^s \left| \frac{\left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)'}{1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2} \right| ds \; .$$

Sonuç 4.5.2: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α eğrisinin geodezik eğriliği k_C olmak üzere (C^*) sabit pol eğrisinin yay uzunluğu

$$s_{C^*}=\int_0^s\left|\frac{k'_C}{k^2{}_C}\right|ds$$

dır.

4.6 Spacelike Binormalli Spacelike Mannheim Partner Eğrisinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e göre Geodezik Eğrilikleri

(T^*) eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{T^*} ile gösterilsin. (T^*) nin yay parametresi s_{T^*} ve birim teğet vektörü T_{T^*} olmak üzere,

$$k_{T^*}=\left\|D_{T_{T^*}}T_{T^*}\right\|$$

yazılır. α^* eğrisinin yay parametresi s^* ve birim teğet vektörü T^* olmak üzere, (T^*) eğrisinin denklemi

$$\alpha^*{}_{T^*}(s_{T^*}{}^*)=T^*(s)$$

dir ve bu denklemin s_{T^*} parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\alpha^*{}_{T^*}(s_{T^*})}{ds_{T^*}}=\frac{dT^*(s)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds_{T^*}}$$

olur.

$$\frac{dT^*}{ds^*}=\frac{dT^*}{ds}\frac{ds}{ds^*}$$

ifadesi yukarıda yerine yazılırsa

$$T_{T^*}=\frac{dT^*}{ds}\frac{ds}{ds_{T^*}}$$

bulunur. W spacelike ise (4.1.1) bağıntısından T^* ın türevi

$$\frac{dT^*}{ds} = \theta'(-\cosh\theta T + \sinh\theta B) \ ,$$

$$T_{T^*} = \theta'(-\cosh\theta T + \sinh\theta B)\frac{ds}{ds_{T^*}} \tag{4.6.1}$$

olur ve norm alınırsa,

$$1 = \theta' \frac{ds}{ds_{T^*}}$$

veya

$$\frac{ds}{ds_{T^*}} = \frac{1}{\theta'} \, ,$$

bulunur. Bu değer (4.6.1) de yerine yazılırsa

$$T_{T^*} = -\cosh\theta T + \sinh\theta B \tag{4.6.2}$$

olur. Tekrar türev alınırsa

$$D_{T_{T^*}} T_{T^*} = -\sinh\theta T + \cosh\theta B + \frac{\|W\|}{\theta'} N \tag{4.6.3}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$k_{T^*} = \sqrt{\left| 1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2 \right|} \tag{4.6.4}$$

olur.

(N^*) eğrisinin IL^3e göre geodezik eğriliği k_{N^*} ile gösterilsin. (N^*) nin yay parametresi s_{N^*} ve birim teğet vektörü T_{N^*} olmak üzere,

$$k_{N^*} = \left\| D_{T_{N^*}} T_{N^*} \right\|$$

yazılır. (N^*) eğrisinin denklemi

$$\alpha^*_{N^*}(s^*_{N^*}) = N^*(s)$$

dır ve bu denklemin s_{N^*} parametresine göre türev alınırsa

$$T_{N^*} = \frac{d\alpha^*_{N^*}(s_N{}^*)}{ds_N{}^*} = \frac{dN^*(s)}{ds}\frac{ds}{ds_{N^*}}$$

olur. W spacelike ise

$$\frac{dN^*}{ds} = \theta'(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + \|W\| N$$

olur ve bu değer yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$T_{N^*} = [\theta'(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + \|W\| N]\frac{ds}{ds_{N^*}} \tag{4.6.5}$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{N^*}} = \frac{1}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}},$$

olur ve buradan

$$T_{N^*} = \frac{\theta'}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}}(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + \frac{\|W\|}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} N$$

veya

$$T_{N^*} = \frac{1}{\sqrt{\left|1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}}(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + \frac{1}{\sqrt{\left|1 + \left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2\right|}} N$$

bulunur. Burada (4.3.8) ve (4.3.14) bağıntıları dikkate alınırsa

$$T_{N^*} = \frac{1}{k_C}(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + \frac{1}{k_N} N \tag{4.6.6}$$

olur. Bu ifadenin tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{N^*}}T_{N^*}=\frac{dT_{N^*}}{ds}.\frac{ds}{ds_{N^*}},$$

$$\frac{dT_{N^*}}{ds}=\left[\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)'+\left(\frac{\kappa}{k_N}\right)\right]T+\left[\left(\frac{-\kappa\sinh\theta}{k_C}\right)+\left(\frac{\tau\cosh\theta}{k_C}\right)+\left(\frac{1}{k_N}\right)'\right]N+\left[\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)'-\frac{\tau}{k_N}\right]B$$

$$\frac{dT_{N^*}}{ds}=\left[\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)'+\left(\frac{\kappa}{k_N}\right)\right]T+\left[\left(\frac{1}{k_N}\right)'\right]N+\left[\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)'-\frac{\tau}{k_N}\right]B$$

veya

$$D_{T_{N^*}}T_{N^*}=\left(\left[\frac{\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)'+\left(\frac{\kappa}{k_N}\right)}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}\right]T+\left[\frac{\left(\frac{1}{k_N}\right)'}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}\right]N+\left[\frac{\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)'-\frac{\tau}{k_N}}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}\right]B\right) \quad (4.6.7)$$

bulunur. Norm alınırsa,

$$k_{N^*}=\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)'+\left(\frac{\kappa}{k_N}\right)\right]^2+\left[\left(\frac{1}{k_N}\right)'\right]^2+\left[\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)'-\frac{\tau}{k_N}\right]^2}{(\theta')^2+\|W\|^2}} \quad (4.6.8)$$

olur. W timelike ise (4.1.1) den N^* ın türevi

$$\frac{dN^*}{ds}=\theta'(-\sinh\theta T+\cosh\theta B),$$

$$T_{N^*}=-\sinh\theta T+\cosh\theta B\ , \quad (4.6.9)$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$D_{T_{N^*}}T_{N^*}=-\cosh\theta T+\sinh\theta B-\frac{\|W\|}{\theta'}N \quad (4.6.10)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$k_{N^*} = \sqrt{\left| -1 + \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right)^2 \right|} \tag{4.6.11}$$

olur.

(B^*) eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{B^*} ile gösterilsin. (B^*) nin yay parametresi s_{B^*} ve birim teğet vektörü T_{B^*} olmak üzere,

$$k_{B^*} = \left\| D_{T_{B^*}} T_{B^*} \right\|$$

yazılır. (B^*) eğrisinin denklemi

$$\alpha^*{}_{B^*}(s^*{}_{B^*}) = B^*(s)$$

dır ve bu ifadenin s_{B^*} a göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha^*{}_{B^*}}{ds^*{}_{B^*}} = \frac{dB^*(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{B^*}} \quad ,$$

$$T_{B^*} = \tau \sinh \theta B \frac{ds}{ds_{B^*}}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{B^*}} = \frac{1}{\|W\|},$$

olur ve bu değer T_{B^*} ifadesinde yerine yazılırsa

$$T_{B^*} = \frac{\kappa}{\|W\|} T - \frac{\tau}{\|W\|} B \tag{4.6.12}$$

bulunur. W spacelike ise (4.6.12) ifadesi

$$T_{B^*} = -\cosh \theta T + \sinh \theta B$$

şekline dönüşür. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \left[\theta'(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + \|W\| N\right]\frac{1}{\|W\|},$$

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + N \tag{4.6.13}$$

olur. Norm alınırsa

$$k_{B^*} = \sqrt{1 + \left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2} \tag{4.6.14}$$

bulunur. W timelike ise (4.6.12) denklemi

$$T_{B^*} = \sinh\theta T + \cosh\theta B$$

şekline dönüşür ve bu ifadenin türevi alınırsa

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}(\cosh\theta T - \sinh\theta B) + N$$

olur. Norm alınırsa

$$k_{B^*} = \sqrt{\left|1 - \left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|} \tag{4.6.15}$$

bulunur.

(C^*) eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{C^*} ile gösterilsin. (C^*) nin yay parametresi s_{C^*} ve birim teğet vektörü T_{C^*} olmak üzere,

$$k_{C^*} = \left\| D_{T_{C^*}} T_{C^*} \right\|$$

yazılır. (C^*) eğrisinin denklemi

$$\alpha^*_{C^*}(s^*_{C^*}) = C^*(s^*)$$

dır. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha^*{}_{C^*}}{ds^*{}_{C^*}} = \frac{dC^*}{ds}\frac{ds}{ds_{C^*}}$$

olur. W^* spacelike olduğundan (2.3.11) bağıntısından

$$C^* = -\cos\varphi^* T^* + \sin\varphi^* B^*$$

olur. Buradan türev alınırsa

$$\frac{dC^*}{ds} = (\varphi^*)'\left(-\cos\varphi^* T^* + \sin\varphi^* B^*\right)$$

veya

$$T_{C^*} = (\varphi^*)'\left(-\cos\varphi^* T^* + \sin\varphi^* B^*\right)\frac{ds}{ds_{C^*}}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{C^*}} = \frac{1}{(\varphi^*)'}$$

olur. Bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$T_{C^*} = -\cos\varphi^* T^* + \sin\varphi^* B^* \tag{4.6.16}$$

bulunur. Buradan tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{C^*}} T_{C^*} = \sin\varphi^* T^* - \cos\varphi^* B^* - \frac{\|W^*\|}{(\varphi^*)'} N^* \tag{4.6.17}$$

olur. Norm alınırsa

$$k_{C^*} = \sqrt{\left|1 - \left(\frac{\|W^*\|}{(\varphi^*)'}\right)^2\right|} \tag{4.6.18}$$

olur. Diğer yandan

$$\|W^*\| = \sqrt{\left|(\tau^*)^2 + (\kappa^*)^2\right|}$$

ifadesinde κ^* ve τ^* ın yerine (4.1.9) ve (4.1.10) deki karşılıkları yazılırsa

$$\left\|W^*\right\| = \frac{\kappa}{\lambda\tau}\sqrt{\left|1+\left(\frac{\left\|W^*\right\|}{(\varphi^*)'}\right)^2\right|}$$

olur ve (4.3.9) bağıntısından

$$\left\|W^*\right\| = \frac{\kappa}{\lambda\tau}k_C \tag{4.6.19}$$

bulunur. (4.5.5) ve (4.6.19) bağıntıları dikkate alındığında

$$\frac{\left\|W^*\right\|}{(\varphi^*)'} = \frac{\kappa(k_C)^3}{\lambda\tau k_C{}'} \tag{4.6.20}$$

olur ve bu değer (4.6.18) de yerine yazılırsa

$$k_{C^*} = \sqrt{\left|1+\left(\frac{\kappa(k_C)^3}{\lambda\tau k_C{}'}\right)^2\right|}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.6.1: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α^* eğrisinin $(T^*),(N^*)$ ve (B^*) küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğrilikleri, sırasıyla,

1) $$k_{T^*} = \sqrt{\left|1+\left(\frac{\left\|W\right\|}{\theta'}\right)^2\right|}\quad ,$$

2) W spacelike ise

$$k_{N^*}=\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)'+\left(\frac{\kappa}{k_N}\right)\right]^2+\left[\left(\frac{1}{k_N}\right)'\right]^2+\left[\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)'-\frac{\tau}{k_N}\right]^2}{(\theta')^2+\|W\|^2}}$$

W timelike ise

$$k_{N^*}=\sqrt{\left|-1+\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}$$

3) W spacelike ise

$$k_{B^*}=k_N=\sqrt{1+\left(\frac{\theta'}{\|W\|}\right)^2}$$

W timelike ise

$$k_{B^*}=\sqrt{\left|1-\left(\frac{\|W\|}{\theta'}\right)^2\right|}$$

4) $$k_{C^*}=\sqrt{\left|1+\left(\frac{\kappa(k_C)^3}{\lambda\tau k_C{}'}\right)^2\right|}$$

şeklinde verilir.

4.7 Spacelike Binormalli Spacelike Mannheim Partner Eğrisinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 e göre Geodezik Eğrilikleri

S_1^2 veya H_0^2 ye göre $(T^*),(N^*),(B^*)$ eğrilerinin geodezik eğriliklerini hesaplayabilmek için yine S_1^2 ve H_0^2 deki konneksiyonları kullanıp Gauss denkleminden yararlanacağız.

(T^*) teğetler göstergesinin S_1^2 deki geodezik eğriliği γ_{T^*} ile gösterilirse,

$$\gamma_{T^*} = \left\| \bar{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_{T^*}} T_{T^*} = \bar{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} + \varepsilon g(S(T_{T^*}), T_{T^*}) T^*$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(T^*, T^*) = +1, \quad S(T_{T^*}) = -T_{T^*}, \text{ ve } \mathrm{g}(S(T_{T^*}), T_{T^*}) = +1$$

dir ve bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = D_{T_{T^*}} T_{T^*} - T^*$$

olur. (4.6.3) denklemi bu son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\bar{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = -\sinh\theta T + \cosh\theta B + \frac{\|W\|}{\theta'} N - (-\sinh\theta T + \cosh\theta N)$$

$$\bar{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = \left(\frac{\|W\|}{\theta'} \right) N \tag{4.7.1}$$

olur ve norm alınırsa

$$\gamma_{T^*} = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

bulunur. $\left(\overline{T^*} \right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{T_{T^*}} T_{T^*} = 0$$

olmalıdır. (4.7.1) bağıntısından

$$\kappa = 0, \tau = 0$$

bulunur. Bu ise α eğrisinin bir doğru olması demektir. Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.7.1: $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α Mannheim eğrisi bir doğru olduğundan partner eğrisi yoktur.

(N^{*}) asli normaller göstergesi için $H_0^{\,2}$ daki geodezik eğriliği $\gamma_{N^{*}}$ ile gösterilirse,

$$\gamma_{N^{*}} = \left\| \bar{D}_{T_{N^{*}}} T_{N^{*}} \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_{N^{*}}} T_{N^{*}} = \bar{D}_{T_{N^{*}}} T_{N^{*}} + \varepsilon g(S(T_{N^{*}}), T_{N*}) N^{*}$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(N^{*}, N^{*}) = +1, \quad S(T_{N^{*}}) = -T_{N^{*}}, \ \text{ ve } \ \mathrm{g}(S(T_{N^{*}}), T_{N^{*}}) = +1$$

dir. Bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_{N^{*}}} T_{N^{*}} = D_{T_{N^{*}}} T_{N^{*}} - N^{*}$$

olur. W spacelike ise (4.6.7) ve (4.1.1) denklemlerinden

$$\bar{D}_{T_{N^{*}}} T_{N^{*}} = \left[\frac{\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)' + \left(\frac{\kappa}{k_N}\right)}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} \right] T + \left[\frac{\left(\frac{1}{k_N}\right)'}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} \right] N + \left[\frac{\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)' - \frac{\tau}{k_N}}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} \right] B - (-\cosh\theta T + \sinh\theta B)$$

$$\bar{D}_{T_{N^{*}}} T_{N^{*}} = \left[\frac{\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)' + \left(\frac{\kappa}{k_N}\right)}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} + \cosh\theta \right] T + \left[\frac{\left(\frac{1}{k_N}\right)'}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} \right] N + \left[\frac{\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)' - \frac{\tau}{k_N}}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} - \sinh\theta \right] B \tag{4.7.2}$$

olur ve norm alınırsa

$$\gamma_{N^*}=\sqrt{\left[\frac{\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)'+\left(\frac{\kappa}{k_N}\right)}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}+\cosh\theta\right]^2+\left[\frac{\left(\frac{1}{k_N}\right)'}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}\right]^2+\left[\frac{\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)'-\frac{\tau}{k_N}}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}-\sinh\theta\right]^2}$$

bulunur. W timelike ise (4.6.10) bağıntısından

$$\overline{D}_{T_{N^*}}T_{N^*}=-\frac{\|W\|}{\theta'}N$$

olur ve norm alınırsa

$$\gamma_{N^*}=\frac{\|W\|}{\theta'}$$

bulunur. $\left(\overline{N^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\overline{D}_{T_{N^*}}T_{N^*}=0$$

olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)'+\left(\frac{\kappa}{k_N}\right)}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}+\cosh\theta=0,\\[2ex] \dfrac{\left(\frac{1}{k_N}\right)'}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}=0,\\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)'-\frac{\tau}{k_N}}{\sqrt{\left|(\theta')^2+\|W\|^2\right|}}-\sinh\theta=0\end{cases}$$

olur. Bu ifade hiçbir zaman sıfıra eşit olamaz. O halde şu sonuç verilebilir:

Sonuç 4.7.2: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α^* Mannheim partner eğrisinin $\left(N^*\right)$ asli normaller göstergesi hiperbolik küre üzerinde olacak şekilde bir α^* Mannheim partner eğrisi yoktur.

(B^*) binormaller göstergesi için S_1^2 daki geodezik eğriliği γ_{B^*} ile gösterilirse,

$$\gamma_{B^*} = \left\| \bar{\bar{D}}_{T_{B^*}} T_{B^*} \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \bar{\bar{D}}_{T_{B^*}} T_{B^*} + \varepsilon g(S(T_{B^*}), T_{B*}) B^*$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(B^*, B^*) = -1, \quad S(T_{B^*}) = -T_{B^*}, \text{ ve } \mathrm{g}(S(T_{B^*}), T_{B^*}) = -1$$

dir. Bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{\bar{D}}_{T_{B^*}} T_{B^*} = D_{T_{B^*}} T_{B^*} - B^*$$

olur. W spacelike ise $B^* = N$ olduğu dikkate alınırsa (4.6.13) denkleminden

$$\bar{\bar{D}}_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) + N - N,$$

$$\bar{\bar{D}}_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}(-\sinh\theta T + \cosh\theta B) \tag{4.7.3}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\gamma_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}$$

olur. Benzer şekilde W timelike ise

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}(\cosh\theta T - \sinh\theta B) + N$$

olur ve norm alınırsa

$$\gamma_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}$$

bulunur. $\left(\overline{B^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\bar{\bar{\bar{D}}}_{T_{B^*}} T_{B^*} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $(4.7.3)$ bağıntısından

$$\begin{cases} \dfrac{-\theta' \sinh\theta}{\|W\|} = 0, \\ \\ \dfrac{\theta' \cosh\theta}{\|W\|} = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Bu ise $\theta' = 0$ demektir. Bu durumda (4.1.8) bağıntısından $\kappa^* = 0$ ve $\tau^* = 0$ olur. (4.1.10) bağıntısından da $\kappa = 0$ ve $\tau = 0$ bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.7.3: (α, α^*) timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α Mannheim eğrisi bir doğru olduğundan partner eğrisi yoktur.

(C^*) eğrisinin S_1^2 deki geodezik eğriliği γ_{C^*} ile gösterilirse,

$$\gamma_{C^*} = \left\| \bar{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_{C^*}} T_{C^*} = \bar{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} + \varepsilon g(S(T_{C^*}), T_{C^*}) C^*$$

yazılabilir. Burada

$$\varepsilon = g(C^*, C^*) = +1, \quad S(T_{C^*}) = -T_{C^*}, \ \text{ ve } \ \mathrm{g}(S(T_{C^*}), T_{C^*}) = -1$$

dir. Bu değerler yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = D_{T_{C^*}} T_{C^*} + C^*$$

olur. Diğer yandan W^* spacelike olduğundan

$$C^* = -\sin\varphi^* T^* + \cos\varphi^* B^*$$

olur. C^* ın bu değeri ve (4.6.17) ifadesi dikkate alınırsa,

$$\bar{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = \sin\varphi^* T^* - \cos\varphi^* B^* - \frac{\|W^*\|}{(\varphi^*)'} N^* + C^*$$

veya

$$\bar{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = -\frac{\|W^*\|}{(\varphi^*)'} N^* \tag{4.7.4}$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\gamma_{C^*} = \frac{\|W^*\|}{(\varphi^*)'}$$

olur. Burada (4.6.20) dikkate alınırsa geodezik eğrilik

$$\gamma_{C^*} = \frac{\kappa (k_C)^3}{\lambda \tau k_C{}'}$$

şekline dönüşür. $\left(\overline{C^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = 0$$

olmalıdır. $(4.7.4)$ bağıntısından

$$\kappa^* = \tau^* = 0$$

bulunur ve böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.7.4: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α Mannheim eğrisi bir doğru olduğundan partner eğrisi yoktur.

Sonuç 4.7.5: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike-spacelike Mannheim eğri çifti olsun. α^* eğrisinin $(T^*),(N^*)$ ve (B^*) küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin S_1^2 veya H_0^2 ye göre geodezik eğrilikleri, sırasıyla

1) $$\gamma_{T^*} = \gamma_C = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

2) W spacelike ise

$$\gamma_{N^*} = \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{-\sinh\theta}{k_C}\right)' + \left(\frac{\kappa}{k_N}\right)}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} + \cosh\theta\right]^2 + \left[\frac{\left(\frac{1}{k_N}\right)'}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}}\right]^2 + \left[\frac{\left(\frac{\cosh\theta}{k_C}\right)' - \frac{\tau}{k_N}}{\sqrt{\left|(\theta')^2 + \|W\|^2\right|}} - \sinh\theta\right]^2}$$

W timelike ise

$$\gamma_{N^*} = \frac{\|W\|}{\theta'}$$

3) $$\gamma_{B^*} = \frac{\theta'}{\|W\|}$$

4) $$\gamma_{C^*} = \frac{\kappa (k_C)^3}{\lambda \tau k_C{}'}$$

şeklinde verilir.

5. TARTIŞMA

Bu tezde ilk olarak timelike Mannheim eğrisi ile spacelike binormalli spacelike Mannheim partner eğri çifti alınarak önce Mannheim partner eğrisinin Darboux vektörü ile Mannheim eğrisinin teğet vektörünün lineer bağımlı olduğu gösterildi.

İkinci olarak Mannheim partner eğrisinin $\left\{T^{*}, N^{*}, B^{*}\right\}$ Frenet vektörlerinin ve bu vektörlere bağlı olarak oluşan C^{*} birim vektörünün Lorentzian veya Hiperbolik küre üzerinde meydana getirdikleri $\left(T^{*}\right),\left(N^{*}\right),\left(B^{*}\right)$ küresel gösterge eğrileri ile $\left(C^{*}\right)$ sabit pol eğrisinin IL^3e ve S_1^2 veya H_0^2 ye göre yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri hesaplandı ve bu iki eğrinin yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulundu.

Son olarak da partner eğrisinin küresel göstergelerinin tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartı Mannheim eğrisine bağlı olarak ifade edildi.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma Mannheim eğrisi timelike, partner eğrisi spacelike alınarak yapılmıştır. Benzer şekilde $\alpha : I \to IL^3$ ve $\alpha^* : I \to IL^3$ Mannheim eğri çiftleri sırasıyla spacelike-spacelike ve timelike-timelike alınarak yapılabilir. Ayrıca bu çalışmanın Dual ve Dual-Lorentz uzaylarında da karşılıkları bulunabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] **Çalışkan M., Sivridağ A.İ. , Hacısalihoğlu H. H.,** Some Characterizations For The Natural Lift Curves And The Geodesic Sprays**,** Ankara Üniv., Fen Fak.,Commun., cilt 33, pp.235-242 ,1984.

[2] **Sivridağ A.İ., Çalışkan M.,** On The M-Integral Curves And M-Geodesic Sprays **,** Erciyes Üniv., Fen Bilimleri Dergisi, cilt 7, sayı 1-2, pp.1283-1287, 1991.

[3] **Orbay K. and Kasap E.,** On Mannheim partner curves in E^3**,** International Journal of Physical Sciences vol. 4 (5), pp. 261-264, 2009.

[4] **Wang F.,and Liu, H**., Mannheim Partner Curves in 3-Space**,** Proceedings of The Eleventh International Workshop on Diff. Geom. pp.25-31, 2007.

[5] **Liu, H. and Wang, F.,** Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, vol. 88, no. 1-2, pp. 120-126(7), 2008.

[6] **Bilici M., Çalışkan M. and Aydemir İ.,** The Natural Lift Curves And The Geodezic Sprays For The Spherical Indicatrices Of The Pair Of Evolute-Involute Curves**,** International Journal of App. Math. vol.11, pp.415-420, 2002.

[7] **Ergun E. and Calışkan M.,** On the $\bar{M}$ -Integral Curves and $\bar{M}$ -Geodesic Sprays In Minkowski 3-Space, Int.J.Contemp. Math. Sci. vol.6., no.39, pp. 1935-1939**,** 2011.

[8] **Şenyurt S. and Bektaş Ö.,** Timelike-Spacelike Mannheim Partner Curves in E^3, International Journal of the Physical Sciences, vol.7(1),pp 100-106, 2012.

[9] **Hacısalioğlu, H.H. ,**Diferensiyel Geometri**,** İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. no.7, Malatya, 1983.

[10] **Sabuncuoğlu, A.,** "Diferansiyel Geometri", Nobel Yayın Dağıtım, Ankara,2006.

[11] **Akutagawa, K., and Nishikawa S.,**The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-space, Töhoko Math., J. 42, 67-82, 1990.

[12] **Fenchel, W.,** On The Differential Geometry of Closed Space Curves, Bull. Amer. Math. Soc. 57, 44-54, 1951.

[13] **O'neill, B.,** Semi Riemann Geometry, Academic Press, New York, London, 468p., 1983.

[14] **Ratcliffe, J. G.,** Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 736, 1994.

[15] **Turgut A.,** 3- Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 96p., 1995.

[16] **Uğurlu, H.H.,** On the Geometry of Timelike Surfaces, Commun. Fac. Sci. Ank. Series A1 vol.46, pp.211-223, 1997.

[17] **Woestijne, V.D.I.,** Minimal Surfaces of the 3-diemensional Minkowski space. Proc. Congres "Geometrie differentielle et aplications" Avignon (30 May 1988), Wold Scientific Publishing. Singapore. 344-369, 1990.

[18] **Bilici, M.,** Timelike veya Spacelike İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri Üzerine**,** Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Samsun, 2009.

[19] **Şenyurt S.,** Natural Lifts and The Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Mannheim Partner Curves in E^3, International Journal of the Physical Sciences**,** vol.(7),no.16, pp. 2414-2421, 2012.

[20] **Azak, A. Zeynep.,** Üç Boyutlu Lorentz uzayında Timelike Mannheim Eğri Çifti Üzerine , Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, (11), 35-45, 2009.

[21] **Blaschke, W.,** "Differential Geometrie and Geometrischke Grundlagen ven Einstains Relativitasttheorie Dover", New York, 1945.

[22] **Burke J.F.,** "Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves", Mathematics Magazine, vol.34, no.1., pp. 60-62, 1960.

[23] **Görgülü, E., Özdamar, E.,**"A generalizations of the Bertrand curves as general inclined curves in E^n ", Communications de la Fac. Sci. Uni. Ankara, Series A1, pp. 53-60, 1986.

[24] **Izumiya, S., Takeuchi, N., "**Special curves and Ruled surfaces", Beitrage zur Algebra und Geometrie Contrributions to Algebra and Geometry, vol.44, no.1, 202-212, 2003.

[25] **Turgut, A., Esin, E.,** Involüte- Evolüte Curve Couples of Higher Order in IR^n and Their Horizontal Lift in TIR^n, Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Series A1, vol.41, no.3,pp. 125-130, 1992.

[26] **Hacısalioğlu, H.H., Sabuncuoğlu A.,** Diferensiyel Geometri**,** MEB. Basımevi, İstanbul, 1983.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:** Selma DEMET
Doğum Yeri	**:** Gümüşhane
Doğum Tarihi	**:** 01.01.1988
Medeni Hali	**:** Bekâr
Bildiği Yabancı Dil	**:** İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Dil)

Lise	**:** Ali Fuat Kadirbeyoğlu Anadolu Lisesi - 2006
Lisans	**:** Ordu Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,2006-2010
Yüksek Lisans	: Ordu Üniversitesi, 2010-2012

İletişim Bilgileri

Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi ORDU/Merkez

selma_demet_@hotmail.com