T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MARKOV ZİNCİRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

İDRİS ÇELİK

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır.

ORDU 2013

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi İdris ÇELİK tarafından ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında hazırlanan "Markov Zincirlerinin Temel Özellikleri ve Çeşitli Uygulamaları" adlı bu tez, jürimiz tarafından 01 / 08 / 2013 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL
Matematik, Ordu Üniversitesi İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN
Matematik, Giresun Üniversitesi İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 23.08.2013 tarih ve 2013/234 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

23/08/2013

Doç. Dr. M. Fikret BALTA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İdris ÇELİK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MARKOV ZİNCİRİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

İdris ÇELİK

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2013
Yüksek Lisans Tezi, 85s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu çalışmada öncelikle temel olasılık kavramları kısaca ele alınmış, rastgele değişken, stokastik süreç ve Markov süreci kavramları tanımlanmıştır. Önemli bir stokastik süreç sınıfı olan Markov zincirinin genel yapısı, başlangıç dağılımı, geçiş olasılık fonksiyonu ve geçiş matrisi ile verilmiştir. Markov zincirinin durum uzayı incelenmiş ve haberleşen, yutucu, geçici ve tekrarlı durumlar tanımlanarak sınıflandırılmıştır. indirgenemez, periyodik, düzenli Markov zincirleri ve durağan dağılımlar incelenmiş ve özellikleri verilmiştir. Son bölümde ise Markov zincirlerinin çeşitli alanlardaki uygulamaları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Markov zinciri, haberleşen durum, yutucu durum, geçiş matrisi, durağan dağılım

ABSTRACT

FUNDAMENTAL PROPERTIES AND SEVERAL APPLICATIONS OF MARKOV CHAIN

İdris ÇELİK

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2013
MSc. Thesis, 85pp.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

In this study, the basic conceps of probability has been primarily discussed briefly, random variables, stochastic processes and Markov processes are defined. The general structure of Markov chains, the important class of stochastic processes, is given with the initial distribution, the transition probability function and the transition matrix. The state space of the Markov chain is studied and classified with defining communicating, absorbing, transient and recurrent states. İrreducible, periodic, regular Markov chains and stationary distributions are studied and properties are given. In last part, applications of Markov chains on several fields are given.

Key Words: Markov chain, communicating state, absorbing state, transition matrix, stationary distribution

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren değerli hocam Doç. Dr. Selahattin MADEN’e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemde bana daima destek olan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge No) **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

$a=b$	:	a eşittir b
$a:=b$	:	a tanım olarak eşittir b
$a\neq b$	:	a farklıdır b
$a<b$	:	a küçüktür b
$a>b$	:	a büyütür b
$a\leq b$	:	a küçüktür veya eşittir b
$a\geq b$	:	a büyüktür veya eşittir b
∞	:	sonsuz
$a<\infty$	:	a sonludur
$a\in A$	:	a A nın elemanıdır
$a\notin A$	:	a A nın elemanı değildir
$A\subset B$	:	A B nin altkümesidir
$A\cup B$	:	A ile B nin birleşimi
$A\cap B$	:	A ile B nin kesişimi
$A-B$	:	A ile B nin farkı
$\exists$	:	en az bir
$\forall$	:	her
:	:	öyle ki
$A\times B$	:	A ile B nin kartezyen çarpımı
$\min A$	:	A kümesinin minimumu
$\max A$	:	A kümesinin maksimumu
$\cup A_i$	:	$A_1,A_2,\ldots$ kümelerinin birleşimi
$\sum_{k=1}^{n} a_n$	:	$a_1,a_2,\ldots,a_n$ sayılarının toplamı
$\lim_{x\to a} f(x)$	:	$f(x)$ fonksiyonunun $x\to a$ için limiti

1. GİRİŞ

Olasılık Teorisi, rastgele olayların, rastgele süreçlerin ve rastgele değişkenlerin analizini kendine konu edinen bir matematik bilim dalıdır.16. yüzyılda Gerolamo Cardano (1501-1576) olasılıkla ilgili çeşitli hesaplamalar yapmış, ölümünden sonra yayınlanan ve içinde, bir parti oyunda verilen bir düzeni gerçekleştiren sonuç sayısı ile uzun bir dizide bu düzenin ortaya çıkış yinelenimi arasında ilişki kurduğu Liber de Ludo Aleae (Şans Oyunu Kitabı) adlı kitabı yazmıştır. Ancak Cardano, olasılığı salt kumarla ilgili bir kavram olarak ele aldığından bu çalışmalar bir matematik dalı oluşturacak seviyeye ulaşamamıştır. Matematiksel Olasılık Teorisinin tarihsel kökleri 17. yüzyılda Pierre de Fermat ile Blaise Pascal arasında yapılan, Chevalier de Mere isimli kumarbazın türetip Pascal'a yönelttiği iki şans oyunu sorusuna (biri zar sorusu diğeri ise bölüştürme sorusu) dair matematiksel incelemeleri konu edinen yazışmalara dayanır. Pascal'ın dönüm noktası sayılabilecek işi Olasılık kavramını kumardan uzaklaştırarak bilginin belirsizliğiyle ilişkilendirmesidir. Böylece olasılık teorisi, kumarcıların hizmetinde bir bilim olmaktan uzaklaşarak gerçeği araştırmada kullanılabilecek bir yöntem durumuna gelmiş ve özellikle 19. ve 20. yüzyılda geleneksel olasılık teorisi ile bilgi arasındaki ilişki derinlemesine incelenebilmiştir. Olasılık Teorisiyle ilgili ilk bilimsel eser, Christiaan Huygens tarafından 1657 yılında yayınlanan, olasılık hesabının detaylı bir şekilde anlatıldığı "De Ratiociniis in Ludo Aleae"(Şans Oyunlarının Mantığı) adlı eserdir.

18.yüzyılın başlarında Jakob Bernoulli ve Abraham de Moivre çalışmalarıyla Olasılık Teorisinin bir Matematik bilim koluna dönüşmesinin önünü açmışlardır. Bernoulli, sonsuz seriler üzerine yaptığı ve 1689 yılında yayınlanan önemli bir çalışmasında Olasılık Teorisindeki Büyük Sayılar Yasası'nı yayınlamıştır. Bu yasa Olasılık Teorisinin uygulamaları için temel oluşturmaktadır. Ayrıca ölümünden 8 yıl sonra 1713 yılında yayınlanan Ars Conjectandi (Kestirim Sanatı) adlı ünlü kitabında Huygens'in şans oyunlarıyla ilgili çalışmasını (De Ratiociniis in Ludo Aleae) genelleştirmiş, permutasyon ve kombinasyonları inceleyip sistemleştirerek raslantı oyunlarına uygulamış, binom dağılımlarıyla ilgili Bernoulli Teoremini geliştirmiştir. De Moivre ise 1718 yılında yayınlanan ünlü eseri The Doctrine of Chances (Şans Teorileri) isimli kitabında olasılığı, matematik beklentiyi, bağımsızlık ve koşullu bağımsızlık kavramlarını tanımlamış, kapsama-dışlama prensibini ortaya atmış, birkaç farklı rastgele olaydan ortaya çıkan bileşik olayın olasılığını bulmak için ilk defa formüller bulmuş, toplama ve çarpma kurallarını açıklamıştır. Ayrıca normal olasılık yoğunluk fonksiyonunun oluşumu için ilk çalışmalar De Moivre'den gelmiştir.

19. yüzyılın başlarında (1812) Pierre-Simon Laplace, Theorie Analytique Des Probabilities (Olasılıkların Çözümlemeli Teorisi) isimli kitabını yayınlamış, 19. yüzyılın başvuru eseri olan kitabında, kendi teorilerini gök ve yer mekaniğine uygulamış, şans oyunlarının sistematik ve kapsamlı bir dökümünü vermiştir. Carl Friedrich Gauss ise Laplace-Gauss yasasına dayanarak hataların genel bir kuralını geliştirmiş ayrıca en küçük kareler yöntemini genelleştirmiştir. Adolphe Quetelet, James Clerk Maxwell, Ludwig Boltzmann ve Josiah Willard Gibbs yaptıkları çalışmalarda olasılık teorisini matematiksel fizik ve istatistiksel mekanik alanlarında da kullanmaya başlamışlardır.

Önceleri olasılık teorisi genellikle ayrık olayları incelemek için geliştirilmiş ve kullanılan yöntemler genellikle tümleşik matematik kurallarına dayandırılmıştır. 20. yüzyıla doğru gelindiğinde ve özellikle 20. yüzyılda matematik analiz görüşü ağır basarak olasılık teorisine sürekli değişkenlerin incelenmesi de katılmıştır. A.N.Kolmogorov, R.Mises tarafından ortaya atılan örneklem uzayı kavramlarını ölçüm teorisi kavramlarıyla birleştirerek 1933 yılında Kolmogorov aksiyomlarını ortaya atmıştır. Bu aksiyomlar bilim camiası tarafından modern olasılık teorisinin ana aksiyom sistemi olarak kabul edilmiştir. Bu gelişmelere bağlı olarak olasılık teorisinin uygulama alanları da genişlemiştir. A.A.Markov, N.Wiener, Bertrand Russel, H.Poincare, W.Feller, A.N.Kolmogorov, W.Doeblin, P.Levy, J.L.Doob gibi bilim adamlarının çalışmaları sayesinde günümüzdeki formuna ulaşan olasılık teorisi, istatistik, tıp, moleküler biyoloji ve genetik, ekonomi, finansal matematik, psikoloji, fizik, mühendislik ve daha birçok alanda kullanılmaktadır.

Stokastik süreçler teorisi, olasılık teorisinin 20. Yüzyılda ortaya çıkan ve hızla gelişen bir bölümüdür. İlk kez J.Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılan stokastik kavramı, 20. yüzyılın başlarında ünlü olasılıkçı V.Bortkiyeviç (1868-1913)'in katkısıyla tekrar kullanılmaya başlanmıştır.

Zaman içerisinde önceden kestirilemeyecek şekilde gelişen süreçlere Stokastik (Rastgele) süreçler denir. Stokastik süreçler rastgele değişkenlere bağlı olan süreçlerdir. Daha kesin bir tanım yaparsak, rastgele değişkenlerin bir $\{X_t : t \in T\}$ ailesine stokastik süreç denir. Burada t bilinen bir T indis kümesine ait zaman indisidir. Rastgele değişkenin aldığı her bir değere durum , X_t ye ise değişkenin t zamanındaki durumu denir. Rastgele değişkenin alabileceği değerlerin tanımlandığı uzay durum uzayı olarak adlandırılır. Bir stokastik süreç durum uzayı ile tanımlıdır. Durum uzayı sürekli (reel sayılı, sayılamaz) veya kesikli (tam sayılı, sonlu veya sayılabilir) değerlerden oluşabilir. Buna göre, $\{X_t : t \in T\}$ süreci sürekli-durumlu stokastik süreç veya kesikli-durumlu stokastik süreç olarak adlandırılır. Benzer şekilde indis kümesi T de sürekli (Negatif olmayan reel sayılı) veya kesikli (Negatif olmayan tam sayılı) olabilir. Bu durumda süreç sürekli-zamanlı stokastik süreç veya kesikli-zamanlı stokastik süreç olarak adlandırılır.

Stokastik süreçler teorisinin matematiksel temelleri 20. yüzyılda A.A.Markov, E.Slutski, N.Wiener, A.Y.Khinchin ve A.N.Kolmogorov gibi matematikçiler tarafından atılmıştır. O zamandan beri stokastik süreçlerin teorisi ve uygulamaları W.Feller, P.Levy, A.Wald, J.L.Doob, K.Ito, E.Dynkin, A.Skorohod, L.Takac, E.Çınlar gibi bilim adamlarının önemli çalışmalarıyla devamlı bir gelişim göstermiştir.

Stokastik süreçler teorisinde geniş ve önemli bir yer teşkil eden süreçlerden biri de Markov sürecidir. Markov süreci, sürecin gelecekteki durum olasılığının koşullu olarak sürecin geçmiş durumlarına değil de, yalnızca halihazırdaki durumuna bağlı olduğu stokastik süreçtir. Söz konusu bu özelliğe Markovyen özellik denilmektedir. Markovyen özelliği olan bir sistemde, bir durumdan diğer duruma geçiş, sadece bir önceki duruma bağlı olan koşullu olasılıklar ile ifade edilir.

Markov sürecinin esası, 20. yüzyılın başlarında A.A.Markov'un, Brownian hareketi olarak bilinen kapalı bir kutu içindeki gaz moleküllerinin yapısını ve davranışlarını matematiksel olarak açıklama denemesine dayanır. Markov sürecinin ilk doğru matematiksel yapısı N.Wiener tarafından 1923 yılında kurulmuş, genel teorisi ise 1930 ve 1940 yılları arasında başta A.N.Kolmogorov olmak üzere

W.Feller, W.Doeblin, P.Levy ve J.L.Doob gibi bilim adamları tarafından geliştirilmiştir.

Bu çalışmada özel bir Markov süreci (stokastik süreç) olan ve birçok bilim dalı uygulamalarında ayrı bir öneme sahip Markov zincirleri ele alınmış ve geniş bir literatür taraması yapılarak Markov Zincirlerinin temel özellikleri verilmiştir.

Çalışmaya geçmeden önce Markov zinciri ile ilgili kısa bir bilgi verelim. Markov zinciri ilk kez 1907 yılında matematiksel modele bağlı olarak A.A. Markov tarafından tanıtılmış, Markov'un adına atfen Markov zinciri olarak anılmıştır. Genel olarak Markov zinciri kesikli indis kümeye ve sonlu veya sayılabilir durum uzayına sahip olan Markov süreçlerine denir. Yani, Markov zinciri , Markovyen özeliğini sağlayan bir stokastik süreçtir. Bir Markov zinciri , bir matematik modelde, takip eden bir durumdan bir diğer duruma bağlı olan ya da sık tekrar eden durumlarda kullanılır. Markov zincirleri, önceki olaylar hakkında, bir ya da daha fazla olaya bağlı olarak yansıtılan durumun olasılık matrislerinden (Geçiş matrisleri) oluşur. Markov zincirlerinin üç önemli elemanı vardır. Birincisi; sistemin zaman içerisinde bulunabileceği tüm olası durumların listesi, ikincisi; meydana geldiğinde sistemin içerisinde bulunduğu durumu ve dolayısıyla durum olasılık vektörünü değiştiren olaylar ve üçüncüsü ise belli bir durumda bulunan sistemin bir olay sonucunda hangi olasılıkla hangi duruma geçeceğini gösteren bir kare matris olan geçiş matrisidir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE GENEL BİLGİLER

2.1. Olasılık Uzayları

Olasılık teorisinde temel düşünce, sonuçları önceden kestirilemeyen rastgele deneyler üzerinedir. Bu deneyler üzerinde titizlikle çalışılmış ve sistematize edilmeye çalışılmıştır.

Bir deneyin temel unsurları, sonuçları, örnek uzayı ve olaylarıdır. Bir deneyin sonunda gözlemlenebilecek durumların her birine bir sonuç, bu deneyin ortaya çıkması muhtemel tüm sonuçlarının kümesine ise o deneyin örnek uzayı (Ω) denir (Çınlar 1975).

Örnek 2.1.1.

i. Hilesiz bir zarın bir kez atılması deneyinde örnek uzay , $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ii. Madeni paranın atılması deneyinde örnek uzay, $\Omega = \{Y, T\}$ $\left(Y : \text{Yazı} \text{ , } T : \text{Tura}\right)$

iii. İskambil kartlarının bir grubundan (sinek, maça, kupa, karo) rastgele bir kart çekme deneyinde örnek uzay, $\Omega = \{\mathrm{A}, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \mathrm{J}, \mathrm{Q}, \mathrm{K}\}$ dır.

Bir veya daha fazla sonucu eleman olarak kabul eden, örnek uzayın bir alt kümesi, olay olarak adlandırılır. Bir A olayının meydana gelebilmesi için gerek ve yeter şart deneyin gözlemlenen μ sonucunun, A kümesinin bir elemanı olmasıdır.

Meydana gelmesi için gerek ve yeter şartın A olayının meydana gelmemesi olan olaya A'nın tümleyeni (complement) denir ve A^c ile gösterilir (Çınlar 1975).

Bir olayın tümleyeni, iki olayın birleşimi ve kesişimi kısaca aşağıdaki şekilde tanımlanır.

i. $A^c = \{\mu \in \Omega : \mu \notin A\}$

ii. $A \cup B = \{\mu \in \Omega : \mu \in A \text{ veya } \mu \in B\}$ **(2.1)**

iii. $A \cap B = \{\mu \in \Omega : \mu \in A \text{ ve } \mu \in B\}$

ve De Morgan kurallarından,

$$\left(A \cup B\right)^c = A^c \cap B^c \text{ , } \left(A \cap B\right)^c = A^c \cup B^c \quad \textbf{(2.2)}$$

sağlanır.

$\varnothing$’ye imkansız olay, Ω’ya ise kesin olay denir. Dikkat edilirse $\varnothing = \Omega^c$ ve $\Omega = \varnothing^c$ olduğu kolaylıkla görülür.

Sonlu birleşim ve tümleme işlemleri altında kapalı olan bir aileye Ω üzerinde bir cebir denir(Çınlar 2011).Benzer şekilde sayılabilir(sonsuz) birleşim ve tümleme işlemleri altında kapalı olan aileye ise Ω üzerinde bir $\pm -$cebir denir. Her $\pm -$cebir bir cebirdir , ancak tersi doğru değildir.

Ω içindeki bütün olayların ailesini $\Im$ ile gösterelim. Teorik küme notasyonunda bir A olayı, $\Im$’nin bir elemanı $(A \in \Im)$ iken Ω’nın bir alt kümesidir$(A \subset \Omega)$.

Burada $\Im$, sigma cebir $(\pm -\text{cebir})$ yapısına sahiptir, dolayısıyla aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $\varnothing \in \Im$, $A \in \Im$

ii. Eğer $A \in \Im$ ise, $A^c \in \Im$ **(2.3)**

iii. $i \in N$ için $A_i \in \Im$ ise, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$.

Ω üzerinde tanımlı her $\pm -$cebir en azından Ω ve $\varnothing$ yi içerir. Dolayısıyla Ω üzerindeki en basit $\pm -$cebir , trivial $\pm -$cebir denen $\Im = \{\varnothing, \Omega\}$, en büyük$\pm -$cebir ise, ayrık $\pm -$cebir denen ve 2^Ω ile gösterilen Ω nın bütün altkümelerinin ailesidir.

Örnek 2.1.2. Ω boş olmayan bir küme olmak üzere 2^Ω kuvvet kümesi bir $\pm -$cebirdir. Gerçekten,

i. $\varnothing \subset \Omega$, $\Omega \subset \Omega \Rightarrow \varnothing \in 2^\Omega$, $\Omega \in 2^\Omega$

ii. $A \subset \Omega \Rightarrow A^c = \Omega - A \subset \Omega \Rightarrow A^c \in 2^\Omega$

iii. $A_i \subset \Omega$, $i \in N \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \Omega \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in 2^\Omega$

özellikleri sağlanır.

$\Im$ ile aynı $\pm -$cebir özelliklerini sağlayan alt kümelerine $\Im$’nin alt $\pm -$cebirleri denir.

Örnek 2.1.3. Hilesiz bir zar atılması deneyini düşünelim. Örnek uzay, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ olur. Burada $\mathcal{G}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$ olarak seçilirse $\mathcal{G}_1$, $\Im$ 'nin alt ± – cebiri olur. Ancak, $\mathcal{G}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5\}\}$ olarak seçilirse $\mathcal{G}_2$, $\Im$ 'nin alt ± – cebiri olmaz çünkü, $\{1,2\}$ kümesinin tümleyeni olan $\{3,4,5,6\}$ kümesi $\mathcal{G}_2$ 'nin elemanı değildir, yani $\mathcal{G}_2$ ± – cebir değildir.

U, Ω 'nın altkümelerinin keyfi bir ailesi olsun. U 'yu içeren en küçük ± – cebir $\pm(U) = \bigcap \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ bir } \pm - \text{cebir}, \mathrm{U} \subset \mathcal{G}\}$ ile tanımlanır. Burada $\pm(U)$ 'ya U tarafından üretilen ± – cebir denir. Örnek olarak, $\mathbb{R}^n$ 'in açık alt kümeleri (veya dikdörtgenleri) tarafından üretilen ± – cebire $\mathbb{R}^n$ 'in Borel ± – cebiri (veya Borel cebiri) denir ve $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ile gösterilir.

Bir deneyin herhangi bir sonucunun meydana gelme olasılığı, olasılık ölçüsü kavramına bağlı olarak olasılık dağılımları ile bulunur. Her bir A kümesini aşağıdaki özelliklere bağlı olarak bir $P(A)$ sayısına eşleyen P fonksiyonuna olasılık ölçüsü denir (Nualart 2012).

i. $\begin{array}{l} P : \Im \to [0,1] \\ A \to P(A) \end{array}$ ve, $0 \le P(A) \le 1$

ii. $P(\Omega) = 1$ **(2.4)**

iii. $\Im$ 'nin ayrık elemanlarının birleşimlerinin olasılığı, her bir elemanın olasılıkları toplamına eşittir. Yani, her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ olmak üzere,

$$A_i \in \Im \text{ için, } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Burada, $P(A)$, A olayının olma olasılığıdır. İmkansız olayın olasılığı sıfır $(P(\varnothing) = 0)$, kesin olayın olasılığı ise 1 $(P(\Omega) = 1)$ dir. Doğal olarak olasılığı 1 olan başka olaylar da bulunabilir.

Yukarıda (2.4) teki üç aksiyom alışılagelmiş olasılık bilgilerimizle tutarlıdır ve bu aksiyomların yol göstermesiyle aşağıdaki temel olasılık hesabı kuralları elde edilir.

i. $A \cap B = \varnothing$ ise, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ii. $P(A^c) = 1 - P(A)$ **(2.5)**

iii. $A \subset B$ ise, $P(A) \le P(B)$

İspat.

i. Öncelikle $P(\varnothing) = 0$ olduğunu gösterelim. (2.4iii) de $A_1 = A_2 = \cdots = \varnothing$ olarak alınırsa $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ olduğundan $P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) = P(\varnothing)$ elde edilir. Bu ise, (2.4i) den $0 \le P(\varnothing) \le 1$ olduğundan ancak $P(\varnothing) = 0$ olduğunda sağlanır. Şimdi, A_1 ve A_2 ayrık olaylar $(A_1 \cap A_2 = \varnothing)$, $A_3 = A_4 = A_5 = \cdots = \varnothing$ olsun. O halde $A_1, A_2, A_3, ...$ ler ayrıktırlar ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2$ dir. $P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \cdots = P(\varnothing) = 0$ olduğundan (2.4iii) den $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ elde edilir. $A_1 = A$ ve $A_2 = B$ alınırsa ispat biter.

ii. A ve A^c ayrık olaylardır ve (2.5i) den $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ dir. Diğer taraftan, $A \cup A^c = \Omega$ ve (2.4ii) den $P(\Omega) = 1$ olduğundan $P(A) + P(A^c) = 1$ dolayısıyla $P(A^c) = 1 - P(A)$ elde edilir.

iii. $A \subset B$ olsun. $B = A \cup (A^c \cap B)$ yazılabileceğinden ve A ve $A^c \cap B$ ayrık olduğundan, (2.5i) den $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$ yazılabilir. (2.4i) den $P(A^c \cap B) \ge 0$ dır ve böylece $P(A) \le P(B)$ elde edilir.

$(\Omega, \Im)$ ikilisi üzerinde hilesiz bir zarın atılması deneyi için, $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ ve $\{6\}$ sonuçlarının her birine $\frac{1}{6}$ olasılığını karşılık getiren çok kolay bir ölçü vardır. Yani,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6} \cdot$$

Şimdi ise çift sayı gelme olasılığı, tek sayı gelme olasılığının 3 katı olan hileli bir zarın atılması deneyini göz önüne alalım. Burada, $P^*(\{1\}) = P^*(\{3\}) = P^*(\{5\}) = \frac{1}{12}$ ve $P^*(\{2\}) = P^*(\{4\}) = P^*(\{6\}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ olacak şekilde yeni bir P^* ölçüsü kullanmamız gerekir. Bu yeni P^* ölçüsü (2.4) teki aksiyomları sağlar ve dikkat edilirse Ω örnek uzayı ve $\Im$ ± – cebiri değişmemiştir. Bu da gösteriyor ki aynı örnek uzayı ve ± – cebiri üzerinde iki farklı olasılık ölçüsü tanımlanabilir. $(\Omega, \Im, P)$ ve $(\Omega, \Im, P^*)$ gibi.

Rastgele bir deneyle ilişkili olan olasılık uzayı, $(\Omega, \Im, P)$ üçlüsü (bu üçlüye olasılık üçlüsü denir) ile ifade edilir. A.N.Kolmogorov tarafından ortaya konan bu üçlünün her biri (daha önce de tek tek açıklandığı üzere) deneyle ilgili aşağıdaki üç önemli soruya cevap verir.

i. Deneyin muhtemel sonuçları nelerdir? (Ω)
ii. Deneyin sonucu hakkında ne gibi bilgilere sahibiz? ($\Im$)
iii. Her bir sonucun meydana gelmesinin altında yatan olasılık nedir?(P)

Örnek 2.1.4. Hilesiz bir zarın atılması deneyini göz önüne alalım.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mümkün sonuçlar) olur.

$\Im = \mathrm{P}(\Omega)$ (Ω 'nın bütün altkümelerini içerir) ve $s(\Im) = 2^6$ dır.

$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Örnek 2.1.5. Belirli bir zaman aralığında meydana gelen trafik kazası sayılarının incelendiği bir deneyi göz önüne alalım. Burada,

$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (mümkün sonuçlar) olur.

$\Im = \mathrm{P}(\Omega)$ (Ω 'nın bütün altkümelerini içerir) dır.

$P(\{k\}) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$ ($a > 0$ parametreli Poisson olasılığı) k tane kazanın olma olasılığıdır.

Örnek 2.1.6. $[2,3]$ aralığından rastgele kapalı bir reel sayı aralığı seçmek istersek;

$\Omega = [2,3]$, $\Im$ $[2,3]$'nin Borel cebiri , $[a,b] \subset [2,3]$ aralığının olasılığı ise

$P([a,b]) = \frac{b-a}{3-2} = \frac{b-a}{1} = b-a$ olur.

Olasılık uzayları çarpım uzayı olarak yapılanabilir ve tekrar eden rastgele deneylerin modellemesi için kullanılabilir. Örnek olarak iki zarın atılmasında örnek uzay $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ dır. Yani, $a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}$ olmak üzere Ω'nın elemanları $\mu = (a,b)$ şeklinde ikililerden oluşur. Reel değerli sonlu n-liler için (Alfabenin harfleri arasından n tanesinin seçilmesi, bir zarın n defa atılması gibi) $\Omega = \mathbb{R}^n$ şeklindedir ve bu durumdaki sonuçlar n elemanlı $\mu = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörleridir.

2.2. Rastgele Değişkenler ve Stokastik Süreçler

Genellikle, bilhassa uygulamalı problemlerde, bir deneyin olası sonuçlarından ziyade bu sonuçların fonksiyonlarıyla ilgilenilir. Deneyin sonuçları reel değerlerle ifade edilirse, bu sonuçlar deneyin örnek uzayından reel sayılara bir fonksiyon olarak düşünülebilir. İşte bu fonksiyonlara rastgele değişkenler denir.

Tanım 2.2.1 Ω örnek uzay, Ω içindeki bütün olayların ailesi $\Im$ ve E$\subset$R olmak üzere E içindeki herhangi bir B Borel kümesi için, $X^{-1}(B) \in \Im$ olan $\Im$- ölçülebilir

$$X : \Omega \to \mathrm{E}$$
$$\mu \to X(\mu)$$

fonksiyonuna bir rastgele değişken denir (Nualart 2012).

X rastgele değişkeni, Ω içindeki her bir ω sonucuna bir $X(\omega)$ değerini karşılık getirir.

$X : \Omega \to \mathrm{E}$ için, E sonlu veya sayılabilir sonsuz bir küme ise X 'e kesikli rastgele değişken, aksi durumda yani, sayılamaz olduğu durumda ise X 'e sürekli rastgele değişken adı verilir (Çınlar 1975).

Örnek 2.2.1. Bir madeni paranın 3 kez atılması deneyinde örnek uzay

$$\Omega = \{\mathrm{TTT,TTY,TYT,TYY,YTT,YTY,YYT,YYY}\}$$

olur. $\omega \in \Omega$ için $X(\omega)$ Yazı sayısı olarak alınırsa;

$$X\left(\text{TTT}\right)=0$$
$$X\left(\text{TTY}\right)=X\left(\text{TYT}\right)=X\left(\text{YTT}\right)=1$$
$$X\left(\text{TYY}\right)=X\left(\text{YTY}\right)=X\left(\text{YYT}\right)=2$$
$$X\left(\text{YYY}\right)=3$$

ve dolayısıyla $\omega\in\Omega$ için $X(\omega)\in\{0,1,2,3\}$ elde edilir.

Örnek 2.2.2. X, iki zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların çarpımını gösteren rastgele bir değişken olsun. Bu durumda P olasılık fonksiyonu olmak üzere;

$$P(X=1)=P((1,1))=1/36$$
$$P(X=2)=P((1,2),(2,1))=2/36$$
$$\vdots$$
$$P(X=11)=P(\varnothing)=0/36=0$$
$$P(X=12)=P((2,6),(6,2),(3,4),(4,3))=4/36$$
$$\vdots$$
$$P(X=36)=P((6,6))=1/36$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla X rastgele değişkeni 1 den 36 ya kadar {1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36} değerlerini alır. Ayrıca (2.4iii) den

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{36}(X=n)\right)=\sum_{n=1}^{36}P(X=n)=1$$

elde edilir.

Örnek 2.2.3. Bir yarış aracının ilk 60 saniye boyunca yaptığı ivmenin gözlemlendiği bir deneyi göz önüne alalım. Bu durumda her bir olası sonuç $0 \leq t \leq 60$ için tanımlı, reel değerli sağdan sürekli ω fonksiyonlarıdır ve Ω örnek uzayı ise bütün bu ω fonksiyonlarının kümesidir. $t \in [0,60]$ olmak üzere, her bir $\omega \in \Omega$ için,

$$X_t(\mu)=\mu(t),$$
$$Y_t(\mu)=\int_0^t \mu(s)ds,$$
$$Z_t(\mu)=\int_0^t Y_u(\mu)du=\int_0^t\int_0^u \mu(s)dsdu$$

olarak alınırsa, X_t, Y_t, Z_t , Ω üzerinde rastgele değişken olurlar. Burada ω sonucu için, X_t ye t zamanındaki ivme, Y_t ye t zamanındaki hız, Z_t ye t zamanındaki konum denir (Çınlar 1975).

Ölçülebilirlik şartı, $a \leq$ b olacak şekilde iki reel sayı verildiğinde $a \leq X(\omega) \leq$ b olan bütün ω sonuçlarının kümesinin bir olay olması anlamına gelir. Bu olay $\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) \leq b\}$ yerine kısaca $\{a \leq X(\omega) \leq b\}$ ile gösterilir. Daha genel olarak (E = ℝ alındığında) bu olayları b∈ℝ olmak üzere $\{X(\omega) \leq b\}$ veya kısaca $\{X \leq b\}$ olarak, benzer şekilde $P\{\omega : X(\omega) \leq b\}$ olasılığını ise kısaca $P\{X \leq b\}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.2.

$$\text{¨}(b) = P\left\{X \leq b\right\}, \quad -\infty < b < \infty, \tag{2.6}$$

ile tanımlanan φ fonksiyonuna, X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir (Çınlar 1975). Bir rastgele değişken çoğu zaman örnek uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonundan ziyade dağılım fonksiyonu ile karakterize edilir.

φ dağılım fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. φ, azalmayandır,

ii. φ, sağdan süreklidir, **(2.7)**

iii. $\lim_{b \to \infty} \text{¨}(b) = 1$,

iv. $\lim_{b \to -\infty} \text{¨}(b) = 0$.

Herhangi bir φ fonksiyonu için, φ'yi dağılım fonksiyonu olarak kabul eden bir X rastgele değişkeni vardır.

X sayılabilir bir E kümesinde değer alan kesikli rastgele bir değişken olsun. Bu durumda, herhangi bir $i \in$ E için,

$$\text{®}(i) = P\left\{X = i\right\} \tag{2.8}$$

negatif olmayan bir sayıdır. Ayrıca,

$$\sum_{i \in E} \text{®}(i) = 1 \tag{2.9}$$

sağlanır.

$$\left\{ ®(i) : i \in \mathrm{E} \right\} \tag{2.10}$$

ailesine *X*'in olasılık dağılımı denir.

X, kesikli değilse olasılık dağılımları,

$$\left\{ P\left\{ a < X \leq b \right\} : a < b \in \mathrm{R} \right\},$$

$$\left\{ P\left\{ X \leq a \right\} : a \in \mathrm{R} \right\},$$

veya **(2.11)**

$$\left\{ P\left\{ X \geq a \right\} : a \in \mathrm{R} \right\}$$

şeklindedir.

X'in kesikli olmadığı durumda bazen dağılım fonksiyonunu diferansiyellemek (türevlemek) mümkündür. İşte dağılım fonksiyonunun bu türevine, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu denir (Çınlar 1975).

Olasılık teorisinin temel kavramlarından biri de bağımsızlıktır. Herhangi iki olaydan birinin gerçekleşme olasılığının, diğer olayın gerçekleşip gerçekleşmediğine bağlı olmaması durumunda bu iki olaya bağımsız olaylar dendiğini biliyoruz. Ayrıca iki olayın bağımsız olması için gerekli ve yeterli şart bu iki olayın arakesitleri olasılığının, olasılıkları çarpımına eşit olmasıdır.

Tanım 2.2.3. Her $i_1, i_2, ..., i_n \in \mathrm{E}$ için,

$$P\left\{ X_1 = i_1, ..., X_n = i_n \right\} = P\left\{ X_1 = i_1 \right\} \cdot ... \cdot P\left\{ X_n = i_n \right\} \tag{2.12}$$

oluyorsa $X_1, ..., X_n$ kesikli rastgele değişkenlerine bağımsız değişkenler denir. Benzer şekilde X_i ler $\mathbb{R}$ de değer aldığında, her $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ için,

$$P\left\{ X_1 \leq b_1, ..., X_n \leq b_n \right\} = P\left\{ X_1 \leq b_1 \right\} \cdot ... \cdot P\left\{ X_n \leq b_n \right\} \tag{2.13}$$

oluyorsa $X_1, ..., X_n$ rastgele değişkenlerine bağımsız değişkenler denir.

Zaman içerisinde önceden bilinemeyecek şekilde gelişen süreçler rastgele süreçlerdir. Bir rastgele sürecin alabileceği bütün değerlerin kümesi, o sürecin durum uzayını oluşturur.

Tanım 2.2.4. Bir *E* kümesinde değer alan ve aynı $\{\Omega, \Im, P\}$ olasılık uzayında tanımlı X_t rastgele değişkenlerinin bir $\left\{ X_t : t \in T \right\}$ ailesine, durum uzayı E olan bir Stokastik Süreç denir. T kümesine parametre kümesi veya indis kümesi denir ve eğer

T=ℕ={0,1,2,…} ise sürece kesikli parametreli süreç, T sayılamaz ise ya da bir aralık ise sürece sürekli parametreli süreç denir. Burada t indisi zaman parametresi olarak düşünülebilir, bu durumda X_t ye sürecin t zamanındaki durumu denir. Tanımdan da görülebileceği üzere Stokastik süreç, rastgele değişkenden farklı olarak zamana da bağlı olan bir fonksiyondur.

Bir stokastik süreç, durum uzayının ve indis kümesinin kesikli veya sürekli olmasına göre;

- Kesikli zamanlı, kesikli durumlu
- Kesikli zamanlı, sürekli durumlu
- Sürekli zamanlı, kesikli durumlu
- Sürekli zamanlı, sürekli durumlu

olmak üzere dörde ayrılır.

Her ω∈Ω için T indis kümesi üzerinde tanımlanan t → $X_t(\mu)$ fonksiyonuna sürecin realizasyonu, yörüngesi, örnek yolu veya örnek fonksiyonu denir.

Örnek 2.2.4.

i. Bir paranın 5 kez atılıp Yazı'ların sayıldığı bir deneyde ω={T,Y,T,Y,T} sonucuna karşılık gelen örnek yol {0,1,1,2,2} dir.

ii. İki hilesiz zarın 5 kez atılıp üst yüze gelen sayı çiftlerinin toplamı 6 olanlarının sayıldığı bir deneyde ω={(4,3),(2,2),(2,4),(1,5),(3,3)} sonucuna karşılık gelen örnek yol {0,0,1,2,3} tür.

Tanım 2.2.5. Her bir t∈T için, $P\{X_t = Y_t\} = 1$ şartını sağlayan $\{X_t : t \in T\}$ ve $\{Y_t : t \in T\}$ stokastik süreçlerine denk stokastik süreçler denir. (Nualart 2012). Burada $\{X_t : t \in T\}$ süreci $\{Y_t : t \in T\}$ sürecinin bir versiyonu olarak düşünülebilir.

İki denk süreç tamamen farklı örnek yola sahip olabilirler. Gerçekten, ¥ , sürekli dağılım fonksiyonuna sahip negatif olmayan bir rastgele değişken ve indis kümesi $T = [0, \infty)$ olmak üzere,

$$X_t = 0$$

$$Y_t = \begin{cases} 0 & , \ ¥ \neq t \\ 1 & , \ ¥ = t \end{cases}$$

süreçleri denktirler fakat örnek yolları farklıdır (Nualart 2012).

Tanım 2.2.6. $\{X_t, t \in \mathrm{T}\}$ reel değerli bir stokastik süreç ve $\{t_1,...,t_n\} \subset \mathrm{T}$ olmak üzere, $(X_{t_1},...,X_{t_n}): \Omega \to \mathbb{R}^n$ rastgele vektörünün $P_{t_1,...,t_n} = P \circ (X_{t_1},...,X_{t_n})^{-1}$ olasılık dağılımına $\{X_t, t \in \mathrm{T}\}$ sürecinin sonlu boyutlu marjinal dağılımı denir.

Şimdi ise Markov sürecinde sıklıkla kullanacağımız koşullu olasılık kavramına biraz değinelim.

Tanım 2.2.7. $A,B \in \Omega$ iki olay olmak üzere,

$$\begin{aligned} &i. \quad 0 \le P(A \mid B) \le 1 \\ &ii. \quad P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) \end{aligned} \tag{2.14}$$

özelliklerini sağlayan $P(A \mid B)$ sayısına B olayı gerçekleştiğinde A olayının koşullu olasılığı denir(Çınlar 1975).

$P(A \mid B)$, (2.4) teki koşulları sağladığından bir olasılık ölçüsüdür.

$P(X_5 = i_5 \mid X_2 = i_2, X_4 = i_4)$ olasılığını, $i_2, i_4, i_5 \in E$, $A = \{\mu : X_5(\mu) = i_5\}$ ve $B = \{\mu : X_2(\mu) = i_2, X_4(\mu) = i_4\}$ olmak üzere $P(A \mid B)$ yani, B olayı gerçekleştiğinde A olayının koşullu olasılığı anlamında kullanacağız.

2.3. Markov Süreci

Tanım 2.3.1. E durum uzayında değer alan kesikli-zamanlı bir $\{X_t, t \in \mathrm{T}\}$ stokastik sürecini göz önüne alalım. Eğer, her t ≥ 1 için, X_{t+1}'in olasılık dağılımı, sürecin t zamanındaki bilinen durumu olan X_t tarafından belirleniyor (koşullu olarak bağlı) ve bu dağılım $k \le t-1$ için, geçmiş X_k değerlerinden koşullu olarak bağımsız ise, yani bu süreçteki her bir durum koşullu olarak sadece kendinden önceki duruma bağlı ise, bu özelliğe Markov Özelliği veya Markovyen özellik denir. Markovyen özelliğe sahip bir stokastik sürece ise Markov süreci denir.

Dolayısıyla, bir $\{X_t, t \in \mathrm{T}\}$ Markov sürecinde; her sonlu $0 < 1 < ... < t < t+1 \in \mathrm{T}$ zaman dizileri ve $j_0,..., j_{t+1} \in \mathrm{E}$ durumları için,

$$P(X_{t+1} = j_{t+1} \mid X_t = j_t, ..., X_0 = j_0) = P(X_{t+1} = j_{t+1} \mid X_t = j_t) \tag{2.15}$$

sağlanır.

Eğer (2.15) deki sayılar t'ye bağlı değilse, sürece Homojen Markov Süreci denir.

3. MARKOV ZİNCİRİ

Tanım 3.1. Ω bir örnek uzayı, P ise Ω üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsü olsun. Her bir $t \in \mathrm{T} = \{0,1,2,...\}$ ve ω∈Ω için $X_t(\mu) \in E$ olacak şekilde sayılabilir E kümesini, sayılabilir durum uzayı olarak kabul eden $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ stokastik sürecini göz önüne alalım. Bu durumda $0,1,...,t,t+1 \in \mathrm{T}$ ve $j_0,..., j_{t+1} \in E$ için, (2.15) eşitliği sağlanıyorsa $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ stokastik sürecine Markov Zinciri denir. Tanımdan da kolayca görülebileceği üzere Markov Zinciri, kesikli zamanlı ve sonlu veya sayılabilir durumlu Markov sürecidir.

Örnek 3.1. Bir şirkete ait 3 tane telefon hattı var olsun. Bu hatların herhangi bir andaki meşgul olanlarının sayılarını dikkate alalım. Herhangi bir anda bu hatların ya hiçbiri meşgul değildir ya 1 tanesi, ya 2 tanesi ya da 3 tanesi meşguldür. Verilen bir zaman aralığında her dakika bu hatların meşgul olanlarının sayılarını gözlemlersek örnek uzayı $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$ olan bir *X* rastgele değişkeni oluşur, öyleki; X_1, ilk gözlemdeki meşgul hat sayısı, X_2 ikinci gözlemdeki meşgul hat sayısı vb. olur. Meşgul hatların sayılarının oluşturduğu bu $X_1, X_2,\ldots$ dizisi rastgele bir süreç oluşturur. Bu süreçte meşgul olan hat sayıları, sadece kendinden önceki en son gözlemdeki meşgul hat sayısına bağlı olduğundan ve süreç kesikli zamanlı ve sayılabilir durumlu olduğundan bir Markov Zinciridir.

3.1. Başlangıç Dağılımı, Geçiş Olasılık Fonksiyonu ve Geçiş matrisi

$\{X_t$: t≥0 , t∈T$\}$ kesikli indis kümeye sahip bir Markov zinciri olsun. Bu Markov zincirinin durum uzayını sonlu E={0,1,2,…,n} olarak alalım. Öncelikle bu sürecin başlangıç durumunu belirleyelim. Bunun için bir $®_0(i)$ başlangıç dağılımına ihtiyaç vardır.

Tanım 3.1.1.

$$®_0(i) := P(X_0 = i) \quad , \quad i \in E \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $®_0(i), i \in E$ fonksiyonuna zincirin başlangıç dağılımı denir. Bu fonksiyon,

$$\text{®}_0(i) \geq 0$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n} \text{®}_0(i) = 1$$

özelliklerini sağlar.

Başlangıç durumu belirlendikten sonra, bir sonraki durum $P(i,j)$ geçiş olasılık fonksiyonuyla belirlenir.

$$P(i,j) = P\left\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\right\}, \quad i,j \in E \tag{3.2}$$

şeklinde gösterilen $P(i,j)$ fonksiyonu, n-yinci anında i durumunda olan zincirin (n+1)-inci anında j durumuna geçiş olasılığı anlamına gelir ve bir-adım geçiş olasılığı olarak adlandırılır. Bu fonksiyon,

$$P(i,j) \geq 0 \qquad i,j \in E \tag{3.3}$$

ve

$$\sum_{j \in E} P(i,j) = 1 \qquad i \in E \tag{3.4}$$

özelliklerini sağlar.

Bir-adım geçiş olasılığı zaman parametresinden bağımsız olduğunda, yani zincir homojen olduğunda, Markov zincirinin durağan geçiş olasılığına sahip olduğu söylenir ve

$$P\left\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\right\} = P(i,j) = p_{ij} \quad ; \; i,j \in E \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1.2. p_{ij} geçiş olasılıkları $E^2 = E \times E$ ile indislenen, negatif olmayan bir matris içine yerleştirilebilir. Bu durumda oluşan

$$P = P^1 = \left[p_{ij}\right] = \begin{array}{c} \\ 0 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.6}$$

matrisine Makov zincirinin geçiş matrisi denir.

(3.6) matrisinin bileşenleri (3.3) ve (3.4) özelliklerini sağladığından bu matrise Markov matrisi denir. Kısaca, bir Markov zincirinin matrisine Markov matrisi denir (Çınlar 1975).

Durum uzayı $E=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$ yani $|E| = n+1$ olduğundan P geçiş matrisi $(n+1)\times(n+1)$ boyutlu kare matristir.

Ayrıca, ortak olasılıklar,

$$\begin{aligned} &P(X_0=i_0, X_1=i_1, X_2=i_2, \ldots, X_n=i_n) \\ &= P(X_0=i_0)P(X_1=i_1 \mid X_0=i_0)P(X_2=i_2 \mid X_1=i_1)\ldots P(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}) \end{aligned} \quad \textbf{(3.7)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ise, bütün ortak dağılımların geçiş olasılık fonksiyonu ve başlangıç dağılımı ile belirtilebileceğini ifade eder. Yani,

$$\begin{aligned} P(X_0=i_0, X_1=i_1) &= P(X_0=i_0)P(X_1=i_1 \mid X_0=i_0) \\ &= \circledR_0(i_0)P(i_0,i_1) \end{aligned}$$

ya da,

$$\begin{aligned} P(X_0=i_0, X_1=i_1, X_2=i_2) &= P(X_0=i_0, X_1=i_1)P(X_2=i_2 \mid X_0=i_0, X_1=i_1) \\ &= \circledR_0(i_0)P(i_0,i_1)P(X_2=i_2 \mid X_0=i_0, X_1=i_1) \end{aligned}$$

Markov özelliğinden,

$$P(X_2=i_2 \mid X_0=i_0, X_1=i_1) = P(X_2=i_2 \mid X_1=i_1) = P(i_1,i_2)$$

olduğundan,

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, X_2=i_2) = \circledR_0(i_0)P(i_0,i_1)P(i_1,i_2)$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle,

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_n=i_n) = \circledR_0(i_0)P(i_0,i_1)P(i_1,i_2)\ldots P(i_{n-1},i_n) \quad \textbf{(3.8)}$$

olduğu görülür.

Sürecin i durumundan j durumuna m adımda gelmesi olasılığı $P^{(m)}(i,j)$ ile gösterilir. Burada $n,m \in \mathbb{N}$ ve her $i,j \in E$ için,

$$P^{(m)}(i,j) = P\{X_{n+m}=j \mid X_n=i\} \quad \textbf{(3.9)}$$

olasılığına m-adım geçiş olasılık fonksiyonu denir.

Bir Markov zincirinin m-adım geçiş olasılıkları

$$P^m(i,j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(i,k)P^{m-1}(k,j) \quad \textbf{(3.10)}$$

eşitliğini sağlar. Özellikle,

$$m=1 \text{ ise } P^1(i,j)=P(i,j) \quad \text{ve} \quad m=0 \text{ ise } P^0(i,j)=I=\begin{cases}1 & , i=j\\ 0 & , i\neq j\end{cases}$$

şeklindedir.

(3.10) eşitliği $P^m = P\times P^{m-1}$ eşitliğine denktir ve böylece iterasyonla

$$P^m = P\times P\times P\ldots\times P$$

elde edilir. Diğer bir deyişle zincirin *i* durumundan *j* durumuna m-adımda geçiş olasılığı $P^m(i,j)$, P matrisinin m-yinci kuvvetinin (*i*,*j*)-nci bileşenidir.

(3.10) eşitliğinin en genel formu, ∀m,n ∈ ℕ ve ∀*i*,*j*∈*E* için,

$$P^{m+n}(i,j)=\sum_{k\in E}P^m(i,k)P^n(k,j) \qquad \textbf{(3.11)}$$

olarak ifade edilir. Bu eşitliğe Chapman-Kolmogorov denklemi denir. Bu denklem bize, başlangıç durumu *i* olan bir X sürecinin m+n adım sonra *j* durumuna gelmesi için bir *k* ara durumunda olması gerektiğini ifade eder, öyleki, süreç m adım sonunda *k* durumuna, ardından kalan n adım boyunca da *j* durumuna geçer.

(3.9) olasılık fonksiyonunun belirttiği matrise m-adım geçiş olasılık matrisi denir

$$P^m=\left[P^{(m)}(i,j)\right]_{i,j\in E}$$

ile gösterilir.

Örnek 3.1.1. $X=\{X_k;k\in\mathbb{N}\}$, durum uzayı *E*={x,y,z} ve geçiş matrisi

$$P=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z\end{array}\\ \begin{array}{c} x\\ y\\ z\end{array} & \begin{bmatrix}1/3 & 1/2 & 1/6\\ 1/4 & 0 & 3/4\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}\end{array}$$

olan bir Markov zinciri olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&P\{X_1=z,X_2=z,X_3=y,X_4=x,X_5=z,X_6=y,X_7=z|X_0=x\}\\&=P(x,z)P(z,z)P(z,y)P(y,x)P(x,z)P(z,y)P(y,z)\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\\&=\frac{1}{1536}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İki-adım geçiş olasılıkları ise

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 17/72 & 1/4 & 37/72 \\ 1/12 & 1/2 & 5/12 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisi ile verilir. Örnek olarak,

a-) $P\{X_2 = x \mid X_0 = z\} = P^2(z,x) = \dfrac{1}{8}$

b-) $P\{X_5 = y \mid X_3 = x\} = P^2(x,y) = \dfrac{1}{4}$

c-) $P\{X_1 = z, X_3 = z, X_4 = z, X_6 = y | X_0 = x\}$

$$= P(x,z)P^2(z,z)P(z,z)P^2(z,y)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{384}$$

olarak hesaplanabilir.

Dikkat edilirse iki-adım geçiş matrisinin herhangi bir satırının elemanları toplamı 1 dir. Benzer şekilde m-adım geçiş matrisi, P^m için de

$$\sum_{k=0}^{\infty} P^m(i,k) = 1$$

eşitliği sağlanır.

Geçiş matrisi sürecin herhangi bir adımdaki yapısal özelliklerini yansıtır. Geçiş matrisinin her bir satırı belirli bir durum için herhangi bir adımda sürecin gelebileceği bütün durumları gösterir. Dolayısıyla bir durumdaki sürecin herhangi bir adımda gelebileceği bütün durumların olasılıkları toplamı 1 olacağından geçiş matrisinin her bir satırının bileşenleri toplamı 1 olacaktır.

Örnek 3.1.2. X, durum uzayı E={1,2,3}, başlangıç dağılımı $® = (1/4, 3/4, 0)$

(Bir π_0 başlangıç dağılımı $_s(E)$ boyutlu satır vektörü olarak düşünülebilir. Burada π_0 = { $\pi_0(1)$, $\pi_0(2)$, $\pi_0(3)$} tür ve π_0 yerine π kullanılmıştır.) ve geçiş matrisi

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

olan bir Markov zinciri olsun. Bu durumda aşağıdaki olasılıkları hesaplayalım.

a-) $P\{X_3 = 3, X_4 = 1, X_6 = 2 \mid X_0 = 2\} = ?$

b-) $P\{X_2 = 1\} = ?$

c-) $P\{X_3 = 1\} = ?$

d-) $P\{X_2 = 1, X_5 = 3\} = ?$

e-) $P\{X_1 = 1, X_3 = 2, X_6 = 3\} = ?$

Öncelikle çözümlerde kullanacağımız iki-adım ve üç-adım geçiş olasılıklarını veren P^2 ve P^3 matrislerini bulalım.

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.44 & 0.18 & 0.38 \\ 0.40 & 0.19 & 0.41 \\ 0.40 & 0.18 & 0.42 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.18 & 0.38 \\ 0.40 & 0.19 & 0.41 \\ 0.40 & 0.18 & 0.42 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.412 & 0.182 & 0.406 \\ 0.420 & 0.181 & 0.399 \\ 0.420 & 0.182 & 0.398 \end{bmatrix} \end{array}$$

a-) $P\left\{X_3 = 3, X_4 = 1, X_6 = 2 \mid X_0 = 2\right\} = P^3(2,3)\cdot P(3,1)\cdot P^2(1,2)$
$$= (0.399)\cdot(0.5)\cdot(0.18)$$
$$= 0.03591$$

b-) $P\left\{X_2 = 1\right\} = \sum_i \left[P\left\{X_0 = i\right\}\cdot P\left\{X_2 = 1 \mid X_0 = i\right\}\right]$
$$= \circledR(1)\cdot P^2(1,1) + \circledR(2)\cdot P^2(2,1) + \underbrace{\circledR(3)\cdot\ \ldots}_{0}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(0.44) + \frac{3}{4}\cdot(0.40) + 0$$
$$=0.41$$

c-) $P\left\{X_3 = 1\right\} = \sum_i \left[P\left\{X_0 = i\right\}\cdot P\left\{X_2 = 1 \mid X_0 = i\right\}\right]$
$$= \circledR(1)\cdot P^3(1,1) + \circledR(2)\cdot P^3(2,1) + \underbrace{\circledR(3)\cdot\ \ldots}_{0}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(0.412) + \frac{3}{4}\cdot(0.420) + 0$$
$$=0.418$$

d-) $P\left\{X_2 = 1, X_5 = 3\right\} = \sum_i \left[P\left\{X_0 = i\right\}\cdot P\left\{X_2 = 1, X_5 = 3 \mid X_0 = i\right\}\right]$
$$= \circledR(1)\cdot P^2(1,1)\cdot P^3(1,3) + \circledR(2)\cdot P^2(2,1)\cdot P^3(1,3) + \underbrace{\circledR(3)\cdot\ \ldots}_{0}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(0.44)\cdot(0.406) + \frac{3}{4}\cdot(0.40)\cdot(0.406) + 0$$
$$=0.16646$$

e-) $P\left\{X_1 = 1, X_3 = 2, X_6 = 3\right\} = \sum_i \left[P\left\{X_0 = i\right\}\cdot P\left\{X_1 = 1, X_3 = 2, X_6 = 3 \mid X_0 = i\right\}\right]$
$$= \circledR(1)\cdot P(1,1)\cdot P^2(1,2)\cdot P^3(2,3) + \circledR(2)\cdot P(2,1)\cdot P^2(1,2)\cdot P^3(2,3) + \underbrace{\circledR(3)\cdot\ \ldots}_{0}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot(0.3)\cdot(0.18)\cdot(0.399) + \frac{3}{4}\cdot(0.5)\cdot(0.18)\cdot(0.399) + 0$$
$$=0,032319$$

Tanım 3.1.3. Bileşenleri negatif olmayan ve bileşenleri toplamı 1 e eşit olan tek satırlı matrise bir olasılık vektörü denir. $v = \left(v_1, v_2, \ldots, v_n\right)$ olasılık vektörü için $v_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ özellikleri sağlanır. Olasılık vektörü bir Markov zincirinde başlangıç durumunun gözlemlerinin durum olasılıklarını belirler.

$$v_i^0 = \left[p_{i1} \quad p_{i2} \quad \ldots \quad p_{ii} \quad \ldots \quad p_{in}\right]$$

satır matrisi başlangıç olasılık vektörüdür ve geçiş matrisiyle birlikte bir zincirin belirli bir durumda belirli bir zamandaki olasılığını belirler. *P* matrisinin *i.* satırı, *i.* olasılık vektörü olmak üzere, zincir *i*. durumundayken 1 adım sonraki durum olasılıkları,

$$v_i^1 = v_i^0.P = \begin{bmatrix} p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ii} & \dots & p_{in} \end{bmatrix}.P$$

ile bulunur. 2. adımdaki sonuçların olasılıkları ise $v_i^2 = v_i^1.P$ ile yani, v_i^1 vektörü ile *P* geçiş matrisinin çarpımı ile bulunur. Benzer işlemlerle,

$$\begin{aligned} v_i^3 &= v_i^2.P = (v_i^1.P).P = v_i^1.P^2 \\ v_i^4 &= v_i^3.P = (v_i^1.P^2).P = v_i^1.P^3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_i^n &= v_i^{n-1}.P = (v_i^1.P^{n-2}).P = v_i^1.P^{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla başlama durumundan herhangi bir adımdaki sonuçların olasılıkları v_i olasılık vektörü ile *P* geçiş matrisinin kuvvetleri ile belirlenir.

Örnek 3.1.3. (Örnek 3.1) deki telefon örneği için geçiş matrisini

$$P = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç olasılık vektörü,

$$v = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda iki adım sonra iki hattın meşgul olma olasılığını bulalım.

$$v.P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0.22 & 0.37 & 0.25 & 0.15\\ 0.21 & 0.38 & 0.25 & 0.15\\ 0.17 & 0.31 & 0.30 & 0.20\\ 0.12 & 0.22 & 0.28 & 0.24\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \quad\; x_0 \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \\ =\begin{bmatrix}0.21 & 0.43 & 0.24 & 0.12\end{bmatrix}\end{array}$$

elde edilir. Dolayısıyla iki hattın meşgul olma olasılığı 0.24 tür.

3.2. Markov Zincirleri Üzerine Bazı Örnekler

Örnek 3.2.1. (Bernoulli sürecinde başarıların sayısı)

N_n, herhangi bir denemede başarı olasılığı p olan n tane Bernoulli denemesindeki başarıların sayısını göstersin.

$$P\left\{N_{n+1}=j \quad N_0,N_1,\ldots,N_n\right\}=P\left\{N_{n+1}=j \quad N_n\right\}$$

olduğundan $\left\{N_n : n\in\mathbb{N}\right\}$ bir Markov zinciridir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
P_{ij}=P\left\{N_{n+1}=j \quad N_n=i\right\}&=\frac{P\left\{N_{n+1}=j,N_n=i\right\}}{P\left\{N_n=i\right\}}\\
&=\frac{P\left\{N_{n+1}-N_n=j-i,N_n=i\right\}}{P\left\{N_n=i\right\}}\\
&=\frac{P\left\{N_{n+1}-N_n=j-i\right\}P\left\{N_n=i\right\}}{P\left\{N_n=i\right\}}\\
&=P\left\{N_{n+1}-N_n=j-i\right\}\\
&=P\left\{N_{n+1}=j-i\right\}\\
&=\begin{cases}p & ,j-i=1\\ q & ,j-i=0\\ 0 & ,j-i\neq 0,1\end{cases}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $\left\{N_n : n\in\mathbb{N}\right\}$ durum uzayı $E=\mathbb{N}$ olan bir Markov zinciridir.

Bu Markov zincirinin geçiş matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$P=\begin{bmatrix} q & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Bu Markov zincirinde *n*-adım geçiş olasılıkları şöyledir:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} = P\left\{N_{m+n}=j \quad N_m=i\right\} &= P\left\{N_{m+n}-N_m=j-i\right\} \\ &= P\left\{N_n=j-i\right\} \\ &= \frac{n!}{(n-j+i)!(j-i)!}\,p^{j-i}q^{n-j+i} \quad , \ j=i,...,i+n \end{aligned}$$

Örnek 3.2.2. (Rastgele yürüyüş modeli)

$A_1, A_2,...$ ler ortak olasılık fonksiyonu f olan tamsayı değerli bağımsız rastgele değişkenler ve X_0, A_i lerden bağımsız, tamsayı değerli bir rastgele değişken olsun. $X_n = X_0 + A_1 + \ldots + A_n$ olarak tanımlanırsa, $\left\{X_n : n \geq 0\right\}$ dizisine bir rastgele yürüyüş denir. Bu durumda X_n ler, durum uzayı tamsayılar ve geçiş fonksiyonu $p_{ij} = P(i, j) = f(j-i)$ olan bir Markov zinciri oluşturur. Bunun doğruluğunu kanıtlamak için X_0 ın dağılımını ®_0 ile gösterelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} P\left\{X_0=i_0,...,X_n=i_n\right\} &= P\left\{X_0=i_0, A_1=i_1-i_0,...,A_n=i_n-i_{n-1}\right\} \\ &= P\left\{X_0=i_0\right\}P\left\{A_1=i_1-i_0\right\}...P\left\{A_n=i_n-i_{n-1}\right\} \\ &= \text{®}_0(i_0)\,f(i_1-i_0)...f(i_n-i_{n-1}) \\ &= \text{®}_0(i_0)P(i_0,i_1)...P(i_{n-1},i_n) \\ &= \text{®}_0(i_0)\,p_{i_0 i_1}...p_{i_{n-1}i_n} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece (3.8) sağlanmış olur.

Bu Markov zincirine göre, tamsayılar üzerinden bir parçacığın hareket ettiğini düşünelim Bu parçacık, *i* de ne zaman olursa, nasıl orada olduğuna bakılmaksızın, $f(j-i)$ olasılığı ile j durumuna sıçrar.

Özel bir durum olarak, $f(1)=p$, $f(-1)=q$ ve $f(0)=r$ olan bir basit rastgele yürüyüş modeli düşünelim. Burada, *p*, q ve r negatif olmayan ve toplamları 1 e eşit olan değerlerdir. Buna göre geçiş fonksiyonu,

$$P(i,j) = p_{ij} = \begin{cases} p & , j = i+1 \\ q & , j = i-1 \\ r & , j = i \\ 0 & , \text{diğer h.} \end{cases}$$

şeklindedir.

Bir parçacığın böyle bir rastgele yürüyüş modeline sahip olduğunu düşünelim. Eğer bu parçacık verilen bir gözlemde i durumunda ise, o zaman bir sonraki gözlemde p olasılığı ile $i+1$ durumuna, q olasılığı ile $i-1$ durumuna sıçrayacaktır ve r olasılığı ile aynı i durumunda kalacaktır.

Örnek 3.2.3. (Kumarbazın İflası Problemi)

Bir kumarbazın her oyunda bir para birimi kazanma olasılığı p, bir para birimi kaybetme olasılığı da $1-p$ ile tanımlansın. Kumarbaz oyunu ancak iki şartla bırakır; ya elindeki para sıfıra düşecektir (iflas) ya da N para birimine ulaşacaktır. Bu durumda Markov zincirinin geçiş olasılığı şu şekilde oluşacaktır:

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1} \quad , \ i = 1,2,3,\ldots,N-1$$
$$P_{00} = P_{NN} = 1$$

Yukarıdaki denklem rastgele yürüyüş modeliyle 0 ve N durumları haricinde uyuşmakta, fakat oyun 0 ya da N durumuna girdiğinde bir daha buradan çıkamamaktadır, bu iki durum yutucu durumdur.

Örneğin, bir kumarbazın elinde 0 zamanında (başlangıçta) 2 Türk Lirası (TL) kadar para vardır. Bu kumarbaz her seferinde 1 TL yatırabileceği bir oyun oynadığında, kazanırsa yatırdığı 1 TL yi ve bir o kadar parayı daha alıyor, kaybetme durumunda ise yatırdığı para geri verilmiyor. Para 4 TL ye ulaştığında ya da bittiğinde ise oyun sona eriyor.

Dikkat edilecek olursa $t+1$ oyun sonra elde olan para miktarı, t-yinci oyundan sonra eldeki kalan para miktarına bağlıdır. Bu da bu durumun bir Markov zinciri olduğunu göstermektedir. Oyunun kuralları da zaman içinde değişmediğinden Markov zinciri durağandır. Aşağıda gösterilen geçiş matrisinde, durum olarak alınan, elde bulunan paradır.

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-P & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-P & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-P & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Geçiş matrisinde, $p_{00}=p_{44}=1$ olduğu görülmektedir, yani 0 ya da 4 TL para birimine ulaşıldığında oyun bitmektedir, durum değişmemektedir. Diğer durumlarda ise kaybetmenin olasılığı $1-p$, kazanmanın olasılığı ise p olduğu görülmektedir.

3.3. Değme Anları

Tanım 3.3.1. $(X_n)_{n\geq 0}$, geçiş matrisi P olan bir Markov zinciri, A ise E durum uzayının bir alt kümesi olsun. $\exists n \geq 0$ için $X_n \in A$ ise,

$$T_A=\min\left(n\geq 0 : X_n\in A\right) \qquad \textbf{(3.12)}$$

$\forall n \geq 0$ için $X_n \notin A$ ise, $T_A=\infty$ şeklinde tanımlanan

$$T_A:\Omega\to\{0,1,2,...\}\cup\{\infty\}$$

rastgele değişkenine Markov zincirinin $A\subset E$ kümesine ilk kez dahil olduğu an yani değme anı (zamanı) denir.

T_a, a $\in E$ ile a noktasının değme anını gösterelim.

$$P^n(x,y)=\sum_{m=1}^{n}P_x(T_y=m)P^{n-m}(y,y), n\geq 1 \qquad \textbf{(3.13)}$$

değme anlarını içeren önemli bir eşitliktir. Bu eşitliğin ispatı için $\{T_y=m, X_n=y\}$ ayrık olayların kümesini ele alalım. $1 \leq m \leq n$ olsun. $\{X_n=y\}=\bigcup_{m=1}^{n}\{T_y=m, X_n=y\}$ şeklinde tanımlansın. Böylece y nin değme anına göre $\{X_n=y\}$ olayı parçalanır. Bu parçalanmadan

$$\begin{aligned} P^n(x,y)=P_x(X_n=y) &= \sum_{m=1}^{n}P_x\{T_y=m, X_n=y\} \\ &= \sum_{m=1}^{n}P_x\left(T_y=m\right)P\left(X_n=y \mid X_0=x, T_y=m\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n}P_x\left(T_y=m\right)P\left(X_n=y \mid X_0=x, X_1\neq y,..., X_{m-1}\neq y, X_m=y\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n}P_x\left(T_y=m\right)P^{n-m}(y,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolasıyla (3.13) sağlanır (Aliyev,2010)

Zincirin i başlangıç durumu verildiğinde, A'nın ortalama değme anı,

$$m_i^A := \mathbb{E}\{T_A \mid X_0 = i\} \qquad \textbf{(3.14)}$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathbb{E}\{T_A \mid X_0 = i\}$, zincirin i başlangıç durumu verildiğinde T_A nın koşullu beklentisidir.

Teorem 3.3.1. $m^A = \{m_i^A \mid i \in E\}$ ortalama değme anları vektörü,

$$m_i^A = \begin{cases} 0 & , \ i \in A \\ 1 + \sum_{j \in E} P_{ij} m_j^A & , \ i \notin A \end{cases}$$

lineer denklem sistemi için negatif olmayan minimal çözümdür. Bu durumda eğer herhangi bir $\{y_i | i \in E\}$ negatif olmayan çözüm için çözüm minimal ise,

$\forall i \in E$ için $y_i \geq m_i^A$ dır.

İspat: Eğer $i \in A$ ise $T_A = \min\{n \geq 0 \mid X_n \in A\} \equiv 0$ dır, bu ise $m_i^A = 0$ demektir yani zincir n=0 adımda kesinlikle A içindeki bir durumda olacaktır.

$i \notin$ A olsun. İlk adımda,

$$m_i^A = \mathbb{E}\{T_A \mid X_0 = i\}$$
$$= \sum_{j \in E} P(X_1 = j \mid X_0 = i)\mathbb{E}\{T^A \mid X_0 = i, X_1 = j\}$$

Markov özelliğinden,

$$= \sum_{j \in E} p_{ij} \mathbb{E}\{T_A \mid X_1 = i\}$$
$$= \sum_{j \in E} p_{ij}(1 + m_j^A)$$
$$= 1 + \sum_{j \in E} p_{ij} m_j^A$$

elde edilir. Böylece verilen denklemler sağlanır.

Şimdi ise kabul edelim ki $\{y_i \mid i \in E\}$ denklemlerin negatif olmayan bir çözümü olsun. O halde $i \in A$ için $m_j^A = y_i = 0$ dır. i $\notin$ A için ise,

$$
\begin{aligned}
y_i &= 1+\sum_{j\in E} p_{ij} y_j \\
&= 1+\sum_{j\notin A} p_{ij}(1+\sum_{k\notin A} p_{jk} y_k) \\
&= 1+\sum_{j\notin A} p_{ij} + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} p_{ij} p_{jk} y_k \\
&= 1+q_1+q_2+\cdots+q_n+\sum\cdots\sum p_{ij}\cdots p_{uv} y_v
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $q_n = P(X_1 \notin A, X_2 \notin A, \cdots, X_n \notin A \mid X_0 = i)$, X zincirinin i başlangıç durumundan sonraki ilk n adım içinde A ya girmeme olasılığıdır.

y_i negatif olmayan varsayıldığından ve son ifadeden,

$$y_i \geq 1+q_1+q_2+\cdots+q_n$$

elde edilir.

n keyfi seçildiğinden, n $\longrightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$y_i \geq \lim_{n\to\infty}(1+q_1+q_2+\cdots+q_n) \geq m_i^A$$

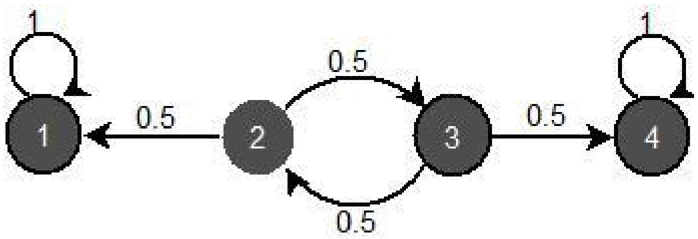
elde edilir. Yani, her $i \in E$ için $y_i \geq m_i^A$ dır ve böylece $\{m_i^A \mid i \in E\}$ minimal çözümdür.

Başlangıç durumu i olan bir $(X_n)_{n\geq 0}$ Markov zincirinin A kümesine değme olasılığı

$$h_i^A = P_i(T_A < \infty) \qquad \textbf{(3.15)}$$

ile gösterilir. Eğer A kapalı bir sınıf ise h_i^A ya yutulma olasılığı denir. Dolayısıyla $h_i^A = P_i(A \text{ ya değme})$, $m_i^A = \mathbb{E}_i(A \text{ ya değme anı})$ olarak alınır.

Örnek 3.3.1. Geçiş diyagramı



ile verilen bir zincir, 2 den başladığında 4 ün içine yutulma olasılığı nedir?
Zincirin 1 veya 4 içine yutulması ne kadar sürer?

Öncelikle,

$$h_i = P_i(4\text{'e değme}), \quad m_i = \mathbb{E}_i\left(\{1,4\}\text{'e değme zamanı}\right)$$

olarak alalım. Açıkça görülebilir ki $h_1 = 0, h_4 = 1$ ve $m_1 = m_4 = 0$ dır. Şimdi de 2 den başladığımızı kabul edelim ve bir adım sonraki durumu göz önüne alalım. 0.5 olasılıkla 1'e ve 0.5 olasılıkla 3'e geçebiliriz. Böylece,

$$h_2 = (0.5)h_1 + (0.5)h_3 \ , \quad m_2 = 1 + (0.5)m_1 + (0.5)m_3$$

elde edilir. İkinci formülde 1 görülür çünkü ilk adım için zaman sayıyoruz.

Benzer şekilde,

$$h_3 = (0.5)h_2 + (0.5)h_4 \ , \quad m_3 = 1 + (0.5)m_2 + (0.5)m_4$$

elde edilir.

$$h_2 = (0.5)h_3 = (0.5)\left[(0.5)h_2 + (0,5)\right] ,$$
$$m_2 = 1 + (0.5)m_3 = 1 + (0.5)\left[1 + (0.5)m_2\right]$$

dolayısıyla,

$$h_2 = \frac{1}{3}$$
$$m_2 = 2$$

bulunur. Yani, 2 den başlandığında 4'e değme olasılığı 1/3 ve ortalama yutulma zamanı 2 dir.

Teorem 3.3.2. $h^A = \left(h_i^A : i \in E\right)$ değme olasılıkları vektörü,

$$h_i^A = \begin{cases} 1 & , \ i \in A \\ \sum_{j \in E} P_{ij} h_j^A & , \ i \notin A \end{cases}$$

lineer denklem sisteminin negatif olmayan minimal çözümüdür.

(Burada minimallik her *i* için $x_i \geq 0$ olmak üzere her i için $x_i \geq h_i$ anlamındadır.)

İspat: Öncelikle h^A nın lineer denklem sistemini sağladığını gösterelim. Eğer $X_0 = i \in A$ ise $T_A = 0$ dır, böylece $h_i^A = 1$ dir. $X_0 = i \notin A$ ise $T_A \geq 1$ dir. Böylece Markov özelliğinden

$$P_i(T_A < \infty \mid X_1 = j) = P_j(T_A < \infty) = h_j^A \quad ,$$

$$h_i^A = P_i(T_A < \infty) = \sum_{j\in E} P_i(T_A < \infty, X_1 = j)$$
$$= \sum_{j\in E} P_i(T_A < \infty, X_1 = j) P_i(X_1 = j) = \sum_{j\in E} p_{ij} h_j^A$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $x = (x_i : i \in E)$ lineer denklem sisteminin herhangi bir çözümü olsun. O halde i ∈A için $h_i^A = x_i = 1$ olur. Kabul edelim i ∉A olsun, böylece

$$x_i = \sum_{j\in E} p_{ij} x_j = \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A} p_{ij} x_j$$

elde edilir. Bu durumda eğer,

$$x_j = \sum_{k\in A} p_{jk} + \sum_{k\notin A} p_{jk} x_k$$

yazılırsa,

$$x_i = \sum_{j\in A} p_{ij} + \sum_{j\notin A} p_{ij} \left(\sum_{k\in A} p_{jk} + \sum_{k\notin A} p_{jk} x_k \right)$$
$$= P_i(X_1 \in A) + P_i(X_1 \notin A, X_2 \in A) + \sum_{j\notin A} \sum_{k\notin A} p_{ij} p_{jk} x_k$$

elde edilir.

Son ifadedeki x yerine tekrar eşiti yazılır ve bu işlem n kez uygulanırsa,

$$x_i = P_i(X_1 \in A) + \ldots + P_i(X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A) + \sum_{j_1\notin A} \cdots \sum_{j_n\notin A} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n}$$

elde edilir.

Eğer x negatif değilse, son ifadenin sağ tarafı da negatif değildir ve kalan terimler toplamı $P_i(T_A \le n)$ olur. Böylece her n için $x_i \ge P_i(T_A \le n)$, dolayısıyla

$$x_i \ge \lim_{n\to\infty} P_i(T_A \le n) = P_i(T_A < \infty) = h_i$$

elde edilir.

3.4. Durum Uzayının Sınıflandırılması

3.4.1. Yutucu Durum

Markov zincirlerinin özel bir hali de önceden belirlenen koşullara erişmeyi durduran sistem veya süreçlerdir. Yutucu Markov zinciri ile modellenerek bu türden süreçlerin sistemleri incelenebilir.

Tanım 3.4.1.1. Girildiğinde bir daha çıkılamayan duruma yutucu durum denir. Diğer bir ifadeyle, $P(i,i) = 1$ veya her $j \neq i$ için $P(i,j) = 0$ ise i durumu yutucu durumdur.

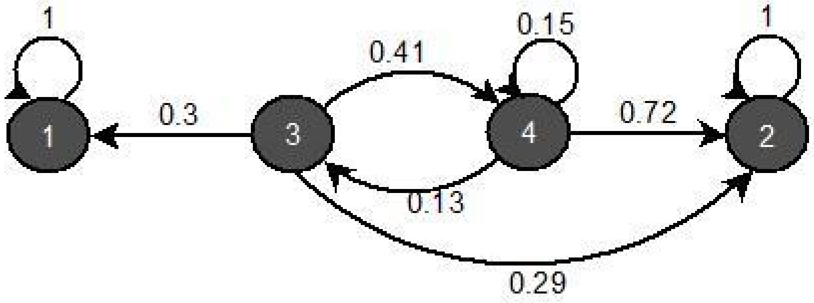
Sırasıyla aşağıdaki iki koşul sağlandığında zincirin kendisine yutucu zincir denir.

1-) Zincir en az bir yutucu duruma sahiptir.

2-) Her bir yutucu olmayan durumdan yutucu bir duruma bir veya daha fazla adımda geçiş mümkündür.

Dolayısıyla yutucu bir zincir, sonlu sayıda adım sonra yutucu durumların birinin içine yutulur.

Örnek 3.4.1.1. Geçiş diyagramı,



olan bir Markov zincirini ele alalım. Bu zincirin geçiş matrisi

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.29 & 0 & 0.41 \\ 0 & 0.72 & 0.13 & 0.15 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklindedir.

$P(1,1) = 1$ olduğundan 1 durumu yutucu durumdur. Benzer şekilde $P(2,2) = 1$ olduğundan 2 durumu da yutucu durumdur. Ancak 3 ve 4 durumları yutucu olmayan durumlardır. Öte yandan 3 ve 4 yutucu olmayan durumlardan yutucu olan 1 veya 2 durumlarına ulaşmak mümkün olduğundan bu Markov zinciri yutucu zincirdir.

Örnek 3.4.1.2.

Bir adam bir doğru boyunca orjin ve 4 noktası arasında yürümektedir.1,2,3 noktalarında bulunma halleri düşünülerek, bulunduğu noktadan p olasılıkla sağa ve 1 - p = q olasılıkla da sola bir adım gidebilmektedir. 0 ve 4 noktalarında bulunması halinde ise belirtilen noktalarda kalacağına göre geçiş matrisini yazınız.

Çözüm: n adım sonra adamın durumu X_n rastgele değişkeni ile ve i noktada bulunması E_i ile gösterilirse, durum uzayı

$$\left[E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\right]$$

olur. Burada E_0 *ve* E_4 yutucu durumlardır. Diğer durumlardan sağa doğru yapılan her bir adım p olasılıkla, sola doğru yapılan her bir adım ise q = 1 – p olasılıkla yapılır. Geçiş matrisini yazarsak,

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde edilir.

Yutucu Markov zinciri analizlerinde yutucu olmayan bir durumdan başlayan sürecin n adım sonraki durumuna ilişkin aşağıdakilere cevap aranır.

1. Sürecin, yutulana kadar yutucu olmayan her bir durumda kaç defa bulunduğu
2. Sürecin yutulana kadarki adım sayısı
3. Sürecin belirli bir yutucu durumda yutulma olasılığı

Yutucu Markov zinciri analizi için geçiş matrisinin düzenlenmesine ihtiyaç vardır. Geçiş matrisi yutucu özelliğinden dolayı dört alt matrise ayrılır. Bu yeni şekilde gösterime matrisin standart formu veya kanonik formu denir (Halac 2005).

Yutucu Markov zincirinde durumlar tekrar numaralandırılırken geçici durumlar ilk numaralandırılır. Eğer Markov zincirinde r tane yutucu durum ve k tane geçici durum varsa, geçiş matrisinin standart formu şu şekilde oluşturulur;

$$P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R & Q \end{array} \right] \\ \underbrace{\ }_{(r)}\ \underbrace{\ }_{(k)} \end{array} \begin{array}{l} \} \quad (r) \text{ adet yutucu durum} \\ \} \quad (k) \text{ adet yutucu olmayan durum} \end{array}$$

Burada,

I: (r×r) boyutlu birim matristir, bir yutucu durumda bulunma olasılıklarını verir.

0: (r×k) boyutlu sıfır matrisidir, bir yutucu durumdan yutucu olmayan bir duruma geçiş olasılığını verir.

R: (k×r) boyutlu matristir, herhangi bir yutucu olmayan durumdan bir yutucu duruma geçiş olasılıklarını verir.

Q: (k×k) boyutlu matristir, herhangi bir yutucu olmayan durumdan diğer yutucu olmayan durumlara geçiş olasılıklarını verir.

Şimdi ise cevabı aranan üç sorunun cevabının nasıl bulunacağını verelim.

1-) Yutucu olmayan bir durumdan başlayan bir sürecin yutulmadan önce herhangi bir yutucu olmayan durumda ortalama olarak kaç defa bulunacağı, geçiş matrisi standart formda yazıldıktan sonra

$$\mathbb{E} = (I - Q)^{-1}$$

bağıntısından elde edilir. Bu matrise temel matris denir.

2-) k = Yutucu Markov zincirinin yutucu olmayan adım sayısı,

$\mathbb{E}$ = (k×k) boyutlu Temel matris,

C = Elemanları 1 olan (k×1) boyutlu sütun vektörü,

olmak üzere sürecin yutulana kadar gerekli adım sayısı

$$\mathbb{E}\mathrm{C}$$

vektörünün bileşenleridir.

3-) Sürecin belirli bir yutucu durumda yutulma olasılığı B ile gösterilirse,

$$B = (I - Q)^{-1} R$$

veya

$$B = \mathbb{E}R$$

ile bulunur.

Örnek 3.4.1.3. Geçiş matrisi

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}$$

olan zinciri ele alalım.

Öncelikle geçiş matrisini standart formda yazalım. Bu durumda,

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

olup buradan,

$$I-Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0.9&0&0&0\\0&0&0.9&0&0\\0&0&0&0.9&0\\0&0&0&0&0.9\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-0.9&0&0&0\\0&1&-0.9&0&0\\0&0&1&-0.9&0\\0&0&0&1&-0.9\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla,

$$\mathbb{E}=\left(I-Q\right)^{-1}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0.9&0.81&0.729&0.6561\\0&1&0.9&0.81&0.729\\0&0&1&0.9&0.81\\0&0&0&1&0.9\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

elde edilir.

Yani , 1. durumda başlayan sürecin yutulana kadar ortalama olarak 1 durumunda 1 kez, 2 durumunda 0.9 kez, 3 durumunda 0.81 kez ve benzer şekilde 4 ve 5 durumlarında ise 0.729 kez ve 0.6561 kez bulunacağını gösterir. Benzer şekilde başlangıç durumu 2,3,4,5 olan sürecin yutucu olmayan durumlarda kaç kez bulunacağı belirlenir.

Şimdi ise sürecin yutulana kadar ortalama adım sayısını bulalım.

Yutucu olmayan bir durumdan başlayarak sürecin yutucu bir durumda yutulana kadar ortalama adım sayısı, sürecin yutucu olmayan her bir durumda bulunma sayıları toplamına eşittir (Halac 2005).

$$\mathbb{E} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 & 0.6561 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 \\ 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathbb{E}$, (5×5) boyutunda temel matris, C ise (5×1) boyutlu sütun matrisi olmak üzere sürecin başlangıç durumlarına göre yutulana kadar ortalama adım sayıları $\mathbb{E}C$ matrisinin elemanlarıdır. Böylece,

$$\mathbb{E}C = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 & 0.6561 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 \\ 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0.81 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.0951 \\ 3.469 \\ 2.71 \\ 1.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

<u>Başlangıç durumu</u> <u>Yutulana kadar ortalama adım sayısı</u>

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 4.0951 \\ 3.469 \\ 2.71 \\ 1.9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu da gösteriyor ki, süreç 1 durumunda başlarsa 4.0951 ortalama adım sonra, 2 durumunda başlarsa ortalama 3.469 adım sonra, benzer şekilde devam edilirse, 5 durumunda başlarsa ortalama 1 adım sonra yutucu bir duruma girer.

Şimdi ise sürecin belirli bir yutucu durumda yutulma olasılığını bulalım.

Yutulma olasılıklarını veren matris $B = \mathbb{E}R$ matrisidir. Böylece,

$$B=\mathbb{E}R=\begin{bmatrix}1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 & 0.6561\\ 0 & 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729\\ 0 & 0 & 1 & 0.9 & 0.81\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\\
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array} & \begin{bmatrix}0.59049 & 0.1 & 0.09 & 0.081 & 0.0729 & 0.06561\\ 0.6561 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.081 & 0.0729\\ 0.729 & 0 & 0 & 0.1 & 0.09 & 0.081\\ 0.81 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.09\\ 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix}
\end{array}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla 1 durumunda başlayan bir sürecin 9 durumunda yutulma olasılığı 0.081, 6 durumunda yutulma olasılığı 7,8,9,10 ve 11 durumlarında yutulma olasılıkları toplamının 1 den çıkarılmasıyla yani, 1 – (0.1 + 0.09 + 0.081 + 0.0729 + 0.06561) = 0.59049 olarak bulunur. Benzer şekilde yutucu olmayan 1,2,3,4,5 durumlarında başlayan sürecin 6,7,8,9,10,11 yutucu durumların birinde yutulma olasılıkları bu matris ile kolaylıkla bulunur.

3.4.2. Haberleşen Durumlar

$P^n(i,j)=P(X_n=j\mid X_0=i)>0$ olacak şekilde sonlu bir n ≥ 0 tamsayısı varsa, *i* durumundan *j* durumuna varılabilir denir ve $i \rightsquigarrow j$ ile gösterilir. (Privault 2012)

Diğer bir deyişle, *i* durumundan *j* durumuna sıfırdan farklı olasılık ile belirli sayıda adımda ulaşmak mümkün ise, *i* den *j* ye varılabilirdir veya ulaşılabilirdir.

Teorem 3.4.2.1. Aşağıdakiler birbirine denktir.

i. $i \rightsquigarrow j$

ii. $P(i,i_1)P(i_1,i_2)\cdots P(i_{n-1},j)>0$, $\exists n\in\mathbb{N}$ ve $\exists i_1,\ldots,i_{n-1}\in E$.

iii. $P(X_n=j\mid X_0=i)>0$, $\exists n\geq 0$.

İspat. Eğer $i=j$ ise ispat açıktır. Bu yüzden $i\neq j$ olsun.

(i. $\Longrightarrow$ iii.) Kabul edelim $i \rightsquigarrow j$ olsun.

$$\exists n \geq 0\ , \quad 0 < P(X_n = j \mid X_0 = i) \leq \sum_{n\geq 0} P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

olduğundan, sağ taraftaki toplamda sıfırdan farklı bir terim vardır. Dolayısıyla iii. sağlanır.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Kabul edelim ki ii. sağlansın. Bu durumda

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} P(i,i_1)P(i_1,i_2)\cdots P(i_{n-1},j)$$

elde edilir ki bu toplam E içindeki durumların bütün olası seçenekleri boyunca uzanır. Varsayımdan, bu toplam sıfırdan farklı bir terim içerir. Böylece $P(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$ elde edilir, yani iii. sağlanır.

(iii. $\Rightarrow$ ii. ve iii. $\Rightarrow$ i.) Şimdi de kabul edelim ki iii. sağlansın. $P(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$ olduğundan toplam da pozitiftir ve dolayısıyla toplamın pozitif bir terimi vardır, yani ii. sağlanır. Ayrıca i. de sağlanır, çünkü

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) \leq P(X_m = j \mid X_0 = i),\ \exists m \geq 0$$

sağlanır.

$\rightsquigarrow$ bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişken olduğundan bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 3.4.2.1. Hem *i* durumundan *j* durumuna hem de *j* durumundan *i* durumuna varılabilirse *i* ile *j* durumlarına haberleşen durumlar denir $i \leftrightsquigarrow j$ ile gösterilir. Yani,

$$i \leftrightsquigarrow j \quad \Leftrightarrow \quad i \rightsquigarrow j \text{ ve } j \rightsquigarrow i.$$

$\rightsquigarrow$ bağıntısı yansıyan, simetrik, geçişken olduğundan $\leftrightsquigarrow$ bağıntısı da yansıyan, simetrik, geçişkendir. Dolayısıyla haberleşme bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Her denklik bağıntısında olduğu gibi, bu denklik bağıntısı da E yi haberleşen sınıflar denen denklik sınıflarına ayırır. *i* durumuna karşılık gelen denklik sınıfı, *i* durumuyla haberleşen bütün durumların kümesidir. Yani,

$$[i] := \{ j \in E : j \leftrightsquigarrow i \}. \qquad \textbf{(3.16)}$$

Dolayısıyla tanımdan da görülebileceği üzere,

$$[i] = [j] \Leftrightarrow i \leftrightsquigarrow j$$

olur.

E sonlu bir küme ise haberleşen sınıfların sayısı da sonludur, sonsuz ise haberleşen sınıfların sayısı sonsuz olabilir.

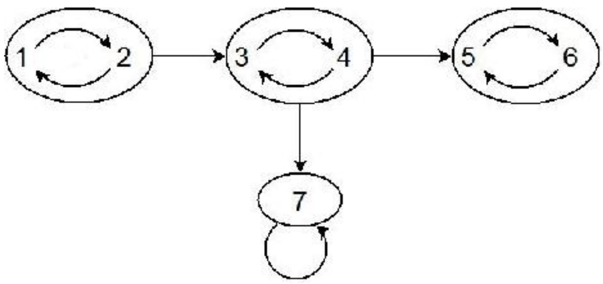
Haberleşen bir sınıf tek bir durumdan oluşabilir. Bu şekildeki durum yutucu durumdur ve bu duruma diğer durumların hiçbirinden ulaşmak mümkün değildir.

Ayrıca iki haberleşen sınıf ya eştirler ya da tamamen ayrıktırlar. $\forall i \in C$ için,

$$\sum_{j \in C} P(i, j) = 1$$

sağlanırsa $C \subset E$ durumlar kümesine kapalıdır denir. Başka bir deyişle zincir bir sınıfa girer ve sınıftan dışarı çıkamazsa o sınıfa kapalıdır denir. (Constantopoulos 2009)

Örnek 3.4.2.1. Aşağıdaki şekilde $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$, $\{7\}$ sınıflarından oluşan 4 tane haberleşen sınıf vardır.



Zincir {5,6} ve {7} sınıflarına girdiği ancak çıkamadığı için bu sınıflar kapalı sınıflardır. {1,2} ve {3,4} sınıfları ise kapalı değildir.

Kendisi kapalı bir sınıf oluşturan duruma yutucu durum denir. Dolayısıyla 7 durumu yutucu durumdur.

Kapalı haberleşen sınıflar, zinciri daha küçük, daha kullanışlı ve analiz edilebilir parçalara ayırdığından özellikle önemlidir.

3.4.3. Geçici ve Tekrarlanan Durumlar

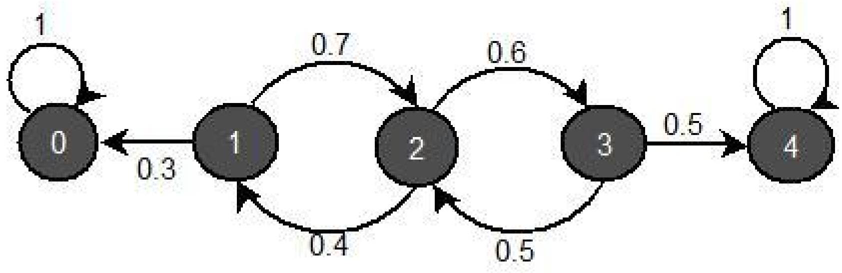
X_n , $n \in \mathbb{N}$ durum uzayı $E = \{1,2,\ldots\}$, geçiş matrisi $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ olan bir Markov zinciri, T_j zincirin *j* duruma ilk kez değme anı ve N_j ise zincirin *j* durumuna değme anlarının toplam sayısı olsun.

Tanım 3.4.3.1. $P_i\{T < \infty\} = 1$ oluyorsa $i \in E$ durumuna tekrarlıdır denir (Çınlar 1975). Diğer bir ifadeyle $P\{X_n = i, n \geq 1 \mid X_0 = i\} = 1$ yani, *i* durumundan başlayan bir Markov zincirinin tekrar *i* durumuna dönme olasılığı 1 ise, $i \in E$ durumu tekrarlanan(tekrarlı) durumdur.

Tekrarlı olmayan duruma ise geçici durum denir. Geçici durumda $P_i\{T = +\infty\} > 0$ dır. Yani, *i* durumundan başlayan bir Markov zincirinin tekrar *i* durumuna dönmeme olasılığı pozitif ise, $i \in E$ durumu geçici durumdur.

Eğer bir zincir tekrarlı durumların oluşturduğu bir sınıfa girerse veya o sınıfın içinde başlarsa zincir sonsuza dek o sınıfın içinde kalır ve o sınıfın içindeki her durumu sonsuz kez ziyaret eder. Fakat zincir geçici durumlardan oluşan bir sınıfa girerse veya o sınıfın içinde başlarsa geri dönmemek üzere o sınıfı terk eder başka bir sınıfa girer, girdiği sınıf tekrarlı ise zincir o sınıfta sonsuza dek kalır, yok eğer girdiği sınıf geçici ise zincir o sınıfı da terk eder. Yani zincir bir geçici sınıfa girdiğinde tekrarlı bir sınıfa girene dek bir geçici sınıftan diğer geçici sınıfa girerek devam eder.

Örnek 3.4.3.1. Geçiş diyagramı



olan bir Markov zincirini inceleyelim.

Burada 0 ve 4 durumları tekrarlıdır. 1,2,3 durumları ise geçicidir çünkü 1,2 ve 3 durumlarından 0 ve 4 durumlarına ulaşmak mümkünken, 0 ve 4 durumlarından 1,2 ve 3 durumlarına ulaşılamaz.

$$f_{ij} = P_i(T_j < \infty)$$

olsun. f_{ij}, i durumundan çıkan bir Markov zincirinin belirli bir zamandan sonra ilk kez j durumuna ulaşabilmesi olasılığıdır.

Eğer $f_{jj} = 1$ ise j durumuna tekrarlanan durum, $f_{jj} < 1$ ise j durumuna geçici durum denir.

Eğer j tekrarlanan bir durum ise, j durumundan çıkan bir Markov zinciri belirli bir zamandan sonra bir olasılıkla j ye geri döner. j geçici bir durum ise Markov zinciri $1 - f_{jj}$ pozitif olasılığıyla j ye geri dönmeyebilir.

j yutucu bir durum ise, $P_j(T_j = 1) = P(j, j) = 1$ ve dolayısıyla $f_{jj} = 1$ olduğundan j durumu tekrarlanan durumdur.

Teorem 3.4.3.1. $i \in E$ durumunun tekrarlanan olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \qquad \textbf{(3.17)}$$

olmasıdır.

Bu teoremin ispatını aşağıdaki adımlarla, (Teorem 3.3.3.2) ve (Teorem 3.3.3.3) yardımıyla yapalım.

R_i rastgele değişkenini zincirin i durumuna ilk geri dönme zamanı olarak tanımlayalım. R_i nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu $f_i^{(n)}, n \geq 1$ olarak gösterelim$\left(f_i^{(n)} = f_{ii}^{(n)} \right)$. Dolayısıyla,

$$f_i^{(n)} = P\left\{R_i = n \mid X_0 = i\right\} = P\left\{X_n = i, X_1 \neq i, ..., X_{n-1} \neq i \mid X_0 = i\right\} \qquad \textbf{(3.18)}$$

dir ve açıktır ki, $f_i^{(1)} = p_{ii}$ dir. Diğer bütün $f_i^{(n)}$ olasılıkları da $p_{ii}^{(k)}$ nın terimleriyle hesaplanabilir.

Teorem 3.4.3.2. $n \geq 1$ için,

$$p_{ii}^{(n)} = f_i^{(1)} p_{ii}^{(n-1)} + f_i^{(2)} p_{ii}^{(n-2)} + ... + f_i^{(n-1)} p_{ii}^{(1)} + f_i^{(n)} \equiv \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}. \qquad \textbf{(3.19)}$$

(3.19) sağlanırsa,

$$f_i^{(n)} = p_{ii}^{(n)} - \left(f_i^{(1)} p_{ii}^{(n-1)} + f_i^{(2)} p_{ii}^{(n-2)} + \ldots + f_i^{(n-1)} p_{ii}^{(1)} \right) \equiv p_{ii}^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} f_i^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$$

sağlanır. Böylece $f_i^{(1)}$ i kullanarak $f_i^{(2)}$ yi hesaplayabiliriz, daha sonra $f_i^{(1)}$ ve $f_i^{(2)}$ yi kullanarak $f_i^{(3)}$ ü hesaplayabiliriz, ve böyle devam edersek bütün $f_i^{(n)}$ olasılıkları hesaplayabiliriz.

İspat: $\{X_n = i\}$ olayı ancak $\{R_i = k\}, k = 1, 2, \ldots, n$ gibi ayrışık olaylardan biriyle beraber meydana gelebilir. Bundan dolayı, Toplam Olasılık Kanunundan,

$$\begin{aligned} P\{X_n = i \mid X_0 = i\} &= \sum_{k=1}^{n} P\{R_i = k | X_0 = i\} P\{X_n = i | R_i = k, X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_i^{(k)} P\{X_n = i | R_i = k, X_0 = i\} \end{aligned}$$

elde edilir. Markov özelliğinden,

$$\begin{aligned} P\{X_n = i | R_i = k, X_0 = i\} &= P\{X_n = i | X_k = i, 1 \le l \le k-1 \text{ için } X_l \ne i, X_0 = i\} \\ &= P\{X_n = i | X_k = i\} \\ &= p_{ii}^{(n-k)} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat biter.

Şimdi ise ${}_i := \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}$ olasılığını tanımlayalım. Açıkça görülür ki, ${}_i = P\{\exists n, n \ge 1, X_n = i | X_0 = i\} \equiv P\{i \text{ durumunda başlayan zincir } i\text{'ye geri döner}\}$

Bu durumda kolayca söylenebilir ki, $i \in E$ durumunun tekrarlanan olması için gerek ve yeter şart $\beta_i = 1$ olmasıdır. Dolayısıyla Teorem 3.3.3.1. aşağıdaki gibi kurulabilir.

Teorem 3.4.3.3. Yukarıda verilen gösterimler altında

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \iff {}_i = 1 \qquad \textbf{(3.20)}$$

Veya buna denk olarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \iff {}_i < 1 \qquad \textbf{(3.21)}$$

dir.

İspat: $U := \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ şeklinde tanımlayalım ve kabul edelim ki

$U = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ olsun. Bu durumda $\;_i < 1$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için önce (3.19) eşitliklerini aşağıdaki biçimde yazalım;

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(1)} &= f_i^{(1)} \\
p_{ii}^{(2)} &= f_i^{(1)} p_{ii}^{(1)} + f_i^{(2)} \\
p_{ii}^{(3)} &= f_i^{(1)} p_{ii}^{(2)} + f_i^{(2)} p_{ii}^{(1)} + f_i^{(3)} \\
&\vdots \\
p_{ii}^{(n)} &= f_i^{(1)} p_{ii}^{(n-1)} + f_i^{(2)} p_{ii}^{(n-2)} + \ldots + f_i^{(n-1)} p_{ii}^{(1)} + f_i^{(n)}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

$U_N := \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}$ olarak tanımlayalım. (3.22) deki eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$U_N = f_i^{(1)}(1+U_{N-1}) + f_i^{(2)}(1+U_{N-2}) + \ldots + f_i^{(N-1)}(1+U_1) + f_i^{(N)} \tag{3.23}$$

elde edilir. $\lim_{N\to\infty} U_N = U < \infty$ olduğundan, bu limiti (3.23) te uygularsak,

$$U = f_i^{(1)}(1+U) + f_i^{(2)}(1+U) + \ldots + f_i^{(n)}(1+U) + \ldots = \;_i(1+U) \tag{3.24}$$

olur. Buradan,

$$_i = \frac{U}{1+U} < 1 \tag{3.25}$$

elde edilir. (Bu ise bu rastgele yürüyüşün geçici olduğu anlamına gelir) $n \le N$ olmak üzere (3.23) teki bütün $1+U_n$ çarpanlarının yerine $1+U_N$ yazalım. Her $n \le N$ için $1+U_n \le 1+U_N$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
U_N &\le f_i^{(1)}(1+U_N) + f_i^{(2)}(1+U_N) + \ldots + f_i^{(N-1)}(1+U_N) + f_i^{(N)}(1+U_N) \\
&= (f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \ldots + f_i^{(N)})(1+U_N) \\
&\le \;_i(1+U_N)
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

elde edilir ki, bu son adım $\;_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}$ olduğundan ileri geldi. Böylece,

$$_i \ge \frac{U_N}{1+U_N}$$

dir ve bu nedenle,

$$_i \geq \lim_{N\to\infty} \frac{U_N}{1+U_N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{U_N}+1} = 1$$

bulunur. $_i$ bir olayın olasılığı olduğundan $_i \leq 1$ dir. Böylece $_i = 1$ elde edilir. Bu ise rastgele yürüyüşün tekrarlanan olduğu anlamına gelir. Böylece (Teorem 3.3.2.3) ispatlanmış oldu, dolayısıyla (Teorem 3.3.2.1) ispatlanmış olur.

Şimdi haberleşen sınıfların tekrarlanma ve geçicilik özelliklerini inceleyelim. Öncelikle faydalı olması bakımından aşağıdaki teoremden başlayalım.

Teorem 3.4.3.4. i tekrarlanan bir durum ve $i \rightsquigarrow j$ ise, $j \rightsquigarrow i$ ve $f_{ji} = 1$ dir.

***İspat*:** $i \rightsquigarrow j$ ise, süreç içinde *i* den *j* ye, *i* ye geri dönmeden varılabilir. $\lambda > 0$ bu olayın olasılığı olsun. *j* varılabilir olduğundan *i* ye tekrar uğramama olasılığı $1- f_{ji}$ dir. Böylece $1- f_{ii}$, *i* ye asla dönmeme olasılığı için,

$$1- f_{ii} \geq ª(1- f_{ji}) \geq 0$$

elde edilir. Ancak, *i* tekrarlı olduğundan $1- f_{ii} = 0$ dır. $\lambda > 0$ olduğundan $1- f_{ji} = 0$ olmalıdır. Böylece $f_{ji} = 1$ ve $j \rightsquigarrow i$ elde edilir.

Bu da gösteriyor ki, eğer $i \rightsquigarrow j$ fakat $j \not\rightsquigarrow i$ olacak şekilde bir *j* durumu varsa *i* durumu tekrarlanan durum olmak zorundadır.

Şimdi ise tekrarlanan bir durumdan sadece tekrarlanan durumlara ulaşılabileceğini gösterelim.

Teorem 3.4.3.5. i ve j haberleşen durumlar olmak üzere, *i* tekrarlanan bir durum ise j de tekrarlanan durumdur.

***İspat*:** i ve j haberleşen durumlar olduğundan $p_{ij}^{(k)} > 0$ ve $p_{ji}^{(m)} > 0$ olacak şekilde k,m pozitif tamsayıları vardır. Öte yandan,

$$p_{jj}^{(k+n+m)} \geq p_{ji}^{m} p_{ii}^{n} p_{ij}^{k}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik gerçekten sağlanır çünkü, *j* den başlayıp *k*+*n*+*m* adımda *j* ye varma olasılıklarından biri, ilk olarak *m* adımda *i* ye varma ($p_{ji}^{(m)}$ olasılıkla), ardından *n* adımda *i* ye geri dönme ($p_{ii}^{(n)}$ olasılıkla), ve son olarak *k* adımda *i* den *j* ye varma ($p_{ij}^{(k)}$ olasılıkla) olacaktır.

i tekrarlanan olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ dur ve böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(k+n+m)} \geq p_{ji}^{m} p_{ij}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

elde edilir.

Tekrarlanma ve geçicilik özellikleri haberleşen bir sınıfın özelliğidir. Çünkü sonlu bir Markov zincirinde bir durumun geçici veya tekrarlanan olması onun geçici veya tekrarlanan haberleşen sınıf olmasına bağlıdır. Bu teorem gösteriyor ki, bir haberleşen sınıftaki durumların ya hepsi tekrarlanandır ya da hepsi geçicidir.

$1_i(j), j \in E,$ $\{j\}$ kümesinin indikatör fonksiyonu olsun. Bu fonksiyon

$$1_i(j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \tag{3.27}$$

şeklinde tanımlansın.

Zincir n inci adımda i durumunda ise, $1_i(X_n) = 1$ ve diğer durumlarda $1_i(X_n) = 0$ olduğundan

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} 1_i(X_n) \tag{3.28}$$

elde edilir. $\{N_i \geq 1\}$ ile $\{T_i < \infty\}$ aynı olayı belirtirler. Bu sebeple,

$$P_j(N_i \geq 1) = P_j(T_i < \infty) = f_{ji}$$

olur.

$$\begin{aligned} f_{ii} &= f_i = P\{T_i < \infty | X_0 = i\} \\ 1 - f_i &= P\{T_i = \infty | X_0 = i\} \end{aligned} \tag{3.29}$$

olmak üzere eğer bir durum tekrarlanan ise $f_i = 1$, geçici ise $f_i < 1$ dir.

Eğer i geçici sınıf ise, i ye sadece sonlu sayıda dönüş yapılabilir, fakat i tekrarlanan sınıf ise i den başlayarak i ye sonsuz sayıda dönüş yapılabilir.

Teorem 3.4.3.6. $X_0 = i$ ve N, i ye varışların sayısı olmak üzere,

$$\mathbb{E}(N | X_0 = i) = \frac{1}{1 - f_i}$$

dir.

İspat: Yukarıda verilen gösterimler altında, koşullu beklenen değer tanımına göre,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N|X_0=i) &= \mathbb{E}\left(N|T_i=\infty, X_0=i\right)P\left\{T_i=\infty|X_0=i\right\}\\ &\quad+\mathbb{E}\left(N|T_i<\infty, X_0=i\right)P\left\{T_i<\infty|X_0=i\right\}\\ &= 1.(1-f_i)+f_i\left[1+\mathbb{E}(N|X_0=i)\right]\end{aligned}$$

yazılabilir.

Eğer $T_i=\infty$ ise, $n\neq 0$ için i ye varılamayacaktır. Yani, $\mathbb{E}\left(N|T_i=\infty, X_0=i\right)=1$ Eğer $T_i<\infty$ ise $X_k\,(X_k=i)$ gibi bir adımda i ye varılabilir yani, $\mathbb{E}\left(N|T_i<\infty, X_k=i\right)$ dir. Markov özelliğinden,

$$\mathbb{E}\left(N|T_i<\infty, X_k=i\right)=\mathbb{E}\left(N|T_i<\infty, X_0=i\right)$$

elde edilir. Yani,

$$\mathbb{E}\left(N|T_i<\infty, X_0=i\right)=1+\mathbb{E}\left(N|X_0=i\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\mathbb{E}\left(N|X_0=i\right)=1.(1-f_i)+\left\{1+\mathbb{E}\left(N|X_0=i\right)\right\}.(f_i)$$

buradan,

$$\mathbb{E}\left(N|X_0=i\right)=\frac{1}{1-f_i}$$

elde edilir.

3.4.4. Pozitif Tekrarlı ve Sıfır Tekrarlı Durumlar

Bir Markov zincirinin i durumu için ortalama tekrarlama zamanını

$$m_i=\mathbb{E}\left(T_i|X_0=i\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} \qquad \textbf{(3.30)}$$

ile gösterelim.

Tanım 3.4.4.1. $f_i=1$ ve $m_i<\infty$ oluyorsa i durumuna pozitif tekrarlanan durum denir.

$f_i=1$, $m_i=\infty$ ise, i durumuna sıfır (null) tekrarlanan durum denir.

Örnek 3.4.4.1. n adımda tekrarlama olasılığı

$$f_{ii}^{(n)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

olan bir i durumunu alalım.

$$f_{ii}^{(n)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

olur. Dolayısıyla i durumu sıfır tekrarlı durumdur.

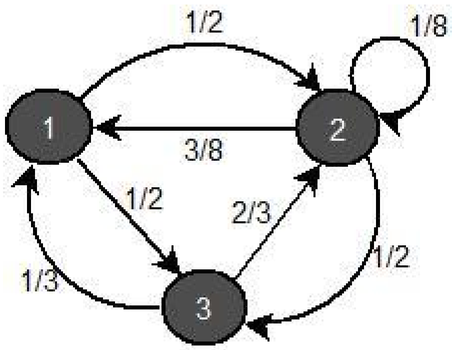
3.5. İndirgenemez Markov Zinciri

Tanım 3.5.1. E durum uzayı tek bir haberleşen sınıftan oluşan yani, her $i, j \in E$ için $i \leftrightsquigarrow j$ olan Markov zincirine İndirgenemez Markov zinciri denir. İndirgenemez bir Markov zincirinde her bir durumdan diğer durumlara bir veya daha fazla adımda ulaşmak mümkündür.

Örnek 3.5.1. Bir Markov zincirinin geçiş matrisi

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

olarak tanımlansın. Bu zincirin geçiş diyagramı



şeklindedir. Açıkça görülüyor ki bu zincirde her bir durumdan diğer durumlara geçilebilir, yani zincir indirgenemezdir.

Örnek 3.5.2. x , p_{ij} pozitif geçiş olasılıkları olmak üzere, aşağıda verilen geçiş matrisinin indirgenemez bir zincir tanımlayıp tanımlamadığını her bir başlama durumundan diğer durumlara geçişin varlığı ile gösterelim.

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x & x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ x & 0 & x & 0 & x \\ x & x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

1. durumu göz önüne alırsak, 1. durumdan 3. durum hariç diğer durumlara varılabilir. 1. durumdan 2. duruma, 2. durumdan da 3. duruma varılabileceğinden 1. durumdan 3. duruma varılabilir. Benzer şekilde bakıldığında 2,3,4,5 durumlarından bir adımda varılamayan durumlara iki adımda varılabileceği yani, (2⟶5⟶1), (2⟶3⟶4), (3⟶4⟶1), (3⟶5⟶2), (3⟶4⟶3), (4⟶1⟶2), (4⟶3⟶4), (5⟶2⟶3), (5⟶1⟶4), (5⟶1⟶5) olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla her bir 1,2,3,4,5 başlama durumundan diğer tüm durumlara varılabilir. Yani, bu geçiş matrisinin belirttiği zincir indirgenemezdir.

Eğer bir Markov zinciri indirgenebilir ise, $C_0, C_1, ..., C_{r-1}$ kapalı haberleşen sınıflar ve D geri kalan bütün haberleşen sınıfların ailesi olmak üzere zincirin durum uzayı

$$E = \left(C_0 \cup C_1 \cup ... \cup C_{r-1}\right) \cup D \qquad \textbf{(3.31)}$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 3.5.1. C kapalı haberleşen bir sınıf olsun. $P = (P(x,y))_{x,y \in E}$ geçiş fonksiyonunun C ye kısıtlanışını P_C ile gösterelim yani,

$$P_C = (P(x,y))_{x,y \in C}$$

olsun. O halde durum uzayı C, geçiş fonksiyonu P_C ile verilen indirgenemez bir $\{Y_n\}_{n \in N}$ Markov zinciri vardır.

Bu önerme bize, bir Markov zincirinin kapalı haberleşen sınıflarına kısıtlanabileceğini böylece ayrıca incelenebileceğini göstermektedir. İndirgenebilen Markov zincirlerinde ayrışımdaki kapalı alt kümeler ayrı zincirler gibi incelenebilirler. Aslında bu ayrışımları önemli kılan husus, sayılabilen durum uzayına sahip bir Markov zincirinin indirgenemez varsayılarak çalışılabilecek olmasıdır. Bu indirgenemez parçalar birlikte indirgenmesi mümkün olan orijinal Markov zincirinin birçok özelliğini ortaya çıkarabilirler. Kalan D kısmının durumu ayrıca incelenmelidir ancak durağanlık özellikleri incelenirken durum uzayının D ye karşılık gelen kısmı yok sayılabilir. D içindeki durumlar için iki olası durum vardır: ya kapalı haberleşen C_i sınıflarına ulaşacak ve orada yutulacaklar veya Markov zinciri D nin her sonlu altkümesini geçecek ve sonsuza kadar öyle devam edecektir.

Teorem 3.5.1. Her tekrarlı sınıf kapalıdır. Yani, i tekrarlı bir durum ve j durumu, i yi bulunduran bir denklik sınıfının içinde değilse $p_{ij} = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki zincir i durumundan başlasın. p_{ij} geçiş olasılıkları pozitif olsaydı j durumuna pozitif olasılıkla gidilebilir ve i tekrarlı olduğundan tekrar i ye geri dönülebilirdi. Fakat bir kere j durumuna gelindiğinde i durumuna geri dönülemez çünkü eğer dönülebilseydi i ile j haberleşecekti. Kabulümüzden j, i yi içeren bir denklik sınıfında bulunmadığından haberleşemezler. Dolayısıyla p_{ij} pozitif olamaz yani, $p_{ij} = 0$ olmalıdır.

Bu teorem, bütün durumlar tekrarlı ise orada sadece bir sınıftan söz edilebileceği sonucunu verir çünkü tekrarlı bir sınıfın içindeyseniz asla oradan çıkamazsınız.

Dolayısıyla, bir zincirdeki bütün durumlar tekrarlı (sıfır veya pozitif tekrarlı) ve orada birden çok denklik sınıfı varsa, durum uzayının sadece zincirin başladığı denklik sınıfından oluştuğu varsayılabilir.

Teorem 3.5.2. Her bir tekrarlı j durumu için j yi içeren indirgenemez kapalı bir C kümesi vardır.

İspat: j tekrarlı bir durum C ise j den ulaşılabilen bütün durumların kümesi olsun. C nin kapalı olduğu açıktır. $i , k \in C$ ise $i \rightsquigarrow k$ olduğunu göstermeliyiz. $i \in C$ ise $j \rightsquigarrow i$ dir. j tekrarlı olduğundan (Teorem 3.3.2.4.) ten $i \rightsquigarrow j$ sağlanır. Böylece eğer $k \in C$ başka bir durum ise $j \rightsquigarrow k$ olur ve haberleşme bağıntısı geçişmeli olduğundan $i \rightsquigarrow k$ elde edilir.

3.6. Periyodik Markov Zinciri

Tanım 3.6.1. $x \in E$ durumunun periyodu,

$$d(x) = \text{ebob}\left\{ n \geq 1 \middle| P\left(X_n = x \middle| X_0 = x \right) > 0 \right\} \qquad \textbf{(3.32)}$$

$\forall n \geq 1$ için, $P\left(X_n = x \middle| X_0 = x \right) = 0$ ise, $d(x) = \infty$ şeklinde tanımlanır.

Eğer $d(x) = 1$ ise x durumu periyodik değildir veya aperiyodiktir.

Periyodik bir durumdan başlandığında sonlu sayıda adımla tekrar o duruma ulaşılabilir.

Teorem 3.6.1. $i \leftrightsquigarrow j$ ise $d(i) = d(j)$ dir.

İspat: İki ayrı i , j durumlarını ele alalım. $D_i = \left\{ n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$, $D_j = \left\{ n \in \mathbb{N} : p_{jj}^{(n)} > 0 \right\}$, $d(i) = \text{ebob}\, D_i$, $d(j) = \text{ebob}\, D_j$ olsun. Eğer $i \leftrightsquigarrow j$ ise $p_{ij}^{\sim} > 0$ olacak şekilde $\sim \in \mathbb{N}$ vardır ve eğer $j \leftrightsquigarrow i$ ise $p_{ji} > 0$ olacak şekilde $\in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $p_{jj}^{(\sim + \ )} \geq p_{ij}^{(\sim)} p_{ji}^{(\ )}$ olur. Yani, $\sim + \ \in D_i$ elde edilir. Böylece, $d(j) \ \sim +$ elde edilir. Şimdi ise $n \in D_i$ alalım. $p_{jj}^{n} > 0$ olur ve buradan $p_{jj}^{(\sim + n + \ )} \geq p_{ij}^{(\sim)} p_{ii}^{n} p_{ji}^{(\ )} > 0$ elde edilir. Yani, $\sim + n + \ \in D_j$ olur. Böylece, her $n \in D_i$ için $d(j) \ \sim + \ + n$ elde edilir. İki sayıyı bölen bir sayı, bunların farklarını da böleceğinden her $n \in D_i$ için $d(j) \ n$ elde edilir. Dolayısıyla $d(j)$, D_i nin bütün elemanlarının bir bölenidir. $d(i)$ en büyük ortak bölen olduğundan $d(i) \geq d(j)$ (aslında, $d(j) \ d(i)$ dir) elde edilir. Simetrik olarak aynı yöntemi uygularsak $d(i) \leq d(j)$ elde edilir. Buradan, $d(i) = d(j)$ elde edilir.

Yukarıdaki teorem, periyodikliğin bir sınıf özelliği olduğunu gösterir.

Periyodiklik bir tekrarlı sınıf özelliğidir, çünkü eğer periyodik bir i durumu geçici olsaydı sonlu sayıda adım sonra i ye dönmek mümkün olmayacaktı böylece i durumu periyodik olmayacaktı.

Farklı durumlar farklı periyotlara sahip olabilirler. Ancak bu, indirgenebilen Markov zincirleri için mümkündür. Yani bir Markov zinciri indirgenemez ise bütün durumlar aynı periyoda sahiptir.

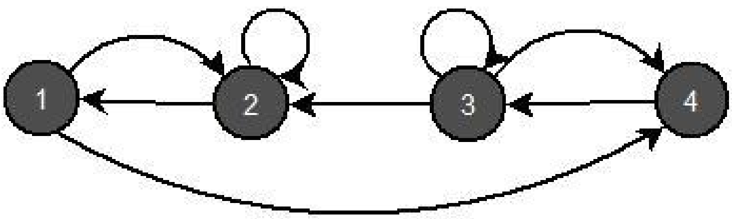
Eğer bir j durumu periyodikse ve periyodu d ise, j durumuna sadece $d, 2d, 3d, \dots$ adımda geri dönmek mümkündür. Aynı şey j ye ikinci kez dönüş, üçüncü kez dönüş, ve diğer dönüşler için de geçerlidir. j durumunda başlayan bir süreç, birinci geri dönüş zamanında veya ikinci geri dönüş zamanında veya üçüncü geri dönüş zamanında ve diğer geri dönüş zamanlarında j durumuna geri dönebilir. Bu geri dönüş zamanına n diyelim. Böylece j periyodik ve periyodu d ise, ancak $n \in \{0, d, 2d, ...\}$ olması durumunda

$$P^n(j, j) = P_j\{X_n = j\} > 0 \tag{3.33}$$

olur.

$n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer tekrarlı bir S sınıfı periyodik ise o halde $i \in S$ durumundan başlandığında bütün durumlara n adımda ulaşmak mümkün değildir çünkü n-inci adımda durumların bir öz alt gurubuna ulaşılabilir.

Örnek 3.6.1. Geçiş diyagramı aşağıda verilen Markov Zincirinin periyodik olmadığını gösterelim.



Bu durumların hepsi tek bir tekrarlı sınıf oluşturur. 1 durumundan 3 adımda bütün durumlara ulaşılabilir (1⟶2⟶2⟶1), (1⟶2⟶1⟶2) veya (1⟶4⟶3⟶2), (1⟶4⟶3⟶3), (1⟶4⟶3⟶4). Dolayısıyla bu Markov zinciri periyodik değildir.

3.7. Martingallar

Martingallar, birçok stokastik süreçler teorisi için temel oluşturan birleştirici bir güç ve dayanak noktasıdır. Martingallar kumar bağlamında adil oyun düşüncesini yakalamayı amaçlayan stokastik süreçlerdir. Adil bir oyunda, ortalama her bir kumar, geçmişte oynanan kumarlar ne olursa olsun, ne kar getirir ne de zarar. Martingaller sadece kumar oyunları için değil, stokastik modellemelerin birçok uygulamalarında kullanılır.

Tanım 3.7.1.

i. $\mathbb{E}\left(|X_n|\right) < \infty, \quad n > 0,$

ii. $\mathbb{E}\left(X_{n+1}|X_0,...,X_n\right) = X_n \geq 0$

özelliklerini sağlayan bir $X = \{X_n : n = 0,1,2,...\}$ stokastik sürecine bir martingal denir. Dikkat edilirse ii. özelliği

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n|X_0,...,X_n\right) = 0, \quad n \geq 0 \tag{3.34}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

X_0 rastgele değişkeninin bir kumarbazın başlangıç şansını ve $n \geq 1$ için Xn in ise onun n kumar oyunu sonrasındaki şansını gösterdiğini düşünürsek bir martingalin adil bir kumar oyununu gösterdiği söylenebilir. Burada adil oyun, bir oyunun geçmişi verildiğinde kumarbazın bu kumar oyunundan sonraki şansının koşullu beklentisinin oyundan önceki şans değeri ile aynı olması anlamındadır.

Martingalların önemli bir özelliği de her $n \geq 1$ için,

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right)$$

olmasıdır. Bu eşitlik,

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_{n+1}|X_n, X_{n-1},...,X_0\right)\right) = \mathbb{E}\left(X_n\right)$$

sağlandığından tümevarımla elde edilir.

Eğer $\{X_n\}$, $E \subset \mathbb{R}$ durum uzayı üzerinde tanımlı, geçiş olasılık matrisi P olan bir Markov zinciri ise,

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}|X_n, X_{n-1},...,X_0\right) = \mathbb{E}\left(X_{n+1}|X_n\right)$$

ve her $x \in E$ için,

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}|X_n = x\right) = \sum_{y \in E} P(x,y)y$$

sağlanır. Martingal tanımı,

$$\sum_{y \in E} P(x,y)y = x, \quad x \in E$$

olarak yazılabilir . Dolayısıyla

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}|X_0 = x_0,...,X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x\right) = x \tag{3.35}$$

elde edilir. Yani, $x_0,...,x_n$ lerin geçmişteki ve şu andaki değerleri belli olduğundan X_{n+1} in beklenen değeri x_n in şu anki değerine eşit olur.

3.8. Durağan Dağılımlar ve Özellikleri

Tanım 3.8.1. $i_1,...,i_n$ zaman noktaları ve $m \geq 0$ olmak üzere, $\left(X_{i_1},...,X_{i_n}\right)$ in ortak dağılımları ile $\left(X_{i_1+m},...,X_{i_n+m}\right)$ nin ortak dağılımları aynı ise , $\{X_n : n \geq 0\}$ (kesikli zamanlı) stokastik sürecine durağan denir. Durağan bir süreçte bütün *n* ler için X_n in dağılımları aynıdır.

Eğer bir Markov zinciri durağan ise, bütün X_n lerin ortak dağılımlarına Markov zincirinin durağan dağılımı denir.

Tanım 3.8.2. X , durum uzayı *E*, geçiş olasılık matrisi *P* olan bir Markov zinciri olsun. Her *j*□*E* için $® _j \geq 0$ ve $\sum_j ® _j = 1$ özelliklerini sağlayan $|E|$ bileşenli $® = \left(® _j, j \in E\right)$ (satır) vektörü *E* üzerinde bir dağılımdır. X_0 ın başlangıç dağılımı *π* ye eşittir ve Eğer,

$$® = ® P$$

yani, her *j*□*E* için,

$$® _j = \sum_{i \in E} ® _i p_{ij}$$

ise, başka bir deyişle $® _j$, ® ile *P* matrisinin *j*-yinci sütununun skaler çarpımına eşit ise ® , Markov zincirini durağanlaştırır. Bu durumda *π* ye Markov zincirinin durağan dağılımı denir.

Kabul edelim *π* Tanım 3.7.2 deki eşitlikleri sağlasın ve *π* yi X_0 ın dağılımı olarak alalım. $«_j(n) = P(X_n = j)$ X_n in dağılımı olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
«_j(n) = P(X_n = j) &= \sum_{i \in E} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in E} p_{ij}(n) ® _i
\end{aligned}
$$

olup, bunu matris notasyonunda yazarsak,

$$«(n) = ® P(n)$$

elde edilir. Chapman-Kolmogorov denklemlerinden,

$$
\begin{aligned}
\pi(n) &= \pi P^{n} \\
&= (\pi P)P^{n-1} \\
&= \pi P^{n-1} \\
&\vdots \\
&= \pi P \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Önerme 3.8.1. $X_n, n \geq 0$, durum uzayı E ve geçiş matrisi P olan bir Markov zinciri olsun. Eğer π bir durağan dağılım ise, her n için,

$$
\sum_i \pi_i P_{ij}^{n} = \pi_j
$$

dir.

***İspat*:** π bir durağan dağılım olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
\sum_i \pi_i P_{ij}^{2} &= \sum_i \pi_i \sum_k P_{ik} P_{kj} \\
&= \sum_k \left(\sum_i \pi_i P_{ik} \right) P_{kj} \\
&= \sum_k \pi_k P_{kj} \\
&= \pi_j
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Kabul edelim ki, $\sum_i \pi_i P_{ij}^{n} = \pi_j$ doğru olsun. O halde,

$$
\begin{aligned}
\sum_i \pi_i P_{ij}^{n+1} &= \sum_i \pi_i \left(\sum_k P_{ik}^{n} P_{kj} \right) \\
&= \sum_k \left(\sum_i \pi_i P_{ik}^{n} \right) P_{kj} \\
&= \sum_k \pi_k P_{kj} \\
&= \pi_j
\end{aligned}
$$

olur. Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$
\sum_i \pi_i P_{ij}^{n} = \pi_j , \quad j \in E
$$

elde edilir.

Önerme 3.8.2. $X_n, n \geq 0$, durum uzayı E ve geçiş matrisi P olan bir Markov zinciri olsun. X_n in dağılımının n den bağımsız olması için gerekli ve yeterli şart başlangıç dağılımının durağan dağılım olmasıdır.

***İspat*:** X_0 ın başlangıç dağılımı, π durağan dağılımı olsun. O halde her n için,

$$P(X_n = j) = \sum_i \circledR_i P_{ij}^n = \circledR_j \ , \ j \in E$$

elde edilir. Böylece X_n in dağılımı n den bağımsızdır.

Tersine kabul edelim ki X_n in dağılımı n den bağımsız olsun. O halde,

$$(\circledR_0)_i = P(X_0 = j) = P(X_1 = j) = \sum_i (\circledR_0)_i P_{ij}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\circledR_0$ durağan dağılımdır.

Teorem 3.8.1. (Sınırlı yakınsaklık teoremi)

$a(x),\ x \in E$, sonlu toplama sahip negatif olmayan sayılar, $n \geq 1$ olmak üzere $\left|b_{n_i}\right| \leq 1,\ i \in E$ ve $\lim_{n\to\infty} b_{n_i} = b_i$, $i \in E$ olacak şekilde b_{n_i}, $i \in E$ alalım. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_i a_i b_{n_i} = \sum_i a_i b_i \quad \text{dir.}$$

Önerme 3.8.3. $X_n, n \geq 0$, durum uzayı E ve geçiş matrisi P olan bir Markov zinciri olsun. π bir durağan dağılım ve $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \circledR_j$, $j \in E$ ise,

π durağan dağılımı tektir.

***İspat*:** $\circledR_0$, başlangıç dağılımı olsun. O halde,

$$P(X_n = y) = \sum_i (\circledR_0)_i P_{ij}^n \ , \ j \in E$$

olur. $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \circledR_j$ olduğundan ve sınırlı yakınsaklık teoreminden,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_n = y) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_i (\circledR_0)_i P_{ij}^n\right) \\
&= \sum_i (\circledR_0)_i \left(\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n\right) \\
&= \sum_i (\circledR_0)_i \circledR_j
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_i (\circledR_0)_i = 1$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \circledR_j \,,\; j \in E \qquad \textbf{(3.36)}$$

sonucuna varılır.

(3.36) eşitliği gösteriyor ki, başlangıç dağılımı ne olursa olsun, n nin büyük değerleri için X_n in dağılımı yaklaşık olarak π durağan dağılımına eşittir.

Şimdi ise $\circledR^*$ nin bir durağan dağılım ve $\circledR^* \neq \circledR$ olduğunu varsayalım. $\circledR_0 = \circledR^*$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned} P(X_n = y) &= \sum_i \left(\circledR_0\right)_i P_{ij}^n \\ &= \left(\circledR_0\right)_j \quad (\ \circledR_0\text{,durağan dağılım olduğundan)} \\ &= \circledR_j^* \end{aligned}$$

Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \circledR_j^*$$

elde edilir. (3.36) dan,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \circledR_j$$

elde edilir. Dolayısıyla $\circledR_j = \circledR_j^*$ olur. Bu ise $\circledR^* \neq \circledR$ ile çelişir. Dolayısıyla $\circledR$ durağan dağılımı tektir.

Zincirin başlangıç dağılımı ne olursa olsun, $n \to \infty$ için X_n in dağılımı $\circledR$ ye yaklaşır. Bu durumda $\circledR$ ye bazen kararlı durum dağılımı da denir.

Örnek 3.8.1. Durum uzayı $E = \{0,1,2\}$ ve geçiş matrisi,

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

olan bir Markov zincirini göz önüne alalım. Bu zincirin $\circledR$ durağan dağılımını bulunuz.

Çözüm: $|E| = 3$ olduğundan $\circledR = \left(\circledR_0, \circledR_1, \circledR_2\right)$ olarak alalım. Bu durumda $\circledR P = \circledR$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\circledR P = \begin{bmatrix} \circledR_0 & \circledR_1 & \circledR_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\circledR_0}{3} + \frac{\circledR_1}{4} + \frac{\circledR_2}{6} & \frac{\circledR_0}{3} + \frac{\circledR_1}{2} + \frac{\circledR_2}{3} & \frac{\circledR_0}{3} + \frac{\circledR_1}{4} + \frac{\circledR_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \circledR_0 & \circledR_1 & \circledR_2 \end{bmatrix}$$

olup, buradan da

$$\frac{\circledR_0}{3} + \frac{\circledR_1}{4} + \frac{\circledR_2}{6} = \circledR_0$$

$$\frac{\circledR_0}{3} + \frac{\circledR_1}{2} + \frac{\circledR_2}{3} = \circledR_1$$

$$\frac{\circledR_0}{3} + \frac{\circledR_1}{4} + \frac{\circledR_2}{2} = \circledR_2$$

elde edilir. Ayrıca $\sum_{i \in E} \circledR_i = 1$ olduğundan, $\circledR_0 + \circledR_1 + \circledR_2 = 1$ olur. $\circledR_0, \circledR_1$ ve $\circledR_2$ ye bağlı bu dört denklem çözülürse, $\circledR_0 = \frac{6}{25}$, $\circledR_1 = \frac{10}{25}$, $\circledR_3 = \frac{9}{25}$ elde edilir. Dolayısıyla durağan dağılım $\circledR = \left(\frac{6}{25}, \frac{10}{25}, \frac{9}{25} \right)$ olarak bulunur.

Örnek 3.7.2. Kamyon ve otomobillerin geçtiği bir yolda, her dört kamyonun üçünü bir otomobil takip ederken, her beş otomobilden sadece birini bir kamyon takip ediyor. Buna göre, yoldaki araçlar içinde kamyonların oranı nedir?

Çözüm: Yolun kenarına oturduğumuzu ve geçen araçları izlediğimizi düşünelim. Eğer önümüzden bir kamyon geçerse, sonraki araç 3/4 olasılıkla bir otomobil ve 1/4 olasılıkla bir kamyon olacaktır. Ancak önümüzden geçen araç bir otomobilse, sonraki araç 4/5 olasılıkla bir otomobil ve 1/5 olasılıkla bir kamyon olacaktır.

Bu verilerle 0 = kamyon ve 1 = otomobil olmak üzere $\{X_n : n \geq 1\}$ iki durumlu (0 ve 1) ve geçiş matrisi,

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} \end{array}$$

olan bir Markov zinciridir.

Bu Markov zincirinin durağan dağılımı $® = (®_0, ®_1)$ olmak üzere, $® = ®P$ eşitliğinden, $®_0 = \frac{1}{4}®_0 + \frac{1}{5}®_1$ ve $®_1 = \frac{3}{4}®_0 + \frac{4}{5}®_1$ denklemleri elde edilir. Birinci denklemden $(3/4)®_0 = (1/5)®_1$ veya $®_0 = (4/15)®_1$ elde edilir. Bu ifadeyi $®_0 + ®_1 = 1$ denkleminde yerine yazarsak, $®_1 = 15/19$ elde edilir. Dolayısıyla $®_0 = 4/19$ bulunur. Bu ise gösteriyor ki, yol kenarına oturduğumuzda uzun vadede önümüzden geçen araçların 4/19 u kamyon olacaktır.

Teorem 3.8.2. İndirgenemez bir Markov zincirinin bir $®$ durağan dağılımının olması için gerek ve yeter şart bütün durumların pozitif tekrarlı olmasıdır. Bu durumda durağan dağılım tektir ve $«_i$, i durumunun ortalama tekrarlama zamanı olmak üzere, $®_i = 1/«_i$ dir.

Örnek 3.8.3. Kamyon ve otomobillerin geçtiği bir yolda, her dört kamyonun üçünü bir otomobil takip ederken, her beş otomobilden sadece birini bir kamyon takip ediyor. Yolda önümüzden bir kamyon geçtiğini gördüğümüzde, başka bir kamyonun geçtiğini görene kadar önümden ortalama kaç araç geçer?

Çözüm: (Örnek 3.7.2) nin çözümünü göz önüne alırsak, yolda önümüzden bir kamyon geçtiğini gördüğümüzde, başka bir kamyonun geçtiğini görene kadar önümüzden geçen ortalama araç sayısı, şu anda 0 durumunda olduğumuz verildiğinde 0 durumunun ortalama tekrarlama zamanına karşılık gelir. (Teorem 3.7.2) den, 0 durumunun ortalama tekrarlama zamanı $«_0 = 1/®_0 = 19/4$ tür. Yani yaklaşık olarak 5 araç geçer.

3.8.1. Küresel ve Yerel Denge

Bir Markov zincirinin $®_i$ durağan dağılımı varsa, bu dağılım bize i durumunda geçen zamanın uzun vadedeki oranını verir. i durumunda geçen her zaman periyodu, i durumunun içine (veya dışına) geçişlere karşılık geldiğinden, $®_i$ yi i durumunun içine (veya dışına) geçişlerin uzun vadedeki oranı olarak ta yorumlayabiliriz. i durumunda bulunduğumuz verildiğinde j durumuna gidişlerin olasılığı p_{ij} olduğundan, uzun vadede i durumundan j durumuna geçişlerin oranı $®_i p_{ij}$

çarpımıdır. Dolayısıyla,

$\pi_j =$ ”*j* durumundan çıkış oranı”

ve

$\sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} =$ ”*j* durumuna giriş oranı”

olarak gösterilebilir. Böylece, $\pi = \pi P$ eşitliği her $j \in E$ için,

”*j* durumuna giriş oranı” = ”*j* durumundan çıkış oranı”

şeklinde yorumlanabilir. Yani, π durağan dağılım vektörü bir duruma girişin ve o durumdan çıkışın dengesini elde eder. Bundan dolayıdır ki, $\pi = \pi P$ denklemlerine Denge Denklemleri veya Küresel Denge Denklemleri denir.

Bütün π durağan dağılımları açıklanan anlamda küresel denge oluşturmak zorundadır. Eğer π durağan dağılımları aynı zamanda her $i, j \in E$ için,

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \tag{3.37}$$

denklemini de sağlıyorsa π yerel denge de oluşturur denir. (3.37) denklemlerine Yerel Denge Denklemleri bazen de Detaylı Denge Denklemleri denir. Çünkü, bu denklemler herhangi iki durum arasındaki geçiş dengesini gösterirler. Yani, her $i,j \in E$ için,

“*i* den *j* ye geçiş oranı” = “*j* den *i* ye geçiş oranı”

sağlanır.

Teorem 3.8.1.1. π, detaylı dengeyi sağlıyorsa, bir durağan dağılımdır.

İspat: πP nin *j*-yinci elemanını göz önüne alırsak, $\sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji}$ $= \pi_j \sum_i p_{ji} = \pi_j$ elde edilir. Bu ise π nin durağan dağılıma sahip olması demektir.

3.8.2. Tersinirlik

Yerel denge ile Markov zincirinin daha genelde ise Stokastik süreçlerin bir özelliği olan tersinirlik (veya zaman tersinirliği) arasında sıkı bir ilişki vardır. Markov zincirlerinin hepsinin yerel dengeyi sağlamak zorunda olmadığı gibi bütün Markov zincirleri tersinir olmak zorunda da değildir. Yerel denge, küresel denge ve tersinirlik sadece durağan Markov zincirinin özelliğidir. O yüzden durağan Markov zincirinden başlayalım ve zaman indis kümesini $-\infty$ a kadar uzatalım, bu durumda

Markov zinciri

$$X = \left\{ X_n : n \in \left\{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \right\} \right\}$$

olur. Zinciri yeni bir

$$Y = \left\{ Y_n = X_{-n} : n \in \left\{ ..., -1, 0, 1, ... \right\} \right\}$$

süreci elde edecek şekilde zamanda geriye doğru yürüttüğümüzü düşünelim. İşte bu Y sürecine tersine zincir denir. Aslında Y de bir Markov zinciridir. Bunu görmek için X zincirinin Markov özelliğini şu şekilde ifade edelim. Sürecin hali hazırdaki durumu verildiğinde, bütün gelecek durumlar şimdiki zamana kadar ki bütün geçmiş durumlardan bağımsızdır. Yani, X_n verildiğinde, eğer $k > n$ ise her $m < n$ için X_k, X_m den bağımsızdır. Bu çift yöne giden bir işlemdir çünkü bağımsızlık özelliği simetriktir. Yani, herhangi W ve V rastgele değişkenleri için W, V den bağımsız ise V de W den bağımsızdır. Dolayısıyla X_n verildiğinde, eğer $m < n$ ise her $k > n$ için X_m, X_k dan bağımsızdır. Buradan Y nin Markov özelliğini sağladığı görülebilir. Yani,

$$\begin{aligned}
&P\left(Y_{n+1} = j | Y_n = i, Y_k = i_k, k < n \right) \\
&= P\left(X_{-(n+1)} = j | X_{-n} = i, X_{-k} = i_k, k < n \right) \\
&= P\left(X_{-(n+1)} = j | X_{-n} = i \right) \\
&= P\left(Y_{n+1} = j | Y_n = i \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tersine Y süreci bir Markov zinciridir. Aslında Y zinciri de durağandır ve açık olarak herhangi bir i durumu için X ile Y nin uzun vadede bu i durumunda harcadıkları zaman oranı aynı olduğundan Y ile X aynı ® durağan dağılımına sahiptir.

Ancak Y tersine zinciri ile X genel olarak aynı geçiş matrisine sahip değillerdir. X ile Y zincirlerinin ikisinin de ortak ® durağan dağılımı ile durağan olması kullanılarak Y zincirinin geçiş matrisi hesaplanabilir. Y zincirinin geçiş matrisini Q ile, bileşenlerini ise q_{ij} ile gösterirsek,

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= P\left(Y_n = j | Y_{n-1} = i\right) \\
&= P\left(X_{-n} = j | X_{-(n-1)} = i\right) \\
&= \frac{P\left(X_{-n} = j | X_{-(n-1)} = i\right)}{P\left(X_{-(n-1)} = i\right)} \\
&= \frac{P\left(X_{-(n-1)} = i | X_{-n} = j\right) P\left(X_{-n} = j\right)}{P\left(X_{-(n-1)} = i\right)} \\
&= \frac{p_{ji} \circledR_j}{\circledR_i}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki burada p_{ji}, X zincirinde j durumundan i durumuna bir adım geçiş olasılığıdır.

Eğer tersine Y matrisinin geçiş matrisi ile X in geçiş matrisi aynı ise yani, $Q = P$ ise, durağan X Markov zincirine tersinirdir veya zaman-tersinirdir denir. Bu tanım çok açık değildir, çünkü her zaman tersine Y zinciri bulunmasına karşın her X Markov zinciri tersinir değildir. q_{ij} yi hesaplayabildiğimizden, X i tersinir yapacak koşulları tam olarak bulabiliriz.

X in tersinir olması için gerek ve yeter şart $q_{ij} = p_{ij}$ olmasıdır. Yani,

X in tersinir olması için gerek ve yeter şart $p_{ij} = \frac{p_{ji} \circledR_j}{\circledR_i}$ olmasıdır. Dolayısıyla,

X in tersinir olması için gerek ve yeter şart $\circledR_i p_{ij} = \circledR_j p_{ji}$ olmasıdır.

Görüldüğü üzere tersinirlik ile yerel denge arasında bir ilişki vardır. Yani, bir X Markov zincirinin tersinir olması için gerek ve yeter şart yerel denge koşullarının sağlanmasıdır.

3.9. Sürekli – Zamanlı Markov Zinciri

Gerçek dünyada zaman süreklidir, olaylar sadece belirtilen, eşit aralıklı zaman noktalarında olmazlar. Hastalık bulaşma olayları, cep telefonu aramaları, mekanik parça arıza zamanları gibi birçok süreç sürekli zaman içinde ortaya çıkar.

İlgilenilen bütün özellikleri ölçebilecek bir adım geçiş matrisi için gerçek bir eşdeğeri olmadığı için sürekli zamanla uğraşmak biraz daha zordur.

Tanım 3.9.1. Kesikli Durum uzayı E olan, her $t \geq 0,\ s \geq 0,\ i \in E,\ j \in E$ için,

$$P\left(X_{s+t} = j | X_s = i, \left\{X_u : 0 \leq u \leq s\right\}\right)$$
$$= P\left(X_{s+t} = j | X_s = i\right) = P_{ij}(t)$$

eşitliğini sağlayan $\left\{X_t : t \geq 0\right\}$ stokastik sürecine sürekli zamanlı Markov zinciri denir. $P_{ij}(t)$, zincirin hali hazırda *i* durumunda olduğu verildiğinde *t* birim zaman sonra *j* durumunda olması olasılığıdır.

Sürekli zamanlı Markov zinciri çalışmaları geçiş matrisine dayanır. Her bir $t \geq 0$ için,

$$P(t) = \left(P_{ij}(t)\right)$$

ve $P(0) = I$, birim matris olacak şekilde bir geçiş matrisi vardır.

Kesikli zamanlı Markov zincirinde olduğu gibi biz burada, şimdiki durum X_s verildiğinde, gelecek dağılımın geçmiş zamana değil de, sadece şimdiki $X_s = i$ durumuna bağlı olduğunu ve s zamanından beri geçen zaman miktarının *t* olduğunu varsayıyoruz.

Fakat kesikli zamandan farklı olarak, burada sonraki geçişe kadar bir en küçük sonraki zaman yoktur, böyle olası *t* zamanların devamlılığı vardır. Her bir sabit *i*,*j* için, $P_{ij}(t),\ \mathrm{t} \geq 0$, kalkulus ve diferansiyel denklem kullanarak ilkeleri incelenebilen bir fonksiyon tanımlar. Sürekli zamanlı Markov zincirinin analizi kesikli zamanlı zincirlerden daha zor ve tekniktir.

3.9.1. Poisson Süreci

Poisson süreçleri, her bir $t > 0$ için 0 ile *t* zamanı arasında meydana gelen olayların sayısını inceleyen sayma süreçleri olarak düşünülebilirler. Yani, $[0,\infty)$ aralığındaki bir $N(t)$ Poisson Süreci, bazı olayların $[0,t]$ zaman aralığı boyunca meydana gelme zamanları sayılarını sayar. $N(t)$ süreciyle ilgili şu varsayımlar yapılır, (i). Her $h > 0$ için $N(t+h) - N(t)$ dağılımı aynıdır, yani t den bağımsızdır.

(ii). Eğer $\left[t_j, t_j'\right]$ aralıkları çakışmazlarsa, $N(t_j') - N(t)$ rastgele değişkenleri karşılıklı olarak bağımsızdırlar.

(iii). $N(0) = 0$ dır. $N(t)$ tamsayı değerlidir, sağdan süreklidir, t içinde azalmayandır ve olasılığı 1 dir.

(iv). $h \to 0$ iken $P\left[N(t+h) - N(t) \geq 2\right] = P\left[N(h) \geq 2\right] = o(h)$.

$N(t)$ süreci, bu varsayımlar ışığında aşağıdaki özellikleri de sağlar.

Teorem 3.9.1.1.

(1). $N(t)$, büyüklüğü 1 olan adımlarla artan bir adım fonksiyonudur ve olasılığı 1 dir.

(2). $N(t+s) - N(s)$ dağılımı λt parametreli bir Poisson dağılımına sahip olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ sayısı vardır.

(3). Ardışık sıçramalar arasındaki $\tau_1, \tau_2, \ldots$ aralıkları

$$P\left\{\tau_j \geq x\right\} = \begin{cases} \exp\left[-\lambda x\right], & x \geq 0 \\ 1 & , x \leq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.38)}$$

üstel dağılımı ile bağımsız özdeş dağılmış rastgele değişkenlerdir.

İspat:

$[0,T]$ aralığını n eşit parçaya bölelim ve beklenen sayıda aralığı

$$N\left(\frac{(k+1)T}{n}\right) - N\left(\frac{kT}{n}\right) \geq 2$$

ile hesaplayalım. Bu beklenen değer $n \longrightarrow \infty$ iken,

$$nP\left[N\left(\frac{T}{n}\right) \geq 2\right] = n.o\left(\frac{1}{n}\right) = o(1)$$

değerine eşittir. Böylece özellik (1) ispatlanır.

Sağdan süreklilik özelliğinden, $t \longrightarrow 0$ için,

$$P\left[N(t) \geq 1\right] \to 0$$

olur ve böylece $t \longrightarrow 0$ için $N(t)$ nin dağılımı sonsuz küçük olur. Ayrık aralıklar üzerindeki artımlar bağımsız olduğundan $N(t)$ yaklaşık olarak $N(1/n)$ in bağımsız kopyaları olan $[nt]$ nin toplamıdır.

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[-\pm N(t)\right]\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left\{\exp\left[-\pm N\left(\frac{[nt]}{n}\right)\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\mathbb{E}\left\{\exp\left[-\pm N\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\right]^{[nt]} \quad \textbf{(3.39)}$$

$$= \exp\left[-t.g(\pm)\right] \quad \textbf{(3.40)}$$

elde edilir. Burada,

$$g(\pm) = \lim_{n\to\infty} n\left[1-\left[E\left\{\exp\left[-\pm N\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\right]\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[E\left\{1-\exp\left[-\pm N\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1-e^{-\pm}\right)P\left[N\left(\frac{1}{n}\right)=1\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \text{ª}\left(1-e^{-\pm}\right) \quad \textbf{(3.41)}$$

buradan ise,

$$\text{ª} = \lim_{n\to\infty} nP\left[N\left(\frac{1}{n}\right)=1\right] \quad \textbf{(3.42)}$$

elde edilir.

(3.40) daki limitin varlığı açıktır ve bu limitin varlığından (3.42) deki limitin de mutlaka var olması gerekir. $\mathbb{E}\left\{\exp\left[-\pm N(t)\right]\right\}$ nin pozitifliğinden ve (3.41) özdeşliğinden (3.42) deki limitin kesin olarak sonlu olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla (3.41) ve (3.42) formülleri, $N(t)$ dağılımının λt parametreli Poisson dağılımı ile özdeş olduğunu gösterir. Böylece (2) özeliği ispatlanmış olur.

Son olarak (3) özelliğinin ispatı için önce ²_1 in sağ dağılıma sahip olduğunu gösterelim. Poisson dağılımından,

$$P\left[\text{²}_1 > x\right] = P\left[N(x)=0\right] = e^{-\text{ª}x}$$

elde edilir. $N(\tau_1+t)-N(\tau_1)=N(\tau_1+t)-1$ in τ_1 den bağımsız bir Poisson Süreci olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla τ_2 nin de τ_1 ile aynı dağılıma sahip olduğu ve ondan bağımsız olduğu ispatlanabilir. Bu adımların tekrarlanması ve n üzerinden tümevarımla ispat tamamlanır.

3.9.2. Doğum ve Ölüm Süreçleri

Biyoloji, Demografi ve Kuyruk teorisi uygulamaları açısından Markov süreçlerinin önemli sınıflarından biri olan doğum ve ölüm süreçleri, durum geçişleri ‘doğumlar’ ve ‘ölümler’ olmak üzere iki çeşit olan özel bir tür sürekli zamanlı Markov sürecidir. Bir doğum meydana geldiğinde süreç bir sonraki duruma geçer, yani $X_n=i$ durumunda ise $X_{n+1}=i+1$ durumuna geçer. Bir ölüm meydana geldiğinde ise süreç bir önceki duruma geçer, yani $X_n=i$ durumunda ise $X_{n-1}=i-1$ durumuna geçer. Durumlar, genelliği kaybetmeden tamsayı değerli olarak belirtilir. Süreç, $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ doğum oranları ve $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}^+}$ ölüm oranları ile belirtilir.

Tanım3.9.2.1. $i\in E,\ h\to 0$ için,

$$P\big(X(t+h)-X(t)=1\ |X(t)=i\big)\simeq \lambda_i h$$
$$P\big(X(t+h)-X(t)=0\ |X(t)=i\big)\simeq 1-\lambda_i h$$

özelliklerini sağlayan $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sürekli zamanlı Markov zincirine durum-bağımlı doğum oranları $\lambda_i\geq 0$, $i\in E$ olan bir yalın doğum süreci denir (Privault 2012).

$N(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ Poisson süreci, durum-bağımlı doğum oranları $\lambda_n=\lambda>0,\ n\in\mathbb{N}$ olan bir yalın doğum sürecidir. Bir Poisson süreci ile bir yalın doğum süreci arasındaki tek fark yalın doğum süreci içinde bir durumu terk etme oranının duruma bağlı olabilmesidir.

Gösterilebilirki $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sürecinin i durumu içinde geçirdiği zaman, λ_i parametreli üstel dağılmış bir rastgele değişkendir.

Tanım 3.9.2.2. $i\in E,\ h\to 0$ için,

$$P\big(X(t+h)-X(t)=-1\ |X(t)=i\big)\simeq \mu_i h$$
$$P\big(X(t+h)-X(t)=0\ |X(t)=i\big)\simeq 1-\mu_i h$$

özelliklerini sağlayan $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sürekli zamanlı Markov zincirine durum-bağımlı ölüm oranları $\mu_i \geq 0, i \in E$ olan bir yalın ölüm süreci denir. $N(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ bir Poisson süreci olmak üzere $\left(-N(t)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ süreci, durum-bağımlı ölüm oranları $\mu_n = \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N}$ olan bir yalın ölüm sürecidir.

Yine gösterilebilir ki $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sürecinin i durumu içinde geçirdiği zaman, μ_i parametreli üstel dağılmış bir rastgele değişkendir.

Tanım 3.9.2.3. $i \in E,\ \ h \to 0$ için,

$$P\left(X(t+h) - X(t) = 1 \ |X(t) = i\right) \simeq \lambda_i h,$$
$$P\left(X(t+h) - X(t) = -1 \ |X(t) = i\right) \simeq \mu_i h,$$
$$P\left(X(t+h) - X(t) = 0 \ |X(t) = i\right) \simeq 1 - (\lambda_i + \mu_i)h$$

özelliklerini sağlayan $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sürekli zamanlı Markov zincirine durum-bağımlı doğum oranları $\lambda_i \geq 0, i \in E$ ve ölüm oranları $\mu_i = \lambda > 0,\ i \in \mathbb{N}$ olan bir doğum ve ölüm süreci denir (Privault 2012).

Yalın bir $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ doğum sürecinin $i+1$ durumuna geçmeden önce i durumunda geçirdiği $\tau_{i,i+1}$ zamanı, λ_i parametreli üstel dağılmış bir rastgele değişkendir. Yani,

$$P\left(\tau_{i,i+1} > t\right) = e^{-\lambda_i t},\ \ t \in \mathbb{R}^+$$

ve

$$\mathbb{E}\left[\tau_{i,i+1}\right] = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Benzer şekilde yalın bir $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ölüm sürecinin i - 1 durumuna geçmeden önce i durumunda geçirdiği $\tau_{i,i+1}$ zamanı, μ_i parametreli üstel dağılmış bir rastgele değişkendir. Yani,

$$P\left(\tau_{i,i-1} > t\right) = e^{-\mu_i t},\ \ t \in \mathbb{R}^+$$

ve

$$\mathbb{E}\left[\tau_{i,i-1}\right] = \frac{1}{\mu_i}.$$

Bir $X(t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ doğum ve ölüm sürecinin i durumunda geçirdiği τ_i zamanı,

$$\tau_i = \min(\tau_{i,i+1}, \tau_{i,i-1})$$

ile gösterilir. ²_i , $\text{ª}_i + \text{«}_i$ parametreli üstel dağılmış bir rastgele değişkendir ve

$$\mathbb{E}\left[\text{²}_i\right] = \frac{1}{\text{ª}_i + \text{«}_i} \qquad \text{dir.}$$

Aslında, $\text{²}_{i,i+1}$ ve $\text{²}_{i,i-1}$, ª_i ve «_i parametreli üstel dağılmış iki rastgele değişken olduğundan,

$$\begin{aligned} P\left(\min(\text{²}_{i,i+1}, \text{²}_{i,i-1}) > t\right) &= P(\text{²}_{i,i+1} > t \text{ ve } \text{²}_{i,i-1} > t) \\ &= P(\text{²}_{i,i+1} > t)P(\text{²}_{i,i-1} > t) \\ &= e^{-t(\text{ª}_i + \text{«}_i)}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\text{²}_i = \min(\text{²}_{i,i+1}, \text{²}_{i,i-1})$, $\text{ª}_i + \text{«}_i$ parametreli üstel dağılmış bir rastgele değişkendir.

3.10. Düzenli Markov Zinciri

Tanım 3.10.1. Eğer bir Markov Zincirinin geçiş matrisinin herhangi bir pozitif tamsayı kuvveti sadece pozitif bileşenlerden oluşuyorsa bu zincire Düzenli (Regüler) Markov zinciri denir. Yani, P^n nin bileşenlerini (*i*,*j*) ile tanımlarsak her (*i*,*j*) için, $p_{ij}^{(n)} > 0$ olacak şekilde bir *n* tamsayısı varsa Markov Zinciri düzenlidir.

Örnek 3.10.1. Geçiş matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

olan bir Markov Zincirini göz önüne alalım. Bu Markov Zinciri düzenli midir?

Çözüm: *P* matrisinin kuvvetlerine bakarsak,

$$P.P = P^2 = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 3/4 & 1/12 \\ 7/24 & 9/16 & 7/48 \end{bmatrix}$$

$$P^2.P = P^3 = \begin{bmatrix} 1/6 & 3/4 & 1/12 \\ 13/24 & 3/16 & 13/48 \\ 43/96 & 21/64 & 43/192 \end{bmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla *n*=3 için bütün bileşenler pozitif olduğundan bu zincir düzenlidir.

Örnek 3.10.2. Geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

olan bir Markov zincirini ele alalım. Bu matrisin kuvvetlerine bakarsak,

$$P^2 = \begin{bmatrix} (1/3)^2 & 0 \\ (2/3).(1+1/3) & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} (1/3)^3 & 0 \\ (2/3).(1+1/3+(1/3)^2) & 1 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla böyle devam edilirse,

$$P^n = \begin{bmatrix} (1/3)^n & 0 \\ (2/3).(1+1/3+\cdots+(1/3)^{n-1}) & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ise gösterir ki, P matrisinin bütün pozitif tamsayı kuvvetlerinde 0 olan bir bileşen vardır, yani zincir düzenli değildir.

Örnek 3.10.3. Düzenli olmayan Markov zinciri için en kolay örnek, geçiş matrisi $n \geq 2$ için I_n birim matrisi olan zincirdir. Çünkü birim matrisin bütün kuvvetleri yine birim matristir yani kendisine eşittir ve dolayısıyla en az bir bileşeni 0 dır.

Düzenli bir zincirde her bir durumdan diğer bütün durumlara geçmek pozitif olasılıkla mümkündür. Çünkü bir durumdan diğer bir duruma geçiş olasılıklarını veren geçiş matrisinin bir pozitif tamsayı kuvvetinde her bileşeni pozitiftir. Dolayısıyla bütün düzenli Markov zincirleri indirgenemezdir.

Örnek 3.10.4. Geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olan Markov zincirinin düzenli ve indirgenemez olup olmadığına bakalım. Öncelikle düzenli olup olmadığına bakalım. Bunun için matrisin kuvvetlerine bakalım.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Her bileşen pozitif olduğundan bu matris düzenlidir dolayısıyla indirgenemezdir.

4. MARKOV ZİNCİRLERİNİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Markov zincirleri, kuyruk sistemleri (Ching 2001 and Sharma 1995),imalat sistemleri (Buzacot & Shanthikumar 1993), stok sistemleri (Ching,Fung & Ng 2003 ve Nahmias 1997) gibi bir çok uygulamalı sistemler ile kategorik veri dizileri (Ching,Fung & Ng 2002 ve Macdonald & Zucchini 1997) ve zaman serilerinin (Ching, Ng & Fung 2008) modellemesinde kullanışlı araçlardır.

Öncelikle, zaman serilerinin analizi ve tahminiyle ilgili bir uygulama verelim.

Uygulama 4.1.

Bu uygulamada, Markov zincirinin, bir marketteki dana eti fiyat ve satış hacmi tahmini problemine uygulamasını vereceğiz. Ordu'daki bir marketteki dana etinin fiyat ve satış hacminin zaman serisi (Ek4.1.) de verilmiştir. Dana etinin fiyatı (Ek4.1.) de görüldüğü üzere beş durum içinde (1,2,3,4,5) sınıflandırılabilir. Fiyat serisinde 1= çok düşük (≤29 TL/kg), 2= düşük (29~32 TL/kg), 3= orta (32~35 TL/kg), 4= yüksek (35~38 TL/kg), 5= çok yüksek (≥38 TL/kg) olarak ifade edilir. Benzer şekilde, dana eti satış hacmi de (Ek4.1.) de görüldüğü gibi yine beş durum içinde (1,2,3,4,5) sınıflandırılabilir. Satış serisinde 1= çok düşük (≤ 50kg), 2= düşük (50kg ~ 55kg), 3= orta (55kg ~ 60kg), 4= yüksek (60kg ~ 65kg), 5= çok yüksek (≥ 65kg) olarak ifade edilir.

Diğer taraftan marketin dana eti için satış talebi, kendi stok birikimini en aza indirmek iken müşteriler satın alma stratejilerini belirlemek için dana eti fiyatını tahmin etmek ister. Dahası market, müşterilerinin satış şablonunu anlayabilir ve müşterileriyle alış veriş yapmak amacıyla pazarlama politikası geliştirebilir.

Bugünün fiyatları daha çok dünün fiyatlarına bağlı olduğundan 1. mertebeden Markov zinciri modelini tercih edeceğiz. Öncelikle P ilk adım geçiş olasılık matrisi ile durağan olasılık dağılımların tahmini olarak nasıl belirleneceğini verelim.

$t = m+1$ zamanındaki durum olasılık dağılımının dizinin $t = m, m\text{-}1, \ldots, m\text{-}n+1$ zamanlarındaki durum olasılık dağılımına bağlı olduğunu kabul edersek,

$$x_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i P^i x_{n-i+1} \quad , i = m-1, m, \cdots \qquad \textbf{(4.1)}$$

elde edilir. Burada, x_m, m zamanındaki durum olasılık dağılımı, P^i i-adım geçiş matrisi ve a_i ler,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \qquad \textbf{(4.2)}$$

özelliğini sağlayan negatif olmayan reel sayılardır.

Verilen veri serisinde $1 \leq i \leq n$ için, dizideki $t = m - i + 1$ zamanındaki durumlardan, j-yinci dizideki $t = m + 1$ zamanındaki durumlara olan geçiş frekansları sayılarak veri dizisinin geçiş frekans matrisi oluşturulabilir.

Normalleştirmeden sonra, geçiş olasılık matrislerinin $\hat{P^i}$ tahminleri de elde edilebilir.

P^i nin tahminleri dışında a_i parametrelerinin de tahminine ihtiyaç vardır.

Önerme 4.1. P matrisinin bire eşit olan bir özdeğeri vardır ve P nin bütün özdeğerlerinin modülü birden küçük veya bire eşittir.

Önerme 4.2. (Perron – Frobenius teoremi) A, m-yinci dereceden negatif olmayan ve indirgenemez bir kare matris olsun. Bu durumda,

i. A nın, spektral yarıçapına eşit olan, pozitif reel bir $a = \max_{a} |a_k(A)|$ özdeğeri vardır. Burada, $a_k(A)$ ya A nın k-yinci özdeğeri denir.

ii. a ya bileşenleri reel ve pozitif olan ve $A\mathrm{x} = a\mathrm{x}$ eşitliğini sağlayan bir x öz vektörü karşılık gelir.

iii. a, A nın basit bir özdeğeridir.

(Önerme 4.1.) ve (Önerme 4.2.) nin bir sonucu olarak n-yinci dereceden Markov zincirinin bir **X** sabit vektörü vardır. Serilerdeki her bir durumun oluşum oranı hesaplanarak x_j vektörü dizilerden tahmin edilebilir.

Yine (Önerme 4.1.) ve (Önerme 4.2.) nin bir sonucu olarak,

$Q = \sum_{i=1}^{n} a_i P^i$ olmak üzere, $Q\mathrm{x} \equiv \mathrm{x}$ elde edilir. Buradan ise,

$$\hat{Q}\,\hat{\mathrm{x}} \equiv \hat{\mathrm{x}} \tag{4.3}$$

olması beklenebilir.

(4.3) ten, α_i parametrelerinin nasıl tahmin edileceğini verelim.

$$\begin{aligned}
&\min_{\alpha} \left\| \hat{Q}\,\hat{\mathrm{x}} - \hat{\mathrm{x}} \right\| \\
&\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\ \alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

minimizasyon probleminin çözümünü göz önüne alalım. Buradaki $\|\cdot\|$ vektör normu, $\|\cdot\|_\infty$ olarak alınırsa, bu optimizasyon problemi

$$\begin{aligned}
&\min_{\alpha} \; \max_{i} \left| \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{P}\,\hat{\mathrm{x}} - \hat{\mathrm{x}} \right]_i \right| \\
&\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\ \alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

problemine dönüşür. Burada, $[\cdot]_i$ vektörün i-yinci bileşenini ifade eder. (4.5) problemi s lineer programlama problemleri gibi,

$$\begin{aligned}
&\min_{\alpha} \; \pounds \\
&\begin{cases}
-M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pounds \\ \pounds \\ \vdots \\ \pounds \end{pmatrix} \leq - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pounds \\ \pounds \\ \vdots \\ \pounds \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \\
\alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n
\end{cases}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şeklinde formüle edilebilir. Burada, $M = \begin{bmatrix} \hat{P}^1 \hat{\mathrm{x}} & \hat{P}^2 \hat{\mathrm{x}} & \cdots & \hat{P}^n \hat{\mathrm{x}} \end{bmatrix}$ dir.

$\hat{x}_t$ dizisinin t zamanındaki, maksimum olasılıklı durum olarak alabileceğimiz, Yani,

$$\forall\ 1 \le i \le k \text{ için, } \left[\hat{\mathrm{x}}_t\right]_i \le \left[\hat{\mathrm{x}}_t\right]_j \text{ ise, } \hat{x}_t = j \qquad \textbf{(4.7)}$$

olan sonraki durumunu tahmin etmek için yüksek dereceden Markov modelini kullanacağız.

Yüksek dereceden Markov zinciri modelinin performans ve etkinliğini değerlendirmek amacıyla, bir tahmin sonucu

$$s = \frac{1}{N-n} \times \sum_{t=n+1}^{N} a_t \times 100\%$$

şeklinde tanımlı r tahmin doğruluğu ile ölçülür. Burada, N veri dizisinin uzunluğu ve

$$a_t = \begin{cases} 1 & , \hat{x}_t = x_t \text{ ise} \\ 0 & , \hat{x}_t \neq x_t \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Verilen metod ile P ilk adım geçiş olasılık matrisini tahmini olarak

$$P = \begin{bmatrix} 0.2917 & 0.0370 & 0.1500 & 0.1429 & 0.1096 \\ 0.1250 & 0.3704 & 0.1500 & 0.2500 & 0.3014 \\ 0.2083 & 0.0741 & 0.2000 & 0.0714 & 0.0685 \\ 0.1250 & 0.1296 & 0.2500 & 0.1429 & 0.1233 \\ 0.2500 & 0.3889 & 0.2500 & 0.3929 & 0.3973 \end{bmatrix}$$

şeklinde alalım. Ayrıca fiyat serilerinin durağan olasılık dağılımlarını da

$$\hat{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0.1200 & 0.2750 & 0.2150 & 0.0600 & 0.2550 \end{bmatrix}$$

şeklinde alalım.

Önerilen modelin tahmin doğruluğu $r_1 = 0.5362$ dir.

Satış hacmi serisi ise daha da karmaşıktır. Dereceyi keyfi olarak 5, yani n = 5 alacağız. Öncelikle verilen metodu kullanarak bütün P^i deçiş olasılık matrislerini tahmini olarak belirleyelim. Ayrıca ürünün durağan olasılık dağılımlarını tahminen

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.3350 & 0.1350 & 0.2150 & 0.0600 & 0.2550 \end{bmatrix}$$

olarak alalım.

(4.6) daki lineer programlama problemlerin çözümünden aşağıdaki yüksek dereceden Markov zincir modeli elde edilir:

$$x_{m+1} = 0.7022P^1 x_m + 0.0768P^4 x_{m-3} + 0.2210P^5 x_{m-4}$$

Burada,

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0.4776 & 0.2222 & 0.0233 & 0.0909 & 0.5294 \\ 0.1045 & 0.2593 & 0.1163 & 0.0909 & 0.1373 \\ 0.0149 & 0.2963 & 0.6279 & 0.3636 & 0.0588 \\ 0.0149 & 0 & 0.1395 & 0.4545 & 0 \\ 0.3881 & 0.2222 & 0.0930 & 0 & 0.2745 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0.3538 & 0.2593 & 0.1860 & 0.2000 & 0.4706 \\ 0.1692 & 0.1481 & 0.2093 & 0.2000 & 0.0196 \\ 0.1846 & 0.2593 & 0.3023 & 0.1000 & 0.1961 \\ 0.0462 & 0.1111 & 0.0930 & 0 & 0.0392 \\ 0.2462 & 0.2222 & 0.2093 & 0.5000 & 0.2745 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.4063 & 0.2593 & 0.2093 & 0.4000 & 0.3333 \\ 0.0625 & 0.2222 & 0.2326 & 0 & 0.1373 \\ 0.2656 & 0.2222 & 0.1860 & 0.1000 & 0.2157 \\ 0.0469 & 0.1852 & 0.0465 & 0 & 0.0392 \\ 0.2188 & 0.1111 & 0.3256 & 0.5000 & 0.2745 \end{bmatrix}$$

dır.

Önerilen bu modelin tahmin doğruluğu $r_2 = 0.5588$ dir. Bütün bu sonuçlar, zaman serilerinin analiz ve tahmininde Markov zinciri modelinin geçerliğinin çok yüksek olduğunu göstermektedir.

Ek 4.1.

Marketteki dana etinin fiyat serisi

555545334255311133415113325151555521411124551424134225225525444225222555532254524555411122324555252552425525512343313143545545525252235535254215252222554552252223444545155135555152225555245225252224222455532252544453353114225525555255355315515551515551555212525523555552 5

1= çok düşük (≤29 TL/kg), 2= düşük (29~32 TL/kg), 3= orta (32~35 TL/kg), 4= yüksek (35~38 TL/kg), 5= çok yüksek (≥38 TL/kg)

Marketteki dana eti satış talep serisi

511112233343225155123323322115233332312115225523434221551515511533333343351551151551551551515233333335155151555515115333333522511151511111111111253444413551551151111512112521123333443225151115211114433332515515151122334331112115111511111112331143132111115515151111111

1= çok düşük (≤ 50kg), 2= düşük (50kg ~ 55kg), 3= orta (55kg ~ 60kg), 4= yüksek (60kg ~ 65kg), 5= çok yüksek (≥ 65kg).

Uygulama 4.2.

Ordu’da, biri şehir merkezinde (A), biri doğu yakasında (B), biri ise batı yakasında (C) olmak üzere üç şubesi bulunan bir araç kiralama acentesini göz önüne alalım. Acentenin her üç şubeye hizmet veren bir grup teslimat sürücüsü vardır. Acentenin istatistikçisi araştırmasında aşağıdakileri belirlemiştir:

1. Şehir merkezindeki şubeye gelen çağrıların, %30 u yine şehir merkezine, %30 u doğu yakasına, %40 ı ise batı yakasına teslim edilmiştir.
2. Doğu yakasındaki şubeye gelen çağrıların, %40 ı şehir merkezine, %40 ı doğu yakasına, %20 si ise batı yakasına teslim edilmiştir.
3. Batı yakasındaki şubeye gelen çağrıların, %50 si şehir merkezine, %30 u doğu yakasına, %20 si ise batı yakasına teslim edilmiştir.

Sürücü bir teslimat yaptıktan sonra bir sonraki teslimatı yapmak için en yakın şubeye gidecektir. Bu şekilde, belirli bir sürücünün yeri sadece onun bir önceki konumuna göre belirlenir.

Bu problemi bir matris ile modellersek:

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{vmatrix} \end{array}$$

T matrisi yukarıdaki sistemin geçiş matrisidir. Bu örnekte, belirli bir sürücünün sistemde belirli bir zamandaki konumu bir durumdur. Matristeki t_{ij} bileşenleri, i ye karşılık gelen durumdan j ye karşılık gelen duruma geçiş olasılığıdır.

Kolaylık olması açısından her bir sürücünün müşterilerini götürüp sonraki şubeye gitme sürelerini aynı alacağız.

Soru 4.2.1. B şubesinden yola çıkan bir sürücünün 2 teslimattan sonra C şubesinde bulunma olasılığı nedir?

Çözüm. C ye iki adımda nasıl gidilebileceğini düşünelim. B den B ye sonra B den C ye gidilebilir veya B den A ya sonra A dan C ye gidilebilir veya B den C ye sonra C den C ye gidilebilir.

B den C ye iki adımda gitme olasılığı P(BC) olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} P(\mathrm{BC}) &= P(\mathrm{BB}).P(\mathrm{BC}) + P(\mathrm{BA}).P(\mathrm{AC}) + P(\mathrm{BC}).P(\mathrm{CC}) \\ &= (0.4).(0.2) + (0.4).(0.4) + (0.2).(0.2) \\ &= 0.08 + 0.16 + 0.04 \\ &= 0.28 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Bu sorunun diğer bir çözümü T^2 matrisi yardımıyla bulunabilir çünkü T^2 matrisi 2 adım geçiş olasılıklarını verir.

$$T^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.41 & 0.33 & 0.26 \\ 0.38 & 0.34 & 0.28 \\ 0.37 & 0.33 & 0.3 \end{vmatrix} \end{array}$$

Görüldüğü üzere $T^2(\mathrm{BC}) = 0.28$, B den C ye 2 adımda geçiş olasılığıdır.

Soru 4.2.2. C şubesinden yola çıkan bir sürücünün 5 teslimattan sonra A şubesinde bulunma olasılığı nedir?

Çözüm. T^5 matrisi bir şubeden diğer bir şubeye 5 adımda geçiş olasılıklarını vereceğinden önce T^5 matrisini bulalım.

$$T^5 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.38873 & 0.33333 & 0.27794 \\ 0.38894 & 0.33334 & 0.27772 \\ 0.38905 & 0.33333 & 0.27762 \end{vmatrix} \end{array}$$

olduğundan C şubesinden yola çıkan bir sürücünün 5 teslimattan sonra A şubesinde bulunma olasılığı $T^5(\mathrm{CA}) = 0.38905$ tir.

Soru 4.2.3. A şubesinden yola çıkan bir sürücünün uzun vadede örneğin bir ay sonra tekrar A şubesinde bulunma olasılığı nedir?

Çözüm. Bir adım, iki adım, üç adım … geçiş olasılıklarını inceleyelim. Bunun için geçiş matrislerine bakalım.

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{vmatrix} \end{array} \quad T^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.41 & 0.33 & 0.26 \\ 0.38 & 0.34 & 0.28 \\ 0.37 & 0.33 & 0.3 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$T^3 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.385 & 0.333 & 0.282 \\ 0.39 & 0.334 & 0.276 \\ 0.393 & 0.333 & 0.274 \end{vmatrix} \end{array} \quad T^4 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.3897 & 0.3333 & 0.2770 \\ 0.3886 & 0.3334 & 0.2780 \\ 0.3881 & 0.3333 & 0.2786 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$T^5 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.38873 & 0.33333 & 0.27794 \\ 0.38894 & 0.33334 & 0.27772 \\ 0.38905 & 0.33333 & 0.27762 \end{vmatrix} \end{array} \quad T^6 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.388921 & 0.333333 & 0.277746 \\ 0.388878 & 0.333334 & 0.277788 \\ 0.388857 & 0.333333 & 0.277810 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$T^7 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0.3888825 & 0.3333333 & 0.2777842 \\ 0.3888910 & 0.3333334 & 0.2777765 \\ 0.3888953 & 0.3333333 & 0.2777714 \end{vmatrix} \end{array} \quad \cdots$$

Eğer geçiş matrisinin bütün bileşenleri 0 ile 1 aralığında ise o matrisin kuvvetlerinde yakınsamadan bahsedilebilir. Dolayısıyla dikkat edilirse uzun vadede, A şubesinden yola çıkan bir sürücünün tekrar A şubesinde bulunma olasılığı yaklaşık $0.3\overline{8}$ dir, yani yaklaşık $\%38.\overline{8}$ dir.

Aslında sürücünün nereden yola çıktığı pek önemli değildir. Dikkat edilirse, nereden yola çıkarsa çıksın sürücü, uzun vadede yaklaşık $\%38.\overline{8}$ A da , $\%33.\overline{3}$ B de , $\%27.\overline{7}$ olasılıkla C de bulunur.

Soru 4.2.4. Şubelerdeki sürücü oranlarının başlangıç dağılım vektörü $v_0 = [1/3 \quad 1/3 \quad 1/3]$ ise, sürücülerin 3 teslimattan sonraki oranları ne olur?

Çözüm: Öncelikle bu oranları veren $v_0.T^3$ vektörünü bulalım.

$$v_0.T^3 = [1/3 \quad 1/3 \quad 1/3] \ . \begin{bmatrix} 0.385 & 0.333 & 0.282 \\ 0.390 & 0.334 & 0.276 \\ 0.393 & 0.333 & 0.274 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.389\overline{3} & 0.\overline{3} & 0.277\overline{3} \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere 3 teslimattan sonra sürücülerin yaklaşık %38.93 ü A da, %33.3 ü B de, %27.7 si ise C de bulunur.

Soru 4.2.5. Başlangıçta A şubesinde 13 sürücü, B şubesinde 7 sürücü, C şubesinde ise 16 sürücü varsa uzun vadede (birçok teslimattan sonra) şubelerdeki sürücü sayıları ne olur?

Çözüm: Uzun vadede sürücü sayıları $v_0.T^\infty$ vektörü yardımıyla bulunabilir.

$$v_0.T^\infty = [13 \quad 7 \quad 16] \ . \begin{bmatrix} 0.3\overline{8} & 0.\overline{3} & 0.2\overline{7} \\ 0.3\overline{8} & 0.\overline{3} & 0.2\overline{7} \\ 0.3\overline{8} & 0.\overline{3} & 0.2\overline{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ v_0.T^{\infty} = & [14 & 12 & 10] \end{array}$$

Dolayısıyla uzun vadede A şubesinde 14 sürücü, B şubesinde 12 sürücü ve C şubesinde 10 sürücü bulunur.

Uygulama 4.3. Üniversiteden mezun olan ya da eğitiminin herhangi bir aşamasında sistemin dışına çıkan durumlar yutucu durum olarak kabul edilmiştir. Burada eğitim sürecine geri dönme ve ikinci bir üniversiteye girme durumları dikkate alınmamıştır. Tablo 1, Tablo 2 ve Tablo 3'deki veriler Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yayınlanan ‘‘ Türkiye Eğitim İstatistikleri 2005-2006’’ kitapçığından alınmıştır. 2005-2006 yılının mezuniyet verileri bulunmadığından bu kitapçıkta bulunan 2004-2005 verileri kullanılmıştır.

	İlköğretim	**Ortaöğretim**	**Yükseköğretim**	**Mezuniyet**	**Çıkış**	**Toplam**
İlköğretim	8.543.969	1.220.567	0	0	800.853	10.565.389
Ortaöğretim	0	2.257.462	1.128.731	0	772.373	4.158.566
Yükseköğretim	0	0	1.504.256	296.133	41.057	1.841.446

Çizelge 4.3.1. Mezun olması beklenen toplam öğrenci sayıları

	İlköğretim	**Ortaöğretim**	**Yükseköğretim**	**Mezuniyet**	**Çıkış**	**Toplam**
İlköğretim	4.540.140	648.591	0	0	399.043	5.587.775
Ortaöğretim	0	1.304.426	652.213	0	438.790	2.395.430
Yükseköğretim	0	0	884.532	169.448	25.079	1.079.059

Çizelge 4.3.2. Mezun olması beklenen erkek öğrenci sayıları

	İlköğretim	**Ortaöğretim**	**Yükseköğretim**	**Mezuniyet**	**Çıkış**	**Toplam**
İlköğretim	3.939.548	562.793	0	0	475.274	4.977.614
Ortaöğretim	0	691.852	345.926	0	137.646	1.175.424
Yükseköğretim	0	0	619.833	126.665	15.989	762.487

Çizelge 4.3.3. Mezun olması beklenen kız öğrenci sayıları

Yukarıdaki tablolar kullanılarak aşağıdaki Markov geçiş matrisleri (Tablo 4, Tablo 5 ve Tablo 6) elde edilmiştir. Bunun için, matrisin her bir elemanını bulunduğu satırın toplamına bölüp oranlar elde edilmiştir.

	1	2	3	4	5
1	0.8087	0.1155	0.0000	0.0000	0.0758
2	0.0000	0.5428	0.2714	0.0000	0.1857
3	0.0000	0.0000	0.8169	0.1608	0.0223
4	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Çizelge 4.3.4. Markov geçiş matrisi (Tüm Öğrenciler)

	1	2	3	4	5
1	0.8125	0.1161	0.0000	0.0000	0.0714
2	0.0000	0.5445	0.2723	0.0000	0.1832
3	0.0000	0.0000	0.8197	0.1570	0.0232
4	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Çizelge 4.3.5. Markov geçiş matrisi (Erkek Öğrenciler)

	1	2	3	4	5
1	0.7915	0.1131	0.0000	0.0000	0.0955
2	0.0000	0.5886	0.2943	0.0000	0.1171
3	0.0000	0.0000	0.8129	0.1661	0.0210
4	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Çizelge 4.3.6. Markov geçiş matrisi (Kız Öğrenciler)

Yutucu durum içeren Markov zincirlerinin analizinin yapılabilmesi için Markov geçiş matrisinin yeniden düzenlenmesi gerekir. Bu düzenleme yapılarak oluşturulan yeni matrisin sol üst köşesinde bir birim matris (yutucu durum sayısı boyutunda) yanında 0‘lardan oluşmuş bir matris, birim matrisin altında yutan olmayan durumlardan yutucu durumlara geçiş olasılıklarını gösteren R matrisi ve 0 matrisinin altında da yutucu olmayan durumlardan yutucu durumlara geçişi gösteren Q matrisi oluşacaktır. Tablo 7,8 ve 9’da tüm öğrenciler, erkek ve kız öğrenciler için düzenlenmiş olan bu matrisler gösterilmiştir.

	4	5	1	2	3
4	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0758	0.8087	0.1155	0.0000
2	0.0000	0.1857	0.0000	0.5428	0.2714
3	0.1608	0.0223	0.0000	0.0000	0.8169

Çizelge 4.3.7. Düzenlenmiş Markov geçiş matrisi (Tüm Öğrenciler)

	4	5	1	2	3
4	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0714	0.8125	0.1161	0.0000
2	0.0000	0.1832	0.0000	0.5445	0.2723
3	0.1570	0.0232	0.0000	0.0000	0.8197

Çizelge 4.3.8. Düzenlenmiş Markov geçiş matrisi (Erkek Öğrenciler)

	4	5	1	2	3
4	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0955	0.7915	0.1131	0.0000
2	0.0000	0.1171	0.0000	0.5886	0.2943
3	0.1661	0.0210	0.0000	0.0000	0.8129

Çizelge 4.3.9. Düzenlenmiş Markov geçiş matrisi (Kız Öğrenciler)

Q matrisi, birim matristen çıkarılıp tersi alındıktan sonra bulunan $(I-Q)^{-1}$ yutucu olmayan durumlardaki ortalama bekleme sürelerini göstermektedir. $(I-Q)^{-1}$ matrisi sıkça Markov zinciri esas matrisi olarak da adlandırılmaktadır.

	1	**2**	**3**
1	5.2274	1.3206	1.9574
2	0	2.1872	3.2420
3	0	0	5.4615

Çizelge 4.3.10. Tüm öğrenciler için $(I-Q)^{-1}$ matrisi

	1	**2**	**3**
1	5.3333	1.3594	2.0530
2	0	2.1954	3.3156
3	0	0	5.5463

Çizelge 4.3.11. Erkek öğrenciler için $(I-Q)^{-1}$ matrisi

	1	**2**	**3**
1	4.7962	1.3185	2.0740
2	0	2.4307	3.8234
3	0	0	5.3447

Çizelge 4.3.12. Kız öğrenciler için $(I-Q)^{-1}$ matrisi

Yukarıdaki tablolara göre ilköğretimdeki bir öğrencinin ilköğretimde devam etme süresi ortalama olarak 5.2274 adıma (yıla) karşılık gelmektedir. Aynı şekilde bir erkek öğrencinin bekleme süresi 5.3333, kız öğrencinin ise, 4.7962 adım (yıl) olduğu görülmektedir.

Şu anda ilköğretimde bulunan bir öğrenci ortalama olarak 6.5480 (5.2274+1.3206) yıl ilköğretim veya ortaöğretimde, 8.5054 yıl tüm eğitim sistemi (ilköğretim, ortaöğretim, yükseköğretim) içinde yer alacaktır.

İlköğretimde bulunan erkek öğrencilerin ilköğretim ve ortaöğretimde bekleme süresi 6.6927 yıl, tüm eğitim sistemi içindeki bekleme süresi ise 8.7457 yıl; kız öğrencilerin ise ilköğretim ve ortaöğretimde bekleme süresi 5.1147 yıl, tüm eğitim sistemi içindeki bekleme süresi ise 7.1887 yıl olacaktır.

Ortaöğretimde bulunan bir öğrencinin bekleme süresi ortalama olarak ortaöğretimde 2.1872 yıl, tüm eğitim sisteminde ise 5.4292 yıldır. Bir erkek öğrencinin bekleme süresi ortalama olarak ortaöğretimde 2.1954 yıl, tüm eğitim sisteminde ise 5.5110 yıldır. Bir kız öğrencinin ise bekleme süresi ortalama olarak ortaöğretimde 2.4307 yıl, tüm eğitim sisteminde ise 6.2541 yıldır.

Bir öğrencinin yükseköğretimde bekleme süresinin 5.4615 yıl olduğu görülmektedir. Bu süre erkek öğrenciler için 5.5463, kız öğrenciler için ise 5.3447 yıldır.

Yukarıdaki $(I-Q)^{-1}$ matrisi, R matrisi (yutucu olmayan durumlardan yutucu durumlara geçiş olasılıkları) ile çarpıldığında oluşacak yeni matris her bir yutucu olmayan durumun, her bir yutucu durumda yutulma olasılıklarını vermektedir.

	4	**5**
1	0.3223	0.6777
2	0.5206	0.4791
3	0.8708	0.1287

Çizelge 4.3.13. Tüm öğrenciler için $(I-Q)^{-1} \cdot R$ matrisi

	4	**5**
1	0.3148	0.6851
2	0.5213	0.4785
3	0.8782	0.1218

Çizelge 4.3.14. Erkek öğrenciler için $(I-Q)^{-1} \cdot R$ matrisi

	4	**5**
1	0.3445	0.6560
2	0.6351	0.3649
3	0.8878	0.1122

Çizelge 4.3.15. Kız öğrenciler için $(I-Q)^{-1} \cdot R$ matrisi

Tablo 13'e bakıldığında ilköğretimdeki bir öğrencinin üniversiteden mezuniyeti %32.48, üniversiteden mezun olmadan eğitimin herhangi bir aşamasında sistemden çıkma olasılığı ise %68.51 olarak görülmektedir. Ortaöğretimdeki bir öğrencinin üniversiteden mezun olma olasılığı %52.06, yükseköğretimdeki bir öğrencinin ise üniversiteden mezun olma olasılığı %87.08 olduğu görülmektedir.

Tablo 14’te erkek öğrenciler için, Tablo 15’te ise kız öğrenciler için söz konusu oranlar gösterilmiştir. İlköğretimde bulunan erkek öğrencilerin %31.48’i, kız öğrencilerin ise %34.45’i üniversiteden mezun olacaktır. Ortaöğretimde bulunan erkek öğrencilerin %52.13’ü, kız öğrencilerin ise %63.51’i üniversiteden mezun olacaktır. Yükseköğretimde okuyan bir erkek öğrencinin mezun olma olasılığı %87.82 iken, kız öğrenciler için bu oranın %88.78 olduğu görülmektedir.

Eğitime başlayan kız öğrencilerin ortaöğretimden ve üniversiteden mezun olma olasılıkları erkek öğrencilerden daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar da üniversite giriş sınavlarındaki kız öğrencilerin başarı oranlarının erkek öğrencilere göre daha yüksek olduğu gerçeğine uymaktadır. Diğer taraftan ekonomik olarak geri kalmış bölgelerde eğitimin de geri kaldığı ve özellikle kız çocuklarının okula gönderilmediği düşünüldüğünde, eğitime daha önem veren bölgelerdeki göreceli olarak yüksek olan oranın bu sonuca neden olduğu gibi bir değerlendirme yapılabilir. Ancak eğitimin her aşamasında kız öğrenci sayısı erkek öğrenci sayısına göre daha az olduğu unutulmamalıdır.

Sonuçlar incelendiğinde, özellikle yükseköğretime devam edebilecek olan öğrencilerin oranlarının yüksekliği şaşırtıcı gelebilir. Bunun nedeni kullanılan verilere açık öğretim sisteminde bulunan ve yüksekokullarda okuyan öğrenci sayılarının da dahil olmasıdır.

Bu çalışma sonucunda bulunan sonuçlar verilerin alındığı Milli Eğitim Bakanlığı’nın ‘‘Türkiye Eğitim İstatistikleri 2005-2006’’ kitapçığındaki okullaşma oranları verilerine de uymaktadır. Bu durum ise Markov geçiş modelinin eğitim süreci için bir analiz yöntemi olarak kullanılabileceğini ortaya kaymaktadır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, günümüzde hemen hemen her dalda önemli problemlerin çözümünde kullanılan Markov Zincirleri ele alındı, geniş bir literatür taranarak incelendi.

Bir stokastik sürecin başlangıç dağılımı ve geçiş olasılık fonksiyonu yardımıyla hangi şartlarda Markov Zinciri oluşturacağı açıklandı.

Markov Zincirinin geçiş matrisi tanımlandı, istenilen adımda sürecin içinde bulunacağı durumların bu matris yardımıyla bulunabileceği gösterildi.

Markov Zincirlerinin durumlarının hangi şartlarda yutucu, haberleşen, geçici veya tekrarlanan oldukları gösterildi örneklerle açıklandı.

İndirgenemez ve Düzenli Markov Zincirleri tanımlandı, özellikleri örneklerle verildi.

Markov Zincirlerinin durağan olma şartı verildi durağan dağılımları formülüze edildi, örneklerle açıklandı.

Durağan Markov Zincirinin denge denklemleri elde edildi. Tersine zincir tanımlandı ve Markov zincirinin tersinir olma şartları verildi.

Sürekli zamanlı Markov zincirlerinden Poisson süreci ile doğum ve ölüm zincirleri tanımlanarak doğum ve ölüm süreçlerinin bir durumda geçirdiği zaman rastgele değişkenler cinsinden elde edildi.

Markov zincirinin çeşitli uygulamaları verilerek, çeşitli problemlerin çözümü için kullanışlı bir metod olduğu gösterildi.

Yapılacak daha detaylı çalışmalarla tersinir Markov zincirinin teorik çalışma alanları ve uygulama alanları genişletilebilir. Ayrıca bu çalışmada verilen teorik çalışmaların uygulama alanları genişletilebilir.

6. KAYNAKLAR

Akçelik, I.A. 1998. Markov Zinciri ve Durağan Dağılımları. Yüksek Lisans Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Akyurt, Z.I. 2005.Markov Zincirleri ve trafik sigortası hasarsızlık indirimi veya zamlı prim sisteminin Markov zinciri ile ifade edilerek analiz edilmesi.Yüksek Lisans Tezi. İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul , 17-105.

Aliyev, R. 2010. Stokastik Süreçler Teorisine Giriş. KTU Yayınları, Trabzon.

Alp, S. 2007. Türkiye'de Eğitim Sürecinin Markov Geçiş Modeli. 8. Türkiye Ekonometri ve İstatistik Kongresi, İnönü Üniversitesi. Malatya

Behrends, E. 2000. Introduction to Markov Chains With Special Emphasis on Rapid Mixing. Friedrick Vieweg & Son. 287 pp.

Cairns, A.J.G., Dickson, D.C.M., Macdonald, A.S., Waters, H.R., Willder, M. 2000. Stochastic Processes: Learning the Language. Centre for Actuarial Studies. Department of Economics, University of Melbourne. 37 pp.

Cox, D.R. , Miller, H.R. 1965. The Theory of Stochastic Processes. Chapment and Hall Ltd.

Çınlar, E.1975. Introduction to Stochastic Process. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 448 pp.

Çınlar, E. 2011. Probability and Stochastics.Graduate Texts in Mathematics 261. Springer Science+Business Media, LLC. 557 pp.

Halac, O. 2005. Bir sürecin Markov zinciri ile formüle edilmesi. Ders notları, 24s. http://web.sakarya.edu.tr/~kubat/-YAII-OSMAN HALAC KESİKLİ MARKOV +EMİCİ-2005Mart4779.doc (Erişim Tarihi 20.11.2012)

Khaniyev, T. 2003. Markov Zincirleri. KTU Yayınları, Trabzon.

Konstantopoulos, T. 2009. Markov Chains and Random Walks. 128 pp. http://www2.math.uu.se/~takis/L/McRw/mcrw.pdf (Erişim tarihi: 07.07.2012)

Korkmaz, A. 2005. Olasılık Kuramının Doğuşu. Ankara Üniversitesi. SBF Dergisi,60/2, s. 171-193.

Liu, T. 2010. Application of Markov Chains to Analyze and Predict the Time Series. Modern Applied Science, Vol 4, No 5, 162-166 pp.

Maden, S. 2006. Olasılığa Giriş. Seçkin Yayıncılık.

Medhi, J. 2003. Stochastic Models in Queueing Theory. United States of America, Academic Press, Elsevier Science. Second Edition.

Nualart, D. 2012. Stochastic Processes. 148 pp. www.mat.ub.edu/~nualart/StochProc.pdf (Erişim Tarihi: 07.07.2012)

Paul, G.Hoel, Sidney, C.Port and Charles,J. Stone. 1972. Introduction to Stochastic Processes. Houghton Mifflin Company.

Privault, N. 2012. Notes on Markov Chains.306 pp.
http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/indext.html
(Erişim tarihi: 07.07.2012)

Soong, T.T. 2004. Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. John Wiley & Sons Ltd, England. 391 pp.

Ünal, S. 2010. Türkiye'de Meydana Gelen Depremlerin Markov Zincirleri İle Modellenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İdris ÇELİK

Doğum Yeri : Samsun / Havza

Doğum Tarihi : 04.07.1978

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : celidris@gmail.com

İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Cumhuriyet Üniversitesi	2001
Y. Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2013

İş Deneyimi:

Görev	Görev Yeri	Yıl
Öğretmen	Akkuş Lisesi Akkuş/ORDU	2001- 2007
Öğretmen	Zehra Şelale Anadolu Lisesi Perşembe/ORDU	2007- 2013
Öğretmen	Akpınar Anadolu Öğretmen Lisesi Ladik/SAMSUN	2013- …