MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİN (İNVERSİNİN) CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

YALÇIN ARMAĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİN (İNVERSİNİN) CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

YALÇIN ARMAĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

Ordu - 2011

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 03/08/2011 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../2011

Doç. Dr. Latif KELEBEKLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİN (İNVERSİNİN) CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

ÖZET

Bu tez beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş inversler incelenmiş ve bir algoritma verilerek örneklerle desteklenmiştir. Dördüncü bölümde yansımalı genelleştirilmiş invers kavramı verilmiş ve yansımalı genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasında rank formülleri kullanılmıştır. Ayrıca iki matrisin toplamının ve çarpımının yansımalı genelleştirilmiş inverslerinin hesaplanması yöntemleri verilmiştir. Son bölümde ise Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversler ele alınmıştır. Bu bölümde öncelikle Moore–Penrose inversin varlığı ve bir takım özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca matris çarpımının Moore–Penrose inverslerinin karakterizasyonu verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Singüler Matris, Nonsingüler Matris, Bir Matrisin Rankı, Determinant, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Yansımalı Genelleştirilmiş İnvers, Moore–Penrose Tipi Genelleştirilmiş İnvers, İki Matrisin Toplamının ve Çarpımının Genelleştirilmiş İnversi.

ON ALGEBRIC PROPERTIES OF GENERALIZED INVERSE OF MATRICES

ABSTRACT

This thesis consist of five chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems in this thesis stated and proved. In the third chapter, generalized inverses are considered, algorithm is given and improved with examples. In the fourth chapter, reflexive generalized inverses are studied and some rank formulae are used to calculate the reflexive generalized inverses. Also, it is given the methods of calculation of reflexive generalized inverses of sum and product of two matrices. In the last chapter, Moore–Penrose generalized inverses studied. The Moore–Penrose inverses are given in the last chapter. Firstly the existance of Moore–Penrose invers and some properties of it are obtained. Finally characterization of Moore–Penrose inverses of matrix product is given.

Key Words: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Nonsingular Matrix, Rank of a Matrix, Determinant, Inverse of a Matrix, Generalized Inverse, Reflexive Generalized Inverse, Moore–Penrose Generalized Inverse, Generalized Inverse of Sum and Product of Two Matrices.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında her türlü yardımını esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek saylayarak bizleri cesaretlendiren danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN' e ve tez çalışmalarım esnasında bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT hocama çok teşekkür ederim. Lisansüstü eğitimim sırasında ders aldığım ve genelleştirilmiş inversleri bana sevdiren Sayın Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR (Sakarya Üniversitesi) hocama ve ayrıca lisans eğitimim sırasında ve sonrasında yoğun ilgisini gördüğüm Sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin DEMİR (Amasya Üniversitesi) hocama teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım süresince daima yanımda olan ve desteklerini benden hiç esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris
A^{T}	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert A \rvert$	: A matrisinin determinantı
Ek(A)	: A matrisinin ek matrisi
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{N}(A)$	: A marisinin null (sıfır) uzayı
$\mathcal{R}(A)$	: A marisinin ranj (sütun) uzayı
$P_{(\mathcal{R}(A))}$	: A matrisinin $\mathcal{R}(A)$ sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı (izdüşümü)
A^- veya $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
A_0 veya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$A^\dagger$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
X_L^-	: $X_L^-.X = I$ şartını sağlayan X matrisinin bir sol inversi
X_R^-	: $X.X_R^- = I$ şartını sağlayan X matrisinin bir sağ inversi

1. GİRİŞ

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda her hangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao(1961, 1965a, 1965b, 1966, 1967)' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), "Varyans Analizi" adlı ders notlarında g–inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir.1967 yılında bir yayınında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1: a. $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun.

$f: A \longrightarrow \mathbb{K}$

fonksiyonu

$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir **matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her $(i, j),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$**–yinci bileşeni** denir.

b. $m \times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

c. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her (i, j) için

$a_{ij} = b_{ij},\ 1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise bu iki matrise **eşit matrisler** denir.

d. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine **sıfır matris** denir.

e. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B **matrislerinin toplamı**, (i,j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$+ \colon \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A,B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

f. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$. \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$$(c,A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

g. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B **matrislerinin çarpımı** $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$. \colon \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A,B) \longrightarrow A.B = C$

$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}], \; 1 \le i \le m, \; 1 \le j \le n$

şeklindedir, yani

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.2: a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir **reel matris** denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir **kompleks matris** denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.3: a. Bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine **kare matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$elemanlarına **köşegen (esas köşegen) elemanları** denir.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ ise bu matrise **köşegen matris** denir ve $A =$ Köş$\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} =$ k, k $\in \mathbb{K}$ ise bu matrise **skaler matris** denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise **birim matris** denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$ matrisine A matrisinin **transpozu (transpoze matrisi)** denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$(A+B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine **simetrik matris** denir.

g. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere **değişmeli (komutatif) matrisler** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.4: a. $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2,\ldots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2,\ldots n\}$ kümesinin bir $\boldsymbol{\sigma}$ **permütasyonu** denir. Böyle bir permütasyon

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \ldots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya **çift** veya **tek permütasyon** denir. o halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

b. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$$

şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin **determinantı** $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani

$$|A| = \sum_{\sigma}(sgn\sigma)a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n}(sgn\sigma)a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir.

$A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$

olur.

d. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

n > 2 için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ şeklinde tanımlanan **minörü**, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

f. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen **kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı)**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

g. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|M_{ik}| \quad (2.4)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|M_{ik}| \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, A matrisinin determinantının i–yinci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j–yinci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise A matrisine **singüler (tekil) matris**, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine **nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris** denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.5: a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

şeklinde tanımlanan matrise ***A* matrisinin ek matrisi** denir. Buna göre

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine ***A* matrisinin inversi** denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1: Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|I_n \tag{2.6}$$

ile verilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: $A.\mathrm{Ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde

$$\mathrm{Ek}(A).A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A|I_n$$

bulunur.

Teorem 2.2: Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı A.Ek$(A) = |A|I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında

$$(A^{-1}A).\mathrm{Ek}(A) = A^{-1}|A|I \implies \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}I \implies \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A)$$

elde edilir.

Teorem 2.3: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris ve B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere $AB = AC$ ise $B = C$ olur. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: $AB = AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla

$A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.4: **a.** Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dır.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir. (Branson R., 1999)

İspat: **a.** B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir . Ayrıca $I^T = I$ olduğundan

$I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$

olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.6: a. Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine **idempotent matris** denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin **eşleniği (eş matrisi)** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine **hermitian matris** denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine **normal matris** denir.

e. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine **birimsel (unitary) matris** denir.

f. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine **ortogonal (dik) matris** denir.

g. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^T A x > 0$ ($x^T A x \geq 0$) ise, A matrisine **Pozitif Tanımlı (Pozitif Yarı Tanımlı) Matris** denir.

h. $A, n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir **özdeğeri**, sıfır olmayan x vektörüne de A matrisinin bir **özvektörü** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.5: A ve B uygun matrisler olmak üzere

a. $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

b. $(A^*)^* = A$.

c. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

d. $(AB)^* = B^* A^*$.

eşitlikleri sağlanır. (Branson R., 1999)

İspat: a. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde

$$\overline{A} = [\overline{a_{ij}}] \quad \text{ve} \quad \left(\overline{A}\right)^T = [\overline{a_{ji}}]$$

olur. Diğer taraftan

$$A^T = [a_{ji}] \quad \text{ve} \quad \overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$$

olduğundan

$$\overline{(A^T)} = \left(\overline{A}\right)^T$$

olduğu görülür.

b. $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olduğundan

$$(A^*)^* = \left(\overline{\left(\overline{A}\right)^T}\right)^T = (A^T)^T = A$$

elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre

$$(A + B)^* = \left(\overline{A + B}\right)^T = \left(\overline{A} + \overline{B}\right)^T = \left(\overline{A}\right)^T + \left(\overline{B}\right)^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^T = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^T = \left(\overline{B}\right)^T\left(\overline{A}\right)^T = B^*A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.6: Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için

$$Ax = \lambda x \;\text{ ve }\; \langle Ax, x\rangle \geq 0$$

bağıntıları vardır. O halde

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir. (Lanchester, P., 1969)

Tanım 2.7: a. $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımsızdır** denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımlıdır** denir.

b. A matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin **satır rankı**, A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin **sütun rankı** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.7: Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez , Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.8: $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır. (Branson R., 1999)

İspat: $AX = 0$ sistemi

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0 \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunudur ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi

$$x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_n B_n = 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a , B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir. (Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \dots, d_n$ vardır ki

$$d_1 B_1 + d_2 B_2 + \cdots + d_a B_a = 0$$

olur. Buradan

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a + 0B_{a+1} + \cdots + 0B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak

$$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \dots \quad x_a = d_a \quad x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden

$$d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_aA_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \dots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \dots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.9: Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat: A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.10: Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir. (Branson R., 1999)

İspat: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.7 ve Teorem 2.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_r \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \cdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer

$$A_{r+1} = d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_rA_r$$

ise o zaman $[d_1, d_2, \dots, d_r]$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, her hangi bir n boyutlu x vektörü için

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TCx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.8' den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani

$$c \le r \qquad (2.10)$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani

$$r \le c \qquad (2.11)$$

olur. (2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.8 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve rank(A) veya $r(A)$ şeklinde gösterilir. (Branson R., 1999)

Teorem 2.11: A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.10' dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.9: $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine **Nonsingüler (Tekil Olmayan) Matris** denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine **Singüler (Tekil) Matris** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.10: **a.** $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$

şeklinde tanımlanan kümeye A marisinin **null (sıfır) uzayı** denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin **ranj (sütun) uzayı** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.12: Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere

a. $m = n = r \Rightarrow PAQ = I$.

b. $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I\,, 0]$.

c. $m > r,\ n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (2.12)

İspat: Lancaster, P., (1969)

Teorem 2.13: Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani

$r(AB) \leq \min\{r(A)\,,\ r(B)\}$ (2.13)

dir. (Lancaster, P., 1969)

İspat: AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİN İNCELENMESİ

3.1 Giriş

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahipse A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla

$$AX = B \tag{3.1}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}$B şeklindedir. Ayrıca

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (3.1) sisteminin bir çözümü olabilir.

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^{+} veya $A^{\dagger}$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^{*} = AG$,

(iv) $(GA)^{*} = GA$. (3.2)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa bu G matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^{-} veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

3.2 Bir Matrisin Genelleştirilmiş İnversi İçin Bir Algoritma

Moore–Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan, yani

$$AGA = A \tag{3.3}$$

olacak şekildeki G matrisine A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma 3.1: $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ r ranklı herhangi bir matris olsun.

1. Adım: r ranklı A matrisinde, M ile gösterilen $r \times r$ tipinde nonsingüler her hangi bir alt matrisi seçilir.

2. Adım: M alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde M alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(M^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 3.1: Algoritma 3.1 3×3 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulansın. A matrisi singüler matristir. Bu yüzden tam ranklı değildir. A matrisinin rankı 2 dir.

1. Adım: A matrisinin 2×2 tipinde bir nonsingüler

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|M| = 4 - 2 = 2 \neq 0$ olduğundan M^{-1} mevcut olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = 1/2.\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(M^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları M alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece

$$\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Verilen A matrisinin başka bir M alt matrisini seçerek, seçilen bu yeni M alt matrisine Algoritma 3.1 uygulansın.

1. Adım: A matrisinin rankı 2 olduğundan M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|M| = 6 - 4 = 2 \neq 0$ olduğundan

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = 1/2.\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.1: Yukarıdaki iki seçim, bir matrisin g–inversinin tek olmadığını gösterir. Bu nedenle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 3.2: Algoritma 3.1 4×4 tipindeki

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 12 \\ 9 & 13 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulansın. B matrisi singüler bir matris olup, rankı 2 dir.

1. Adım: M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|M| = 21 - 14 = 7 \neq 0$ olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = 1/7 \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/7 \\ -1 & 3/7 \end{bmatrix}$$

ve

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2/7 & 3/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

5. Adım: Bulunan bu matrisin transpozu alınarak elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2/7 & 0 \\ 0 & -1 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi B matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$BG = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 12 \\ 9 & 13 & 14 & 16 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2/7 & 0 \\ 0 & -1 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$BGB = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 12 \\ 9 & 13 & 14 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 12 \\ 9 & 13 & 14 & 16 \end{bmatrix} = B$$

olduğu görülür. B matrisinden 2 ranklı diğer M alt matrisleri seçilerek başka g–inversler de bulunabilir.

Örnek 3.3: 4×4 tipindeki

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi alındığında $r(C) = 3$ tür. Şimdi Algoritma 3.1 bu C matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım:

$$|M| = 1.(-1)^{1+1}.A_{11} + 2.(-1)^{1+2}.A_{12} + 3.(-1)^{1+3}.A_{13}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 3 + 12 - 18 = -3 \neq 0$$

ve

$$\text{Ek}(M) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -(-6) & -6 \\ 0 & -9 & -(-6) \\ -1 & -(-2) & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \\ -6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = 1/-3\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \\ -6 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/3 \\ -2 & 3 & -2/3 \\ 2 & -2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

ve

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Buradan

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/3 & 0 \\ -2 & 3 & -2/3 & 0 \\ 2 & -2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bulunan bu G matrisi C matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$CG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/3 & 0 \\ -2 & 3 & -2/3 & 0 \\ 2 & -2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$CGC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = C$$

olduğu görülür.

Örnek 3.4: 3×4 tipindeki

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. D matrisinin rankı 3 tür. Algoritma 3.1 D matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım:

$$|M| = 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 25$$

ve

$$\text{Ek}(M) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 10 & -15 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 5 & -15 & 10 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = 1/25.\begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 5 & -15 & 10 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

ve buradan da

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & -3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi *D* matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$DG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DGD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür.

Örnek 3.5: 3×4 tipindeki

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. E matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 3.1 E matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım: $|M| = 6 - 4 = 2 \neq 0$ olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = 1/2 . \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{bmatrix} 3/2 & -2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$EG = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 10 & 18 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$EGE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 10 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 10 & 18 \end{bmatrix} = E$$

olduğu görülür.

Örnek 3.6: 4×3 tipindeki

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi verilmiş olsun. F matrisinin rankı 3 tür. Algoritma 3.1 F matrisine uygulansın.

1. Adım: M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak alınsın.

2. Adım: $|M| = 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8$

ve

$$\text{Ek}(M) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 12 & -14 \\ 0 & -4 & 8 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 12 & -4 & 0 \\ -14 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

olup

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}.\text{Ek}(M) = 1/8 . \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 12 & -4 & 0 \\ -14 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1/4 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ -7/4 & 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(M^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/2 & -7/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 3/2 & -7/4 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -7/4 & 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

matrisi F matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$FG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -7/4 & 1 & -1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -33/4 & 11/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup

$$FGF = \begin{bmatrix} 0 & -33/4 & 11/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = F$$

olduğu görülür.

Algoritma 3.1 rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 3.2:

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı her hangi bir elemanı M olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bulunan bu sonuç A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 3.7:

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi verilmiş olsun. H matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 3.2 H matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [3]$ alınsın.

2. Adım: $M^{-1} = [1/3]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi H matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$HG = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$HGH = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = H$$

olur. H matrisinin diğer g–inversleri $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Örnek 3.8:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak alınsın. K matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 3.2 K matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [4]$ alınsın.

2. Adım: $M^{-1} = [1/4]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi K matrisinin bir g–inversidir.

Gerçekten

$$KG = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$KGK = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = K$$

olur.

Örnek 3.9: 3×4 tipindeki

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

matrisi alınsın. L dikdörtgen matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 3.2 L matrisine uygulansın.

1. Adım: $M = [16]$ seçilsin.

2. Adım: $M^{-1} = [1/16]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi L matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$LG = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/4 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$LGL = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{bmatrix} = L$$

olur. L matrisi 3×4 tipinde olduğu için 3.4 = 12 tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 3.2: Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin m.n tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin

1–ncisi; $\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

… … … … … … … … … … … …

(m.n)–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}$

şeklinde m.n tane g–inversi bulunabilir.

4. YANSIMALI GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİN İNCELENMESİ

4.1. Yansımalı Genelleştirilmiş İnvers Hesabında Rank Formüllerinin Kullanılması

A_0A ve AA_0 matrislerinin sırasıyla $\mathcal{R}(A_0)$ ve $\mathcal{R}(A)$ üzerinde izdüşümler olduğu ve $A: E \to F$ ve A_0, A matrisinin bir yansımalı g–inversi olmak üzere

$E = \mathcal{R}(A_0) \oplus \mathcal{N}(A),$

$F = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A_0),$

$\mathcal{R}(A_0A) = \mathcal{R}(A_0),$

$\mathcal{N}(A_0A) = \mathcal{N}(A),$

$\mathcal{R}(AA_0) = \mathcal{R}(A),$

$\mathcal{N}(AA_0) = \mathcal{N}(A_0)$

olduğu bilinmektdir.

İki matrisin toplamının g–inversini bulmak için aşağıdaki lemmalar kullanılır.

Lemma 4.1: A ve B $m \times n$ tipinde iki matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

a. $r(A+B) = r(A) + r(B),$

b. $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\},$

$\mathcal{R}(A^t) \cap \mathcal{R}(B^t) = \{0\}.$

İspat: $r(A+B) = r(A) + r(B)$ eşitliği sağlansın. $r(A) = r$, $r(B) = s$ olarak verilsin. $A = XY$ ve $B = UV$, A ve B matrislerinin rank parçalanışları olsun.

$X = [x_1, x_2, \ldots, x_r]$, $U = [u_1, u_2, \ldots, u_s]$ alınsın. Bu durumda $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ve $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ sırasıyla $\mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}(B)$ uzaylarının bazları olacaktır. O halde

$$A + B = [X, U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$r(A + B) \leq r([X, U]) \leq r + s = r(A) + r(B) = r(X) + r(U)$$

elde edilir. Öte yandan

$$r(A + B) = r(A) + r(B)$$

iken

$$r[X, U] = r(X) + r(U) = r + s$$

elde edilir. Bu sebeple $x_1, x_2, \ldots, x_r, u_1, u_2, \ldots, u_s$ vektörler kümesi lineer bağımsızdır.

$v \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$ olsun. Bu takdirde

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_r x_r = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots\ldots + \beta_s u_s$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ vardır. Buradan

$$0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r x_r + (-\beta_1)u_1 + (-\beta_2)u_2 + \ldots + (-\beta_s)u_s$$

yazılabilir. $x_1, x_2, \ldots, x_r, u_1, u_2, \ldots, u_s$ vektörler kümesi lineer bağımsız olduğundan

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_r = \beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_s = 0$$

elde edilir ve bu sebeple $v = 0$ olur. Öte yandan

$$r(A^T) + r(B^T) = r(A) + r(B) = r(A + B) = r[(A + B)^T] = r(A^T + B^T)$$

yazılabilir. Bu durumda önceki sonuç uygulandığında $\mathcal{R}(A^t) \cap \mathcal{R}(B^t) = \{0\}$ elde edilir.

Tersine olarak (b) şartının sağlandığı varsayılsın. $A = XY$, $B = UV$, A ve B matrislerinin rank parçalanışları olduğundan

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(X) \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(U)$$

elde edilir. Bu takdirde

$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(U) = \{0\}$ ve $\mathcal{R}(Y) \cap \mathcal{R}(V) = \{0\}$

olur. Dolayısıyla (4.1) bağıntısı $A + B$ matrisinin bir rank parçalanışı olup

$r(A + B) = r[X, U] = r[X] + r[U] = r(A) + r(B)$

olduğu görülür.

Hatırlatma 4.1: A ve B matrisleri Lemma 4.1'deki gibi olsun. Eğer

$r(A + B) = r(A) + r(B)$

ise (4.1) bağıntısı $A + B$ matrisinin rank parçalanışıdır.

Lemma 4.2: $r(A + B) = r(A) + r(B)$ olan $m \times n$ tipinde iki matris verilsin. Bu takdirde

a. $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ olacak şekilde nonsingüler iki P ve Q matrisi vardır.

b. $A + B$ matrisinin her bir g–inversi hem A matrisinin, hem de B matrisinin bir g–inversidir.

İspat: a. Genellemeyi bozmaksızın $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğu kabul edilsin. B matrisinin rank parçalanışı $B = UV$ şeklinde verilsin. Ayrıca B matrisi U_1 ve V_1 sırasıyla $r \times s$ ve $s \times r$ tipinde matrisler olmak üzere

$$B = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} [\, V_1 \,, V_2] \tag{4.2}$$

formunda yazılsın.

i) Önce $r(U_2) = s = r(V_2)$ olduğu ispatlanacaktır. Eğer $r(U_2) < s$ ise, $U_2 X = 0$ olacak şekilde, $X \in \mathbb{C}_1^n$, $X \neq 0$ vardır. O halde $B = UV$ olduğundan

$$(BV_R^-)X = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} U_1 X \\ U_2 X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(B) \tag{4.3}$$

ve

$$AX = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} X \in \mathcal{R}(A)$$

elde edilir. Burada X_R^- matrisi, $X.X_R^- = I$ şartını sağlayan X matrisinin bir sağ inversi olarak adlandırılır. Bu nedenle

$$\begin{bmatrix} U_1X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} U_1X \in \mathcal{R}(A) \tag{4.4}$$

olur. (4.3) ve (4.4) bağıntılarından

$$\begin{bmatrix} U_1X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} \in \left(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) \right)$$

yazılabilir. $r(A+B) = r(A) + r(B)$ olduğundan Lemma 4.1' i kullanarak

$$\begin{bmatrix} U_1X \\ 0_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir ki bu da $UX = 0$ anlamına gelir.

U matrisi tam ranklı olduğundan $X = 0$ elde edilir ki bu hipotezle çelişir. O halde $r(U_2) = s$ olup $U_1 = MU_2$ olacak şekilde bir M matrisi vardır.

ii) $B = UV$ olduğundan $V = U_L^- B$ ve dolayısıyla $B^t(U_L^-)^t = V^t$ elde edilir. Burada X_L^- matrisi $X_L^-.X = I$ şartını sağlayan X matrisinin bir sol inversi olarak adlandırılır.

Aynı metot ile önceki ispat ve Lemma 4.1'in 2. sonucundan yararlanarak $r(V_2) = s$ olduğu gösterilebilir.

$V_1 = V_2N$ olsun. U_1 ve V_1 değerlerini (4.2) bağıntısında yerine yazarak

$$B = \begin{bmatrix} MU_2 \\ U_2 \end{bmatrix} [V_2N\,, V_2] = \begin{bmatrix} MU_2V_2N & MU_2V_2 \\ U_2V_2N & U_2V_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

S ve T matrisleri $B = S\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}T$ olacak şekilde iki matris olsun. Bu takdirde

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12}Y \\ 0 & S_{22}Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{12}YT_{21} & S_{12}YT_{22} \\ S_{22}YT_{21} & S_{22}YT_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} MU_2V_2N & MU_2V_2 \\ U_2V_2N & U_2V_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu durum

$Y = U_2V_2$,

$S_{11} = I_r$, $\quad S_{12} = M$, $\quad S_{21} = 0$, $\quad S_{22} = I_{m-r}$,

$T_{11} = I_r$, $\quad T_{12} = 0$, $\quad T_{21} = N$, $\quad T_{22} = I_{n-r}$

almak için yeterlidir. O halde

$$S = \begin{pmatrix} I_r & M \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \text{ ve } T = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ N & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

nonsingüler matrisler olup P ve Q matrisleri

$$P = S^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & -M \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix} \text{ ve } Q = T^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -N & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

şeklinde alınırsa

$$PAQ = S^{-1}AT^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = S^{-1}BT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

b. A, B ve $A + B$ matrisleri Lemma 4.1'in ispatında verildiği gibi olsun. Bu takdirde $A + B$ matrisinin her $(A+B)_0$ yansımalı g–inversi için

$$[X\,, U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}(A+B)_0[X\,, U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix} = [X\,, U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Hatırlatma 4.1' de yer aldığı gibi $r(A+B)=r(A)+r(B)$ olduğundan (4.1) bağıntısı $A+B$ matrisinin bir rank parçalanışıdır. Bu nedenle $[X\,,U]_L^-$ ve $\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}_R^-$ matrisler vardır. Bu durumda

$$[X\,,U]_L^-[X\,,U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}(A+B)_0[X\,,U]\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}_R^- = \begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix}(A+B)_0[X\,,U]$$

$$= \begin{bmatrix} Y(A+B)_0X & Y(A+B)_0U \\ V(A+B)_0X & V(A+B)_0U \end{bmatrix}$$

$$= I_{r+s} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$Y(A+B)_0X = I_r \Longrightarrow XY(A+B)_0XY = XI_rY = XY$$

dır. Bu durumda

$$A(A+B)_0A = A$$

$$Y(A+B)_0U = 0$$

$$V(A+B)_0X = 0$$

$$V(A+B)_0U = I_s \Rightarrow UV(A+B)_0UV = UI_sV = UV$$

olacaktır. Bu nedenle

$$B(A+B)_0B = B$$

olur.

4.2. İki Matrisin Toplamının Yansımalı Genelleştirilmiş İnversi

1. Durum: Bu kısımda ilk olarak $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ durumunda toplamın g–inversi incelenecektir.

Teorem 4.1. A ve B matrisleri $r(A+B) = r(A) + r(B)$ olacak şekilde $m \times n$ tipinde herhangi iki matris olsun. Bu takdirde

$(A_0 + B_0) = (A+B)_0$

$A+B$ matrisinin bir yansımalı g–inversi olacak şekilde A ve B matrislerinin A_0 ve B_0 yansımalı g–inversleri vardır.

İspat: Lemma 4.2 uygulandığında

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$B = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$A + B = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1}$$

elde edilir. Y_0, Y matrisinin bir yansımalı g–inversi olmak üzere

$$A_0 = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \quad \text{ve} \quad B_0 = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P$$

almak yeterlidir. Bu durumda

$$A_0 + B_0 = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P$$

olur. Böylece

$$(A+B)(A_0+B_0)(A+B) = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1}Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} PP^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & YY_0Y \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= A + B$$

elde edilir.

Hatırlatma 4.2: Lemma 4.2' den

$$A(A_0+B_0)A = A \Longrightarrow AB_0A = 0$$

ve

$$B(A_0+B_0)B = B \Longrightarrow BA_0B = 0$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2: A ve B matrisleri Lemma 4.2' deki gibi olsun. Bu takdirde

$$A_0 + B_0 = (A+B)_0$$

$A + B$ matrisinin yansımalı g–inversi olacak şekilde A ve B matrislerinin A_0 ve B_0 yansımalı g–inversleri vardır.

İspat: Y_0 , Y matrisinin bir yansımalı g–inversi olmak üzere

$$A_0 = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \quad \text{ve} \quad B_0 = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

almak yeterlidir. Bu durumda, Teorem 4.1'den A_0 , B_0 ve $A_0 + B_0$, sırasıyla A , B ve $A + B$ matrislerinin yansımalı g–inversleridir. Moore–Penrose şartlarının birincisi sağlanır. Öte yandan

$$A_0AA_0 = A_0 \quad \text{ve} \quad B_0BB_0 = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0YY_0 \end{pmatrix} P = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P = B_0$$

olacağından

$$(A_0+B_0)(A+B)(A_0+B_0) = Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} PP^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} Q^{-1}Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P$$

$$= Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0YY_0 \end{pmatrix} P$$

$$= Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} P$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} + P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= A_0 + B_0$$

olduğu görülür.

Hatırlatma 4.3: Teorem 4.2'den

$$A_0(A+B)A_0 = A_0AA_0 + A_0\mathrm{B}A_0 = A_0$$

ve

$$B_0(A+B)B_0 = B_0AB_0 + B_0BB_0 = B_0$$

olacağı ve dolayısıyla

$$A_0BA_0 = 0 \quad \text{ve} \quad B_0AB_0 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Gerçekten $A_0 + B_0$ matrisi $A + B$ matrisinin bir yansımalı g–inversi olduğundan $A + B$ matrisi de $A_0 + B_0$ matrisinin bir yansımalı g–inversi olur.

Lemma 4.2a' yı kullanarak $A + B$ matrisinin hem A_0 matrisinin hem de B_0 matrisinin g–inversi olduğu sonucu elde edilir.

2. Durum: İkinci olarak $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) \neq \{0\}$ olması durumunda toplamın g–inversi incelenecektir.

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ kümesi $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$ nin bir bazı olsun. Bu takdirde C, $\mathcal{R}(A)$ için bir $X \cup C$ bazına ve aynı zamanda $\mathcal{R}(B)$ için de bir $U \cup C$ bazına genişletilebilir. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{r-k}\}$ ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{s-k}\}$ olsun.

$C = [c_1, c_2, \dots, c_k]$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_{r-k}]$ ve $U = [u_1, u_2, \dots, u_{s-k}]$ ile sırasıyla sütunları c_i, x_i ve u_i olan matrisler gösterilsin. Buradan

$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$,

$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(U) = \{0\}$,

$\mathcal{R}(C) \cap \mathcal{R}(U) = \{0\}$

elde edilir. Bu takdirde

$$A = [C\,, X]\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = [C\,, U]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. $[C\,, X]$ ve $[C\,, U]$ sırasıyla $m \times r$ ve $m \times s$ tipinde matrisler olduğundan A ve B matrislerinin rank parçalanışları elde edilmiş olur.

a. $r(A) + r(B) = r$ olsun. Bu durumda

$$A + B = [C\,, X]\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + [C\,, U]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = C(Y_1 + V_1) + (XY_2 + UV_2)$$

yazılabilir. M ve N matrisleri

$$M = C(Y_1 + V_1) \quad \text{ve} \quad N = (XY_2 + UV_2)$$

olarak verilsin. C , $m \times k$ tipinde bir matris olduğundan M matrisinin bir rank parçalanışı elde edilir.

$Y_1 + V_1$, $k \times n$ tipinde bir matris olduğundan, $r(M) = k$ olur.

Benzer şekilde $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(U) = \{0\}$ olup X, $(r - k)$ ranklı $m \times (r - k)$ tipinde bir matris ve Y_2, $(r - k) \times n$ tipinde bir matris olduğundan $r(XY_2) = r(X)$ elde edilir. Benzer durumda UV_2 için de $r(UV_2) = r(U)$ yazılabilir.

Lemma 4.1 uygulandığında

$$r(N) = r(XY_2) + r(UV_2) = r(X) + r(U)$$

elde edilir. Öte yandan

$\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$ ve $\mathcal{R}(U) \cap \mathcal{R}(C) = \{0\}$

olduğundan

$$\mathcal{R}(M) \cap \mathcal{R}(N) = \{0\}$$

yazılabilir. Bu nedenle Lemma 4.1'e göre $r(M+N) = r(M) + r(N)$ olduğu görülür.

M ve N matrislerine Lemma 4.2 uygulanırsa

$$PMQ = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } PNQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde nonsingüler P ve Q matrislerinin var olduğu görülür. Burada $M_1, k \times k$ tipinde bir matris olup $N_1, (m-k) \times (n-k)$ tipinde bir matris ve $k = r(M)$ dir. Teorem 4.1' e göre

$$(A+B)_0 = (M+N)_0 = M_0 + N_0$$

olacak şekilde M ve N matrislerinin M_0 ve N_0 yansımalı g–inverslerinin varlığı görülür.

b. $r(A) < r(B)$ olsun. Bu durumda A matrisi

$$A = \left[C\, , X\, , 0_{m\times(s-r)}\right] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ 0_{(s-r)\times n} \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalansın. O halde

$$A + B = C(Y_1 + V_1) + \big((XY_2 + 0) + UV_2\big)$$

yazılabilir. $A + B$ nin g–inversini elde etmek için

$$M = C(Y_1 + V_1) \text{ ve } N = (XY_2 + 0) + UV_2$$

almak yeterlidir.

Örnek 4.1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda

$[C\, , X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ alınırsa

$$A = [C\ , X]\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi verilmiş olsun. Bu durumda

$$[C\ , U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa

$$B = [C\ , U]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ve

$$M = C(Y_1 + V_1) \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. M matrisi $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ formuna indirgenirse

$$\Delta^{-1}M\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Öte yandan

$$N = (XY_2 + UV_2) \Longrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dır. Bu durumda

$\mathcal{R}(M) \cap \mathcal{R}(N) = \{0\}$ ve $\mathcal{R}(M^t) \cap \mathcal{R}(N^t) = \{0\}$

elde edilir. Böylece

$$P = \begin{pmatrix} I_1 & -R \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -S & I_2 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak alınabilir. Eğer $u_1 = (1)$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alınırsa $u_1 = Ru_2 \Longrightarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Benzer şekilde $v_1 = (0)$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ alınırsa $v_1 = v_2 S \Longrightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$P = \begin{pmatrix} I_1 & -R \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } Q = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ -S & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$PNQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } P(\Delta^{-1}M\Lambda)\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. M_0 matrisi $M_0 = Q(\Delta^{-1}M\Lambda)_0 P$ ve N_0 matrisi $N_0 = Q(PNQ)_0 P$ yardımıyla hesaplanırsa

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

$$(PNQ)_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$N_0 + M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

bulunmuş olur.

4.3. İki Matrisin Çarpımının Yansımalı Genelleştirilmiş İnversi

$E,\ F,\ G$ elemanları $\mathbb{K}$ cismi üzerinde olan ve aşağıdaki diagramı sağlayan vektör uzayları olsun.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "A"] & F \arrow[l, shift left, "A_0"] \arrow[d, shift left, "B"] \\ & G \arrow[u, shift left, "B_0"] \end{tikzcd}$$

Bu takdirde

$$F = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(B_0) = \mathcal{R}(A_0) \oplus \mathcal{N}(A) \tag{4.5}$$

olur. Eğer, $\mathcal{R}(A_0) \subset \mathcal{N}(B_0)$ ise bu takdirde $B_0A_0 = 0$ olacaktır. Dolayısıyla $\mathcal{R}(A_0) \nsubseteq \mathcal{N}(B_0)$ olduğu kabul edilebilir.

Teorem 4.3: Eğer $\mathcal{R}(A_0) \subseteq \mathcal{R}(B)$ veya $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A_0)$ ise bu takdirde B_0A_0 matrisi AB matrisinin bir yansımalı g–inversidir.

İspat: 1- $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A_0)$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $B = A_0X$ olacak şekilde bir X matrisi vardır. Dolayısıyla

$$ABB_0A_0AB = ABB_0(A_0AA_0)X = ABB_0(A_0X) = ABB_0B = AB$$

ve

$$B_0A_0ABB_0A_0 = B_0(A_0AA_0)XB_0A_0 = B_0(A_0X)B_0A_0 = (B_0BB_0)A_0 = B_0A_0$$

eşitlikleri sağlanır.

2- $\mathcal{R}(A_0) \subseteq \mathcal{R}(B)$ olduğunu kabul edilsin. Bu takdirde $A_0 = BX$ olacak şekilde bir X matrisi vardır. Dolayısıyla

$$ABB_0A_0AB = A(BB_0B)XAB = A(BX)AB = (AA_0A)B = AB$$

ve

$$B_0A_0ABB_0A_0 = B_0A_0A(BB_0B)X = B_0A_0A(BX) = B_0A_0AA_0 = B_0A_0$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Aşağıdaki Teorem ile $(AB)_0$ matrisi genel durumda verilecektir.

Teorem 4.4: A_0 ve B_0, sırasıyla A ve B matrislerinin

$$\mathcal{R}(A_0) \cap \mathcal{R}(B) \neq \{0\},$$

$$\mathcal{R}(A_0) \cap \mathcal{N}(B_0) \neq \{0\},$$

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(B) \neq \{0\}$$

şartlarını sağlayan yansımalı g–inversleri olsun. Bu durumda, B_0PQA_0 matrisi AB matrisinin bir yansımalı g–inversi olacak şekilde P ve Q matrisleri vardır.

İspat: U, V ve W matrisleri

$$\mathcal{R}(A_0) \cap \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(U),$$

$$\mathcal{R}(A_0) \cap \mathcal{N}(B_0) = \mathcal{R}(V),$$

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(W),$$

$$\mathcal{R}(A_0) = \mathcal{R}(U) \oplus \mathcal{R}(V),$$

$$\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(U) \oplus \mathcal{R}(W)$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda (4.5) bağıntısı

$$F = \mathcal{R}(U) \oplus \mathcal{R}(V) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(U) \oplus \mathcal{R}(W) \oplus \mathcal{N}(B_0) \tag{4.6}$$

şeklini alacaktır.

$P_{(\mathcal{R}(A))}$ ifadesi A matrisinin $\mathcal{R}(A)$ sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı yani izdüşümü olarak tanımlıdır.

$C = P_{(R(A_0))}P_{(R(B))}$ olsun. Bu durumda B_0CA_0 matrisinin AB matrisinin bir yansımalı g–inversi olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$\mathrm{x} \in E$ olsun. Dolayısıyla $B\mathrm{x} \in F$ olur. Bu takdirde $B\mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$ olacak şekilde $\mathrm{a} \in \mathcal{R}(U)$ ve $\mathrm{b} \in \mathcal{R}(W)$ vardır.

$\mathrm{b} \in \mathcal{R}(W) \subset \mathcal{N}(A)$ olduğundan $A\mathrm{b} = 0$ olup

$$AB\mathrm{x} = A\mathrm{a} + A\mathrm{b} = A\mathrm{a} \tag{4.7}$$

$$A_0AB\mathrm{x} = A_0A\mathrm{a} = \mathrm{a}$$

elde edilir.

$\mathrm{a} \in \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A_0) \cap \mathcal{R}(B)$ olduğundan

$$CA_0AB\mathrm{x} = C\mathrm{a} = P_{(R(A_0))}P_{(R(B))}\mathrm{a} = \mathrm{a} \implies BB_0CA_0AB\mathrm{x} = BB_0\mathrm{a} = \mathrm{a}$$

$$\implies ABB_0CA_0AB\mathrm{x} = A\mathrm{a} = AB\mathrm{x}$$

elde edilir. Dolayısıyla $AB(B_0CA_0)AB = AB$ olduğu görülür.

$\mathrm{x} \in G$ ve dolayısıyla $A_0\mathrm{x} \in \mathcal{R}(A_0)$ olsun. Bu takdirde $A_0\mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$ olacak şekilde $\mathrm{a} \in \mathcal{R}(U)$ ve $\mathrm{b} \in \mathcal{R}(\mathrm{V})$ vardır. Öte yandan $\mathrm{b} \in \mathcal{R}(V) \subset \mathcal{N}(B_0)$ olduğundan

$$P_{(\mathcal{R}(A_0))}P_{(\mathcal{R}(B))}\mathrm{b} = P_{(\mathcal{R}(A_0))}0 = 0$$

ve $\mathrm{a} \in \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A_0) \cap \mathcal{R}(B)$ olduğundan

$$CA_0\mathrm{x} = C\mathrm{a} + C\mathrm{b} = P_{(\mathcal{R}(A_0))}P_{(\mathcal{R}(B))}\mathrm{a} + P_{(\mathcal{R}(A_0))}P_{(\mathcal{R}(B))}\mathrm{b} = \mathrm{a}$$

yazılabilir ve dolayısıyla

$$B_0CA_0\mathrm{x} = B_0\mathrm{a} \tag{4.8}$$

elde edilir. O halde

$$ABB_0CA_0\mathrm{x} = ABB_0\mathrm{a} = A\mathrm{a} \;\Longrightarrow A_0ABB_0CA_0\mathrm{x} = A_0A\mathrm{a} = \mathrm{a}$$

$$\Longrightarrow CA_0ABB_0CA_0\mathrm{x} = C\mathrm{a} = \mathrm{a}$$

$$\Longrightarrow B_0CA_0ABB_0CA_0\mathrm{x} = B_0\mathrm{a} = B_0CA_0\mathrm{x}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$B_0CA_0(AB)B_0CA_0 = B_0CA_0$$

olduğu görülür.

P ve Q sırasıyla $P_{(\mathcal{R}(A_0))}$ ve $P_{(\mathcal{R}(B))}$ nin matrisleri olsun. Bu durumda

$$B_0PQA_0 = (AB)_0$$

yazılabilir.

5 MOORE–PENROSE TİPİ GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİN İNCELENMESİ

5.1. Moore–Penrose Tipi Genelleştirilmiş İnverslerin Varlığı

A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^{+} matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bir takım özellikleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 5.1: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir Moore–Penrose inversi varsa $n \times m$ tipindedir.

İspat: AA^{+} matrisinin simetrik ve dolayısıyla kare olması gerçeğinden ispat görülür.

Teorem 5.2: Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^{+} matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

İspat: Açık olarak $A^{+} = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 5.3: Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise Teorem 5.2' den $A^{+} = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \tag{5.1}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, B^*B ve CC^* çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^{+} matrisi

$$A^{+} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{5.2}$$

olarak alınırsa, A^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^{+}A = (BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC) = B(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)C$

$= BC = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = [(BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}]^{*} = B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}(CC^{*})B^{*}$

$= B(B^{*}B)^{-1}B^{*} = B(CC^{*})(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}$

$= (BC)C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = [C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC)]^{*}$

$= C^{*}(B^{*}B)(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}C$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}(B^{*}B)C$

$= C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}(BC) = A^{+}A$

olduğu görülür.

Teorem 5.4: Herhangi bir A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^{+} matrisi vardır. Yani her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır.

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^{+} ve A_2^{+} olsun. Bu durumda

$$A_1^+ = A_1^+ A A_1^+ = A_1^+ (A A_1^+)^* = A_1^+ (A_1^+)^* A^* = A_1^+ (A_1^+)^* (A A_2^+ A)^*$$

$$= A_1^+ (A_1^+)^* A^* (A_2^+)^* A^* = A_1^+ (A A_1^+)^* (A A_2^+)^* = A_1^+ A A_1^+ A A_2^+ = A_1^+ A A_2^+$$

$$= A_1^+ A (A_2^+ A A_2^+) = (A_1^+ A)^* (A_2^+ A)^* A_2^+ = A^* (A_1^+)^* A^* (A_2^+)^* A_2^+$$

$$= (A A_1^+ A)^* (A_2^+)^* A_2^+ = A^* (A_2^+)^* A_2^+ = (A_2^+ A)^* A_2^+ = A_2^+ A A_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani A^+ matrisi tektir.

Teorem 5.5: a. $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde

$$A^+ = \frac{1}{m.n} A^*$$

dir.

b. $a,\ n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = (a^* a)^{-1} a^*$$

şeklindedir.

c. $a,\ 1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = a^* (a a^*)^{-1}$$

şeklindedir.

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda

(i) $AA^+A = A\left(\frac{1}{m.n} A^*\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^*A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^+AA^+ = \left(\frac{1}{m.n} A^*\right)A\left(\frac{1}{m.n} A^*\right) = \frac{1}{m.n}(A^*A)\left(\frac{1}{m.n} A^*\right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n} A^*\right)$

$$= \left(\frac{1}{m.n} A^*\right) = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = \left(A\frac{1}{m.n} A^*\right)^* = A\frac{1}{m.n} A^* = AA^+,$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \left(\frac{1}{m.n}A^{*}A\right)^{*} = \frac{1}{m.n}A^{*}A = A^{+}A$

olduğu görülür.

b. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+}a = a(a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a(a^{*}a)^{-1}(a^{*}a) = a,$

(ii)$a^{+}aa^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = (a^{*}a)^{-1}(a^{*}a)(a^{*}a)^{-1}a^{*}$

$= (a^{*}a)^{-1}a^{*} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [a(a^{*}a)^{-1}a^{*}]^{*} = a(a^{*}a)^{-1}a^{*} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [(a^{*}a)^{-1}a^{*}a]^{*} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

c. a^{+} matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+}a = aa^{*}(aa^{*})^{-1}a = (aa^{*})(aa^{*})^{-1}a = a,$

(ii)$a^{+}aa^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1}aa^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{*}(aa^{*})^{-1}(aa^{*})(aa^{*})^{-1}$

$= a^{*}(aa^{*})^{-1} = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [aa^{*}(aa^{*})^{-1}]^{*} = aa^{*}(aa^{*})^{-1} = aa^{+},$

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [a^{*}(aa^{*})^{-1}a]^{*} = a^{*}(aa^{*})^{-1}a = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 5.1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun.

$m = 2,\ n = 3$ ve $A^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

olarak alınırsa

$$A^{+} = \frac{1}{m.n}A^{*} = \frac{1}{2.3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$AA^{+}A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A,$

(ii) $A^{+}A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

$A^{+}AA^{+} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = A^{+}A$

olduğu görülür.

Örnek 5.2: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$a^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*} = \left([1 \quad 2] . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} . [1 \quad 2]$

$= [5]^{-1} . [1 \quad 2] = [1/5] . [1 \quad 2] = [1/5 \quad 2/5]$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} . [1/5 \quad 2/5] = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

$aa^{+}a = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a,$

(ii) $a^{+}a = [1/5 \quad 2/5] . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1]$

$a^{+}aa^{+} = [1] . [1/5 \quad 2/5] = [1/5 \quad 2/5] = a^{+},$

(iii) $(aa^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = aa^{+}$,

(iv) $(a^{+}a)^{*} = [1]^{*} = [1] = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 5.3: $\mathrm{a} = [1 \quad 2 \quad 1]$ alınırsa

$$a^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} . \left([1 \quad 2 \quad 1] . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} . [6]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+} = [1 \quad 2 \quad 1] . \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} = [1]$

$aa^{+}a = [1] . [1 \quad 2 \quad 1] = [1 \quad 2 \quad 1] = a$,

(ii) $a^{+}a = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} . [1 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$

$$a^{+}aa^{+} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix} = a^{+},$$

(iii) $(aa^{+})^{*} = [1]^{*} = [1] = aa^{+}$,

(iv) $(a^{+}a)^{*} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} = a^{+}a$

olduğu görülür.

5.2 Moore–Penrose Tipi Genelleştirilmiş İnverslerin Özellikleri

Teorem 5.6: A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{5.3}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (5.1) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{5.4}$$

olur ki bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$\qquad = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+$,

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$\qquad = C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+$,

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$\qquad = B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$

olur. Böylece

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{5.5}$$

elde edilir. (5.4) ve (5.5) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı

$$(A^*)^+ = (A^+)^*$$

olduğu görülür.

Teorem 5.7: Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani her hangi bir A matrisi için

$(A^+)^+ = A$

olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A +^\dagger$

olduğu görülür.

Teorem 5.8: A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Yani

$$r(A) = r(A^+) \tag{5.6}$$

dır.

İspat: Teorem 2.13 $AA^+A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+) \tag{5.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 2.13 $A^+AA^+ = A^+$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A) \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.7) ve (5.8) bağıntılarından dolayı (5.6) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 5.1: A matrisinin rankı r ise, $A^+,\ AA^+,\ A^+A,\ AA^+A,\ A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 5.9: A simetrik ve idempotent matris ise, $A^{+} = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $AA^{+}A = AAA = A^{2}A = AA = A^{2} = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = AAA = A^{2}A = AA = A^{2} = A = A^{+}$,

(iii) $[AA^{+}]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = AA^{+}$,

(iv) $[A^{+}A]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = A^{+}A$

olduğu görülür.

Teorem 5.10: $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^{+}, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

İspat: B^{+} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 5.4:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen D matrisinin Moore–Penrose inversi

$$D^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten

$$DD^{+} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DD^+D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}=D$$

olduğu görülür.

Teorem 5.11: a. A, $m\times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda

$A^+=A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+=I_m$

olur.

b. A, $m\times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda

$A^+=(A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A=I_n$

olur.

İspat: Teoremde verilen A^+ matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre

a. (i) $AA^+A=AA^*(AA^*)^{-1}A=(AA^*)(AA^*)^{-1}A=A$,

(ii) $A^+AA^+=A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}=A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1}$

$=A^*(AA^*)^{-1}=A^{+\dagger}$,

(iii) $(AA^+)^*=(AA^*(AA^*)^{-1})^*=((AA^*)(AA^*)^{-1})^*=I^*=I$

$=(AA^*)(AA^*)^{-1}=AA^*(AA^*)^{-1}=AA^+$,

(iv) $(A^+A)^*=(A^*(AA^*)^{-1}A)^*=A^*(AA^*)^{-1}A=A^+A$

olduğu görülür. Benzer şekilde

b. (i) $AA^+A=A(A^*A)^{-1}A^*A=A(A^*A)^{-1}(A^*A)=A$,

(ii) $A^+AA^+=(A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*=(A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^*$

$=(A^*A)^{-1}A^*=A^+$,

(iii) $(AA^+)^*=(A(A^*A)^{-1}A^*)^*=A(A^*A)^{-1}A^*=AA^+$,

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

olduğu görülür.

Örnek 5.5: 2×3 tipindeki bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi alındığında rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 5.11a'dan dolayı

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9/5 & 7/5 \\ 7/5 & 6/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 16/5 & 13/5 \\ 32/5 & 26/5 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 5.6: 3×2 tipinde bir $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani, A tam sütun ranklı bir matristir. O halde Teorem 5.11b'den dolayı

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2/9 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 2 & 4/3 \\ 8/9 & 2/3 & 5/9 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Teorem 5.12: $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler olmak üzere r ranklı olsun. Bu durumda

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{5.9}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Teorem 5.11'e göre

$$C^{+}=C^{*}(CC^{*})^{-1} \quad \text{ve} \quad B^{+}=(BB^{*})^{-1}B^{*}$$

olur ve buradan

$$C^{+}B^{+}=C^{*}(CC^{*})^{-1}(BB^{*})^{-1}B^{*}$$

elde edilir. Bu değer zaten (5.2) bağıntısından dolayı $(BC)^{+}$ matrisidir. O halde

$$C^{+}B^{+}=(BC)^{+}$$

olduğu görülür.

5.3. Matris Çarpımının Moore–Penrose İnverslerinin Karakterizasyonu

Bu kısımda $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ tipinde bir A matrisinin Moore–Penrose inversi A^{+} olmak üzere, $(AB)^{+}$ ve $B^{+}A^{+}$ ile ifade edilen matrisler için bir dizi rank formülleri verilecektir. Bu rank formülleri $(AB)^{+}$ ve $B^{+}A^{+}$ matrislerini içeren çeşitli eşitlikleri karakterize etmek için kullanılacaktır.

Aynı boyutlu $\mathrm{p}(A_1^{+},\dots,A_k^{+})$ ve $\mathrm{q}(B_1^{+},\dots,B_k^{+})$ matris ifadeleri verilmiş olsun. Bu kısımda $\mathrm{p}(A_1^{+},\dots,A_k^{+})=\mathrm{q}(B_1^{+},\dots,B_k^{+})$ olması için bir takım gerek ve yeter şartlar ortaya konulacaktır. Açık olarak bu eşitlik

$$r[\mathrm{p}(A_1^{+},\dots,A_k^{+})-\mathrm{q}(B_1^{+},\dots,B_k^{+})]=0$$

eşitliğine denktir. Sol taraftaki matrisin rankını ifade etmek için bir formül bulunabilirse, bu formülden $\mathrm{p}(A_1^{+},\dots,A_k^{+})=\mathrm{q}(B_1^{+},\dots,B_k^{+})$ eşitliğinin sağlanması için bir gerek ve yeter şart türetilebilir. Bu yöntemin matrislerin Moore–Penrose inverslerinin çeşitli eşitliklerini karakterize etmek için oldukça etkili bir yöntem olduğu kanıtlanmıştır. (Tian, Y., 1999)

Bu kısımda öncelikle blok matrisler için gerekli olabilecek bazı rank formülleri hatırlatılacaktır. (Marsiglia G., Styan , G.P.H., 1974)

$$r[A, B] = r(A) + r\big(B - AA^{+}B\big). \tag{5.10}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r[(I - BB^{+})A(I - C^{+}C)]. \tag{5.11}$$

Eğer $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}(C^{*}) \subseteq \mathcal{R}(A^{*})$ ise, bu durumda

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r(D - CA^{+}B) \tag{5.12}$$

olur. (5.12) bağıntısı ve $A^{*}(A^{*}AA^{*})^{+}A^{*} = A^{+}$ eşitliğinden

$$r\big(D - CA^{+}B\big) = r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & A^{*}B \\ CA^{*} & D \end{bmatrix} - r(A) \tag{5.13}$$

olduğu görülür.

$C = [C_1, C_2]$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ ve $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde (5.13) bağıntısı

$$\mathrm{r}(D - C_1A_1^{+}B_1 - C_2A_2^{+}B_2) = r\begin{bmatrix} A_1^{*}A_1^{*}A_1^{*} & 0 & A_1^{*}B_1 \\ 0 & A_2^{*}A_2A_2^{*} & A_2^{*}B_2 \\ C_1A_1^{*} & C_2A_2^{*} & D \end{bmatrix} - r(A_1) - r(A_2) \tag{5.14}$$

şeklini alır.

Bir matrisin her hangi iki X_1 ve X_2 dış inversleri için yaygın şekle kullanılan başka bir rank formülü, onların farklarının rankının

$$r(X_1 - X_2) = r\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + r[X_1, X_2] - r(X_1) - r(X_2) \tag{5.15}$$

şeklinde olmasıdır.

(5.15) bağıntısının basit bir sonucu olarak, bir matrisin X_1 ve X_2 gibi her hangi iki dış inversi için

$$X_1 = X_2 \Leftrightarrow \mathcal{R}(X_1) = \mathcal{R}(X_2) \text{ ve } \mathcal{R}(X_1^{*}) = \mathcal{R}(X_2^{*}) \tag{5.16}$$

bağıntısı yazılabilir.

Lemma 5.1: . $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ verilsin. O halde B^+A^+ çarpımı

$$B^+A^+ = -[B^*, 0]\begin{bmatrix} 0 & A^*AA^* \\ B^*BB^* & B^*A^* \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} A^* \\ 0 \end{bmatrix} = -PJ^+Q \tag{5.17}$$

şeklinde yazılabilir. Burada P, J ve Q blok matrisleri

$$r(J) = r(A) + r(B)\,,\ \mathcal{R}(Q) \subseteq \mathcal{R}(J) \text{ ve } \mathcal{R}(P^*) \subseteq \mathcal{R}(J^*) \tag{5.18}$$

şartlarını sağlar.

Buna ilaveten aşağıdaki basit özellikler verilebilir.

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow r[A, B] = r(A)\,, \tag{5.19}$$

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \text{ ve } r(A) = r(B) \Rightarrow \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)\,, \tag{5.20}$$

$$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B) \Rightarrow \mathcal{R}(PA) \subseteq \mathcal{R}(PB)\,, \tag{5.21}$$

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(AA^*A) = \mathcal{R}(AA^\dagger) = \mathcal{R}[(A^+)^*]\,, \tag{5.22}$$

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*AA^*) = \mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^+A)\,, \tag{5.23}$$

$$\mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(A_2) \text{ ve } \mathcal{R}(B_1) = \mathcal{R}(B_2) \Rightarrow r[A_1, B_1] = r[A_2, B_2]\,. \tag{5.24}$$

$(AB)^+$ ve B^+A^+ çarpımlarına ilişkin bazı önemli rank eşitlikleri değişik kaynaklarda verilmiştir. (Baksalary, J.K. ve Styan, G.P.H., 1993)

$$\begin{aligned} r(AB - ABB^+A^+AB) &= r[BB^+A^+A - (BB^+A^+A)^2] \\ &= r[A^*, B] + r(AB) - r(A) - r(B) \end{aligned} \tag{5.25}$$

eşitliğini ispatlamışlardır.

Açıkça görülebilir ki B^+A^+ matrisinin AB matrisinin genelleştirilmiş inversi olması için gerek ve yeter şart $AB - ABB^+A^+AB$ matrisinin rankının sıfır olmasıdır. Ayrıca BB^+A^+A matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter şart $BB^+A^+A = (BB^+A^+A)^2$ olmasıdır. (5.25) bağıntısından iki ifadenin denk olduğu ve bunların sağlanması için gerek ve yeter şartın $r[A^*, B] = r(A) + r(B) - r(AB)$ olduğu görülür. Öte yandan

$$r(BB^+A^+A - A^+ABB^+) = 2r[BB^+A^+A - (BB^+A^+A)^2] \tag{5.26}$$

eşitliği verilebilir. (Bérubé ve ark.,1991,1993)

(5.25) ve (5.26) bağıntıları birleştirilerek

$$\begin{aligned} r(AB - ABB^+A^+AB) &= r[BB^+A^+A - (BB^+A^+A)^2] \\ &= \frac{1}{2} r(BB^+A^+A - A^+ABB^+) \\ &= r[A^*, B] + r(AB) - r(A) - r(B) \end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir. Bu sonuçlar göz önüne alındığında (5.27) bağıntısı ile ilgili olarak aşağıdaki yeni rank eşitlikleri verilebilir.

Teorem 5.13: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} r(B^+A^+ - B^+A^+ABB^+A^+) &= r\big[B^+A^+ - B^+(A^+ABB^+)^+A^+\big] \\ &= r[BB^+A^+A - (A^+ABB^+)^+] \\ &= r\{[A^*, B][A^*, B]^+ - A^+A - BB^+ + A^+ABB^+\} \\ &= r[A^*, B] + r(AB) - r(A) - r(B) \end{aligned} \tag{5.28}$$

olur.

İspat. (5.25) bağıntısının birinci ve üçüncü rank ifadelerinde A yerine B^+ ve B yerine A^+ yazıldığında

$$r(B^+A^+ - B^+A^+ABB^+A^+) = r[(B^+)^*, A^+] + r(B^+A^+) - r(B^+) - r(A^+) \tag{5.29}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak (5.22)–(5.24) bağıntılarından

$r[(B^+)^*, A^+] = r[B, A^*]$,

$r(B^+A^+) = r(B^*A^*) = r(AB)$,

$r(A^+) = r(A)$,

$r(B^+) = r(B)$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece (5.28) bağıntısının birinci ve beşinci ifadelerinin eşit olduğu görülür.

(5.13) bağıntısına ve sonra da (5.28) bağıntısının ikinci ifadesine Blok Gauss Eliminasyonu uygulayarak

$$r(B^+A^+ - B^+(A^+ABB^+)^+A^+) = r\begin{bmatrix}(BB^+A^+A)^2 & BB^+A^+ \\ B^+A^+A & B^+A^+\end{bmatrix} - r(A^+ABB^+)$$

$$= r\begin{bmatrix}(BB^+A^+A)^2 - BB^+A^+ & 0 \\ 0 & B^+A^+\end{bmatrix} - r(AB)$$

$$= r[(BB^+A^+A)^2 - (BB^+A^+A)^2]$$

elde edilir. Bu sonuç ve (5.27) bağıntısından (5.28) bağıntısındaki üçüncü ve beşinci rank ifadelerinin eşit olduğu görülür.

Öte yandan her hangi bir M matrisi için

$$M^*M(M^+ - M^*) = M^*MM^+ - M^*MM^* = M^* - M^*MM^*$$

ve

$$M^+(M^+)^*(M^* - M^*MM^*) = M^+(M^+)^*M^* - M^+(M^+)^*M^*MM^*$$

$$= M^+ - M^+MM^*$$

$$= M^+ - M^*$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülür. Böylece

$$r(M^+ - M^*) = r(M^* - M^*MM^*) = r(M - MM^*M)$$

elde edilir. Bu durum $BB^+A^+A - (A^+ABB^+)^+$ matrisine uyguladığında

$$r[BB^+A^+A - (A^+ABB^+)^+] = r[A^+ABB^+ - (A^+ABB^+)^2]$$

$$= r[BB^+A^+A - (BB^+A^+A)^2]$$

sonucuna varılır. Bu eşitlik ile birlikte (5.28) bağıntısından (5.28) bağıntısındaki üçüncü ve beşinci rank ifadelerinin eşit olduğu görülür.

Bir M matrisinin ranjı üzerindeki ortogonal izdüşümün MM^+ ile ifade edilebileceği hatırlanırsa eğer $\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}(N)$ ise, $MM^+ = NN^+$ olacağı görülür.

Herhangi bir $M = [A\,, B]$ satır blok matris için

$$M = [A\,, B] = [A\,, B - AA^+B]\begin{bmatrix} I & A^+B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}[A\,, B - AA^+B]$$

olur. Bu durumda tanımdan

$$[A\,, B - AA^+B]^+ = \begin{bmatrix} A^+ \\ (B - AA^+B)^+ \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\begin{aligned} [A\,, B][A\,, B]^+ &= [A\,, B - AA^+B][A\,, B - AA^+B]^+ \\ &= [A\,, B - AA^+B]\begin{bmatrix} A^+ \\ \left(B - AA^+B\right)^+ \end{bmatrix} \\ &= AA^+ + (B - AA^+B)(B - AA^+B)^+ \qquad (5.30) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$M = [A^*, B]$ alınsın. Bu durumda

$$MM^+ - A^+A - BB^+ + A^+ABB^+ = (I_m - A^+A)(MM^+ - BB^+) \qquad (5.31)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda (5.30) bağıntısına göre

$$MM^+ - BB^+ = (A^* - BB^+A^*)\,(A^* - BB^+A^*)^+$$

yazılabilir. Böylece

$r(MM^{+} - A^{+}A - BB^{+} + A^{+}ABB^{+})$

$= r[(I_m - A^{+}A)(MM^{+} - BB^{+})]$

$= r[A^{*}, (A^{*} - BB^{+}A^{*})(A^{*} - BB^{+}A^{*})^{+}] - r(A)$ ((5.10) dan)

$= r[A^{*}, A^{*} - BB^{+}A^{*}] - r(A)$ ((5.24) ten)

$= r[A^{*}, BB^{+}A^{*}] - r(A)$

$= r[(I_m - BB^{+})A^{*}, BB^{+}A^{*}] - r(A)$

$= r[(I_m - BB^{+})A^{*}] + r(BB^{+}A^{*}) - r(A)$

$= r[A^{*}, B] + r(AB) - r(A) - r(B)$ ((5.10) dan)

olur ki bu da (5.28) bağıntısının son eşitliğini ispatlar.

Teorem 5.14: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $B^{+}A^{+}$ matrisi AB matrisinin bir g–invers matrisidir.

(b) $B^{+}A^{+}$ matrisi AB matrisinin bir dış invers matrisidir.

(c) $A^{+}A$ matrisi ile BB^{+} matrisi değişmelidir.

(d) $A^{+}ABB^{+}$ matrisi idempotenttir.

(e) $BB^{+}A^{+}A$ matrisi idempotenttir.

(f) $B^{+}(A^{+}ABB^{+})^{+}A^{+} = B^{+}A^{+}$.

(g) $(A^{+}ABB^{+})^{+} = BB^{+}A^{+}A$.

(h) $[A^{*}, B][A^{*}, B]^{+} = A^{+}A + BB^{+} - A^{+}ABB^{+}$.

(i) $r[A^{*}, B] = r(A) + r(B) - r(AB)$.

(j) boy$[\mathcal{R}(A^{*}) \cap \mathcal{R}(B)] = r(AB)$.

(k) $r(B - A^{+}AB) = r(B) - r(A^{+}AB)$.

(l) $r\left(A - ABB^{+}\right) = r(A) - r(ABB^{+})$.

İspat: (c) $\Longrightarrow$ (a): Bu durumda

$A^{+}ABB^{+} = BB^{+}A^{+}AB \Longrightarrow AA^{+}ABB^{+}B = ABB^{+}A^{+}AB \Longrightarrow AB = ABB^{+}A^{+}AB$

olur. Bu ise $B^{+}A^{+}$ matrisinin AB matrisinin bir g–invers matrisi olduğunu gösterir.

(c) $\Longrightarrow$ (b): Bu durumda

$$A^{+}ABB^{+} = BB^{+}A^{+}A \Longrightarrow B^{+}A^{+}ABB^{+}A^{+} = B^{+}BB^{+}A^{+}AA^{+}$$

$$\Longrightarrow B^{+}A^{+}ABB^{+}A^{+} = B^{+}A^{+}$$

olur ki bu $B^{+}A^{+}$ matrisinin AB matrisinin bir dış inversi olduğunu gösterir.

(c) $\Longrightarrow$ (d): $A^{+}A$, BB^{+} ile değişmeli olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(A^{+}ABB^{+})^{2} &= A^{+}ABB^{+}A^{+}ABB^{+}\\ &= A^{+}ABB^{+}BB^{+}A^{+}A\\ &= A^{+}ABB^{+}A^{+}A\\ &= A^{+}AA^{+}ABB^{+}\\ &= A^{+}ABB^{+}\end{aligned}$$

elde edilir.

(c) $\Longrightarrow$ (e): $A^{+}A$, BB^{+} ile değişmeli olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(BB^{+}A^{+}A)^{2} &= BB^{+}A^{+}ABB^{+}A^{+}A\\ &= BB^{+}A^{+}AA^{+}ABB^{+}\\ &= BB^{+}A^{+}ABB^{+}\\ &= BB^{+}BB^{+}A^{+}A\\ &= BB^{+}A^{+}A\end{aligned}$$

olduğu görülür.

(c) $\Longrightarrow$ (f) ve (c) $\Longrightarrow$ (g) ve (c) $\Longrightarrow$ (h) ve (c) $\Longrightarrow$ (k) denklikleri benzer şekilde gösterilebilir.

(i) $\Longrightarrow$ (j): $r[A^*, B] = r(A) + r(B) - r(AB)$ olsun. Tian (1999) tarafından verilen

$r[A^*, B] = r(A^*) + r(B) - \text{boy}[\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B)]$

rank formülünden

$\text{boy}[\mathcal{R}(A^*) \cap \mathcal{R}(B)] = r(AB)$

elde edilir.

(i) $\Longrightarrow$ (k): $r[A, B] = r(A) + r\big(B - AA^+B\big)$ şeklindeki (5.10) bağıntısından çıkar. Bu durumda

$r[A, B] = r(A) + r\big(B - AA^+B\big) = r(A^*) + r(B) - r(A^*B)$

yazılabilir. Öte yandan (5.23) ve (5.24) bağıntılarından

$r\big(B - AA^+B\big) = r(B) - r(AA^+B)$

olur.

(i) $\Longrightarrow$ (l): Bu durum $r[A, B] = r(A) + r\big(B - AA^+B\big)$ şeklindeki (5.10) bağıntısından elde edilir.

Teorem 5.15: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(a) $r[(AB)(AB)^+ - (AB)(B^+A^+)] = r[B, A^*AB] - r(B)$

$$= r(A^*AB - BB^+A^*AB)$$

(b) $r[(AB)^+(AB) - (B^+A^+)(AB)] = r\begin{bmatrix} A \\ ABB^* \end{bmatrix} - r(A) = r(ABB^* - ABB^*A^+A)$

olur. Özel olarak

(c) $(AB)^+(AB) = (B^+A^+)(AB) \Leftrightarrow ABB^* = ABB^*A^+A \Leftrightarrow$

$\mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow B^+A^+$ matrisi AB matrisi için Moore–Penrose şartlarından ilk üçünü sağlar.

(d) $(AB)^{+}(AB) = (B^{+}A^{+})(AB) \Leftrightarrow A^{*}AB = BB^{+}A^{*}AB \Leftrightarrow$

$\mathcal{R}(BB^{*}A^{*}) \subseteq \mathcal{R}(A^{*}) \Leftrightarrow B^{+}A^{+}$ matrisi AB matrisi için Moore–Penrose şartlarından (i), (ii) ve (iv) şartlarını sağlar.

(e) Aşağıdaki dört ifade denktir.

(1) $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$.

(2) $(AB)(AB)^{+} = (AB)(B^{+}A^{+})$ ve

$(AB)^{+}(AB) = (B^{+}A^{+})(AB)$.

(3) $A^{*}AB = BB^{+}A^{*}AB$ ve

$ABB^{*} = ABB^{*}A^{+}A$.

(4) $\mathcal{R}(A^{*}AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$ ve

$\mathcal{R}(BB^{*}A^{*}) \subseteq \mathcal{R}(A^{*})$.

İspat. $N = AB$ olsun. Lemma 5.1' den $N^{+} = -PJ^{+}Q$ yazılabilir. (5.13) bağıntısına göre

$$r(NN^{+} - NB^{+}A^{+}) = r\begin{bmatrix} N^{*}N & N^{*} \\ N & NB^{+}A^{+} \end{bmatrix} - r(N)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & N^{*} - N^{*}NB^{+}A^{+} \\ N & 0 \end{bmatrix} - r(N)$$

$$= r(N^{*} - N^{*}NB^{+}A^{+}) \quad \text{((5.17) bağıntısından)}$$

$$= r(N^{*} + N^{*}NPJ^{+}Q)$$

$$= r\begin{bmatrix} J & Q \\ N^{*}NP & -N^{*} \end{bmatrix} - r(J)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & A^{*}AA^{*} & A^{*} \\ B^{*}BB^{*} & B^{*}A^{*} & 0 \\ N^{*}NB^{*} & 0 & -N^{*} \end{bmatrix} - r(A) - r(B)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & A^{*} \\ B^{*}BB^{*} & B^{*}A^{*} & 0 \\ N^{*}NB^{*} & N^{*}AA^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(B)$$

$$= r\begin{bmatrix} B^*BB^* & B^*A^* \\ N^*NB^* & N^*AA^* \end{bmatrix} - r(A) - r(B)$$

$$= r\begin{bmatrix} B^*A^* & B^*B \\ B^*A^*AA^* & N^*N \end{bmatrix} - r(B)$$

$$= r\begin{bmatrix} B^*B & B^*A^*AB \\ AB & AA^*AB \end{bmatrix} - r(B)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} B^* \\ A \end{bmatrix} [B\,, A^*AB]\right) - r(B)$$

$$= r[B\,, A^*AB] - r(B)$$

elde edilir. Bu durum teoremin (a) maddesindeki ilk eşitliği doğrular. (a) şıkkındaki ikinci eşitlikteki blok matrise (5.10) bağıntısı uygulandığında

$$r[B\,, A^*AB] = r(B) + r(A^*AB - BB^+A^*AB)$$

$$r[B\,, A^*AB] - r(B) = r(B) + r(A^*AB - BB^+A^*AB) - r(B)$$

$$= r(A^*AB - BB^+A^*AB)$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde (b) deki eşitlikler de gösterilebilir. (c) ve (d) deki sonuçlar (a) ve (b) maddelerinin direkt sonuçlarıdır. (e) ise doğrudan (c) ve (d) maddelerini takip ederek elde edilir.

Yukarıdaki durum, iki matrisin çarpımının Moore–Penrose inversini alırken, bazı rank eşitliklerinin direkt sonucunu dikkate almak gerektiğini göstermektedir.

Aşağıda iki matrisin çarpımının Moore–Penrose inversi ile ilgili bazı rank eşitlikleri ortaya konulacaktır. Bu eşitlikler $(AB)^+ = B^+A^+$ olması için gerek ve yeter şartların tespit edilmesine yardımcı olacaktır.

Teorem 5.16: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(a) $r[ABB^+ - (AB)(AB)^+A] = r[B\,, A^*AB] - r(B)$.

(b) $r[A^+AB - B(AB)^+(AB)] = r\begin{bmatrix} A \\ ABB^* \end{bmatrix} - r(A)$.

(c) $r(A^*ABB^+ - BB^+A^*A) = 2r[B\,, A^*AB] - 2r(B)$.

(d) $r(A^+ABB^* - BB^*A^+A) = 2r\begin{bmatrix} A \\ ABB^* \end{bmatrix} - 2r(A)$

olur. Özel olarak

(e) $(AB)(AB)^+A = ABB^+ \Leftrightarrow A^*ABB^+ = BB^+A^*A \Leftrightarrow$

$\mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow B^+A^+$ matrisi AB matrisi için Moore–Penrose şartlarından ilk üçünü sağlar.

(f) $A^+AB = B(AB)^+(AB) \Leftrightarrow A^+ABB^* = BB^*A^+A \Leftrightarrow$

$\mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*) \Leftrightarrow B^+A^+$ matrisi AB için matrisi için Moore–Penrose şartlarından (i), (ii) ve (iv) şartlarını sağlar.

(g) Aşağıdaki üç ifade denktir.

(1) $(AB)^+ = B^+A^+$.

(2) $(AB)\,(AB)^+A = ABB^+$ ve $A^+AB = B(AB)^+(AB)$.

(3) $A^*ABB^+ = BB^+A^*A$ ve $A^+ABB^* = BB^*A^+A$.

İspat. (a). Bu maddenin ispatında aşağıdaki rank formülü kullanılacaktır. (Tian ve Styan, 2001)

U ve V idempotent matrisler olmak üzere

$$r(UM - MV) = r\begin{bmatrix} UM \\ V \end{bmatrix} + r[MV, U] - r(U) - r(V) \tag{5.32}$$

dır. BB^+ ve $AB(AB)^+$ çarpımlarının her ikisi de idempotenttir. (5.32) bağıntısında $U = BB^+$, $V = (AB)(AB)^+$ ve $M = A$ alınırsa istenildiği gibi

$r[ABB^+ - (AB)(AB)^+A]$

$$= r\begin{bmatrix} BB^+A \\ (AB)(AB)^+ \end{bmatrix} + r[A(AB)(AB)^+, BB^+] - r(BB^+) - r[(AB)(AB)^+]$$

$$= r(AB) + r[A(AB)^*, B^*] - r(B) - r(AB)$$

$= r[B^*A^*A, B^*] - r(B)$

$= r[A^*AB, B] - r(B)$

$= r[B, A^*AB] - r(B)$

olduğu görülür.

(b) AA^+ ve $(AB)^+AB$ çarpımlarının her ikisi de idempotenttir. Bu durumda (5.32) bağıntısında $U = A^+A$, $V = (AB)^+(AB)$ ve $M = B$ alınırsa

$r[A^+AB - B(AB)^+(AB)]$

$$= r\begin{bmatrix} A^+AB \\ (AB)^+(AB) \end{bmatrix} + r[B(AB)^+(AB), A^+A] - r(A^+A) - r[(AB)^+(AB)]$$

$= r(AB) + r[B(AB)^*, A^*] - r(A) - r(AB)$

$= r[BB^*A^*, A^*] - r(A)$

$$= r\begin{bmatrix} A \\ ABB^* \end{bmatrix} - r(A)$$

olduğu görülür.

(c) Bu maddenin ispatlanmasında aşağıdaki rank formülü kullanılacaktır. (Tian, Y., 1999)

U ve V idempotent matrisler olmak üzere

$$r(UV - VU) = 2r[U\ ,\ V] + 2r[UV] - 2r(U) - 2r(V) \qquad (5,33)$$

dır. A^*A ve BB^+ çarpımlarının her ikisi de idempotenttir. (5,33) bağıntısında $U = A^*A$ ve $V = BB^+$ alındığında, istenildiği gibi

$r(A^*A\,BB^+ - BB^+A^*A\,) = 2r[A^*A\ ,\ BB^+] + 2r[A^*A\,BB^+] - 2r(A^*A\,) - 2r(BB^+)$

$= 2r(A^*A\,) + 2r[B\ ,\ A^*A\,B] - 2r(A^*A\,) - 2r(B)$

$= 2r[B\ ,\ A^*A\,B] - 2r(B)$

olduğu görülür.

(d) A^+A ve BB^* çarpımlarının her ikisi de idempotent olup (5,33) bağıntısında $U = A^+A$ ve $V = BB^*$ alınırsa

$$r(A^+A\,BB^* - BB^*A^+A) = 2r[A^+A\ ,\ BB^*] + 2r[A^+A\,BB^*] - 2r(A^+A) - 2r(BB^*)$$

$$= 2r(BB^*) + 2r\begin{bmatrix} A \\ A\,BB^* \end{bmatrix} - 2r(A) - 2r(BB^*)$$

$$= 2r\begin{bmatrix} A \\ A\,BB^* \end{bmatrix} - 2r(A)$$

elde edilir.

(e) ve **(f)** maddelerinin ispatı benzer şekilde Tian ve Styan (2001) tarafından verilen rank formüllerinden elde edilir.

(g) Bu şıktaki üç denklik Moore-Penrose inversin özelliklerinden görülebilir.

Teorem 5.17: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ verilsin. Bu takdirde

(a) $r[(ABB^+)^+ - BB^+A^+] = r[B^+(ABB^+)^+ - B^+A^+] = r[B\ , A^*AB] - r(B)$.

(b) $r[(A^+AB)^+ - B^+A^+A] = r[(A^+AB)^+A^+ - B^+A^+] = r\begin{bmatrix} A \\ ABB^* \end{bmatrix} - r(A)$.

olur. Özel olarak

(c) $(ABB^+)^+ = BB^+A^+ \Leftrightarrow B^+(ABB^+)^+ - B^+A^+ \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$.

(d) $(A^+AB)^+ = B^+A^+A \Leftrightarrow (A^+AB)^+A^+ - B^+A^+ \Leftrightarrow \mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$.

olur.

(e) Aşağıdaki üç ifade denktir.

(1) $(AB)^+ = B^+A^+$

(2) $(ABB^+)^+ = BB^+A^+$ ve $(A^+AB)^+ = B^+A^+A$.

(3) $B^+(ABB^+)^+ = B^+A^+$ ve $(A^+AB)^+A^+ - B^+A^+$.

İspat. Burada teoremin sadece (a) maddesinin ispatı verilecektir. Diğer maddeleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

(a) $B^{+}[(ABB^{+})^{+} - BB^{+}A^{+}] = B^{+}(ABB^{+})^{+} - B^{+}A^{+}$

ve

$B[B^{+}(ABB^{+})^{+} - B^{+}A^{+}] = (ABB^{+})^{+} - BB^{+}A^{+}$

olduğundan

$r[(ABB^{+})^{+} - BB^{+}A^{+}] = r[B^{+}(ABB^{+})^{+} - B^{+}A^{+}]$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$B^{*}[(ABB^{+})^{+} - BB^{+}A^{+}]AA^{*} = B^{*}(ABB^{+})^{+}AA^{*} - B^{*}A^{*}$

ve

$(B^{+})^{*}[B^{*}(ABB^{+})^{+}AA^{*} - B^{*}A^{*}](AA^{*})^{+} = (ABB^{+})^{+} - BB^{+}A^{+}$

olduğundan

$$\begin{aligned} r[(ABB^{+})^{+} - BB^{+}A^{+}] &= r[B^{*}(ABB^{+})^{+}AA^{*} - B^{*}A^{*}] \\ &= r[AB - AA^{*}(BB^{+}A^{*})^{+}B] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre (5.13) bağıntısı uygulandığında

$r[AB - AA^{*}(BB^{+}A^{*})^{+}B]$

$$= r\begin{bmatrix} (ABB^{+})(BB^{+}A^{*})(ABB^{+}) & (ABB^{+})B \\ AA^{*}(ABB^{+}) & AB \end{bmatrix} - r(BB^{+}A^{*})$$

$$= r\begin{bmatrix} ABB^{+}A^{*}ABB^{+} & AB \\ AA^{*}AB & AB \end{bmatrix} - r(BB^{+}A^{*})$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & AB \\ AA^{*}AB - ABB^{+}A^{*}AB & 0 \end{bmatrix} - r(AB)$$

$$= r(A^{*}AB - ABB^{+}A^{*}AB)$$

$$= r\begin{bmatrix} B^{*}B & B^{*}A^{*}AB \\ AB & AA^{*}AB \end{bmatrix} - r(B)$$

$$= r\left(\begin{bmatrix} B^{*} \\ A \end{bmatrix}[B,\ A^{*}AB]\right) - r(B) = r[B,\ A^{*}AB] - r(B)$$

elde edilir.

Teorem 5.18: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ matrisleri verilsin. B takdirde

(a) $r[A^{+} - B(AB)^{+}] = r\begin{bmatrix} A \\ ABB^{*} \end{bmatrix} - r(AB).$

(b) $r[B^{+} - B(AB)^{+}] = r[B\ , A^{*}AB] - r(AB).$

dir. Özel olarak

(c) $A^{+} = B(AB)^{+} \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^{*}) = \mathcal{R}(BB^{*}A^{*}).$

(d) $B^{+} = B(AB)^{+} \Leftrightarrow \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(A^{*}AB).$

yazılabilir.

İspat. Burada teoremin sadece (a) maddesinin ispatı verilecektir. Diğer maddeleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

(a) (5.14) bağıntısı ve Blok Gauss Eliminasyonu uygulanarak

$$r[A^{+} - B(AB)^{+}] = r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & 0 & A^{*} \\ 0 & -(AB)^{*}AB(AB)^{*} & (AB)^{*} \\ A^{*} & B(AB)^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(AB)$$

$$= r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & 0 & A^{*} \\ (AB)^{*}AA^{*} & 0 & (AB)^{*} \\ A^{*} & B(AB)^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(AB)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & A^{*} \\ 0 & 0 & (AB)^{*} \\ A^{*} & B(AB)^{*} & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(AB)$$

$$= r\begin{bmatrix} A \\ ABB^{*} \end{bmatrix} - r(AB)$$

olduğu görülür ve böylece (a) elde edilir. Öte yandan

$$B^{+}(A^{+}ABB^{+})^{+}A^{+}ABB^{+}(A^{+}ABB^{+})^{+}A^{+} = B^{+}(A^{+}ABB^{+})^{+}A^{+}$$

olduğu kolayca görülür. Bu ise $B^{+}(A^{+}ABB^{+})^{+}A^{+}$ matrisinin AB matrisinin bir dış inversi olduğunu gösterir. Zira $(AB)^{+}$ matrisi AB matrisinin bir dış inversi idi.

(5.15) bağıntısından aşağıdaki ilginç sonuçlara ulaşılabilir.

Teorem 5.19: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ matrisleri verilsin. Bu takdirde

$$r[(AB)^+ - (A^+AB)^+A^+] = r[AB\,, AA^*AB] - r(AB) \tag{5.34}$$

ve

$$r[(AB)^+ - B^+(ABB^+)^+] = r\begin{bmatrix} AB \\ ABB^*B \end{bmatrix} - r(AB) \tag{5.35}$$

dır. Özel olarak

$$(AB)^+ = (A^+AB)^+A^+ \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^*AB) = \mathcal{R}(AB) \tag{5.36}$$

ve

$$(AB)^+ = B^+(ABB^+)^+ \Leftrightarrow \mathcal{R}\,[B^*B(AB)^*] = \mathcal{R}\,[(AB)^*] \tag{5.37}$$

bağıntıları sağlanır.

İspat. Moore–Penrose tanımına göre $(AB)^+$ matrisi (AB) matrisinin bir dış inversidir. $X_1 = (A^+AB)^+A^+$ ve $X_2 = B^+(ABB^+)^+$ olsun. Bu durumda

$$X_1ABX_1 = (A^+AB)^+A^+AB(A^+AB)^+A^+ = (A^+AB)^+A^+ = X_1$$

ve

$$ABX_1AB = AB(A^+AB)^+A^+AB = (AA^+A)B(A^+AB)^+A^+AB$$

$$= AA^+AB(A^+AB)^+A^+AB = AA^+AB = AB$$

elde edilir. Bulunan bu iki sonuç X_1 matrisinin AB matrisinin bir yansımalı g–inversi olduğunu gösterir. Benzer şekilde

$$X_2ABX_2 = B^+(ABB^+)^+ABB^+(ABB^+)^+ = B^+(ABB^+)^+ = X_2$$

ve

$$ABX_2AB = ABB^+(ABB^+)^+AB = ABB^+(ABB^+)^+ABB^+B = ABB^+B = AB$$

olduğundan X_2 matrisi de AB matrisinin bir yansımalı g–inversidir. (5.15) bağıntısı $(AB)^+ - X_i$ matrisine uygulandığında

$$r[(AB)^{+}-X_i]=r\begin{bmatrix}(AB)^{+}\\ X_i\end{bmatrix}+r[(AB)^{+},\,X_i]-2r(AB),\quad i=1,2. \tag{5.38}$$

bulunur. (5.20) ve (5.22) bağıntıları yardımıyla

$$\mathcal{R}(X_1)=\mathcal{R}[(A^{+}AB)^{+}A^{+}]=\mathcal{R}[(A^{+}AB)^{*}]=\mathcal{R}[B^{*}(A^{+}A)^{*}]=\mathcal{R}(B^{*}A^{*})$$

$$=\mathcal{R}[(AB)^{*}]$$

$$\mathcal{R}(X_1^{*})=\mathcal{R}\{[(A^{+}AB)^{+}A^{+}]^{*}\}=\mathcal{R}[(A^{+})^{*}(B^{*}A^{+}A)^{+}]=\mathcal{R}[(A^{+})^{*}(B^{*}A^{+}A)^{*}]$$

$$=\mathcal{R}[(A^{+})^{*}B]=\mathcal{R}[(A^{+})^{*}(B^{+})^{*}]$$

olduğu görülür. (5.24) bağıntısından

$$r[(AB)^{+},\;X_1]=r[(AB)^{*},\;(AB)^{*}]=r(AB) \tag{5.39}$$

ve

$$r\begin{bmatrix}(AB)^{+}\\ X_1\end{bmatrix}=r[((AB)^{+})^{*},\;(X_1)^{*}]$$

$$=r[((AB)^{+})^{*},\;[(A^{+}AB)^{+}A^{+}]^{*}]$$

$$=r[AB,\;(A^{+})^{*}B] \tag{5.40}$$

elde edilir. Ayrıca

$$AA^{*}[AB,\;(A^{+})^{*}B]=[AA^{*}AB,\;AA^{*}(A^{+})^{*}B]=[AA^{*}AB,AB]$$

ve

$$(A^{+})^{*}A^{+}[AA^{*}AB,AB]\;=[(A^{+})^{*}A^{+}AA^{*}AB,(A^{+})^{*}A^{+}AB]\;=[AB,(A^{+})^{*}B]$$

olduğundan

$$r[AB,(A^{+})^{*}B]=r[AA^{*}AB,AB] \tag{5.41}$$

olduğu görülür. (5.41) bağıntısını (5.40) bağıntısında ve (5.40) ile (5.39) bağıntıları (5.38) bağıntısında yerlerine yazıldığında $i=1$ için (5.34) bağıntısındaki rank eşitliği sağlanır.

Benzer şekilde (5.35) bağıntısı da gösterilebilir.

Öte yandan (5.34) ve (5.35) bağıntılarının sağ tarafları sıfır alınıp, (5.19) ve (5.20) bağıntıları uygulandığında (5.36) ve (5.37) eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Teorem 5.20: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ matrisleri verilsin. Bu takdirde

$$r[(AB)^+ - B^+(A^+ABB^+)^+A^+) = r\begin{bmatrix} AB \\ ABB^*B \end{bmatrix} + r[AB\ , AA^*AB] - 2r(AB) \qquad (5.42)$$

olur. Özel olarak

$$(AB)^+ = B^+(A^+ABB^+)^+A^+ \qquad (5.43)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{R}(AA^*AB) = \mathcal{R}(AB) \text{ ve } \mathcal{R}[B^*B(AB)^*] = \mathcal{R}[(AB)^*] \qquad (5.44)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $X = B^+(A^+ABB^+)^+A^+$ olsun. Bu durumda

$$XABX = B^+(A^+ABB^+)^+A^+ABB^+(A^+ABB^+)^+A^+ = B^+(A^+ABB^+)^+A^+ = X$$

ve

$$r(X) = r(AB)$$

olduğundan (5.15) bağıntısından

$$r[(AB)^+ - X] = r\begin{bmatrix} (AB)^+ \\ X \end{bmatrix} + r[(AB)^+, X] - 2r(AB) \qquad (5.45)$$

olduğu görülür. Ayrıca (5.21)–(5.23) bağıntılarından

$$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}[B^+(A^+ABB^+)^+] = \mathcal{R}[B^+(A^+ABB^+)^*] = \mathcal{R}[B^+A^*(A^+)^*] \subseteq \mathcal{R}[B^+A^*]$$

yazılabilir ve buradan da $r(B^+A^*) = r(AB) = r(X)$ elde edilir. Bu nedenle (5.20) bağıntısına göre $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(B^+A^*)$ olur. Sonuç olarak (5.24) bağıntısını kullanarak

$$r[(AB)^+, X] = r[(AB)^*, B^+A^*] \qquad (5.46)$$

elde edilir. Ayrıca

$$B^*B[(AB)^*, B^+A^*] = [B^*B(AB)^*, B^*BB^+A^*] = [B^*B(AB)^*, B^*A^*]$$

ve

$$B^{+}(B^{+})^{*}[B^{*}B(AB)^{*}, B^{*}A^{*}] = [B^{+}(B^{+})^{*}B^{*}B(AB)^{*}, B^{+}(B^{+})^{*}B^{*}A^{*}]$$

$$= [(AB)^{*}, B^{+}A^{*}]$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$r[(AB)^{*}, B^{+}A^{*}] = r[B^{*}B(AB)^{*}, B^{*}A^{*}] \tag{5.47}$$

elde edilir. (5.47) bağıntısı (5.46) bağıntısında yerine yazıldığında

$$r[(AB)^{+}, X] = r\begin{bmatrix} AB \\ ABB^{*}B \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

eşitliği elde edilir. Benzer bir yaklaşımla

$$r\begin{bmatrix} (AB)^{+} \\ X \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} (AB)^{*} \\ B^{*}A^{*}AA^{*} \end{bmatrix} = r[AB, AA^{*}AB] \tag{5.49}$$

elde edilir. (5.42) bağıntısını elde etmek için son iki bağıntı olan (5.48) ve (5.49) bağıntıları (5.45) bağıntısında kullanılırsa (5.42) bağıntısının sol tarafı sıfır olur. Buradan (5.44) bağıntısına eşit olan

$$r\begin{bmatrix} AB \\ ABB^{*}B \end{bmatrix} = r[AB, AA^{*}AB] = r(AB)$$

bağıntısı elde edilir.

(5.34), (5.35) ve (5.42) bağıntılarının bir birleşimi olarak

$$r[(AB)^{+} - B^{+}(A^{+}ABB^{+})^{+}A^{+}]$$

$$= r[(AB)^{+} - (A^{+}AB)^{+}A^{+}] + r[(AB)^{+} - B^{+}(A^{+}AB)^{+}]$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$(AB)^{+} = B^{+}(A^{+}ABB^{+})^{+}A^{+} \Leftrightarrow (AB)^{+} = (A^{+}AB)^{+}A^{+} = B^{+}(A^{+}AB)^{+}$$

bulunur.

Teorem 5.14 ile birlikte (5.44) bağıntısı göz önüne alınırsa $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$ eşitliğinin sağlanması için bir takım yeni denk ifadeler verilebilir.

Teorem 5.21: $A \in \mathbb{C}_n^m$ ve $B \in \mathbb{C}_p^n$ verilsin. Bu takdirde, $(AB)^+ = B^+A^+$ olması için gerek ve yeter şart AB matrisinin (5.34) bağıntısını ve aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağlamasıdır:

(a) B^+A^+ matrisi AB matrisinin bir g–inversidir.
(b) B^+A^+ matrisi AB matrisinin bir dış inversidir.
(c) A^+A matrisi BB^+ile değişmelidir.
(d) A^+ABB^+ idempotenttir.
(e) BB^+A^+A idempotenttir.
(f) $B^+(A^+ABB^+)^+A^+ = B^+A^+$.
(g) $(A^+ABB^+)^+ = BB^+A$.
(h) $[A^*, B][A^*, B]^+ = A^+A + BB^+ - A^+ABB^+$.
(i) $r[A^*, B] = r(A) + r(B) - r(AB)$.
(j) boy$[R(A) \cap R(B^*) = r(B) - r(A^+AB)$.
(k) $r(B - A^+AB) = r(B) - r(A^{+\dagger}AB)$.
(l) $r(A - ABB^+) = r(A) - r(ABB^+)$.

İspat. Eğer $(AB)^+ = B^+A^+$ ise, B^+A^+ matrisi de AB matrisinin bir g–inversi olur. Bu nedenle Teorem 5.14'ün (a)–(l) maddeleri sağlanır. Öte yandan $(AB)^+ = B^+A^+$ olması Teorem 5.15e' ye göre

$$\mathcal{R}(A^*AB) \subseteq \mathcal{R}(B) \text{ ve } \mathcal{R}(BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$$

olmasını işaret eder. Dolayısıyla (5.21) bağıntısından

$$\mathcal{R}(AA^*AB) \subseteq \mathcal{R}(AB) \text{ ve } \mathcal{R}(B^*BB^*A^*) \subseteq \mathcal{R}(B^*A^*) \tag{5.50}$$

elde edilir. Ayrıca

$$r(AA^*AB) = r(B^*BB^*A^*) = r(AB)$$

dır. Bu nedenle (5.50) bağıntısı (5.44) bağıntısına denktir. Tersine olarak, eğer AB matrisi Teorem 5.14' ü ve (5.44) bağıntısını sağlıyorsa, bu takdirde

$$B^+(A^+ABB^+)^+A^+ = B^+A^+ \text{ ve } B^+(A^+ABB^+)^+A^+ = (AB)^+$$

elde edilir. Böylece $(AB)^+ = B^+A^+$ olduğu görülür.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamda invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers kavramı ele alınmıştır. Bu amaçla bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca her hangi iki matrisin toplamının ve çarpımının inverslerinin matrislerin ayrı ayrı inversleri cinsinden ifadeleri verilmiştir.

Yapılan bu çalışmalara ilaveten üç ya da daha fazla matrisin toplam ve çarpımlarının genelleştirilmiş inversleri için hesaplama yöntemleri geliştirilebilir. Ayrıca bu inverslerin hesaplanmasında kullanılmak üzere bilgisayar programları ya da algoritmalardan faydalanılabilir. Bunların yanında parçalı matrislerin genelleştirilmiş inversleri de araştırılabilir. Elde edilen bu genelleştirilmiş inversler lineer denklem sistemlerinin çözümlerine uygulanabilir.

7. KAYNAKLAR

Adetunde I.A. ve ark., 2010. On the Generalized Inverse of a Matrix. American Journal of Scientific Research, Issue 7, 77-89 s.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 1993. Around a Formula for The Rank for a Matrix Product with Some Statistical Applications, in: R.S. Rees (Ed.), Graphs, Matrices, and Designs: Festschrift in Honor of Norman J. Pullman on His Sixtieth Birthday, Marcel Dekker, New York, 1-18 s.

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Bérubé, J., Hartwing, R.E., Styan, G.P.H., 1993. on Canonical Correlations and the Degrees of Nonorthogonality in the Three-way Layout, in: K. Matusila, M.L. Puri, T. Hayakawa (Eds.), Statistical Sciences and Data Analysis: Proceedings of the Third Pacific Area Statistical Conference, Makuhari (Chiba, Tokto), Japan, December 11-13, 1991, VSP International Science Publishers, Utrecht, the Nederlands, 1993, 247-252 s.

Bhimasankaram, P., Mitra, S. K., 1969, On a theorem of Rao on g-inverses of matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 31, 365-368 s.

Bjerhammer, A., 1951, Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations, Bull. Geodesique, Vol. 52, 188-220 s.

Bjerhammer, A., 1951, Application of the calculus of matrices to the method of least squares with special reference to geodetic calculations, Kungl. Tekn. H11gsk. Hand. Stockholm. No. 49, 1-86 s.

Bjerhammer, A., 1958, A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Hogsk. Handl. Stockholm. No. 124, 1-32 s.

Bose, R. C., 1959, *Analysis of Variance*. unpublished lecture notes, University of North Carolina.

Bott, R., Duffin, R. J., 1953, On the algebra of Networks. Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 74, 99-109 s.

Branson R., 1999. Matris İşlemleri. Schaum Serisi. (Editör: H. Hilmi Hacısalihoğlu), Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 212 s.

Chernoff, H., 1953, Locally optimal designs for estimating parameters. Ann. Math. Statist., Vol. 24, 586-602 s.

Chipman, J. S., 1964, On least squares with insufficient observations, J. Armer. Stati.st. Assoc., Vol.59, 1078-1111 s.

Chipman, J. S., 1968, Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices, Symposium Proceedings, Texas Technological College. Mathematics Series No. 4, 114-176 s.

Chipman, J. S., Rao, M. M., 1964, Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Anal. Appl., Vol. 9, 1-11 s.

Doymuş, N., 2006. Matrislerin Genelleştirilmiş Tersleri ve Kronecker Çarpımlarının Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas, 63 s.

Greville, T. N. E., 1959, The pseudo-inverse of a rectangular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIA M Rev., Vol. 1, 38-43 s.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Jia-Yu S., Hai-Ying S., 2001. Matrices with signed generalized inverses. Linear Algebra and its Appl. 322, 105-127 s.

Lancaster, P., 1969. *Theory of Matrices*, Academic Pres, New York, 570 s.

Marsaglia, G., Styan, G.P.H., 1974. Rank Conditions for Generalized Inverses of Partitioned Matrices. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A Vol. 36, No. 4 , 437-442 s.

Mitra, S. K., 1968, On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 107-114 s.

Mitra, S. K., 1968, A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 323-330 s.

Mitra, S. K., Bhimasankaram, P., 1970, Some results on idempotent matrices and a matrix equation connected with the distribution of quadratic forms, Sankhya Ser. A. Vol. 32, 353-356 s.

Mitra, S. K., Radhakrishna Rao, C., 1968, Simultaneous reduction of a pair of quadratic forms. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 313-322 s.

Mitra, S. K., 1968, Some results in estimation and tests of hypotheses under the Gauss-Markov model. Sankhya Ser. A, Vol. 30, 281-290 s.

Mitra, S. K., 1969, Conditions for optimality and validity of simple least squares theory. Ann. Math. Statist., Vol. 40, 1617-1624 s.

Mitra, S. K., Rao, C. R., 1968, A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser. A. Vol. 30, 245-252 s.

Moore, E. H., 1935, *General Analysis*, American Philosophical Society, Philadelphia.

Moore, E. H., 1920, On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 26, 394-395 s.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Penrose, R., 1956, On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 52, 17-19 s.

Radhakrishna Rao, C., 1955, Analysis of dispersion for multiply classified data with unequal numbers in cells, Sankhya. Vol. 15, 253-280 s.

Radhakrishna Rao, C., 1962, A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158 s.

Radhakrishna Rao, C., 1965, Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Radhakrishna Rao, C., 1965, On the theory of least squares when parameters are stochastic and its application to analysis of growth curves, Biometrika, Vol. 52, 447-458 s.

Radhakrishna Rao, C., 1961, A study of large sample test criteria through properties of efficient estimates, Sankhya Ser. A, Vol. 23, 25-40 s.

Radhakrishna Rao, C., 1966, *Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics*, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Radhakrishna Rao, C., 1967, Least squares theory using an estimated dispersion matrix and its application to measurement of signals, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, Vol. 1, 355-372 s.

Radhakrishna Rao, C., 1967, Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Scroggs, J. E., Odell, P. L., 1966, An alternative definition of the pseudo-inverse of a matrix, SIA M J. Appl. Math., Vol. 14, 796-810 s.

Tian, Y.,2004. Using rank formulas to characterize equalities for Moore-Penrose inverses of matrix products. Applied Mathematics and Computation, 147, 581-600 s.

Tian, Y., Styan, G.P.H., 2001. Rank Equalities for Idempotent and Involutory Matrices. Linear Algebra Appl. 335, 101-117 s.

Tian, Y., 1999. Rank Equalities Related to Generalized Inverses of Matrices and Their Applications. Yüksek Lisans Tezi, Concordia University, Montréal, Quebec, Canada, 156 s.

Tseng, Y. Y., 1949, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol. 67, 431-434 s.

Tseng, Y. Y., 1949, Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 67, 607-610 s.

Tseng, Y. Y., 1956, Virtual solutions and general inversions, Uspehi. Mat. Nauk., Vol. 11, 213-215 s.

Zekraoui, H., Guedjiba, S., 2008. On Algebric Properties of Generalized Inverses of Matrices, Internal Journal of Algebra. Vol. 2, no. 13, 633-643 s.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yalçın ARMAĞAN

Doğum Yeri : Taşova

Doğum Tarihi : 14.03.1979

Medeni Hali : Bekâr

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Amasya Anadolu Öğretmen Lisesi, (1993–1997)

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Amasya Eğitim Fakültesi, (1997–2001)

Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, (2008-2011)

İletişim Bilgileri: Belevi Kasabası Taşova/Amasya

e-mail: yalcinarmagan@windowslive.com