T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

FATİH KOMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Fatih KOMAN tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında yürütülen "Bazı Konveks Stokastik Süreçler için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 12 / 09 / 2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN
Matematik, Ordu Üniversitesi — İmza :

Üye : Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK
Matematik, Ordu Üniversitesi — İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN
Matematik, Giresun Üniversitesi — İmza :

ONAY:

04 / 10 / 2018.. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 04/ 10/ 2018.. tarih ve 2018.. / 467 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

F. Koman.

FATİH KOMAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN OSTROWSKİ TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Fatih KOMAN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 124s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eşitsizlikler, olasılık teorisi ve stokastik süreçler teorisinin tarihsel gelişimini veren bir giriş yapılmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde değişik konveks fonksiyon tipleri için Ostrowski tipi eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde stokastik süreçler ve bu süreçlerle ilgili bazı Ostrowski tipi eşitsizlikler ele alınmıştır. Beşinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Stokastik süreç, Konveks fonksiyon, İntegral eşitsizlikleri, İntegral ortalamaları, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Ostrowski tipi eşitsizlikler

ABSTRACT

OSTROWSKI –TYPE INEQUALITIES FOR SOME CONVEX STOCHASTIC PROCESSES

Fatih KOMAN

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2018
MSc. Thesis, 124p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter it is given an introduction historical development on inequalities, probabilty theory and stochastic processes. We gave some definitions and theorems which are used in this thesis in the second chapter. In the chapter third, it is given ostrowski-type inequalities for several convex functions. In the chapter fourth, it is obtained convex stochastic processes and some Ostrowski-type inequalities concerning with this processes. It is given some result and propositions in the fifth chapter.

Key Words: Stochastic process, Convex function, Integral inequalities, Integral means, Hermite-Hadamard inequalitiy. Ostrowski-type inequalities

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Doç. Dr. Selahattin MADEN' e içten teşekkürlerimi sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR

$max\{a,b\}$	: a ve b sayılarının maksimumu
$min\{a,b\}$	: a ve b sayılarının minimumu
$inf\{a,b\}$	: a ve b sayılarının infumumu
$sup\{a,b\}$	: a ve b sayılarının supremumu
$\|a\|$	: a sayısının mutlak değeri
$P(A)$	: A olayının olasılığı
$P(A \cap B)$	: A ve B olaylarının kesişiminin olasılığı
$P(x_i)$	: $X = x_i$ olma olasılığı
$f(x)$	: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F(x)$	: X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu
$f(x,y)$	: (X,Y) rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F(x,y)$	: (X,Y) rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu
$E(X)$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$V(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
R_x	: X rastgele değişkeninin tanım kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel ayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$ veya $\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel Sayılar kümesi
I^0	: I kümesinin içi
$X'(t_0,.)$	: $X(t,.)$ stokastik sürecinin t_0 noktasındaki Birinci Türevi
$X''(t_0,.)$	: $X(t,.)$ stokastik sürecinin t_0 noktasındaki İkinci Türevi
$X'_-(t_0,.)$	: $X(t,.)$ stokastik sürecinin t_0 noktasındaki Sol Türevi
$X'_+(t_0,.)$	: $X(t,.)$ stokastik sürecinin t_0 noktasındaki Sağ Türevi
$P - \lim$	: Olasılıkta limit

1. GİRİŞ

Konvekslik, M. Ö. 250 yılında Archimedes' in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Archimedes bir konveks şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu önemle ifade etmiştir.

Gerçekte her zaman ve birçok yolla konvekslik kavramıyla karşılaşıyoruz ve deneyimliyoruz. Çok basit bir örnek olarak dik pozisyonda durduğumuzda ağırlık merkezimizin dik izdüşümü ayağımızın kapladığı konveks alanın içinde kalır. Böylece dengemizi sağlayabilmekteyiz. Bununla beraber günlük hayatımızda konveksiliğin büyük etkileri vardır, örneğin endüstri, iş, sağlık ve sanat alanlarında birçok uygulaması vardır. İşbirliğinin olmadığı oyunların parasal kaynakları ve adaleti en uygun şekilde paylaşımını yapma problemidir.

Konveks fonksiyon teorisi konveksliğin genel konularının bir parçasıdır, çünkü konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi konveks bir kümedir. Konveks fonksiyonlar teorisi matematiğin tüm alanlarına dokunan önemli bir teoridir. Konvekslik konusunu gerektiren matematiğin ilk konularından birisi çizgisel analizdir. İkinci türev testi konveksliğin bulunmasında bize sonucu veren güçlü bir araçtır. Optimizasyon ve kontrol teorisinde bazı karışık problemlerden hareketle konveks fonksiyon teorisi, sonsuz boyutlu Banach uzaylarının çalışma alanlarına genişletilmektedir.

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequelities" adlı kitaptır (1952). Bu salt eşitsizlikler konusunu ele alan ve birçok yeni eşitsizlikler ve uygulamaları içeren ilk kaynak kitaptır. E.F. Beckenbach ve R. Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinoviç' in 1970' te yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Son yıllarda da S. S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893' te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen' in bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman (1961) ve Mitrinoviç (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak Pecaric (1987) tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts ve Varberg (1973), Niculescu ve Persson (2005, 2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

”Neden Matematiksel Eşitsizlikler” sorusu için 1978 yılında R. Bellman tarafından söyle bir cevap verilmiştir: “Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.”

Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Bununla birlikte konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonucudur. Örneğin; Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin sonucudur. Bu bağlamda, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin özel bir yere sahip olduğu ifade edilebilir. Aslında konveks fonksiyonun kendi tanımı da bir eşitsizliktir. Benzer şekilde, konveks fonksiyonlar da eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında pek çok eşitsizlik bulunmuştur. Bu eşitsizliklerin bazıları konveks fonksiyonlar sınıfı için yazılan temel eşitsizlikler haline gelmiştir. 1881 yılında Hermite tarafından ifade edilen ve bugün birçok kaynakta Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük bir bölümü S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan ”Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” adlı kaynakta toplanmıştır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiş ve bu konuda yapılan çalışmaların sayısında bir hayli artış gözlenmiştir.

Olasılık teorisi ve stokastik süreçlerden kısaca bahsedecek olursak; bilim adamlarının çoğu olasılık hesabının doğuşunu Blaise Pascal (1623-1662) ile Pierre de Fermat (1601-1665)’ in 17. yüzyıldaki yazışmalarına bağlıyor. Ancak bu dönemdeki Olasılık Teoresinin oluşumundaki en önemli rol Jacop Bernoulli’e (1654-1705) aittir. J. Bernoulli’nin elde ettiği en önemli sonuç ”Büyük Sayılar Kanunudur”. Bu kanun Olasılık Teorisinin uygulamaları için temel oluşturmaktadır. Bu kanun ilk kez Jacop Bernoulli’nin ölümünden sonra 1713 yılında yayınlanan ”Ars Conectandi (The Art of Conjecture)” isimli kitabında limit teoremi şeklinde yer almıştır. Jacop Bernoulli’den sonraki dönemlerde Olasılık Teoresinde iz bırakmış bilim adamlarından Pierre-Remond de Montmort (1678-1719), Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Pieere Simon de Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Simon Denis Poisson (1781-1840) sıralamak mümkündür. 19. yüzyılın ikinci yarısından itibaren Olasılık Teorisinin temel problemlerinin incelenmesinde P. L. Chebyshev (1821-1894), A. A. Markov (1856-1922), A. M. Liapunov (1857-1918) vs. büyük rol oynadılar.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez bu teorinin kurucularından olan Jacop Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç (1868-1913) in büyük katkısıyla 20. yüzyılın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır. Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov ve A. Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreç olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken A. Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. 20. Yüzyılın ikinci yarısından sonra Stokastik Süreçler Teorisinin gelişmesinde ve derinleşmesinde büyük hizmetleri olmuş bilim adamlarından J.L. Doob, N. Winner, A. V. Skorokhod, W. Feller, E. Dinkin, E. Çınlar, T. Sarimkov, P. Levy isimlerini sıralamak mümkündür. Bu dönemde Stokastik Süreçlerin birçok yararlı uygulamaları da bilim adamları tarafından ele alınmıştır.

Olaslık teorisi, özellikle rastgele değişkenler ve stokastik süreçler, eşitsizlikler ve konveks fonksiyonların en önemli uygulama alanlarındandır. Son zamanlarda konveks fonksiyonlar için sağlanan birçok eşitsizlik konveks stokastik süreçler için de elde edilmiştir. İlk kez Nikodem (1980) konveks stokastik süreçleri tanıtmıştır. Sonra Skowronski (1992) Jensen konveks stokastik süreçlerin özelliklerini incelemiştir. Daha sonra ise Skowronski (1995) konveks stokastik süreçler için daha ileri sonuçları sunmuştur. D. Kotrys (2012) konveks ve güçlü konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini vermiştir. Maden ve ark. , (2015), birinci anlamda *s*-konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri ispatlamışlardır. Set ve ark. , (2014) ikinci anlamda *s*-konveks stokastik süreçleri ele almışlar ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teorem verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): L bir liner uzay ve A ⊆ L olmak üzere $\forall x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümesidir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.1.2 (J-Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan bir f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970).

Tanım 2.1.3 (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için,

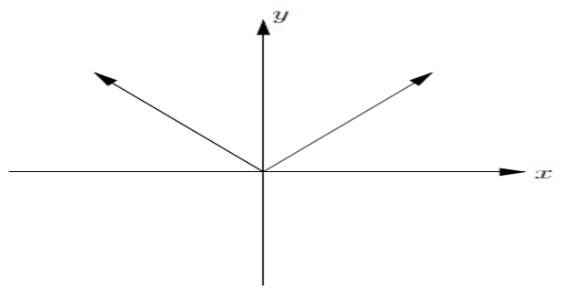
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970).

Tanım 2.1.4 (Konveks Fonksiyon): I, ℝ' de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Bakınız Şekil 2.1). Örneğin, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde bir konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1. Bir aralıkta konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir J-konveks fonksiyondur (Mitrinovic, 1970).

Sonuç 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I' da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

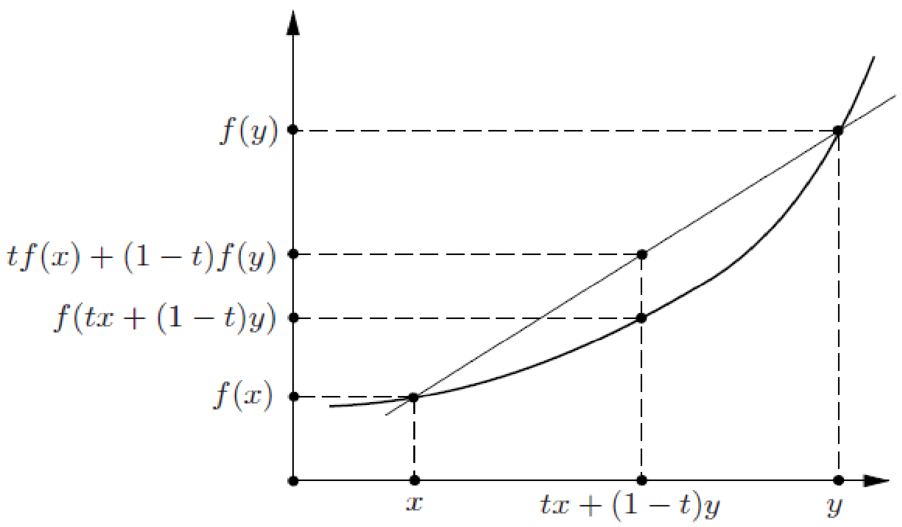
$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992). I üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun kesin konveksliğinin geometrik anlamı $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f' nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır. Bunu Şekil 2.2 de görmekteyiz.

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı, $[a, b]$ aralığında konveks (konkav) ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(x_0) \leq (\geq) f'(x_0)(x - x_0)$$

eşitsizliği yazılır (Roberts ve Varberg, 1973).



Şekil 2.2. Konveks fonksiyon şekli

Tanım 2.1.5 (Eşlenik Konveks Fonksiyonlar) $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$fonksiyonu artan ve sürekli bir fonksiyon olsun ayrıca $g(0) = 0$ ve $x \to \infty$ iken $g \to \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda g^{-1} vardır ve g ile aynı şartları sağlar. Eğer f ve f^* fonksiyonları

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt \quad ve \quad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(s)ds$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki fonksiyon da konveks olup f ve f^* fonksiyonlarına birbirinin konveks eşleniği denir (Roberts ve Varberg, 1973). Aşağıdaki teorem konveks eşlenik çiftlerle ilgili önemli bir sonuçtur.

Teorem 2.1.1 (Young Eşitsizliği) f, $[0, c]$, $(c > 0)$, aralığı üzerinde reel değerli, artan ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(0) = 0, a \in [0, c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ise

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab$$

eşitsizliği sağlanır (Young, 1912).

Tanım 2.1.6 (Süreklilik) $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|x - x_0| < \delta \quad olan \quad \forall x \in S \quad için \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.7 (Lipschitz Şartı) $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S de Lipschitz şartını sağlıyor denir. (Bayraktar, 2010).

Sonuç 2.1.3 f, S de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S de düzgün süreklidir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.8 (Düzgün Süreklilik): $f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$x \in S \ ve \ |x_1 - x_2| < \delta \ şartını \ sağlayan \ \forall x_1, x_2 \in S \ için \ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S' de düzgün süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Tanım 2.1.9 (Mutlak Süreklilik): I, $\mathbb{R}$'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nın $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Bayraktar, 2010).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.2 L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

a. f, U açık kümesinde konveks olsun. Eğer f, U' da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise f, U' da yerel Lipschitz' dir ve bu nedenle U'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir.

b. f, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise f, U' nun her kompakt altkümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U' da süreklidir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.3 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olsun. Bu takdirde

a. f, (a, b) aralığında süreklidir,

b. f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia, 1994).

Tanım 2.1.10 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar) f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ olan $\forall x_1, x_2 \in I$ için

i. $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii. $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii. $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv. $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır,

denir (Adams ve Essex, 2010).

Teorem 2.1.4 I, $\mathbb{R}$' de bir aralık, f, I üzerinde sürekli ve I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

ii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

iii. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

iv. $\forall x \in I^0$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

Sonuç 2.1.4 f ve g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu da konvekstir (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.5 Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I^0' de artandır (kesin artandır) (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.6 f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f' nün artan (kesin artan) olmasıdır (Pecaric, Proschan ve Tong, 1992).

Teorem 2.1.7 f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi mevcutsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için,

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinovic, Pecaric ve Fink, 1991).

Tanım 2.1.11 (p Normu) X, $\mathbb{R}^n$' de bir küme, μ, X' in alt kümelerinin σ-cebiri üzerinde bir ölçü ve f, X üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|f\|_p = \begin{cases} \{|f|^p d\mu\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ sup|f| \quad , & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye p-normu denir.

Tanım 2.1.12 (Gamma Fonksiyonu) $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır (Jeffrey ve Dai, 2008). Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \ 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(\mathrm{n})\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\mathrm{n})$

Tanım 2.1.13 (Beta Fonksiyonu) $Re(x), Re(y) > 0$ için

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır (Dragomir ve Pearce, 2000). Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir (Jeffrey ve Dai, 2008).

i. $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y), \ x, y \in (0, \infty)$

ii. $\beta(1, y) = \frac{1}{y}$

iii. $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt\,,\ x,y > 0$

iv. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\ x,y > 0$

v. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

Tanım 2.1.14 (Hipergeometrik Fonksiyon) $c > b > 0$, $|z| < 1$ için,

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\beta(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt $$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Hipergeometrik fonksiyon denir (Kilbas, Srivastava ve Trujillo, 2006).

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.2.1 (Quasi-Konveks Fonksiyon) $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subseteq \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konveks fonksiyon denir. Eğer,

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında, eğer

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\} $$

ise f' ye quasi-konkav fonksiyon ve eğer

$$ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\} $$

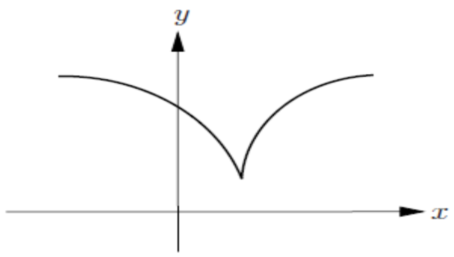
ise f' ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.2 f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f' ye quasi-monotonik fonksiyon denir (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Sonuç 2.2.1 Herhangi bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi-konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin,

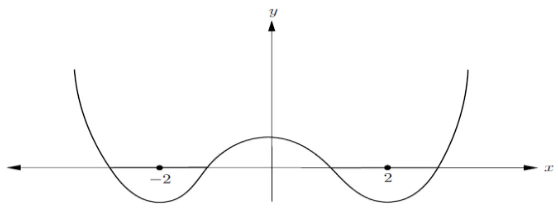
$$ g(t) = \begin{cases} t & , \quad t \in [-2,-1] \\ t^2 & , \quad t \in [-1,2] \end{cases} $$

ile tanımlanan $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyondur (Ion, 2007).



Şekil 2.3. Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kalın çizgi ile gösterilen aralıklarda fonksiyon quasi-konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon quasi-konveks değildir (Ekinci, 2014).



Şekil 2.4. Aralıkta Quasi konveks fonksiyon $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

Tanım 2.2.3 (Wright-Konveks Fonksiyon) $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x + \delta) - f(x) \leq f(y + \delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.4 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon) $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(tx + (1-t)y) + f\big((1-t)x + ty\big)\right] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x + \delta)] \leq max\{f(x), f(y + \delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f ye $I \subseteq \mathbb{R}$ de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.5 (J-Quasi-Konveks Fonksiyon) $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna J-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.2.6 (Log-Konveks Fonksiyon) I, $\mathbb{R}$ de bir aralık $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f^{\alpha}(x) f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konveks fonksiyon denir (Prudnikov, Brychkov ve Marichev, 1981).

Tanım 2.2.7 (Godunova-Levin Fonksiyonu) $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $\forall x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir. Bu tanıma denk olarak; eğer $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Greenberg ve Pierskalla, 1970).

Tanım 2.2.8 (P- fonksiyonu) $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir P-fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir, Pecaric ve Persson, 1995).

Tanım 2.2.9 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Özdemir ve Yıldız, 2013).

Tanım 2.2.10 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_0^+$ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir (Hwang, 2011).

Tanım 2.2.9 ve Tanım 2.2.10 da $s = 1$ alındığında konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 2.2.11 (*h*-Konveks Fonksiyon) $h \not\equiv 0$ ve $h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ için,

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq h(\alpha)f(x)+h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir h-konveks fonksiyon denir. Burada I ve J, $\mathbb{R}$ de iki aralık, $(0,1) \subseteq J$ dir (Wright, 1954). Eğer

i. $h(\alpha)=\alpha$ seçilirse h-konveks fonksiyonu negatif olmayan konveks fonksiyona dönüşür.

ii. $s \in (0,1)$ için $h(\alpha)=\alpha^s$ seçilirse h-konveks fonksiyonu s-konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.12 (m-Konveks Fonksiyon) $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ ve $b>0$ olsun. Her $x,y \in [0,b]$, $m,t \in [0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\leq tf(x)+m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir m-konveks fonksiyon denir. $f(0)\leq 0$ şartını sağlayan $[0,b]$ aralığında tanımlı olan bütün m-konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir (Tunç, 2011).

Eğer $m=1$ seçilirse $[0,b]$ aralığında m-konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.13 (($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{m}$)-Konveks Fonksiyon) $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b>0$ olsun. Her $x,y \in [0,b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha,m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\leq t^\alpha f(x)+m(1-t^\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f-fonksiyonuna (α,m)-konveks fonksiyon denir (Mitrinovic, 1970). Burada α ve m' den en az biri sıfırdan farklı olmalıdır.

$(\alpha,m) \in \{(0,0),(1,m),(1,1)\}$ için sırasıyla artan, m-konveks ve konveks fonksiyon sınıflarının elde edildiği kolayca görülebilir.

Tanım 2.2.14 (($\boldsymbol{h},\boldsymbol{m}$)-Konveks Fonksiyon) $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x,y \in [0,b], m \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu

$$f(\alpha x+m(1-\alpha)y)\leq h(\alpha)f(x)+mh(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (h,m)-konveks fonksiyon denir (Pecaric, Proschan, ve Tong, 1992).

Tanım 2.2.15 (Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x,y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t})\leq [f(x)]^t[f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Hwang, ve Dragomir, 2014).

Tanım 2.2.16 (s-Geometrik Konveks Fonksiyon) $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^{t^s}[f(y)]^{(1-t)^s}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna s-geometrik konveks fonksiyon denir (Hwang, ve Dragomir, 2014).

$s = 1$ için, s-geometrik konveks fonksiyon tanımı geometrik konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Tanım 2.2.17 (Quasi Geometrik Konveks Fonksiyonu) $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq sup\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna quasi geometrik konveks fonksiyon denir (İşcan, 2015).

Tanım 2.2.18 (Geometrik-Aritmetik Konveks Fonksiyon) $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $\forall x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(x^\lambda y^{1-\lambda}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna Geometrik-Aritmetik Konveks (GA-konveks) fonksiyon denir. Burada $x^\lambda y^{1-\lambda}$ ifadesi x ve y pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ ifadesi ise $f(x)$ ve $f(y)$ nin ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır (Niculescu, 2003).

Tanım 2.2.19 (Birinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s Konveks Fonksiyon) $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, $\forall x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(x^\lambda y^{1-\lambda}) \leq (\geq) \lambda^s f(x) + (1-\lambda^s) f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir (İşcan, 2014).

Tanım 2.2.20 (İkinci anlamda Geometrik-Aritmetik-s Konveks Fonksiyon) $f: I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu , $\forall x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\mathrm{f}(x^\lambda y^{1-\lambda}) \leq (\geq) \lambda^s f(x) + (1-\lambda)^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda GA-s-konveks (konkav) fonksiyon denir (İşcan, 2014).

Özel olarak Tanım 2.2.19 ve Tanım 2.2.20' da $s = 1$ alındığında Tanım 2.2.18'deki GA- konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Tanım 2.2.21 (Geometrik Simetrik Fonksiyon) $g: [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için

$$g\left(\frac{ab}{x}\right) = g(x)$$

eşitliğini sağlıyorsa, g fonksiyonuna $\sqrt{ab}$' ye göre geometrik simetrik fonksiyon denir (Latif, Dragomir, ve Momoniat, 2015).

Tanım 2.2.22 (Harmonik Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık olsun. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyondur denir (İşcan ve Wu, 2014).

Tanım 2.2.23 (Harmonik Simetrik) $g: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in [a, b]$ için

$$g(x) = g\left(\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x}}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik fonksiyon denir (İşcan ve Wu, 2014).

Önerme 2.2.1 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

i. Eğer f fonksiyonu, $I \subseteq \mathbb{R}^+$ aralığında konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.

ii. Eğer f fonksiyonu, $I \subseteq \mathbb{R}^+$ aralığında harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

iii. Eğer f fonksiyonu, $I \subseteq (-\infty, 0)$ aralığında harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

iv. Eğer f fonksiyonu, $I \subseteq (-\infty, 0)$ aralığında konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (İşcan ve Wu, 2014).

Tanım 2.2.24 (Harmonik s-Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. Eğer $f: I \subseteq \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in I$, $s \in (0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq t^{s} f(y) + (1-t)^{s} f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna bir harmonik-s-konveks fonksiyon denir (İşcan ve Kunt, 2015).

Özel olarak, Tanım 2.2.22' de $s = 1$ alınırsa Tanım 2.2.21 tanımındaki harmonik konveks fonksiyon tanımına indirgenir.

Önerme 2.2.2 $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir reel aralık olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

- **i.** Eğer f fonksiyonu s-konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonu harmonik-s konveks fonksiyondur.
- **ii.** Eğer f fonksiyonu harmonik s-konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonu s-konveks fonksiyondur (İşcan ve Kunt, 2015).

Örnek 2.2.1 $s \in (0,1]$ ve $f: (0,1] \to (0,1], f(x) = x^{s}$ olarak tanımlansın. f fonksiyonu s-konveks ve azalmayan fonksiyon ise f harmonik s-konveks fonksiyon olur (İşcan ve Kunt, 2015).

Tanım 2.2.25 (Bazı Özel Ortalamalar) Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir (Bullen, Mitrinovic ve Vasis, 1988).

1. Aritmetik ortalama:

$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

2. Geometrik ortalama:

$$G = G(a,b) := \sqrt{ab}$$

3. Harmonik ortalama:

$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}$$

4. Logaritmik ortalama:

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \dfrac{b-a}{lnb-lna} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

5. Identrik ortalama:

$$I = I(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^{b}}{a^{a}}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

6. p-logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \left[\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \end{cases}$$

7. Seiffert ortalama:

$$S = S(a,b) := \frac{a-b}{2arcsin\frac{a-b}{a+b}}$$

8. Bencze ortalama:

$$B = B(a,b) := \frac{a-b}{arctg\frac{a-b}{a+b}}$$

ortalamaları vardır. Ayrıca, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p nin monoton artan olduğu bilinir ve $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde, aşağıdaki gibi yer almaktadır:

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A.$$

Son olarak x, y pozitif sayılarının r-inci kuvvetlerinin genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1}\frac{x^{r+1}-y^{r+1}}{x^r-y^r} \ , & r \neq 0,-1, x \neq y \\ \frac{x-y}{lnx-lny} \ , & r = 0, x \neq y \\ xy\frac{lnx-lny}{x-y} \ , & r = -1, x \neq y \\ x \ , & x = y \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.26 (Ağırlıklı Aritmetik Ortalama) $x_i \in [a,b]$, $p_i > 0$ ve $P_n := \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$, $(i = 1,2,\dots,n)$ olmak üzere

$$A_n(x,p) := \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

şeklindeki ifadeye $x_i, (i = 1,2,\dots,n)$ sayılarının $p_i(i = 1,2,\dots,n)$ ağırlıklı aritmetik ortalaması denir (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.2.27 (r-Ortalama) x, y pozitif sayılarının r-inci kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x,y;\lambda) = \begin{cases} x^{\lambda}y^{1-\lambda} & , r = 0 \\ (\lambda x^r + (1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Dragomir ve Pearce, 2000).

Tanım 2.2.28 (r-Konveks fonksiyon) f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna [a, b] aralığında bir r-konveks fonksiyon denir (Godunova, ve Levin, 1985).

Bu tanımdan 0-konveks fonksiyonların log-konveks fonksiyonlar ve 1-konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir. Ayrıca r-konvekslik tanımı,

$$f^r(\lambda x + (1-\lambda)y) = \begin{cases} (\lambda f^r(x) + (1-\lambda) f^r(y))^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \\ [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda} & , r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Dragomir ve Pearce, 1998).

Tanım 2.2.29 (Starshaped Fonksiyon) $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona bir Starshaped fonksiyon denir (Tunç, 2011).

2.3. Olasılık ve Stokastik Süreçlerle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1 ($\sigma -$ cebir) Bir Ω kümesi üzerindeki bir U sınıfı verildiğinde, eğer

(i) $\Omega \in U$

(ii) Her $A \in U$ için $\overline{A} \in U$

(iii) Her n için $A_n \in U$ olan bir (A_n) dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

koşulları sağlanıyorsa U sınıfına Ω üzerinde $\sigma -$ cebir adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.2 (Rastgele Deney) Sonuçlarının kümesi belli, ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen bir deneye ise rasgele deney, raslantı deneyi, stokastik deney ya da olasılık deneyi adı verilir. Bir rasgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine örnek uzay, örnek uzaydaki her bir noktaya örnek nokta, örnek uzayın herhangi bir alt kümesine ise olay adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.3. (Olasılık Ölçüsü) Bir E rasgele deneyi verilsin. Ω bu deney ile ilgili örnek uzay ve U bu uzay üzerinde tanımlı bir $\sigma -$ cebir olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşulları sağlayan bir P: $\Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna Ω üzerinde bir olasılık ölçüsü, $P(A)$ değerine A olayının olasılığı, (Ω, U, P) üçlüsüne de bir olasılık uzayı adı verilir:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Eğer $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots.$ ikişer ikişer ayrık olaylar ise bu takdirde

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Teorem 2.3.1 Eğer Ø mümkün olmayan olay(yani hiçbir zaman gerçekleşmeyen olay) ise bu takdirde P(Ø) = 0 dır (Maden, 2013).

Teorem 2.3.2 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve $\overline{A}$ olayı A olayının bütünleyeni ise bu takdirde $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ dır (Maden, 2013).

Teorem 2.3.3 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere A ve B bu uzayda herhangi iki olay olsun. Eğer $A \subseteq B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.4 (Bağımsız Olaylar) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere A ve B bu uzayda herhangi iki olay olsun. Eğer $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B olayları bağımsızdır denir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.5 (Rastgele Değişken) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. Eğer X: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir ise X fonksiyonuna bir rastgele değişken denir (Maden, 2013).

Bu tanıma göre rastgele değişken tanım kümesi örnek uzayı ve değer kümesi ise gerçek sayılar kümesinin uygun bir alt kümesi olan bir fonksiyondur. Rastgele değişkenleri genel olarak X, Y, Z, . . . gibi harflerle göstereceğiz. O halde bir rastgele değişkeni X: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olarak yazarız. Böylece E bir deney ve Ω de bu deneyle ilgili bir örnek uzayı olmak üzere her $w \in \Omega$ elamanına bir $X(w) = x$ gerçek sayısı karşılık getiren bir X fonksiyonuna bir rastgele değişken denir.

Tanım 2.3.6 (Kesikli Rastgele Değişken) X bir rastgele değişken olmak üzere X' in alabileceği değerlerin kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir küme ise X' e bir kesikli rastgele değişken denir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.7 (Sürekli Rastgele Değişken) X rastgele değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi bir aralık yada aralıkların birleşimi şeklinde ise X' e sürekli rastgele değişken adı verilir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.8 (İki Boyutlu Rastgele Değişken) E bir deney ve Ω de bu deneyle ilgili örnek uzay olsun. $X = X(w)$ ve $Y = Y(w)$ ise her biri her bir $w \in \Omega$ neticesine bir gerçek sayı karşılık getiren iki fonksiyon olsun. Bu durumda (X, Y) ikilisine iki boyutlu bir rastgele değişken (veya rastgele vektör) adı verilir (Maden, 2013).

Benzer şekilde *n* boyutlu bir rastgele değişken veya *n* boyutlu bir rastgele vektör tanımı da verilebilir.

Tanım 2.3.9 (Olasılık Fonksiyonu) X bir kesikli rasgele değişken ve bu rasgele değişkenin değer kümesi $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ olmak üzere $P(X = x_i) = p(x_i),\ i = 1,2,...$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen koşulların sağlanması halinde $p : R_X \to [0,1]$ fonksiyonuna X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir (Maden, 2013).

(i) $p(x_i) \geq 0,\ i = 1,2,...$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

X ' in olasılık fonksiyonu genellikle aşağıdaki gibi bir tablo şeklinde de verilebilir:

$X = x$	x_1 x_2 x_3 . . . . x_N . . .
$p(x) = P(X = x)$	$p(x_1)$ $p(x_2)$ $p(x_3)$ . . . . $p(x_N)$ . . .

Tanım 2.3.10 (Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu) X bir sürekli rasgele değişken olsun. Genelliği sağlamak için bu X rasgele değişkenin $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler aldığını varsayalım. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.) adı verilir (Maden, 2013):

(i) $f(x) \geq 0,\ -\infty < x < \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Tanım 2.3.11 (Kümülatif Dağılım Fonksiyonu) X kesikli veya sürekli bir rasgele değişken olsun. X in kümülatif (birikimli) dağılım fonksiyonu (kdf olarak kısaltılır) F ile gösterilir ve $F(x) = P(X \leq x)$ olarak tanımlanır (Maden, 2013).

Buna tanıma göre

a) Eğer X bir kesikli rasgele değişken ise bu takdirde

$F(x) = P(X \leq x) = \sum p(x_j)$

dır, burada toplam $x_j \leq x$ koşulunu sağlayan tüm j indisleri üzerinden alınmıştır.

b) Eğer X rasgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken ise

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

olacaktır.

Tanım 2.3.12 (Beklenen Değer)

(i) X rasgele değişkeni $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ mümkün değerlerini $p(x_i) = P(X = x_i)$, i = 1, 2,…, n , … olasılıklarıyla alan kesikli bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde X rasgele değişkeninin $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri(veya matematiksel beklentisi)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.p(x_i)$$

olarak tanımlanır, burada $\sum_{i=1}^{\infty} x_i.p(x_i)$ serisi mutlak yakınsak, yani $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.p(x_i) < \infty$ olmalıdır. Bu sayıya X in ortalama değeri olarak da müracaat edilir.

(ii) X rasgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken olsun. Bu durumda X rasgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

olarak tanımlanır. Yine bu genelleştirilmiş integral yakınsak olmayabilir. Bu nedenle $E(X)$ in mevcut olması için gerek ve yeter koşul $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx$ integralinin sonlu olmasıdır (Maden, 2013).

Teorem 2.3.4 (i) C bir sabit olmak üzere eğer $X = C$ ise $E(X) = C$ dir.

(ii) C ve D sabitler ve X bir rasgele değişken ise $E(CX + D) = C.E(X) + D$ dir.

(iii) X ve Y herhangi iki rasgele değişken ise $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ dir.

(iv) Eğer X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise bu takdirde $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ dir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.13 (Varyans) Bir X rasgele değişkeninin $V(X)$ veya σ_X^2 ile gösterilen varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2 .$$

Bu şekilde tanımlanan $V(X)$ sayısının pozitif kareköküne ise X rasgele değişkeninin standart sapması denir ve σ_X ile gösterilir (Maden, 2013).

Teorem 2.3.5

(i) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ dır.

(ii) C herhangi bir sabit olmak üzere $V(X+C) = V(X)$ dir.

(iii) C herhangi bir sabit olmak üzere $V(CX) = C^2.V(X)$ dir.

(iv) X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise bu takdirde $V(X+Y) = V(X) + X(Y)$ dir (Maden, 2013).

Tanım 2.3.14 (Stokastik Süreç) Eğer her $t \in I$ için $X(t,.)$ fonksiyonu bir rastgele değişken ise $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir stokastik süreç denir (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.15 (Olasılıkta Süreklilik) Eğer her $t_0 \in I$ için $P - \lim\limits_{t \to t_0} X(t,.) = X(t_0,.)$ İse $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine I aralığında olasılıkta sürekli denir. Burada $P -$ lim olasılıkta limiti ifade eder (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.16 (Ortalama-Kare Süreklilik) Eğer her $t_0 \in I$ için

$$P - \lim_{t \to t_0} \left[\left(\mathrm{E}\, X(t,.) = X(t_0,.) \right)^2 \right] = 0$$

ise $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine I aralığında ortalama-kare sürekli denir. Burada $\mathrm{E}\, X(t,.)$ ifadesi $X(t,.)$ rastgele değişkenin beklenen değeridir (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.17 (Artan-Azalan Süreç) Eğer her $u, v \in I$ öyle ki $u < v$ için,

$$X(u, \cdot) \leq X(v, \cdot)\,,\ (X(u, \cdot) \geq X(v, \cdot))$$

ise bu takdirde $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine artan(azalan) stokastik süreç denir. Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci artan veya azalansa bu durumda sürece monotondur denir (Kotrys, 2012a).

Tanım 2.3.18 (Türevlenebilir Süreç) Eğer aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde bir $X': I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rastgele değişkeni mevcut ise $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine $t_0 \in I$ da türevlenebilir denir.

$$X'(t_0,.) = P - \lim_{t \to t_0} \frac{X(t,.) - X(t_0,.)}{t - t_0}$$

Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ süreci I aralığındaki bütün değerlerde sürekli(türevlenebilir) ise bu durumda sürece sürekli(türevlenebilir) denir (Kotrys, 2015).

A. Skowronski (1992) nin makalesinde ispatladığı gibi, eğer bir $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks ise X'_- ve X'_+ (sırasıyla X in sağ ve sol türevleri) artan stokastik süreçleri vardır öyle ki

$$X'_-(t_0,.) = P - \lim_{t \to t_0^-} \frac{X(t,.)-X(t_0,.)}{t-t_0} \quad \text{ve} \quad X'_+(t_0,.) = P - \lim_{t \to t_0^+} \frac{X(t,.)-X(t_0,.)}{t-t_0}$$

dır. Diğer taraftan her $t, s \in I^o$ öyle ki $t < s$ için

$$X'_-(t,.) \leq X'_+(t,.) \leq X'_-(s,.) \leq X'_+(t,.)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.3.19 (Ortalama-Kare Türevlenebilir Süreç) Eğer her $t_0 \in I$ için

$$\lim_{t \to t_0} E \left[\frac{X(t,.)-X(t_0,.)}{t-t_0} - X'(t_0,.)\right]^2 = 0$$

olacak şekilde bir X' stokastik süreci varsa $X(t,.)$ stokastik sürecine I aralığında ortalama kare türevlenebilir denir (Kotrys, 2014).

Tanım 2.3.20 (Ortalama-Kare İntegral) Her $t \in I$ için $E[X(t,.)]^2 < \infty$ olmak üzere $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots t_{n-1} < t_n = b$, $[a, b] \subset I$ nin normal parçalanış dizisi ve k = 1,2,…, n için $\Theta_k \in [t_{k-1}, \ t_k]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığının her bir normal parçalanış dizisi ve her $\Theta_k \in [t_{k-1}, \ t_k]$, k = 1,…,n için

$$\lim_{n \to \infty} E \ [(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}(\Theta_k,.)\,(t_k - t_{k-1}) - Y)^2] = 0$$

ise $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rastgele değişkenine X in $[a, b]$ aralığında ortalama-kare integrali denir ve

$$Y(.) = \int_a^b X(s,.)\,ds$$

ile gösterilir.

Ortalama-kare integralin var olması için X stokastik sürecinin ortalama-kare sürekliliğini kabul etmek yeterlidir. Aynı zamanda $[a, b]$ aralığında $X(t,.) \leq Z(t,.)$ için

$$\int_a^b X(t,.)\,dt \leq \int_a^b Z(t,.)\,dt \text{ , (a.e.),}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır (Shynk, 2013). Yani ortalama-kare integral operatörü artandır.

Tanım 2.3.21 Her $s, t \in I$ için $X(s+t,.) = X(s,.) + X(t,.)$ eşitliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine toplamsal denir (Skowronski, 1992).

3. KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN OSTROWSKİ TİPİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

3.1. Ostrowski – Grüss Tipi Eşitsizliklerin Genelleştirilmesi

Bu kısımda Ostrowski-Grüss tipinden bazı eşitsizlikler geliştirilip daha sonra da genelleştirilecektir. Ayrıca elde edilen bazı sonuçlar bazı sayısal niceliklerin hata sınırlarının tahminine uygulanacaktır. Son olarak bazı özel ortalamalar için bazı sınırlar tartışılacaktır.

Ostrowski (1938) aşağıdaki integral eşitsizliğini ispatlamıştır.

Teorem 3.1.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, I^0 ise I aralığının içi, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise, bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x-(a+b)/2)^2}{(b-a)^2} \right] (b-a)M \tag{3.1}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlik $x \in [a, b]$ noktasında $f(x)$ değeri ile $(b-a)^{-1} \int_a^b f(t)dt$ integral ortalamasının farkının mutlak değeri için bir üst sınır getirmektedir.

Dragomir ve Wang (1997) bu tipten yeni bir eşitsizliği aşağıdaki şekilde vermişlerdir.

Teorem 3.1.2 Teorem 3.1.1'in varsayımları altında f' türevi $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olmak üzere $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler ve $\forall x \in [a, b]$ için $\gamma \leq f'(x) \leq \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{4} (b-a)(\Gamma - \gamma), \tag{3.2}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlik bilinen Ostrowski eşitsizliği ile Grüss eşitsizliği arasındaki bir bağlantıdır. Eşitsizlik bazı özel ortalama ve bazı sayısal kareleme kurallarını sınırlandırmak için uygulanabilir.

Son zamanlarda Matic ve ark. (2000) Teorem 3.1.1 ve 3.1.2 yi aşağıdaki şekilde geliştirmiştir.

Teorem 3.1.3 Teorem 3.1.1' in şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}} (b-a)(\Gamma_1 - \gamma_1) \tag{3.3}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Teorem 3.1.4 Teorem 3.1.2' nin şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) + \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right) \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq (\Gamma_2 - \gamma_2) F(a,b,x) \tag{3.4}$$

eşitsizliği gerçekleşir, burada

$$F(a,b,x) = \frac{b-a}{12\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}(b-a)^2 + 15\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

dir.

Teorem 3.1.5 Teorem 3.1.1' in şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1 - \gamma_1) \tag{3.6}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada $1/8$ sabiti kendisinden daha küçük bir şeyle değiştirilemez anlamında keskindir (Cheng, 2001).

İspat: Öncelikle

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b G_1(x,t) f'(t)dt \tag{3.7}$$

olduğunu belirtelim, burada

$$G_1(x,t) = \begin{cases} (t-a) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right), & a \leq t \leq x \\ (t-b) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right), & x \leq t \leq b \end{cases}$$

dir. Simetriklikten dolayı $a \leq x \leq (1/2)(a+b)$ olduğunu varsayabiliriz. Bu nedenle $t^* = x + \frac{1}{2}(b-a)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &G_1(x,t) \geq 0, \quad t \in [a,x) \cup (t^*, b) \\ &G_1(x,t) \leq 0, \quad t \in (x, t^*] \end{aligned}$$

yazılabilir. Öte yandan

$$\int_a^b G_1(x,t) f'(t)dt = \int_a^x G_1(x,t) f'(t)dt + \int_{t^*}^b G_1(x,t) f'(t)dt + \int_x^{t^*} G_1(x,t) f'(t)dt$$

$$\leq \Gamma_1 \left(\int_a^x G_1(x,t)dt + \int_{t^*}^b G_1(x,t)\, dt\right) + \gamma_1 \int_x^{t^*} G_1(x,t)dt$$

ve

$$\int_a^x G_1(x,t)dt + \int_{t^*}^b G_1(x,t)\,dt = \frac{1}{8}(b-a)^2, \quad \int_x^{t^*} G_1(x,t)dt = -\frac{1}{8}(b-a)^2$$

olduğundan

$$\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt \le \frac{1}{8}(b-a)^2(\Gamma_1-\gamma_1) \tag{3.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$-\int_a^b G_1(x,t)f'(t)dt \le \frac{1}{8}(b-a)^2(\Gamma_1-\gamma_1) \tag{3.9}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan (3.7), (3.8) ve (3.9) ifadeleri (3.6) nın sağlandığını gösterir ve Teorem 3.1.5. in ispatı tamamlanır. Bu ispattan $t^* = x + \frac{1}{2}(b-a)$ olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} \Gamma_1(t-a)\,, & a \le t \le x \\ \Gamma_1(x-a) + \gamma_1(t-x), & x \le t \le t^* \\ \Gamma_1(t-a) + \gamma_1(t^*-x) + \Gamma_1(t-t^*), & t^* \le t \le b \end{cases}$$

fonksiyonu oluşturulabilir. Bu durumda (3.6) eşitlik olarak sağlanır. Bu nedenle $1/8$ sabiti daha küçük bir sayı ile değiştirilemeyeceği anlamında keskindir. Ayrıca $x = (a+b)/2$ için belirtilenlerden daha keskin bir sınır

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \le \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1-\gamma_1)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.6 Teorem 3.1.2' nin şartları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} - \right.$$
$$\left. \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \le (\Gamma_2-\gamma_2)G(a,b,x) \tag{3.10}$$

eşitsizliği gerçekleşir, burada

$$G(a,b,x) = \begin{cases} \frac{1}{3(b-a)}\left(\begin{array}{c} \left|(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(b-x)\right| \\ +\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right) & a \le x \le \frac{1}{3}(2a+b), \\ & \frac{1}{3}(a+2b) \le x \le b, \\ \frac{2}{3(b-a)}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}, & \frac{1}{3}(2a+b) \le x \le \frac{1}{3}(a+2b) \end{cases} \tag{3.11}$$

Bu durumda

$$G(a,b,x) \leq \frac{2\sqrt{15}}{9} F(a,b,x) \tag{3.12}$$

olduğu gösterilebilir (Cheng, 2001).

İspat: Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f(x) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) - \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f''(t) G_2\,(x,t)dt \tag{3.13}$$

eşitliği yazılabilir, burada

$$G_2(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-a)^2 - \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right), & a \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}(t-b)^2 - \left(\frac{1}{24}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right), & x \leq t \leq b \end{cases}$$

dir. $a \leq x \leq (1/2)(a+b)$ olduğunu varsayalım. İlk önce $a \leq x \leq \frac{(2a+b)}{3}$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$t^{**} = b - \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G_2(x,t) &\leq 0, \qquad t \in [a,x) \cup [t^{**}, b] \\ G_2(x,t) &\geq 0, \qquad t \in [x, t^{**}) \end{aligned}$$

olur. $\forall\, x \in [a,b]$ için $\gamma_2 \leq f''(x) \leq \Gamma_2$ olacağından

$$\int_a^b G_2(x,t)\, f'(t)dt \leq \gamma_2\left(\int_a^x G_2(x,t)dt\right) + \gamma_2\left(\int_{t^{**}}^b G_2(x,t)dt\right)$$

ve

$$-\int_a^b G_2\,(x,t) f''(t)dt \leq -\int_a^x G_2\,(x,t)dt - \int_{t^{**}}^b G_2\,(x,t)dt + \gamma_2 \int_x^{t^{**}} G_2(x,t)\,dt$$

yazılabilir. Basit bir hesaplamayla

$$\int_a^x G_2(x,t)\,dt = \frac{1}{3}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(b-x)$$

ve

$$\int_{t^{**}}^b G_2(x,t)dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\int_a^b G_2\,(x,t)dt = 0$$

olduğundan

$$\int_x^{t^{**}} G_2(x,t)dt = -\int_a^x G_2\,(x,t)dt - \int_{t^{**}}^b G_2(x,t)dt$$

olduğu görülür. Böylece$a \leq x \leq (1/3)(2a+b)$ için iddia kolayca ispatlanmış olur. Şimdi de $(1/3)(2a+b) \leq x \leq (1/2)(a+b)$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$t_1^{**} = a + \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{1/2}$$

ve

$$t_2^{**} = t^{**} = b - \left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$G_2(x,t) \leq 0, t \in [a, t_1^{**}) \cup [t_2^{**}, b]$$
$$G_2(x,t) \geq 0, t \in [t_1^{**}, t_2^{**})$$

yazılabilir. Aynı argümanı kullanarak

$$\int_a^{t_1^{**}} G_2(x,t)\,dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}$$

ve

$$\int_{t_2^{**}}^b G_2\,(x,t)dt = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}(b-a)^2 + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right)^{3/2}$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Böylece Teorem (3.1.6) nın ispatı tamamlanır. Bu durumda bilgisayardaki sayısal hesaplamalar ile $x = a$ ve $x = (1/2)(a+b)$ değerlerinde

$$r(x) = \frac{G(a,b,x)}{F(a,b,x)}, \quad \hat{r}(\xi) = r(a + \xi(\mathrm{b}-\mathrm{a})) = \frac{G(0,1,\xi)}{F(0,1,\xi)}, \;\; \xi \in [0,1]$$

ifadelerinin maksimum değere ulaştığı kolayca görülebilir. Böylece (1.12) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.7 Teorem 3.1.1' in varsayımları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir (Cheng, 2001):

$$\left|\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{(x-b)f(b)-(x-a)f(a)}{2(b-a)}\right|$$

$$\leq \frac{1}{8(b-a)}\left((x-a)^2 + (x-b)^2\right)(\Gamma_1 - \gamma_1). \qquad (3.14)$$

İspat: Bu durumda

$$\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{(x-b)f(b)-(x-a)f(a)}{2(b-a)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b G_3(x,t)f'(t)dt$$

eşitliği sağlanır, burada

$$G_3(x,t) = \begin{cases} (t-a) - \frac{1}{2}(x-a), a \leq t \leq x \\ (t-b) - \frac{1}{2}(x-b), x \leq t \leq b \end{cases}$$

dir. Böylece Teorem 3.1.5 teki yol izlenerek (3.14) eşitsizliğini kolayca elde edebiliriz. $x = a$ ya da $x = b$ için, aşağıdaki trapezoid eşitsizliği elde edilir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right| \leq \frac{1}{8}(b-a)(\Gamma_1 - \gamma_1) \qquad (3.15)$$

Teorem 3.1.8 Teorem 3.1.2' nin varsayımları sağlansın. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir (Cheng, 2001):

$$\left|f(x) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \frac{(x-b)^2f'(b)-(x-a)^2f'(a)}{6(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{18\sqrt{3(b-a)}}\left((x-a)^3 + (b-x)^3\right)(\Gamma_2 - \gamma_2). \qquad (3.16)$$

İspat: Bu durumda

$$f(x) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \frac{(x-b)^2f'(b)-(x-a)^2f'(a)}{6(b-a)}$$

$$-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b G_4(x,t)f''(t)dt$$

eşitliği sağlanır, burada

$$G_4 = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-a)^2 - \frac{1}{6}(x-a)^2, a \leq t \leq x \\ \frac{1}{2}(t-a)^2 - \frac{1}{6}(x-a)^2, a \leq t \leq x \end{cases}$$

dir. Teorem 3.1.6 daki yol izlenerek (3.16) eşitsizliğini kolayca elde edebiliriz.

Eğer $x = (1/2)(a + b)$ ve $x = a$ veya $x = b$ alınırsa, Teorem 3.1.8' den sırasıyla

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{72\sqrt{3}}(\Gamma_2 - \gamma_2)(b-a)^2$$

ve

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{12}(b-a)(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{18\sqrt{3}}(\Gamma_2 - \gamma_2)(b-a)^2$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Bu türden bir diğer sonuç iki kez türevlenebilir fonksiyonlar için Cerone, Dragomir ve Roumeliotis (1999) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.1.9 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, I^0 ise I aralığının içi, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde iki kez türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ keyfi sabitleri ve $\forall x \in [a, b]$ için $\gamma \leq f''(x) \leq \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) + \left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right|$$
$$\leq \frac{1}{8}(\Gamma - \gamma)\left[\frac{1}{2}(b-a) + \left|x - \frac{a+b}{2}\right|\right]^2 \tag{3.17}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Matic ve Ark., 2000).

Yukarıda verilen (3.2) ve (3.17) deki eşitsizlerin ispatlanmasında anahtar rol, iyi bilinen Grüss eşitsizliği tarafından onaylanır.

Teorem 3.1.10 $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ iki integral edilebilir fonksiyon ve $\gamma, \Phi, \varphi, \Gamma \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $\varphi \leq f(x) \leq \Phi$ ve $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ olsun. Eğer;

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \tag{3.18}$$

ise, bu takdirde

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma) \tag{3.19}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Eşitsizliğin standart ispatı iki adımda elde edilebilir. Birinci adımda $T(f,f) \geq 0$, $T(g,g) \geq 0$ ve $T^2(f,g) \leq T(f,f)T(g,g)$ veya buna denk olarak $|T\,(f,g)| \leq \sqrt{T(f,f)}\sqrt{T(g,g)}$ olduğu gösterilebilir. İkinci adımda ise $T(f,f) \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)^2$ ve $|T(g,g)| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \gamma)^2$ olduğu gösterilebilir. Bu iki adımı birleştirdiğimizde istenen sonuç elde edilir. İkinci adım sadece $T(f,f)$ terimine uygulanırsa aşağıdaki sonucun geçerli olduğu görülür.

Lemma 3.1.1 $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonları için fg çarpımı da integrallenebilir ve $,\Phi, \varphi, \Gamma \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ olsun. Bu takdirde

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{T(f,f)}(\Gamma - \gamma) \tag{3.20}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Matic ve Ark., 2000).

Lemma 3.1.2 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $f\colon I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun I^0 üzerinde diferansiyellenebilir ve $a, b \in I^0$, $a < b$ olduğunu varsayalım. Eğer $f^{(n)}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirse, bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için ($f^{(0)} = f$ alalım)

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^{k+1} + (-1)^k (x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(x)$$

$$+(-1)^n \int_a^b K_n(x,t) f^{(n)}(t)dt \tag{3.21}$$

eşitliği sağlanır, burada $K_n\colon[\mathrm{a,b}]^2 \to \mathbb{R}$ çekirdeği aşağıdaki gibi verilir;

$$K_n(x,t) := \begin{cases} \dfrac{(t-a)^n}{n!}, & t \in [a,x), \\ \dfrac{(t-b)^n}{n!}, & t \in [x,b] \end{cases}$$

Teorem 3.1.11 Lemma 3.1.2' nin varsayımları altında γ ve Γ sabitler olmak üzere

Her $x \in [a,b]$ için $\gamma \leq f^{(n)}(x) \leq \Gamma$

olsun. $x \in [a,b]$ için

$$R_n(x) = f(x) + \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(x)$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

tanımlayalım. Bu takdirde her $x \in [a, b]$ için

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2}(\Gamma-\gamma)\sqrt{T\big(K_n(x,.),K_n(x,.)\big)}$$

$$=\frac{\Gamma-\gamma}{2(n!)}\left[\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)}-\left(\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.22}$$

eşitliği sağlanır (Matic ve Ark., 2000).

İspat: (3.21) eşitliğini

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(x) +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(x) +(-1)^n\int_a^b K_n(x,t)f^{(n)}(t)dt$$

veya buna denk olarak

$$\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b K_n(x,t)f^{(n)}(t)dt$$

$$= f(x)+\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \tag{3.23}$$

olarak yeniden yazabiliriz. Ayrıca

$$\int_a^b K_n(x,t)dt = \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}dt + \int_x^b \frac{(t-b)^n}{n!}dt$$

$$=\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=-(-1)^{n+1}\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ve

$$\int_a^b f^{(n)}(t)dt = f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a).$$

dir. Dolayısıyla

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{(b-a)^2}\int_a^b K_n(x,t)dt\int_a^b f^{(n)}(t)dt$$

$$=\frac{(b-x)^{n+1}+(-1)^n(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(b-a)^2}\left[f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)\right] \tag{3.24}$$

yazılabilir. Böylece

$$(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b K_n(x,t)f^n(t)dt-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b K_n(x,t)dt\int_a^b f^{(n)}(t)dt\right]$$

elde edilir ki bu ifade $R_n(x)$ e eşittir. Şimdi

$$|R_n(x)|\leq\frac{1}{2}(\Gamma-\gamma)\sqrt{T(K_n(x,\cdot),(K_n(x,\cdot))} \tag{3.25}$$

olduğunu göstermek için f ve g yerine sırasıyla $K_n(x,\cdot)$ ve $f^n(\cdot)$ yazarak (3.20) eşitsizliğini uygulayalım. Daha önce hesapladığımız gibi

$$\int_a^b K_n(x,t)dt=\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$

idi. Benzer bir hesaplama

$$\int_a^b K_n^2(x,t)dt=\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(n!)^2(2n+1)}$$

dolayısıyla

$$T(K_n(x,\cdot),(K_n(x,\cdot))=\frac{1}{b-a}\int_a^b K_n^2(x,t)dt-\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b K_n(x,t)dt\right)^2$$

$$=\frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{(b-a)(2n+1)}-\left(\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right)^2\right] \tag{3.26}$$

elde edilir. (3.25) ve (3.26) yı birleştirerek (3.22) ulaşılır. $x\in[a,b]$ verilmiş olsun.

$$\ell:=\frac{b-a}{2}\quad \text{ve}\quad \xi:=x-\frac{a+b}{2}$$

alınırsa

$$x-a=x-\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}=\xi+\ell,\qquad x-b=\text{x}-\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=\xi-\ell,$$

olur ve dolayısıyla

$$(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}=(\xi+\ell)^{n+1}-(\xi-\ell)^{n+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\xi^{n+1-i}\left[\ell^i-(-\ell)^i\right]=2\sum_{j=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2j+1}\xi^{n+1-(2j+1)}\ell^{2j+1}$$

$$=2\ell\sum_{j=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2j+1}\xi^{n-2j}\ell^{2j}=(b-a)\sum_{j=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2j+1}\xi^{n-2j}\ell^{2j}$$

ve buna benzer olarak

$$(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}=(b-a)\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}\xi^{2n-2j}\ell^{2j}$$

olduğu görülür. Bu iki eşitlik kullanılarak (3.26) dan

$T(K_n(x,\cdot),K_n(x,\cdot))$

$$=\frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}\xi^{2n-2j}\ell^{2j}-\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2j+1}\xi^{n-2j}\ell^{2j}\right)^2\right] \qquad (3.27)$$

elde edilir. Ayrıca (3.26) yı şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$T(K_n(x,\cdot),K_n(x,\cdot))=\frac{1}{(n!)^2(b-a)}H(x),$$

burada

$$H(x):=\frac{(x-a)^{2n+1}-(x-b)^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{b-a}\left(\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{n+1}\right)^2$$

dir. Buradan

$$H'(x)=(x-a)^{2n}-(x-b)^{2n}-\frac{2}{b-a}\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{n+1}[(x-a)^n-(x-b)^n]$$

$$=[(x-a)^n-(x-b)^n]\left[(x-a)^n+(x-b)^n-\frac{2}{b-a}\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$=A(x)B(x)$$

elde edilir, burada

$$A(x):=(x-a)^n-(x-b)^n$$

ve

$$B(x):=(x-a)^n+(x-b)^n-\frac{2}{b-a}\frac{(x-a)^{n+1}-(x-b)^{n+1}}{n+1}$$

çarpanları

$$A(x)=(\xi+\ell)^n-(\xi-\ell)^n=\sum_{i=0}^{[n]}\binom{n}{i}\xi^{n-i}\left[\ell^i-(-\ell)^i\right]$$

$$=2\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2j+1}\xi^{n-2j-1}\ell^{2j+1}$$

ve

$$B(x)=(\xi+\ell)^n+(\xi-\ell)^n-\frac{1}{\ell}\frac{(\xi+\ell)^{n+1}-(\xi-\ell)^{n+1}}{n+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\xi^{n-i}\left[\ell^i+(-\ell)^i\right]-\frac{1}{\ell(n+1)}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\xi^{n+1-i}\left[\ell^i-(-\ell)^i\right]$$

$$= 2\sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} \xi^{n-2j} \ell^{2j} - \frac{2}{\ell(n+1)} \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n+1}{2j+1} \xi^{n+1-(2j+1)} \ell^{2j+1}$$

$$= 2\sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{2j} \xi^{n-2j} \ell^{2j} - \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n+1}{2j+1} \xi^{n-2j} \ell^{2j}$$

$$= 2\sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2j)!} \left[\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}\right] \xi^{n-2j} \ell^{2j}$$

olarak yeniden yazılabilir. Şuna dikkat edelim ki her n ve karşılık gelen her j indisi için $\binom{n}{2j+1} > 0$ ve $(n!/(n-2j)!)\left[\frac{1}{(2j)!} - 1/(2j+1)!\right] \geq 0$ dir. Şimdi $x \in [a,(a+b)/2]$ alalım. Bu takdirde $\xi \in [-\ell, 0]$ olacaktır. Hatta n çift olduğunda $n-2j-1$ üsleri tek ve $n-2j$ üsleri ise çift olacağından $A(x)$ ≤0 ve $B(x)$ ≥0 olur. Aksine n tek olduğunda $A(x)$ ≥0 ve $B(x)$ ≤0 alırız. Bu ise n ne olursa olsun her $x \in [a,(a+b)/2]$ için $H'(x) = A(x)B(x) \leq 0$ olduğunu dolayısıyla, $[a,(a+b)/2]$ aralığında $H(x)$ fonksiyonunun azaldığı anlamına gelir. Eğer $x \in [(a+b)/2, b]$ alınırsa, o zaman $\xi \in [0,\ell]$ olup yukarıdaki ifadelerden $A(x)$ ≥0 ve $B(x)$ ≥0 yani $H'(x) = A(x)B(x)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $H(x)$ fonksiyonu $[(a+b)/2, b]$ üzerinde artmaktadır. O halde $H(x)$ fonksiyonu minimum değerine x =(a+$b)/2$ noktasında, maksimal değerine ise $x = a$ ya da $x = b$ noktasında ulaşır. Sonuç olarak

$$H(a) = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = H(b)$$

ve böylece her $x \in [a,b]$ için

$$H(x) \leq \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

olduğunu hesaplamak kolaydır. Bu da her $x \in [a,b]$

$$T\big(K_n(x,\cdot), K_n(x,\cdot)\big) \leq \frac{(b-a)^{2n}}{(n!)^2(2n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \qquad (3.28)$$

olması demektir.

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.11' in varsayımları ve notasyonları altında her $x \in [a,b]$

$$|R_n(x)| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^n n}{2[(n+1)!]\sqrt{2n+1}} \qquad (3.29)$$

dir (Matic ve Ark., 2000).

İspat: (3.29) ifadesini elde etmek için (3.5) ve (3.8) ifadelerini birleştirmek yeterlidir.

Teorem 3.1.11’ de belirtilen sonucun bir neticesi olarak trapezoid eşitsizliğine benzer bir midpoint eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.2 Teorem 3.1.11’ in varsayımları altında

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1+(-1)^k}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^k \frac{f^{(k)}\left(\frac{(a+b)}{2}\right)}{(k+1)!} + \frac{1+(-1)^n}{4}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)}{(n+1)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^n}{n!2^{n+1}\sqrt{2n+1}}\left[1 - \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}\right] \qquad (3.30)$$

eşitsizliği geçerlidir (Matic ve Ark., 2000).

İspat: $x = (a+b)/2$ için $x - a = b - x = (b-a)/2$ yazılabilir. (3.30) un sol tarafındaki mutlak değer işaretleri içindeki ifadenin $R_n\big((a+b)/2\big)$ ye eşit olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca, eğer $g_n(x) = T\big(K_n(x,\cdot), K_n(x,\cdot)\big)$ alınırsa (3.26) dan

$$g_n\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{(b-a)^{2n}}{2^{2n}(2n+1)} - \left(\frac{(b-a)^n(1+(-1)^n)}{2^{n+1}(n+1)}\right)^2\right]$$

$$= \frac{(b-a)^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}(2n+1)}\left[1 - \frac{(1+(-1)^n)(2n+1)}{2(n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}(2n+1)}\left[1 - \frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}(2n+1)}\left[1 - \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}\right]^2$$

yazabiliriz. Burada $[(1+(-1)^n/2]^2 = (1+(-1)^n)/2$ gerçeği kullanılmıştır. Bu nedenle

$$\sqrt{g_n\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{(b-a)^n}{n!2^n\sqrt{2n+1}}\left[1 - \frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}\right]$$

olup arzulanan sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.1.11’ in varsayımları altında

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!}(b-a)^k + \frac{1+(-1)^n}{2}\frac{f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n-1} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^n n}{2[(n+1)!]\sqrt{2n+1}} \qquad (3.31)$$

eşitsizliği sağlanır (Matic ve Ark., 2000).

İspat: $g_n(x)$ bir önceki ispattaki ile aynı olsun. (3.26) yı kullanarak

$$g_n(a) = g_n(b) = \frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{(b-a)^{2n}}{2n+1} - \frac{(b-a)^{2n}}{(n+1)^2}\right] = \frac{n^2(b-a)^{2n}}{[(n+1)!]^2(2n+1)}$$

olduğunu hesaplamak kolaydır. Teorem 3.1.11' e göre

$$|R_n(a)| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)n(b-a)^n}{2[(n+1)!]\sqrt{2n+1}} \quad \text{ve} \quad |R_n(b)| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)n(b-a)^n}{2[(n+1)!]\sqrt{2n+1}}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\frac{R_n(a)+R_n(b)}{2}\right| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)n(b-a)^n}{2[(n+1)!]\sqrt{2n+1}}$$

yazılır. (3.31)' in sol tarafındaki mutlak değer içindeki ifadenin $(R_n(a) + R_n(b))/2$ değerine eşit olduğunu kontrol etmek oldukça kolaydır.

Teorem 3.1.12 Teorem 3.1.2' nin varsayımları altında $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma-\gamma),$$

eşitsizliği sağlanır (Matic ve Ark., 2000).

İspat: n =1 alınırsa Teorem 3.1.11' den

$$\left|f(x) + \frac{(b-x)^2-(x-a)^2}{2(b-a)^2}[f(b)-f(a)] - \frac{1}{b-a}\int_a^a f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\Gamma-\gamma)\sqrt{T\big((K_1(x,\cdot), K_1(x,\cdot)\big)}$$

olduğu görülür, burada (3.27) den

$$\sqrt{T\big(K_1(x,\cdot), K_1(x,\cdot)\big)} = \sqrt{\frac{1}{3}(3\xi^2+\ell^2) - \left(\frac{1}{2}2\xi\right)^2} = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

olacaktır. İspatı tamamlamak için

$$\frac{(b-x)^2-(x-a)^2}{2(b-a)^2} = \frac{a+b-2x}{2(b-a)} = -\frac{1}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

olduğunu belirtelim.

Sonuç 3.1.4 Teorem 3.1.2 nin varsayımları altında

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma-\gamma) \tag{3.32}$$

ve

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)(\Gamma-\gamma) \tag{3.33}$$

eşitsizlikleri yazılır (Matic ve Ark., 2000).

İspat: (3.32)' yi elde etmek için $n=1$ olmak üzere Sonuç 3.1. 2' yi ve (3.33)' ü elde etmek için ise $n=1$ olmak üzere Sonuç 3.1.3' ü kullanmak yeterlidir.

Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanrak Dragamir ve Wang(1997) konveks f fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizliklerin geçerli olduğunu göstermiştir:

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{4}(b-a)[f'(b)-f'(a)]$$

ve

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{4}(b-a)[f'(b)-f'(a)].$$

Teorem 3.1.13 Teorem 3.1.2' nin varsayımları sağlansın. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)[f'(b)-f'(a)] \end{aligned}$$

Yazılır (Matic ve Ark., 2000).

İspat: f konveks ve türevlenebilir olduğundan

$$f(c)+f'(c)(t-c) \leq f(t) \leq f(c)+f'(t)(t-c), \quad \forall, c, t \in [a,b] \tag{3.34}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)dt = 0$$

ve kısmi integrasyonla,

$$\int_a^b f'(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \int_a^b f(t)dt$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla (3.34)' te $c=(a+b)/2$ konulup $t \in [a,b]$ üzerinden integral alınır ve daha sonra da $b-a$ ile bölünürse

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

veya buna eş değer olarak,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

elde edilir. Böylece (3.33) ü uygulayarak ve f' fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde aran olduğundan $\Gamma - \gamma = f'(b) - f'(a)$ alarak istenen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.1.14 f fonksiyonu Teorem 2'nin koşullarını sağlarsa, $[a,b]$ aralığının her I_h: $a = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = b$ parçalanışı ve $\boldsymbol{\xi}_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0,1 \dots, n-1)$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ orta vektörü için

$$\left|\int_a^b f(t)dt - A_G(f, I_h, \xi)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\Gamma - \gamma)\sum_{i=0}^{n-1} h_i^2$$

eşitsizliği sağlanır, burada $h_i = x_{i+1} - x_i$ olup

$$A_G(f, I_{h,}\boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)h_{i-} \sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)[f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

dir (Matic ve Ark., 2000).

İspat: (3.31) den $[a,b]$ yerine $[x_{i,}x_{i+1}]$ ve $x = \xi_i$ alınırsa, her $i = 0,1, \dots, n-1$ için

$$\left|h_i f(\xi_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt - [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\Gamma - \gamma)h_i^2,$$

bulunur. Bunu $i = 0,1, \dots, n-1$ üzerinden toplar ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.5 Teorem 3.1.14' ün varsayımları ve notasyonları altında

$$\left|\int_a^b f(t)dt - A_M(f, I_h)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(\Gamma - \gamma)\sum_{i=0}^{n-1} h_i^2$$

eşitsizliği sağlanır, burada $A_M(f, I_h)$

$$A_M(f, I_h) := \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)h_i$$

dir (Matic ve Ark., 2000).

İspat: Teorem 3.1.14' deki ile aynıdır. Ancak $[a,b]$ yerine $i = 0,1, \dots, n-1$ için $[x_i, x_{i+1}]$ alınarak (3.32) deki ile aynıdır.

Sonuç 3.1.6 Teorem 3.1.14' ün varsayımları ve gösterimi altında

$$\left|\int_a^b f(t)dt - A_M(f,I_h)\right| \le \frac{1}{4\sqrt{3}}(\Gamma - \gamma)\sum_{i=0}^{n-1} h_i^2$$

eşitsizliği sağlanır, burada $A_T(f,I_h)$

$$A_M(f,I_h) \coloneqq \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h_i$$

dir (Matic ve Ark., 2000).

İspat: Teorem 3.1.14' deki ile aynıdır. Ancak $[a,b]$ yerine $i = 0,1,\dots,n-1$ için $[x_i, x_{i+1}]$ alınarak (3.33) deki ile aynıdır.

Aşağıdaki özel durumları göz önüne alalım:

(a) Aritmetik ortalama: $A = A(a,b) := \frac{a+b}{2}$ $\quad a,b \ge 0$

(b) Geometrik ortalama: $G = G := \sqrt{ab}$ $\quad a,b \ge 0$

(c) Harmonik ortalama: $H = H(a,b) := \frac{2}{1/a + 1/b}$ $\quad a,b > 0$

(d) Logaritmik ortalama: $L = L(a,b) := \begin{cases} \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, & a \ne b \; a,b > 0 \\ a, & a = b \; a,b > 0 \end{cases}$

(e) Tanımlanan ortalama: $I = I(a,b) := \begin{cases} \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}, & a \ne b \; a,b > 0 \\ a, & a = b \; a,b > 0 \end{cases}$

(f) P- Logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{1/p} & a \ne b, \quad a,b > 0 \\ a & a \ne b \quad a,b > 0 \end{cases}$$

Bu durumda aşağıdaki basit ilişkiler çok iyi bilinmektedir:

$$H \le G \le L \le I \le A$$

Aslında, eğer $L_0 = I$ ve $L_{-1} = L$' yi tanımlarsak, bu takdirde $p \in \mathbb{R}$ için L_p fonksiyonu monoton artandır. Ayrıca; $L_{-2} = G$ ve $L_1 = A$ dir.

1. $f(x) = x^p (p > 1)$ fonksiyonuna (3.31) eşitsizliğini uygulayalım: Her $p > 1$ ve her $x \in [a,b] \subset (0,\infty)$ için

$$\left|x^p - L_p^p - pL_{p-1}^{p-1}(x - A)\right| \le \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)^2 p(p-1)L_{p-2}^{p-2} \tag{3.35}$$

dir. Eğer (3.35)' de $x = A$ seçer ve $L_p \ge L_1 = A$, $p > 1$ olduğu kullanılırsa,

$$0 \le L_P^p - A^p \le \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)^2 p(p-1)L_{p-2}^{p-2}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.35)' te $x = I$ olarak alırsak

$$\left|I^p - L_p^p - pL_{p-1}^{p-1}(I - A)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}(b-a)^2 p(p-1)L_{p-2}^{p-2}$$

elde edilir.

2. Eğer, $f(x) = 1/x$ fonksiyonuna (3.31) uygulanırsa $\forall x \in [a, b\,]$ için

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{L} + \frac{x-A}{G^2}\right| \leq \frac{(b-a)^2 A}{2\sqrt{3}G^4} \tag{3.36}$$

olur. (3.36)'da sırasıyla x yerine sırasıyla, A ve L alınırsa

$$0 \leq A - L \leq \frac{(b-a)^2 A^2 L}{2\sqrt{3}G^4}$$

ve

$$0 \leq A - L \leq \frac{(b-a)^2 A}{2\sqrt{3}G^2}$$

olur. Öte yandan $AL = L_1 L_{-1} \geq L_{-2}L_{-2} = G^2$ olması $A^2/G^4 \geq A/G^2$ anlamına geldiğinden bu ikinci sınır daha iyidir.

3. Eğer (3.31)' i, $f(x) = -\ln x$ fonksiyonuna uygularsak

$$\left|\ln\left[\frac{(b/a)^{(x-A)/(b-a)}I}{x}\right]\right| \leq \frac{(b-a)^2}{4\sqrt{3}ab} \tag{3.37}$$

olur. (3.37)'da sırasıyla x yerine sırasıyla, A ve L alınırsa

$$1 \leq \frac{A}{I} \leq exp\left[\frac{(b-a)^2}{4\sqrt{3}ab}\right] = exp\left[\frac{(b-a)^2}{4\sqrt{3}G^2}\right]$$

ve

$$0 \leq A - I \leq \frac{(b-a)^2 L}{4\sqrt{3}G^2}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 3.1.15 Teorem 3.1.9' un varsayımları altında her $x \in [a, b]$ için

$$\left|f(x) - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'(x) + \left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{(\Gamma-\gamma)\ell}{6\sqrt{5}}\sqrt{\ell^2 + 15\xi^2} \tag{3.38}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\ell = \frac{b-a}{2}$ ve $\xi = x - \frac{a+b}{2}$ dir.

İspat: Teorem 3.1.11 de $n = 2$ alınırsa

$$\left|f(x) + \frac{(b-x)^2-(x-a)^2}{2(b-a)}f'(x) + \frac{(b-x)^3+(x-a)^3}{6(b-a)^2}[f'(b) - f'(a)] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}(\Gamma - \gamma)\sqrt{T\big(K_2(x,\cdot), K_2(x,\cdot)\big)}$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{(b-x)^2-(x-a)^2}{2(b-a)} = \frac{a+b-2x}{2(b-a)} = -\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\frac{(b-x)^3+(x-a)^3}{6(b-a)^2} = \frac{(b-x)^2-(b-x)(x-a)+(x-a)^2}{6(b-a)}$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)^2}{24} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$T\big(K_2(x,\cdot), K_2(x,\cdot)\big) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}(5\xi^4 + 10\xi^2\ell^2 + \ell^4) - \left(\frac{1}{3}(3\xi^2 + \ell^2)\right)^2\right]$$

$$= \frac{\ell^2}{45}(\ell^2 + 15\xi^2)$$

veya

$$\sqrt{T\big(K_2(x,\cdot), K_2(x,\cdot)\big)} = \frac{\ell}{3\sqrt{5}}\sqrt{\ell^2 + 15\xi^2}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.7 Teorem 3.1.15' in varsayımları altında

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)[f'(b) - f'(a)] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \le \frac{1}{24\sqrt{5}}(\Gamma - \gamma)(b-a)^2$$

veya buna denk olarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{12}(b-a)[f'(b) - f'(a)] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \le \frac{1}{6\sqrt{5}}(\Gamma - \gamma)(b-a)^2$$

eşitsizliği sağlanır (Matic ve Ark., 2000).

İspat: Birinci eşitsizliği elde etmek için $n = 2$ olmak üzere Sonuç 3.1.2' yi ve ikinci eşitsizliği elde etmek için ise $n = 2$ olmak üzere Sonuç 3.1.3' ü kullanmak yeterlidir.

Teorem 3.1.16 f fonksiyonu Teorem 3.1.2'nin koşullarını sağlarsa, $[a, b]$ aralığının her I_h: $a = x_{0<}x_{1<} \dots x_{n-1} < x_n = b$ parçalanışı ve $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $(i = 0,1, \dots, n-1)$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ orta vektörü için

$$\left|\int_a^b f(t)dt - A(f, f', I_h, \xi\right| \le \frac{\Gamma-\gamma}{24\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n-1} h_i^2\sqrt{h_i^2 + 60\left(\xi_i - \frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2}$$

$$\le \frac{\Gamma-\gamma}{6\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n-1} h_i^3 \qquad (3.39)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $h_i = x_{i+1} - x_i$ ve

$$A(f, f', I_h, \xi) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)h_i - \sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_i - \frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)f'(\xi_i)h_i$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{h_i^2}{24}+\frac{1}{2}\left(\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2\right][f'(x_{i+1})-f'(x_i]$$

dir (Matic ve Ark., 2000).

İspat: (3.38) den $[a,b]$ yerine $[x_{i,}x_{i+1}]$ ve $x=\boldsymbol{\xi}_i$ alınırsa, her $i=0,1,\dots,n-1$ için

$$\left|f(\xi_i)h_i-\left(\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)f'(\xi_i)h_i+\left[\frac{h_i^2}{24}+\frac{1}{2}\left(\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2\right][f'(x_{i+1})-f'(x_i)]\right|$$

$$\le\frac{\Gamma-\gamma}{24\sqrt{5}}h_i^2\sqrt{h_i^2+60+\left(\xi_i-\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2}\le\frac{\Gamma-\gamma}{6\sqrt{5}}h_i^3,$$

elde edilir, burada son eşitsizlikte $|\xi_i-(\mathrm{x_i}+\mathrm{x_{i+1}})/2|\le h_i/2$ olduğu gerçeği dikkate alınmıştır. Buradan $i=0,1,\dots,n-1$ üzerinden toplam alınarak ve ve üçgen eşitsizliği kullanılarak istenen sonua ulaşılır.

Sonuç 3.1.8 Teorem 3.1.16' nın varsayımları ve notasyonu altında

$$\left|\int_a^b f(t)dt-A_M(f,f',I_h)\right|\le\frac{\Gamma-\gamma}{24\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n-1}h_i^3 \tag{3.40}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $A_M(f,f',I_h)$

$$A_M(f,f',I_h):=\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)h_i+\frac{1}{24}\sum_{i=0}^{n-1}h_i^2[f'(x_{i+1})-f'(x_i)]$$

dir. Ayrıca

$$\left|\int_a^b f(t)dt-A_t(f,f',I_h)\right|\le\frac{\Gamma-\gamma}{6\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n-1}h_i^3$$

eşitsizliği sağlanır, burada $A_T(f,f',I_h)$

$$A_T(f,f',I_h):=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\,h_i-\frac{1}{12}\sum_{i=0}^{n-1}h_i^2\,[f'(x_{i+1})-f'(x_i)]$$

dir.

İspat: Sonuç 3.1.7' yi kullanarak Teorem 3.1.10' un ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 3.1.9: Eğer f fonksiyonu n-kez türevlenebilir ise,

$A(f,f',\dots f^{(N-1)},I_h,\xi)$, $A_M(f,f',\dots f^{(N-1)},I_h)$ ve $A_T(f,f',\dots f^{(N-1)},I_h)$

ifadeleri sırasıyla

$$A(f,f',\dots f^{(N-1)},I_h,\xi)\coloneqq\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)h_i$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)h_i+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{n-1}[(x_{i+1}-\xi_i)^{k+1}+(-1)^k(\xi_i-x_i)^{k+1}]f^{(k)}(\xi_i)$$

$$+\frac{1}{(N+1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-\xi_i)^{N+1}(-1)^N(\xi_i-x_i)^{N+1}}{h_i}\left[f^{(N-1)}(x_{i+1})-f^{(N-1)}(x_i)\right],$$

$$A_M(f,f',\dots f^{(N-1)},I_h)\coloneqq\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)h_i$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!2^{k+1}}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(k)}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)h_i^{k+1}$$

$$+\frac{1+(-1)^k}{(N+1)!2^{N+1}}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f^{(N-1)}(x_{i+1})-f^{(N-1)}(x_i)\right]h_i^N$$

ve

$$A_T\left(f,f',\ldots f^{(N-1)},I_h\right):=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\,h_i$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f^{(k)}(x_i)+(-1)^k f^{(k)}(x_{i+1})\right]h_i^{k+1}$$

$$+\frac{1+(-1)^N}{2[(N+1)!]}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f^{(N-1)}(x_i)\right]h_i^N$$

şeklinde ifade edilir (Matic ve Ark., 2000).

3.2. Türevleri $(\boldsymbol{h_1},\boldsymbol{h_2},\boldsymbol{m})$ −Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipi Bazı Eşitsizlikler

Bu kısımda (h_1,h_2,m) −konveks türevlere sahip fonksiyonlar için Ostrowski tipi yeni eşitsizlikler verilecektir. Bunlar literatürde daha önce konveks, s-konveks ve h-konveks fonksiyonlar için verilenlerin genel durumlarıdır.

$I\subset\mathbb{R}$ ve $f\colon I\to\mathbb{R}$, I^0, I'nın içi üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f'\in L[a,b]$, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $\forall x\in I$ için $|f'(x)|\le M$ ise bu takdirde her $x\in I$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\le\frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuç literatürde Ostrowski eşitliği olarak adlandırılır.

Son zamanlarda Sınırlı varyasyon fonksiyonları, Lipschitzian, monoton, mutlak sürekli, konveks, s-konveks ve h-konveks ve benzeri çeşitli fonksiyon sınıfları için bu eşitsizliğin çeşitli genellemeleri verilmiştir.

Lemma 3.2.1 $f\colon I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise bu takdirde $t\in[0,1]$ için

$$f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du=(b-a)\int_0^1 p(t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

eşitliği sağlanır, burada $\forall x\in[a,b]$ için

$$p(t) = \begin{cases} t, \; t \in \left[0, \frac{b-x}{b-a}\right] \\ t-1 \;\; t \in (\frac{b-x}{b-a}, 1] \end{cases}$$

dir (Cortez ve Garcia, 2017).

Lemma 3.2.2 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise bu takdirde her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du = \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx + (1-t)a)\,dt$$

$$-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx + (1-t)b)\,dt$$

eşitliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

Teorem 3.2.1 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I$ ve $a < b$ için $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ de konveks ise bu takdirde her $x \in [a, b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{6}\left[\left(4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - 3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + 1\right)|f'(a)| + \left(9\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - 4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 6\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + 2\right)|f'(b)|\right]$$

eşitsizliği yazılabilir. $\frac{1}{6}$ sabiti, daha küçük olan yerine geçemeyeceği anlamında, mümkün olanın en iyisidir (Cortez ve Garcia, 2017).

Teorem 3.2.2 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer bir $s \in (0,1]$ için $|f'|$ fonksiyonu $s_2 -$ konveks ve her $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise ise bu takdirde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{s+1}\right]$$

eşitsizliği yazılır (Cortez ve Garcia, 2017).

Şimdi $h-$ konveks fonksiyonları için Ostrowski tipi eşitsizlikleri verebiliriz:

Teorem 3.2.3 $h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve süper çarpımsal fonksiyon, her $\alpha \in (0,1)$ için $h(\alpha) \geq \alpha$, $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° da türevlenebilir bir fonksiyon,

$f' \in L[a,b]$, $a,b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, I üzerinde h–konveks ve $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise bu durumda $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{M\left[(x-a)^2+(b-x)^2\right]}{b-a}\int_0^1 [h(t^2) + h(t-t^2)]\, dt$$

eşitsizliği yazılır (Cortez ve Garcia, 2017).

Teorem 3.2.4 $h: J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve süper çarpımsal fonksiyon, $\alpha \in (0,1)$ için $h(\alpha) \geq \alpha$, $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fonksiyonu I° da türevlenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b], a,b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q, [a,b]$ üzerinde bir h–konveks fonksiyon, $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $h(t) \geq t$ ve $|f'(x)| \leq M, x \in [a,b]$ ise bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{Mh^{\frac{1}{q}}(1)}{b-a}\left(\int_0^1 h(t^p)dt\right)^{\frac{1}{p}}((x-a)^2 + (b-x)^2)$$

eşitsizliği yazılır (Cortez ve Garcia, 2017).

Tanım 3.2.1 $0 < s \leq 1$ olsun. Bir $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için birinci anlamda s–konveks olduğu söylenir ya da s_1–konveks olduğu söylenir, şayet her $x,y \in [0,+\infty)$ ve her $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y),$$

eşitsizliği sağlanırsa (Cortez ve Garcia, 2017).

Tanım 3.2.2 $h: J \to \mathbb{R}$ non-negatif ve özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x,y \in J$ ve $t \in (0,1)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanırsa $f: J \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna h–konvekstir denir (Cortez ve Garcia, 2017).

Tanım 3.2.3 Bir $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\alpha,\beta,a,b: J \subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ verilen fonksiyonlar olmak üzere

$$f(\alpha(t)x + \beta(t)y) \leq a(t)f(x) + b(t)f(y), \quad x,y \in I \tag{3.41}$$

eşitsizliği sağlanırsa bu fonksiyona (α,β,a,b)–konveks fonksiyon denir (Cortez ve Garcia, 2017).

Shi ve Ark. (2014), aşağıdaki özel tanımlamaları vermiştir.

Tanım 3.2.4 $h_1, h_2: [0,1] \to \mathbb{R}_+$ ve $m \in (0,1]$ olsun. Bir $f: I \subseteq \mathbb{R}_0 = [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna (h_1, h_2, m) $-$konveks denir. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq h_1(t)f(x) + mh_2(t)f(y) \quad (3.42)$$

eşitsizliği varsa. Eğer eşitsizlik tersine sağlanırsa f ye (h_1, h_2, m)–konkavdır denir. Bu tanıma göre

(1) Eğer (3.42) de $m = 1$, $h_1(t) = t$ ve $h_2(t) = 1 - t$ ise konveksliğin klasik kavramı

(2) Eğer (3.42) de $h_1(t) = t$ ve $h_2(t) = 1 - t$ ise m–konveks fonksiyon kavramı

(3) Eğer (3.42) de $m = 1$, $h_1(t) = t^s$ ve $h_2(t) = 1 - t^s$ ise s_1–konveks fonksiyon kavramı

(4) Eğer (3.42) de $m = 1$, $h_1(t) = t^s$ ve $h_2(t) = (1-t)^s$ alınırsa s_2–konveks fonksiyon kavramı

(5) Eğer (3.42) de $h_1(t) = 1$ ve $h_2(t) = \frac{1}{m}$ ise P–konveks fonksiyon kavramı

(6) Eğer (3.42) de $m = 1$ ve $h_2(t) = h_1(1-t)$ ise h–konveks fonksiyon kavramı

(7) Eğer (3.42) de $m = 1$, $h_1(t) = t^{-s}$ ve $h_2(t) = (1-t)^{-s}$ ise s–Godunova–Levin konveks fonksiyonun kavramı elde edilir.

Önerme 3.2.1 $h_1, h_2, h_3, h_4: [0,1] \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonlar ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer $f: I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ (h_1, h_2, m)–konveks ve $g: I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ (h_3, h_4, m) $-$konveks ise bu takdirde $f + g$ de (h_5, h_6, m)–konvekstir, burada $h_5 = \max\{h_1, h_3\}$ ve $h_6 = \max\{h_2, h_4\}$ dir (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
(f+g)(tx + m(1-t)y),& \\
&= f(tx + m(1-t)y)\ g(tx + m(1-t)y) \\
&\leq h_1(t)f(x) + mh_2(t)f(y) + h_3(t)g(x) + mh_4(t)g(y) \\
&\leq h_5(t)f(x) + mh_6(t)f(y) + h_5(t)g(x) + mh_6(t)g(y) \\
&= h_5(t)\big(f(x) + g(x)\big) + mh_6(t)\big(f(y) + g(y)\big) \\
&= h_5(t)(f+g)(x) + mh_6(t)(f+g)(y)
\end{aligned}
$$

olup ispat tamamlanır.

Önerme 3.2.2 $h_1, h_2: [0,1] \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonlar ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer $f: I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ (h_1, h_2, m)–konveks ise, bu takdirde her $\alpha \in \mathbb{R}_+$ için αf fonksiyonu da (h_1, h_2, m)–konvekstir (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}(\alpha f)(tx + m(1-t)y) &= \alpha f(tx + m(1-t)y) \\ &\leq \alpha\big(h_1(t)f(x) + mh_2(t)f(y)\big) \\ &= h_1(t)(\alpha f)(x) + mh_2(t)(\alpha f)(y)\end{aligned}$$

yazılabilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 3.2.3 $q_n, r_n: [0,1] \to \mathbb{R}_+$ iki dizisi sırasıyla h_1 ve h_2 ye noktasal yakınsak fonksiyonlar ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer f_n, f ye noktasal yakınsayan bir fonksiyonu dizisi olmak üzere her $f_k : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\forall k > n_0, n_0 \in \mathbb{Z}_+$ için (q_k, r_k, m)–konveks ise bu takdirde f de (h_1, h_2, m)–konvekstir (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Gerçekten $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}f(tx + m(1-t)y) &= \lim_{n\to+\infty} f_n\,(tx + m(1-t)y) \\ &= \lim_{k\to+\infty} f_{n_0+k}\,(tx + m(1-t)y) \\ &= \lim_{k\to+\infty} f_k(tx + m(1-t)y) \\ &\leq \lim_{k\to+\infty} q_k(t)f_k\,(t) + mr_k(t)f_k(y) \\ &= h_1(t)f(x) + mh_2(t)f(y)\end{aligned}$$

olup önerme kanıtlanmış olur.

Teorem 3.2.5 $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\left[ma, \frac{b}{m}\right] \subseteq [0, +\infty)$ üzerinde sonlu bir fonksiyon ve $m \in (0,1]$ için (h_1, h_2, m)–konveks ise ve $|h_i(t)| \leq M$ olacak şekilde bir M mevcut olsun. Bu takdirde f herhangi bir kapalı $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: $x \in [a,b]$ olsun. Bu takdirde $x = ta + (1-t)b$ olacak şekilde bir $t \in [0,1]$ vardır. Dolayısıyla

$$f(x) = f(ta + (1-t)b) \leq h_1(t)f(a) + mh_2(t)f\left(\frac{b}{m}\right) \leq M\left(f(a) + f\left(\frac{b}{m}\right)\right)$$

yazabiliriz ve böylece f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde üstten sınırlıdır.

Şimdi herhangi bir $x \in [a,b]$ 'nin $|t| \leq \frac{b-a}{2}$ olmak üzere $\frac{a+b}{2} + t,$ şeklinde yazılabileceğini belirtelim. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right)\right)$$

$$\leq h_1\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{\frac{a+b}{2} - t}{m}\right)$$

Bu teoremin ilk bölümünü uygulayarak

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - mh_2\left(\frac{1}{2}\right)M \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) - mh_2\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{\frac{a+b}{2} - t}{m}\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) = h_1\left(\frac{1}{2}\right)f(x)$$

ve buradan da

$$\left[h_1\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) - mh_2\left(\frac{1}{2}\right)M\right) \leq f(x)$$

olduğu görülür.

Şimdi türevleri $(h_1, h_2, m)-$ konveks olan fonksiyonları için bazı Ostrowski tipi eşitsizlikleri elde edilecektir. Bunlar literatürde daha önce verilen ifadelerin genelleştirmeleridir.

Teorem 3.2.6 $f: I \to \mathbb{R}$, $I°$da türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer f' fonksiyonu $[a,b]$ de (h_1, h_2, m)–konveks ise bu takdirde $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)|f'(a)|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} th_1(t)dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)h_1(t)dt\right]$$

$$+m(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} th_2\,(t)dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)h_2(t)\,dt\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Lemma 3.2.1 ve Tanım 3.2.2 kullanılarak

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t|f'(ta+(1-t)b)|\,dt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\,|f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\left|f'\left(ta+m(1-t)\frac{b}{m}\right)\right|dt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\left|f'\left(ta+m(1-t)\frac{b}{m}\right)\right|dt$$

$$\leq (b-a)\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\left(h_1(t)|f'(a)|+mh_2(t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right)dt$$

$$+(b-a)\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)(h_1(t)|f'(a)|)+mh_2(t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|dt$$

$$=(b-a)\left[|f'(a)|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} th_1\,(t)dt+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} th_2(t)dt\right]$$

$$+(b-a)\left[|f'(a)|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\,h_1(t)dt+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\,h_2(t)dt\right]$$

$$=(b-a)|f'(a)|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} th_1\,(t)dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)h_1(t)dt\right]$$

$$+m(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} th_2(t)dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)h_2\,(t)dt\right]$$

yazabiliriz ve böylelikle sonuç ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.7 $h_1, h_2: [0,1] \to \mathbb{R}_+$ negatif olmayan fonksiyonlar, $f: I \to \mathbb{R}$, I°da türevlenebilir bir fonksiyon $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $m \in (0,1]$ olduğunu varsayalım. Eğer $|f'|$ fonksiyonu I da (h_1, h_2, m)–konveks fonksiyon ve her $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ise, bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\int_0^1 t\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)\,dt$$

eşitsizliği için sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Lemma 3.2.2 ve Tanım 3.2.2 kullanılarak

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|\,dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|\,dt$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t\left|f'\left(tx+m(1-t)\frac{a}{m}\right)\right|dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t\left|f'\left(tx+m(1-t)\frac{b}{m}\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t\left(h_1(t)|f'(x)|+mh_2(t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|\right)dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t\left(h_1(t)|f'(x)|+mh_2(t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right)dt$$

$$\leq M\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)\,dt+M\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)dt$$

$$=\frac{M}{b-a}\left((x-a)^2+(b-x)^2\right)\int_0^1 t\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)\,dt$$

yazabiliriz ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.8 $h_1,h_2:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ negatif olmayan fonksiyonlar, $f:I\to\mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon $f'\in L[a,b], a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. $m\in(0,1]$ olduğunu varsayalım. Eğer $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında (h_1,h_2,m)–konveks fonksiyon, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\leq M$ ise bu takdirde $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq M\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)dt\right]^{\frac{1}{q}}\frac{\left((x-a)^2+(b-x)^2\right)}{b-a}$$

eşitsizliği yazılır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: $p>1$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.2 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)a)|\,dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 t|f'(tx+(1-t)b)|\,dt$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılabilir. Öte yandan, $|f'|^q$ fonksiyonu (h_1, h_2, m)– konvekstir olduğundan

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt = \int_0^1 \left|f'\left(tx+m(1-t)\frac{a}{m}\right)\right|^q dt$$

$$\leq \int_0^1 \left(h_1(t)|f'(x)|^q + mh_2(t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right) dt$$

$$\leq M^q \int_0^1 \big(h_1(t)+mh_2(t)\big) dt$$

eşitsizliğini yazılabiliriz. Benzer şekilde

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq M^q \int_0^1 \big(h_1(t)+mh_2(t)\big)\, dt$$

elde edilir ki buradan da

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[M^q\int_0^1\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[M^q\int_0^1\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)\, dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= M\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)dt\right]^{\frac{1}{q}}\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{b-a}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.9 Eğer her $t \in [0,1]$ için $max\{h_1(t), h_2(t)\} \leq min\{t, 1-t\}$ ise bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{6}\left[|f'(a)|\left(4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - 3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + 1\right) + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left(9\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\right)^2 -\right.\right.$$

$$\left.\left.-4\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\right)^3 - 6\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\right) + 2\right)\right]$$

eşitsizliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Teorem 3.2.6’ dan

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)|f'(a)|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t h_1(t)dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)h_1\,(t)dt\right]$$

$$+(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t h_2(t)dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)h_2(t)dt\right]$$

$$\leq (b-a)|f'(a)|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t.\,tdt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)\,tdt\right]$$

$$+m(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t(1-t)\,dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)(1-t)\,dt\right]$$

$$= (b-a)|f'(a)|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^2\,dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t^2)\,dt\right]$$

$$+m(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} (t-t^2)\,dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-2t+t^2)\,dt\right]$$

$$= (b-a)|f'(a)|\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3\right]$$

$$+m(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 + \frac{1}{3} - \frac{b-x}{b-a} + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3\right]$$

$$= (b-a)|f'(a)|\left[\frac{2}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + \frac{1}{6}\right]$$

$$+m(b-a)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - \frac{b-x}{b-a} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{(b-a)}{6}|f'(a)|\left[4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - 3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + 1\right]$$

$$+m\frac{(b-a)}{6}\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left[9\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - 4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - 6\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + 2\right]$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left[|f'(a)|\left(4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - 3\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 + 1\right) +\right.$$

$$\left. + m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\left(9\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 - 4\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^3 - 6\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + 2\right)\right]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 3.2.1 Teorem 3.2.9 da eğer $m = 1$ alınırsa Teorem 3.2.1' deki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.10 Her $t \in [0,1]$ ve $s \in (0,1]$ için $max\{h_1(t), h_2(t)\} \leq min\{t^s, (1-t)^s\}$ eşitsizliği sağlanıyorsa bu takdirde

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\frac{s+m+1}{(s+1)(s+2)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Teorem 3.2.7’ den

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\int_0^1 t\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)\,dt$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\int_0^1 t(t^s+m(1-t)^s)\,dt$$

$$= \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\int_0^1 t^{s+1}dt+m\int_0^1 t(1-t)^s\right)dt$$

$$= \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\frac{1}{s+1}+\frac{m}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$= \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\frac{s+1+m}{(s+1)(s+2)}\right)$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 3.2.2 Eğer Teorem 3.2.10 da $m=1$ alınırsa Teorem 3.2.2’ nin sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.11 Eğer $s\in(0,1]$ ve $her\ t$ için $max\{h_1(t),h_2(t)\}\leq min\{t^s,1-t^s\}$ ise

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\frac{2+ms}{2(s+2)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Teorem 3.2.7’ den

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\int_0^1 t\big(h_1(t)+mh_2(t)\big)\,dt$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\int_0^1 t\big(t^s+m(1-t^s)\big)\,dt$$

$$= \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\int_0^1 t^{s+1}dt+m\int_0^1 t(1-t^s)\right)dt$$

$$= \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\frac{1}{s+2}+\frac{ms}{2(s+2)}\right)$$

$$= \frac{M}{b-a}((x-a)^2+(b-x)^2)\left(\frac{2+ms}{2(s+2)}\right)$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 3.2.3 $m = 1$ alınırsa Teorem 3.2.11 den klasik Ostrowski eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.12 $h_2(t)$ bir süper çarpımsal fonksiyon ve $\forall t \in [0,1]$ için $h_2(t) \geq t$ ise, bu takdirde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M[(x-a)^2+(b-x)^2]}{b-a}\int_0^1 \left(h_1(t)h_2(t) + mh_2(t^2)\right) dt$$

eşitsizliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Teorem 3.2.7' den

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2 + (b-x)^2)\int_0^1 t\left(h_1(t) + mh_2(t)\right) dt$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2 + (b-x)^2)\int_0^1 \left(h_2(t)h_1(t) + mh_2(t)\right) dt$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2 + (b-x)^2)\int_0^1 \left(h_2(t)h_1(t) + mh_2(t)h_2(t)\right) dt$$

$$\leq \frac{M}{b-a}((x-a)^2 + (b-x)^2)\int_0^1 \left(h_2(t)h_1(t) + mh_2(t^2)\right) dt$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.13 Eğer verilenlere ek olarak $h_1(t) = h_2(1-t)$ ise bu takdirde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{M[(x-a)^2+(b-x)^2]}{b-a}\int_0^1 \left(h_2(t-t^2) + mh_2(t^2)\right) dt$$

eşitsizliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Teorem 3.2.12 ve $h_2(t)$ nin süper çarpımsal olmasından dolayı

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{M[(x-a)^2+(b-x)^2]}{b-a}\int_0^1 \left(h_1(t)h_2(t) + mh_2(t^2)\right) dt$$

$$= \frac{M[(x-a)^2+(b-x)^2]}{b-a}\int_0^1 \left(h_2(1-t)h_2(t) + mh_2(t^2)\right) dt$$

$$= \frac{M[(x-a)^2+(b-x)^2]}{b-a}\int_0^1 \left(h_2(t-t^2) + mh_2(t^2)\right) dt$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 3.2.4 Eğer Teorem 3.2.13 de $m = 1$ alınırsa Teorem 3.2.3' ün sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.14 Eğer h_2 fonksiyonu süper toplamsal, $h_1(t) = h_2(1-t)$ ve $m = 1$ ise bu takdirde

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{Mh_2^{\frac{1}{q}}}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{q}}[(x-a)^2 + (b-x)^2]$$

eşitsizliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Teorem 3.2.8' den

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq M\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 \left(h_1(t) + mh_2(t)\right)dt\right]^{\frac{1}{q}} \frac{((x-a)^2 + (b-x)^2)}{b-a}$$

elde edilir. Öte yandan $h_1(t) = h_2(1-t)$, h_2 nin super toplamsal ve $m = 1$ olduğu gerçekleri dikkate alınırsa

$$\int_0^1 \left(h_1(t) + mh_2(t)\right)dt = \int_0^1 h_2(1)dt = h_2(1),$$

ve dolayısıyla

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{Mh_2^{\frac{1}{q}}(1)}{b-a}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{q}}[(x-a)^2 + (b-x)^2]$$

$$= \frac{Mh_2^{\frac{1}{q}}(1)}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{q}}[(x-a)^2 + (b-x)^2]$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.15 Yukarıda verilenlere ek olarak eğer $\forall t \in [0,1]$ için $h_2(t) \geq t$ ise

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{Mh_2^{\frac{1}{q}}(1)}{b-a}\left(\int_0^1 h_2\,(t^p)dt\right)^{\frac{1}{q}}[(x-a)^2 + (b-x)^2]$$

eşitsizliği sağlanır (Cortez ve Garcia, 2017).

İspat: Teorem 3.2.14 ve $h(t^p) \geq t^p$ eşitsizliği kullanılarak kolayca görülür.

4. KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN OSTROWSKİ TİPİ BAZI EŞİTSİZLİKLER

4.1. Stokastik Süreçlerin Konveksliği

Bu kısımda Stokastik süreçlerin konveksliği ile ilgili olarak bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanım ve teorem verilecektir.

Tanım 4.1.1 (Konveks Stokastik Süreç): Eğer her $\lambda \in (0,1)$ ve $u, v \in I$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v,.) \leq \lambda X(u,.) + (1-\lambda)X(v,.) \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa, bu takdirde $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine konvekstir denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik $\lambda = \frac{1}{2}$ için geçerli ise, $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Jensen- konveks veya $\frac{1}{2}-$konveksdir. Bir $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks değilse konkavdır denir (Kotrys, 2012).

Tanım 4.1.2 (Ω, U, P) olasılık uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine;

(i) Eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v,.) \leq \lambda X(u,.) + (1-\lambda)X(v,.)$$

ise λ-konvekstir denir. Bu tür stokastik süreçlerin sınıfı C_λ ile gösterilir.

(ii) Eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v,.) + X((1-\lambda)u + \lambda v,.) \leq X(u,.) + X(v,.)$$

ise Wright-konvekstir denir. Bu tür stokastik süreçlerin sınıfı W ile gösterilir (Kotrys, 2012).

Lemma 4.1.1 $A, B: \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkenleri $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ olmak üzere, eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X(t,.) = A(.)t + B(.)$ formunda bir stokastik süreç ve $[a, b] \subset I$ ise bu takdirde

$$\int_a^b X(t,.)\,dt = A(.)\frac{b^2 - a^2}{2} + B(.)(b-a)$$

dir (Kotrys, 2012).

İspat. Yukarıdaki notasyon ve beklenen değerin temel özellikleri kullanılarak

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X(\Theta_k,.)\,(t_k - t_{k-1}) - A\frac{b^2-a^2}{2} + B(b-a)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(A\left(\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\,(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right) + B\left(\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) - (b-a)\right)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(A\left(\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\,(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right)\right)^2\right]$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \Theta_k\,(t_k - t_{k-1}) - \frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 E[A^2]$$

eşitliği elde edilir. Eğer $n \to \infty$ için limit alınırsa Riemann integralin tanımından yukarıdaki ifade 0' a gidecektir. Bu ise Lemma 4.1.1 in ispatını tamamlar.

Önerme 4.1.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir konveks stokastik süreç ve $t_0 \in I^o$ olsun. Bu takdirde öyle bir $A: \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni vardır ki X stokastik süreci t_0 da $A(.)(t - t_0) + X(t_0,.)$ formundaki süreç tarafından desteklenir. Yani her $t \in I$ için

$$X(t,.) \geq A(.)(t - t_0) + X(t_0,.) \tag{4.2}$$

dır (Kotrys, 2012).

İspat. $r, s, u, v, t_0 \in I^o$ sayılarını $r < s < t_0 < u < v$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda $r < s < t_0$ için

$$s = \frac{t_0-s}{t_0-r}r + \frac{s-r}{t_0-r}t_0$$

ifadesi r ve t_0 noktalarının bir konveks kombinasyonudur. Dolayısıyla $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks olduğundan

$$X(s,.) \leq \frac{t_0-s}{t_0-r}X(r,.) + \frac{s-r}{t_0-r}X(t_0,.)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{X(t_0,.)-X(r,.)}{t_0-r} \leq \frac{X(t_0,.)-X(s,.)}{t_0-s}$$

elde edilir. O halde, eğer $s \to t_0^-$ için limite geçilirse

$$\frac{X(t_0,.)-X(r,.)}{t_0-r} \leq X'_-(t_0,.) \tag{4.3}$$

olacaktır. Benzer şekilde $t_0 < u < v$ için $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{X(u,.)-X(t_0,.)}{u-t_0} \leq \frac{X(v,.)-X(t_0,.)}{v-t_0}$$

olup eğer $u \to t_0^+$ için limite geçilirse

$$X'_+(t_0,.) \leq \frac{X(v,.)-X(t_0,.)}{v-t_0} \tag{4.4}$$

sonucuna varılır. (4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri ve Skowronski Lemmasının bir sonucu olarak

$$\frac{X(t_0,.)-X(r,.)}{t_0-r} \leq X'_-(t_0,.) \leq X'_+(t_0,.) \leq \frac{X(v,.)-X(t_0,.)}{v-t_0} \tag{4.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $A: \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkeni $X'_-(t_0,.) \leq A(.) \leq X'_+(t_0,.)$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir rastgele değişkense, yukarıdaki eşitsizlikten (4.2) ifadesinin elde edilebileceği görülür.

Öte yandan iyi bilinmektedir ki $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı Jensen-konveks, sürekli fonksiyonlar Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlar ve tersine olarak eğer sürekli bir fonksiyon Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlıyorsa konvekstir (Kuczma, 1985).

Bu kısımda stokastik süreçler için benzer sonuçlar ispatlanacaktır.

Teorem 4.1.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir Jensen-konveks ortalama-kare sürekli bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X(\frac{u+v}{2},.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)\,dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} \tag{4.6}$$

dır (Kotrys, 2015).

İspat. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci ortalama-kare sürekli olduğundan aynı zamanda olasılıkta süreklidir. Nikodem her Jensen-konveks ve olasılıkta sürekli stokastik sürecin konveks olduğunu ispatlamıştır. Dolayısıyla $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ konvekstir, Önerme 4.1.1'den herhangi bir $t_0 \in I^0$ noktasında bu süreç bir desteğe sahiptir. $t_0 = \frac{u+v}{2}$ de bir destek alalım. Bu takdirde

$$X(t,.) \geq A(.)\left(t-\frac{u+v}{2}\right)+X\left(\frac{u+v}{2},.\right)$$

elde edilir. Lemma 4. 1' i kullanarak

$$\int_u^v X(t,.)\,dt \geq \int_u^v \left[A(.)\left(t-\frac{u+v}{2}\right)+X\left(\frac{u+v}{2},.\right)\right]dt$$

$$= \frac{A(.)}{2}(v^2 - u^2) - \frac{u+v}{2}A(.)(v-u) + X\left(\frac{u+v}{2},.\right)(v-u)$$

$$= X\left(\frac{u+v}{2},.\right)(v-u)$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak

$$X(\frac{u+v}{2},.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)\,dt$$

elde edilir. Böylece ispatın birinci bölümü biter. (4.1) eşitsizliğinde eğer $t = \lambda u + (1-\lambda)v$ alınırsa $\lambda = \frac{t-v}{u-v}$ olup sürecin konveksliğinden

$$X(t,.) \leq \frac{t-v}{u-v}X(u,.) + \left(1 - \frac{t-v}{u-v}\right)X(v,.)$$

$$= \frac{X(u,.)-X(v,.)}{u-v}(t-v) + X(v,.)$$

$$= \frac{X(u,.)-X(v,.)}{u-v}t + \frac{X(v,.)(u-v)-X(u,.)v+X(v,.)v}{u-v}$$

$$= \frac{X(v,.)-X(u,.)}{u-v}t + \frac{X(v,.)u-X(u,.)v}{u-v}$$

elde edilir. Daha önce olduğu gibi Lemma 4.1.1' i kullanarak

$$\int_u^v X(t,.)dt \leq \int_u^v \left[\frac{X(v,.)-X(u,.)}{u-v}t + \frac{X(v,.)u-X(u,.)v}{u-v}\right]dt$$

$$= \frac{X(v,.)-X(u,.)}{v-u}\frac{1}{2}(v^2-u^2) - \frac{X(v,.)u-X(u,.)v}{v-u}(v-u)$$

$$= \frac{1}{2}[X(v,.)(v-u) - X(u,.)(v-u)]$$

$$= \frac{X(v,.)+X(u,.)}{2}(v-u)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.) \leq \frac{X(v,.)+X(u,.)}{2}dt$$

olduğu görülür.

Teoremin tersini göstermeden önce iki basit yorumdan söz edelim. Bunlardan birincisi konkveksliğin tanımının doğrudan bir sonucu iken ikincisi Schwartz eşitliğinin bir sonucudur.

Yorum 4.1.1 Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci I aralığında ortalama-kare sürekli ise, bu takdirde $\varphi(t) = E[X(t)]$ (X sürecinin beklenen değeri) ile tanımlı $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da süreklidir (Kotrys, 2015).

Yorum 4.1.2 Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks(veya konkav) ise, bu takdirde $\varphi(t) = E[X(t)]$ ile tanımlı $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da konvekstir(veya konkav) (Kotrys, 2015).

Şimdi Hermite-Hadamard eşitsizliğinin tersini ispatlayalım.

Teorem 4.1.2 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve I aralığında ortalama-kare sürekli olsun ve (4.6) eşitsizliğinin sağ veya sol tarafını sağlasın. Bu takdirde $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konvekstir (Kotrys, 2015).

İspat. Önce (4.6) eşitsizliğinin sol tarafının sağlanması durumunda teoremi ispatlayacağız. Tersine olarak X stokastik sürecinin konveks olmadığını kabul edelim. Bu takdirde her $w \in A$ için

$$X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y, w) > \lambda_0 X(x, w) + (1-\lambda_0)X(y, w) \tag{4.7}$$

olacak şekilde $P(A) > 0$ olan $A \subset \Omega$ olayı ve $x, y \in I, x < y$ ve $\lambda_0 \in (0,1)$ sayıları mevcuttur.

$$\tilde{X}(t, w) = \begin{cases} X(t, w), & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

sürecini tanımlayalım ve $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = E[\tilde{X}(t)]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Yorum 4.1.1'e göre φ sürekli fakat (4. 7)' den dolayı φ, I da konveks değildir. Pales (2000)'in çalışmasındaki sonucunu kullanarak üstten yarı sürekli fonksiyon konveks değilse en az bir noktada kesin olarak konkav olacağından φ, p de kesin olarak konkav olacak şekilde bir $p \in I$ noktasının mevcut olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla her $t \in (p-\delta, p+\delta) \backslash \{p\}$ için

$$\varphi(t) < \varphi(p) + c(t-p) \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir c sabiti ve bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $p = \frac{u+v}{2}$ olmak üzere $[u, v] \subset (p-\delta, p+\delta)$ alalım. Bu takdirde Pales teoremine göre her $t \in (p-\delta, p+\delta) \backslash \{p\}$ için

$$\varphi(t) < \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) + c(t - \frac{u+v}{2})$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int_u^v \varphi(t)\, dt < \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)(v-u) + c\int_u^v \left(t - \frac{u+v}{2}\right) dt = \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)(v-u)$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v \varphi(t)\, dt < \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

elde edilir. Tekrar $\varphi(t)$ ile $E[\tilde{X}(t)]$ yi yer değiştirerek

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt < E\left[\tilde{X}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)\right] \tag{4.9}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer X stokastik süreci Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağlarsa $\tilde{X}$ nın da sağlayacağı kolayca görülür. $\tilde{X}$ ve $[u, v]$ için (4.6) eşitsizliğinin sol tarafını kullanarak

$$E\left[\tilde{X}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)\right] < \frac{1}{(v-u)} E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \tag{4.10}$$

olduğu görülür. (4.9) ve (4.10) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt < E\left[\tilde{X}\left(\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)\right] < \frac{1}{(v-u)} E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) ifadesinde integrasyon sınırını değiştirerek ve Fubini teoremini kullanarak istenilen çelişki elde edilir.

Şimdi de Hermite-Hadamard eşsitsizliğinin sağ tarafı sağlansın. Daha önce olduğu gibi tersini kabul edelim, yani X stokastik süreci konveks olmasın. Bu takdirde her $\omega \in A$ için

$$X(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y, w) > \lambda_0 X(x, w) + (1-\lambda_0)X(y, w) \tag{4.12}$$

olacak şekilde $P(A) > 0$ olan $A \subset \Omega$ olayı ve $x, y \in I, x < y$ ve $\lambda_0 \in (0,1)$ sayıları mevcuttur. İspatın birinci kısmında tanımlanan

$$\tilde{X}(t, w) = \begin{cases} X(t, w), & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

sürecini ve $\varphi : I \to \mathbb{R}$ $\varphi(t) = E[\tilde{X}(t)]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. (4.12) eşitsizliğini φ için yazar ve sürekliliği kullanarak her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$\varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) > \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v) \tag{4.13}$$

olacak şekilde bir $[u, v] \subset I$ aralığının mevcut olduğu görülür. Keyfi bir $t \in [u, v]$ alalım. Bu takdirde

$\lambda = \frac{v-t}{v-u}$ olmak üzere $t = \lambda u + (1-\lambda)v$ alınırsa

$$\varphi(t) > \frac{\varphi(u)v - \varphi(v)u}{v-u} - \frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{v-u}t$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten integral alınırsa

$$\int_u^v \varphi(t)\, dt > \frac{1}{2}[\varphi(u) + \varphi(v)](v-u)$$

ve buradan da

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v \varphi(t)\, dt > \frac{[\varphi(u) + \varphi(v)]}{2}$$

elde edilir. Tekrar $\varphi(t)$ ile $E[\tilde{X}(t)]$ yi yer değiştirerek

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt > \frac{E[\tilde{X}(u)] + E[\tilde{X}(v)]}{2} \tag{4.14}$$

eşitsizliği yazılabilir. X süreci Hermite-Hadamard eşitsizliğini sağladığından $\tilde{X}$ da sağlar. $\tilde{X}$ ve $[u, v]$ için (4.6) eşitsizliğinin sağ tarafını kullanarak

$$\frac{1}{(v-u)}E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \le \frac{E[\tilde{X}(u)] + E[\tilde{X}(v)]}{2} \tag{4.15}$$

olduğu görülür. (4.14) ve (4.15) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{(v-u)}\int_u^v E[\tilde{X}(t)]\, dt \le \frac{E[\tilde{X}(u)] + E[\tilde{X}(v)]}{2} \le \frac{1}{(v-u)}E\left[\int_u^v \tilde{X}(t)\, dt\right] \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.16) da integrasyon sırası değiştirilir ve Fubini teoremi kullanılırsa istenilen çelişki elde edilir.

Teorem 4.1.3 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci bir monoton stokastik süreç ise bu takdirde bu süreç sayılabilir çoklukta noktalar hariç her yerde süreklidir (Skowronski, 1992).

Lemma 4.1.2 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks ise bu takdirde her $t \in I$ için

$$P - \lim_{u \to t^-} \frac{X(u,.) - X(t,.)}{u-t} = X'_-(t,.)$$

ve

$$P-\lim_{u\to+}\frac{X(u,.)-X(t,.)}{u-t}=X'_+(t,.)$$

olacak şekilde X'_- , $X'_+ : I\times\Omega\to\mathbb{R}$ artan stokastik süreçleri mevcuttur. Öte yandan $t<s$ olacak şekildeki her $t,s\in I$ için

$$X'_-(t,.)\le X'_+(t,.)\le X'_-(s,.)\le X'_+(s,.) \tag{4.17}$$

dir (Skowronski, 1992).

İspat. $t,s\in I$ ve $t<s$ keyfi olsun. Bu durumda $u,v\in I$ sayılarını $u<t<v<s$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde

$$\frac{X(t,.)-X(u,.)}{t-u}\le\frac{X(v,.)-X(u,.)}{v-u}$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda

$$t=\frac{v-t}{v-u}u+\frac{t-u}{v-u}v$$

olduğu yani t nin u ve v noktalarının bir konveks kombinasyonu olduğu görülür. Dolayısıyla $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci konveks olduğundan

$$X(t,.)\le\frac{v-t}{v-u}X(u,.)+\frac{t-v}{v-u}X(v,.)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\frac{X(v,.)-X(u,.)}{v-u}\le\frac{X(v,.)-X(t,.)}{v-t}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{X(u,.)-X(t,.)}{u-t}\le\frac{X(v,.)-X(t,.)}{v-t} \tag{4.18}$$

olup $\frac{X(u,.)-X(t,.)}{u-t}$ fark oranı $u\in I$ ya göre artan bir stokastik süreçtir. Buradan da her

her $t\in I$ için

$$P-\lim_{u\to t^-}\frac{X(u,.)-X(t,.)}{u-t}=X'_-(t,.)$$

olan bir $X'_- : \Omega\to\mathbb{R}$ rasgele değişkeni mevcuttur. Benzer şekilde her $t\in I$ için

$$P - \lim_{u \to t^+} \frac{X(v,.) - X(t,.)}{v - t} = X'_+(t,.)$$

olan bir $X'_+ : \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkeninin mevcut olduğu gösterilebilir. (4.18) den $X'_-(t,.) \leq X'_+(t,.)$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan

$$\frac{X(v,.) - X(t,.)}{v - t} \leq \frac{X(s,.) - X(v,.)}{s - v}$$

elde edilir ki buradan da $X'_+(t,.) \leq X'_-(s,.)$ olduğu görülür. Böylece $t, s \in I$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci konveks ise bu takdirde bu süreç sayılabilir çoklukta nokta hariç her noktada diferansiyellenebilirdir (Skowronski, 1992).

4.2. Stokastik Süreçler İçin Konvekslik Tipleri

Bu kısımda çeşitli tipten konveks stokastik süreçleri tanıtıp bu süreçlerle ilgili bazı eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 4.2.1 Eğer her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{s+t}{2}, .\right) \leq \frac{X(s,.) - X(t,.)}{2} \tag{4.19}$$

ise $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine J-konveks denir. Eğer $-X$ stokastik süreci konveks(J-konveks) ise X konkavdır(J-konkavdır) denir (Skowronski, 1992).

Lemma 4.2.1 $0 \in (a, b)$ ve $X: (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X(0, \cdot) = 0$ ile tanımlı bir J-konveks stokastik süreç olsun. Eğer $X + Y$ süreci J-konkav olacak şekilde 0 noktasında diferansiyellenebilir konkav bir $Y: (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$, stokastik süreç varsa bu takdirde $X = A + Z$ olacak şekilde bir $A: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ toplamsal stokastik süreci ve bir konveks $Z: (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci vardır (Skowronski, 1992).

Teorem 4.2.1 $X: (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci J-konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde $X + Y$ süreci J-konkav olacak şekilde bir $Y: (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konkav stokastik sürecinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $A: \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir toplamsal stokastik süreç ve $Z: (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks stokastik süreç olmak üzere $X = A + Z$ olmasıdır (Skowronski, 1992).

Teorem 4.2.2 Eğer $X_1, X_2: (a, b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreçleri sırasıyla J-konveks ve J-konkav ise ve her $t \in (a, b)$ için $X_1(t,.) \leq X_2(t,.)$ eşitsizliği sağlanıyorsa bu takdirde Y_1 konveks Y_2 konkav A toplamsal ve $X_1 = A + Y_1$ ve $X_2 = A + Y_2$ olacak şekilde $X_1, X_2: (a, b) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreçleri ve $A: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci vardır (Skowronski, 1992).

Tanım 4.2.2 $C: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir pozitif rastgele değişken olsun. Eğer her $u, v \in I$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) + C(.)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \quad (4.20)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu durumda $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine $C(\cdot) > 0$ modülüne göre güçlü konvekstir denir. Eğer (4.20) eşitsizliği sadece $\lambda = \frac{1}{2}$ için sağlanıyorsa, bu takdirde X sürecine $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks veya $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü yarı konvekstir denir. Eğer bu eşitsizlik sabit bir $\lambda \in [0,1]$ sayısı için sağlanıyorsa bu takdirde X sürecine $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü $\lambda-$konvekstir denir (Kotrys, 2012b).

Eğer (4.20) eşitsizliğinde $C(.)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2$ ifadesi atılırsa, Nikodem tarafından verilen konveks stokastik süreç tanımını elde edilmiş olur (Nikodem, 1980a). Diğer taraftan (4.20)' de $C(\cdot) \equiv 0$ olduğunda bir limit durum söz konusudur.

Lemma 4.2.2 X stokastik sürecinin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ-konveks(veya güçlü konveks) stokastik süreç olması gerek ve yeter şart $Y(t, .) = X(t, .) - C(.)t^2$ ile tanımlı $Y: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecinin λ-konveks(veya konveks) olmasıdır (Kotrys, 2012b).

İspat. İspatın birinci kısmında X stokastik sürecinin güçlü λ-konveks olduğunu kabul edelim. $u, v \in I$ keyfi olsun. Bu durumda güçlü λ-konvekslik tanımından

$$\begin{aligned} Y(\lambda u + (1-\lambda)v, .) &= x(\lambda u + (1-\lambda)v, .) - C(.)(\lambda u + (1-\lambda)v)^2 \\ &\leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) + C(.)\lambda[(1-\lambda)(u-v)^2 + (\lambda u + (1-\lambda)v)^2] \\ &= \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) - C(.)[\lambda u^2 + (1-\lambda)v^2] \\ &= \lambda(X(u, .) - C(.)u^2) + (1-\lambda)(X(v, .) - C(.)v^2) \\ &= \lambda Y(u, .) + (1-\lambda)Y(v, .) \end{aligned}$$

yazılabilir. Teoremin tersi benzer şekilde olduğu için ihmal edilmiştir.

Sonuç 4.2.1 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks ise, bu takdirde her $t_0 \in I^0$ için X stokastik süreci t_0 noktasında

$$H(t,.) = C(.)(t - t_0)^2 + A(.)(t - t_0) + X(t_0,.)$$

ile tanımlanan $H: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci tarafından desteklenir (Kotrys, 2012b).

Teorem 4.2.3 $\lambda \in [0,1]$ sabit bir sayı olsun ve $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ -konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde *X* süreci, $C(\cdot)$ modülüne göre Jensen-konvekstir (Kotrys, 2012b).

İspat. X stokastik sürecinin güçlü $\lambda-$konveks olduğunu farz edelim. Lemma 4.2.2 sağlandığı için $Y(t,.) = X(t,.) - C(.)t^2$ süreci de $\lambda-$konvekstir. Skowronski lemmasına göre *Y* stokastik süreci Jensen konvekstir. Bu ise

$$Y\left(\frac{s+t}{2},.\right) \leq \frac{Y(s,.)-Y(t,.)}{2}$$

olması demektir. Bu nedenle

$$X\left(\frac{s+t}{2},.\right) - C(.)\left(\frac{s+t}{2}\right)^2 \leq \frac{X(s,.)-C(.)s^2+X(t,.)-C(.)t^2}{2}$$

olduğu ve bazı düzenlemelerden sonra

$$X\left(\frac{s+t}{2},.\right) \leq \frac{X(s,.)+X(t,.)}{2} - \frac{C(.)}{4}(u-v)^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Bu da ispatı bitirir.

Tanım 4.2.3 (*P*- Üsten Sınırlı) Bir $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci için

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}_{t\in(a,b)} \{P(w \in \Omega: X(t,w) \geq n)\} = 0$$

eşitliği sağlanırsa X süreci $(a,b) \in I$ aralığında *P*-üsten sınırlıdır denir (Kotrys, 2012b).

Teorem 4.2.4 Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen konveks bir stokastik süreç ve $(a,b) \in I$ aralığında *P*-üstten sınırlı ise bu takdirde bu süreç *I* aralığında süreklidir (Kotrys, 2012b).

İspat. X süreci güçlü Jensen konveks olduğundan aynı zamanda Jensen konveks stokastik süreçtir. Öte yandan *X*, *I* aralığında *P*-üsten sınırlı olduğundan süreklidir.

Teorem 4.2.5 I nın açık aralık olduğunu varsayalım. $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü yarı-konveks olan bir X stokastik sürecinin sürekli olması için gerek ve yeter şart bu sürecin $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olmasıdır (Kotrys, 2012b).

İspat. Gerekliliği ispatlamak için $Y(t,.)=X(t,.)-C(.)t^2$ sürecini alalım. Bu durumda Lemma 4.2.2' ye göre Y nin Jensen konveks olduğunu görülür. X sürekli olduğu için Y ' de süreklidir. Nikodem' in sonucunu kullanarak Y nin konveksliğini elde ederiz. Lemma 4.2.2' yi bir kez daha kullanarak; X' in $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü konveks olduğu sonucunu çıkarırız. Yeterliliği ispatlamak için eğer X güçlü konveks ise X in aynı zamanda konveks olduğunu belirtelim. Nikodem'in sonucundan, X' in sürekliliğini elde ederiz.

Sonuç 4.2.2 Eğer $X: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci sürekli ve $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü λ-konveks bir stokastik süreç ise bu takdirde bu süreç $C(\cdot)$ modülüne göre de güçlü konvekstir (Kotrys, 2012b).

Teorem 4.2.6 Eğer $X: I\times\Omega \to \mathbb{R}$, Jensen-konveks, I aralığında ortalama-kare sürekli stokastik süreç ise bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} \qquad (4.21)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kotrys, 2012b).

Bu ifadedeki integral ortalama-kare integraldir. Ortalama kare integralin tanımı ve temel özellikleri için Sobczyk (1991) e bakılabilir. Şimdi güçlü konveks stokastik süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliğini verebiliriz.

Teorem 4.2.7 $X: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ süreci $C(\cdot)$ modülüne göre güçlü Jensen-konveks ve I aralığında ortalama-kare sürekli bir süreç olsun. Bu takdirde herhangi $u, v \in I$ için

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) - C(.)\frac{(v-u)^2}{12} \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} - C(.)\frac{(v-u)^2}{6} \qquad (4.23)$$

eşitsizliği sağlanır (Kotrys, 2012b).

Tanım 4.2.4 (Ω, A, P) olasılık uzayı ve $I\subset\mathbb{R}$ bir aralık, $\lambda\in[0,1]$ sabit bir sayı ve $X: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $u, v \in I$ için

$$Y(\lambda u+(1-\lambda)v,.) \leq [X(u,.)]^{\lambda}[X(v,.)]^{1-\lambda} \qquad (4.24)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine *log−konveks* stokastik süreç adı verilir (Tomar ve Ark., 2015).

Önerme 4.5.1 Eğer $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci log-konveks stokastik süreç ise bu takdirde *X* konveks stokastik süreçtir (Tomar ve Ark., 2015).

İspat. İspat (4.24)' den ve aşağıdaki aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden kolayca görülebilir. Her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$[X(u,.)]^{\lambda}[X(v,.)]^{1-\lambda} \leq \lambda X(u,.) + (1-\lambda)X(v,.)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $u, v \in I,\ u < v$ olmak üzere

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} \tag{4.25}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğini hatırlayalım. Bu eşitsizliği *log*−konveks stokastik sürece uygularsak

$$ln\left[X\left(\frac{u+v}{2},.\right)\right] \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v ln[X(t,.)]dt \leq \frac{ln[X(u,.)]+ln[X(v,.)]}{2} \tag{4.26}$$

veya buna denk olarak

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v ln[X(t,.)]dt\right] \leq \sqrt{X(u,.).X(v,.)} \tag{4.27}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise *log*−konveks stokastik süreçler için Hadamard tipi bir eşitsizliktir.

Negatif olmayan reel sayıların aritmetik ortalamasını *A*(*u*, *v*) ile aynı sayıların geometrik ortalamasını ise *G*(*u*, *v*) ile gösterelim. Bu durumda Hadamard tarafından verilen (4.25) eşitsizliği

$$X(A(u,v),.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v A\big(X(t,.) + X(u+v-t,.)\big)dt \leq A\big(X(u,.) + X(v,.)\big)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durum

$$\int_u^v X(t,.)dt = \int_u^v X(u+v-t,.)dt$$

alınarak kolayca gösterilebilir.

Teorem 4.2.8 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir *log*−konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Tomar ve Ark., 2015).

$$X(A(u,v),.) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\big(X(t,.),X(u+v-t,.)\big)dt \leq G\big(X(u,.),X(v,.)\big)$$

Sonuç 4.2.3 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir *log*−konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde

$$X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq ln\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v exp\big(X(t,.),X(u+v-t,.)\big)dt\right] \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2} \qquad (4.28)$$

eşitsizliği sağlanır (Tomar ve Ark., 2015).

Teorem 4.2.9 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir *log*−konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Tomar ve Ark., 2014):

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},.\right) &\leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v ln\big(X(t,.)\big)dt\right] \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\big(X(t,.),X(u+v-t,.)\big)dt \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \\ &\leq L\big(X(u,.),X(v,.)\big). \end{aligned}$$

Burada eğer $p \neq q$ ise $L(p,q) = \frac{p-q}{lnp-lnq}$ ve $p \neq q$ ise $L(p,p) = p$ dir.

Sonuç 4.2.4 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir *log*−konveks stokastik süreç ve $u, v \in T$, $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlanır (Tomar ve Ark., 2014):

$$\begin{aligned} exp\left[X\left(\frac{u+v}{2},.\right)\right] &\leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt\right] \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v exp\left[\frac{X(t,.),X(u+v-t,.)}{2}\right]dt \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v exp\big(X(t,.)\big)dt \\ &\leq E\big(X(u,.),X(v,.)\big). \end{aligned}$$

Burada E üstel ortalamadır, başka bir ifadeyle eğer $p \neq q$ ise $E(p,q) = \frac{exp(p)-exp(q)}{p-q}$ ve $p = q$ ise $E(p,p) = p$ dir.

Tanım 4.2.5 (Ω, A, P) olasılık uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $\lambda \in [0,1]$ sabit bir sayı ve $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $u, v \in I$ için

$$Y(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq [X(u, .)]^{\lambda}[X(v, .)]^{1-\lambda} - c\lambda(1-\lambda)(v-u)^2 \quad (4.29)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine $c > 0$ modülüne göre l*og−konveks* stokastik süreç adı verilir (Tomar ve Ark., 2014).

Teorem 4.2.10 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci $c > 0$ modülüne göre güçlü *log*−konveks stokastik süreç ve $u, v \in I,\ u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Tomar ve Ark., 2014):

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2}, .\right) + c\frac{(v-u)^2}{12} &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\big(X(t, .), X(u+v-t, .)\big)dt \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t, .)dt \\ &\leq L\big(X(u, .), X(v, .)\big) - c\frac{(v-u)^2}{6} \\ &\leq A\big(X(u, .), X(v, .)\big) - c\frac{(v-u)^2}{6}. \end{aligned}$$

Tanım 4.2.6 (Birinci Anlamda s−Konveks Stokastik Süreç) $0 \leq s \leq 1$ olsun. Eğer her $u, v \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$X(\alpha u + \beta v, .) \leq \alpha^s X(u, .) + \beta^s X(v, .)$$

eşitsizliği geçerliyse $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine birinci anlamda s−konveks stokastik süreç adı verilir (Maden ve ark., 2015).

Hatılatma 4.2.1 Kolaylıkla görülmektedir ki $s = 1$ için birinci anlamda s−konvekslik daha önce verilen stokastik süreçlerdeki genel konveksliğe indirgenir (Maden ve ark., 2015).

Hatılatma 4.2.2 Kolayca görülmektedir ki $\alpha = \beta = 1/2$ için birinci anlamda s−kovekslik Jensen-konveksliğe indirgenir (Maden ve ark., 2015).

Teorem 4.2.11 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda s−konveks olsun. Eğer $u, v \in I,\ u < v$ o ise bu takdirde

$$X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}}, .\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t, .)dt \quad (4.30)$$

eşitsizliği geçerlidir (Maden ve ark., 2015).

Teorem 4.2.12 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde

$$\int_0^1 X\big(tu + (1-t^s)^{1/s}v, .\big)\Psi(t)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2}\, 1$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Psi(t) := 1$

$$\Psi(t)dt := \frac{1}{2}\left[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right], t \in [0,1]$$

dir (Maden ve ark., 2015).

Teorem 4.2.13 $s \in (0,1)$ olmak üzere $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci birinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}}, .\right) \leq \int_0^1 X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}, .\right)\left[t^{\frac{1}{s}} + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[t^{\frac{1}{s}}u + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}v\right]dt$$

$$\leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $I \subset \mathbb{R}$ bir aralıktır (Maden ve ark., 2015).

Tanım 4.2.7 (İkinci Anlamda $s-$Konveks Stokastik Süreç) $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer her $u, v \geq 0$ için

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq \lambda^s X(u, .) + (1-\lambda)^s X(v, .)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine ikinci anlamda $s-$konveks stokastik süreç adı verilir, burada $I \subset \mathbb{R}$ bir aralıktır (Set ve ark., 2014).

Hatılatma 4.2.3 Kolaylıkla görülmektedir ki $s = 1$ olması özel durumunda ikinci anlamda $s-$konvekslik daha önceden verilen stokastik süreçlerdeki genel konveksliğe indirgenir (Set ve ark., 2014).

Teorem 4.2.14 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci ikinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde her $u, v \in I, \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ için

$$X(\alpha u + \beta v, .) \leq \alpha^s X(u, .) + \beta^s X(v, .)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $X\,(0,\ \cdot) = 0$ olmasıdır (Set ve ark., 2014).

Teorem 4.2.15 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci ikinci anlamda $s-$konveks olsun. Bu takdirde için $u, v \in I$, $s \in (0,1)$ olmak üzere

$$2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{s+1} \tag{4.31}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Set ve ark., 2014).

Tanım 4.2.8 (Harmonik−Konveks Stokastik Süreç) $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bir aralık olmak üzere, eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v},.\right) \leq \lambda X(v,.) + (1\ -\ \lambda)X\,(u,\cdot) \tag{4.32}$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa, bu takdirde $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine harmonik konveks stokastik süreç adı verilir (Okur ve ark., 2018).

Teorem 4.2.16 $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ bir aralık olmak üzere $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci bir harmonik konveks stokastik süreç ve $u, v \in I, u < v$ olsun. Eğer $X \in L[a, b]$ ise bu takdirde

$$X\left(\frac{2uv}{u+v},.\right) \leq \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,.)}{t^2}dt \leq \frac{X(u,.)+X\ v,\cdot)}{2}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Okur ve ark., 2018).

4.3. Ostrowski Eşitsizliği

Bu kısımda işe stokastik süreçler için Ostrowski eşitsizliğini ispatlayarak başlayalım.

Teorem 4.3.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ **,** I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç olsun Ayrıca $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere X' süreci $[a, b]$ üzerinde ortalama kare integrallenebilir ve X' sınırlı yani, $\|X'\|_\infty := sup|X'(t,\cdot)| < \infty$ olsun. Eğer X süreci I üzerinde konkav ise, bu takdirde $\forall x \in I$ için aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \|X'\|_\infty(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(t_0-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right] \tag{4.33}$$

İspat: $X(t,\cdot)$ süreci I üzerinde ortalama-kare türevlenebilir konkav olduğundan $\forall t, y \in I$ için

$$\frac{X(t_0,\cdot)-X(t,\cdot)}{t_0-t} \leq X'(t,\cdot)$$

ve dolayısıyla

$$X(t_0,\cdot) \leq X(t,\cdot) + (t-t_0)X'(t,\cdot)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafından $[a,b]$ aralığında u ya göre integrasyon alınırsa,

$$(b-a)X(t_0,\cdot) \leq \int_a^b X(u,\cdot)\,du + \int_a^b (u-t_0)\,X'(u,\cdot)du$$

veya buna denk olarak

$$X(t_0,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (u-t_0)\,X'(u,\cdot)du$$

eşitsizliği elde edilir. X' süreci sınırlı olduğundan

$$\left|X(t_0,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b X'(u,\cdot)(u-t_0)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |X'(u,\cdot)|\,|u-t_0|du$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\sup_{u\in(a,b)}|X'(u,\cdot)|\int_a^b (u-t_0)dt$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\|X'\|_\infty\left[\int_0^{t_0}(t_0-u)\,du + \int_{t_0}^b (u-t_0)du\right]$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\|X'\|_\infty\left[\frac{1}{2}(t_0-a)^2 + \frac{1}{2}(b-t_0)^2\right]$$

$$= \|X'\|_\infty(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(t_0-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlanmış olur.

Bir X stokastik sürecinin ortalama-kare integralleri ile birinci türevleri arasındaki ağırlıklı farkı veren bir diğer Ostrowski tipi eşitsizlik aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.3.2 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I üzerinde iki kez ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Ayrıca X ve X' süreçlerinin (a,b) de konkav olduğunu varsayalım. Bu takdirde eğer

$$\|X'\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X'(t,\cdot)| < \infty \text{ ve } \|X''\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X''(t,\cdot)| < \infty$$

ise aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde gerçekleşir:

$$\left|X'(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right|$$

$$+\|X'\|_\infty \left[\frac{(t_0-a)^2+(b-t_0)^2}{2(b-a)}\right] + \|X''\|_\infty \left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right], \tag{4.34}$$

burada $t_0, t \in (a,b)$ dir (Materano ve Ark., 2016).

İspat: $X, [a,b]$ de konkav ve $X', (a,b)\ de$ konkav olduğundan her $s, u \in (a,b)$ için

$$X(t_0,\cdot) \leq X(u,\cdot) + (t_0 - u)X'(u,\cdot) \tag{4.35}$$

ve

$$X'(t,\cdot) \leq X'(s,\cdot) + (t-s)X''(s,\cdot) \tag{4.36}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.35)' in her iki tarafının $[a,b]$ aralığında u ya göre ve (4.36)' nın her iki tarafının $[a,b]$ aralığında s ye göre integralleri alınırsa sırasıyla

$$(b-a)X(t_0,\cdot) \leq \int_a^b X(u,\cdot)\,du + \int_a^b (t_0-u)\,X'(u,\cdot)du \tag{4.37}$$

ve

$$(b-a)X'(t,\cdot) \leq \int_a^b X'(s,\cdot)\,ds + \int_a^b (t-s)\,X''(s,\cdot)ds \tag{4.38}$$

olduğu görülür. (4.37) ve (4.38) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$(b-a)X'(t,\cdot) - \int_a^b X(u,\cdot)\,du$$

$$\leq X(b,\cdot) - X(a,\cdot) - (b-a)X(t_o,\cdot)$$

$$+\int_a^b (t_0-u)\,X'(u,\cdot)du + \int_a^b (t-s)\,X''(s,\cdot)ds \tag{4.39}$$

bulunur. Böylelikle $\|X'\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X'(t,\cdot)| < \infty$ ve $\|X''\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X''(t,\cdot)| < \infty$ olup her $t, t_0 \in (a,b)$ için

$$\left|X'(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right|$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_a^b |t_0-u|\,|X'(u,\cdot)|du + \frac{1}{b-a}\int_a^b |t-s||X''(s,\cdot)|\,ds$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right| + \frac{\|X'\|_\infty}{b-a}\int_a^b |t_0 - u|\,du + \frac{\|X''\|_\infty}{b-a}\int_a^b |t-s|\,ds$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right| + \|X'\|_\infty \left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right] + \|X''\|_\infty \left[\frac{(t_0-a)^2+(b-t_0)^2}{2(b-a)}\right]$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlanır.

Hatırlatma 4.3.1 (4.34) eşitsizliğinde $t, t_0 \to b^-$ iken

$$\left|X(b,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(b,\cdot)\right| + \frac{(b-a)}{2}\left[\|X'\|_\infty + \|X''\|_\infty\right] \tag{4.40}$$

ve benzer şekilde $t, t_0 \to a^+$ iken

$$\left|X'(a,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(a,\cdot)\right| + \frac{(b-a)}{2}\left[\|X'\|_\infty + \|X''\|_\infty\right] \tag{4.41}$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca; $t = t_0 = \frac{a+b}{2}$ için,

$$\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| + \frac{(b-a)}{4}\left[\|X'\|_\infty + \|X''\|_\infty\right] \tag{4.42}$$

bulunur. Aşağıdaki sonuçta, birinci türev için bir hata tahmini önerilmektedir.

Teorem 4.3.3 Teorem 4.3.2' deki varsayım dikkate alınarak, her $t \in (a,b)$ için aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X'(t,\cdot) - \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\right| \leq \|X'\|_\infty \frac{(b-a)^2}{3} + \|X''\|_\infty \left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right] \tag{4.43}$$

İspat: (4.39) eşitsizliğinin her iki tarafının $[a,b]$ üzerinde t_0 'a göre integralleri alınırsa

$$(b-a)^2 X'(t,\cdot) - (b-a)\int_a^b X(u,\cdot)\,du$$

$$\leq (b-a)[X(b,\cdot) - X(a,\cdot)] - (b-a)\int_a^b X(t_0,\cdot)dt_0$$

$$+ \int_a^b \int_a^b (t_0 - u)X'(u,\cdot)\,du dt_0 + (b-a)\int_a^b (t-s)\,X''(s,\cdot)ds$$

ve dolayısıyla

$$X'(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)\,du$$

$$\leq \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t_0,\cdot)dt_0$$

$$-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (t_0-u)X'(u,\cdot)\,dudt_0 + \frac{1}{b-a}\int_a^b (t-s)\,X''(s,\cdot)ds$$

yazılabilir ki buradan da

$$X'(t,\cdot) - \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (t-s)\,X''(s,\cdot)ds$$

$$-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (t_0-u)X'(u,\cdot)\,dudt_0$$

olduğu görülür. Öte yandan $X' ve\ X''$ süreçleri sınırlı olduğundan her $t \in (a,b)$ için

$$\left|X'(t,\cdot) - \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |t-s|\,|X''(s,\cdot)|ds + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |t_0-u||X'(u,\cdot)|\,dudt_0$$

$$\leq \frac{\|X''\|_\infty}{b-a}\int_a^b |t-s|ds + \frac{\|X'\|_\infty}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |t_0-u|\,dudt_0$$

$$\leq \|X''\|_\infty\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right] + \|X'\|_\infty\int_a^b \frac{(t_0-a)^2+(b-t_0)^2}{2(b-a)}dt_0$$

$$= \|X''\|_\infty\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right] + \|X'\|_\infty\frac{(b-a)^2}{3}$$

eşitsizliği sağlanmış olur.

Hatırlatma 4.3.2 Eğer (4.43) eşitsizliğinde $t = b$ seçilirse

$$\left|X'(b,\cdot) - \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\right| \leq \|X'\|_\infty\frac{(b-a)^2}{3} + \|X''\|_\infty\frac{(b-a)}{2}$$

ve $t = \frac{b+a}{2}$ seçilirse

$$\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a}\right| \leq \|X'\|_\infty\frac{(b-a)^2}{3} + \|X''\|_\infty\frac{(b-a)}{4}$$

olduğu görülür. Teorem 4.3.2 nin ispatındaki aynı tekniği kullanarak (4.34) eşitsizliğini $n-$ kez ortalama-kare türevlenebilir stokastik süreçler için aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

Sonuç 4.3.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, süreci I da $n-$ kez ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve $a,b \in I$, $a < b$ olsun. Ayrıca X ve $X^{(n-1)}$, $n \geq 2$, süreçlerinin

(a,b) aralığında için konkav stokastik süreç olduğunu varsayalım. Bu takdirde eğer $\|X'\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X'(t,\cdot)| < \infty$ ve $\|X^{(n)}\|_\infty = \sup_{t\in(a,b)} |X^{(n)}(t,\cdot)| < \infty$ ise $t, t_0 \in (a,b)$ ve $n \geq 2$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X^{(n-1)}(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)\,du\right|$$

$$\leq \left|\frac{X^{(n-2)}(b,\cdot) - X^{(n-2)}(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right| +$$

$$+\|X'\|_\infty \left[\frac{(t_0-a)^2 + (b-t_0)^2}{2(b-a)}\right] + \|X^{(n)}\|_\infty \left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right].$$

İspat: X süreci $[a,b]$ araluığında konkav olduğundan ve $X^{(n-1)}$ süreci de (a,b) de konkav olduğundan her $s,t \in (a,b)$ için

$$X(t_0,\cdot) \leq X(u,\cdot) + (t_0 - u)X'(u,\cdot) \tag{4.44}$$

ve

$$X^{(n-1)}(t,\cdot) \leq X^{(n-1)}(s,\cdot) + (t-s)X^{(n)}(s,\cdot) \tag{4.45}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.44) ve (4.45) eşitsizliklerinin her iki yanının sırasıyla u ve s ye göre $[a,b]$ aralığında integralleri alınırsa

$$(b-a)X(t_0,\cdot) \leq \int_a^b X(u,\cdot)\,du + \int_a^b (t_0-u)\,X'(u,\cdot)du \tag{4.46}$$

ve

$$(b-a)X^{(n-1)}(t,\cdot) \leq \int_a^b X^{(n-1)}(s,\cdot)ds + \int_a^b (t-s)\,X^{(n)}(s,\cdot)ds \tag{4.47}$$

olduğu görülür. (4.46) ve (4.47) eşitsizliklerinden

$$(b-a)X^{(n-1)}(t,\cdot) - \int_a^b X(u,\cdot)\,du \leq X^{(n-2)}(b,\cdot) - X^{(n-2)}(a,\cdot)$$

$$-(b-a)X(t_0,\cdot) + \int_a^b (t_0-u)\,X'(u,\cdot)du + \int_a^b (t-s)\,X^{(n)}(s,\cdot)ds$$

ve dolayısıyla da $\forall t, t_0 \in (a,b)$ için

$$\left|X^{(n-1)}(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \left|\frac{X^{(n-2)}(b,\cdot) - X^{(n-2)}(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right|$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_a^b |t_0-u|\,|X'(u,\cdot)|du + \frac{1}{b-a}\int_a^b |t-s|\left|X^{(n)}(s,\cdot)\right| ds$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right| + \frac{\|X'\|_\infty}{b-a}\int_a^b |t_0 - u|\,du + \frac{\|X^{(n)}\|_\infty}{b-a}\int_a^b |t-s|ds$$

$$\leq \left|\frac{X(b,\cdot)-X(a,\cdot)}{b-a} - X(t_0,\cdot)\right| + \|X'\|_\infty \left[\frac{(t_0-a)^2+(b-t_0)^2}{2(b-a)}\right] + \left\|X^{(n)}\right\|_\infty \left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right]$$

eşitsizliği sağlanır ki bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç iki stokastik sürecin çarpımını içeren bir Ostrowski eşitsizliği vermektedir.

Teorem 4.3.4 $X, Y: I \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ süreçleri I da iki sınırlı ortalama-kare türevlenebilir stokastik süreç, X' ve Y' süreçleri ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I,\ a < b$ olmak üzere $X'Y'$ türevler çarpımı sınırlı olsun. Bu takdirde eğer X stokastik süreci konkav ve $M = \max_{t\in(a,b)}\{|X(t,\cdot)|, |X'(t,\cdot)|, |Y(t,\cdot)|, |Y'(t,\cdot)|\}$ ise $t, s, u \in [a, b]$ olmak üzere

$$\left|\int_a^b X(t,\cdot)Y(t,\cdot)dt - (b-a)X(u,\cdot)Y(s,\cdot)\right|$$

$$\leq M\left[\frac{(u-a)^2+(b-u)^2}{2} + \frac{(s-a)^2+(b-s)}{2} + \frac{b^3-a^3}{3} + \frac{b^2-a^2}{2}(u+s)\right.$$

$$\left. +us(b-a) + \begin{matrix} \frac{(u-s)^3}{3}, s < u \\ \frac{(s-u)^3}{3}, u \leq s \end{matrix}\right] \tag{4.48}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016).

İspat: X ve Y süreçleri I aralığında konkav stokastik süreç olduğundan $\forall t, s, u \in (a, b)$ için

$$X(t,\cdot) \leq X(u,\cdot) + (t-u)X'(u,\cdot)$$

ve

$$Y(t,\cdot) \leq Y(s,\cdot) + (t-s)Y'(s,\cdot)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikleri taraf tarafa çarparak

$$X(t,\cdot)Y(t,\cdot) \leq [X(u,\cdot) + (t-u)X'(u,\cdot)][Y(s,\cdot) + (t-s)Y'(s,\cdot)]$$

$$= X(u,\cdot)Y(s,\cdot) + (t-s)Y'(s,\cdot)X(u,\cdot)$$

$$+(t-u)X'(u,\cdot)Y(s,\cdot) + (t-u)(t-s)X'(u,\cdot)Y'(s,\cdot)$$

olduğu görülür. Eşitsizliğin her iki tarafının t ye göre $[a,b]$ aralığında integralleri alınırsa

$$\int_a^b X(t,\cdot)\,Y(t,\cdot)dt \leq (b-a)X(u,\cdot)Y(s,\cdot) + X'(u,\cdot)Y(s,\cdot)\int_a^b (t-u)\,dt$$

$$+X(u,\cdot)Y'(s,\cdot)\int_a^b (t-s)dt + X'(u,\cdot)Y'(s,\cdot)\int_a^b (t-u)\,(t-s)dt$$

ya da daha iyisi

$$\int_a^b X(t,\cdot)\,Y(t,\cdot)dt - (b-a)X(u,\cdot)Y(s,\cdot)$$

$$\leq X'(u,\cdot)Y(s,\cdot)\int_a^b (t-u)\,dt$$

$$+X(u,\cdot)Y'(s,\cdot)\int_a^b (t-s)dt + X'(u,\cdot)Y'(s,\cdot)\int_a^b (t-u)\,(t-s)dt$$

elde edilir. Böylece

$$\left|\int_a^b X(t,\cdot)Y(t,\cdot)dt - (b-a)X(u,\cdot)Y(s,\cdot)\right|$$

$$\leq M\left[\int_a^b |t-u|dt + \int_a^b |t-s|dt + \int_a^b |t-u||t-s|dt\right]$$

$$= M\left[\frac{(u-a)^2+(b-u)^2}{2} + \frac{(s-a)^2-(b-s)^2}{2} + \frac{u^3-s^3}{3} - 2\left(\begin{cases}0, & s \leq u\\ 1, & u \leq s\end{cases}\right)us^2\right.$$

$$+\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{b^2-a^2}{2}u - \frac{b^2-a^2}{2}s - u^2s + us^2 + usb - usa$$

$$\left.+2\left(\begin{cases}0, s < u\\ 1, u \leq s\end{cases}\right)u^2s - \frac{2}{3}\left(\begin{cases}0, s < u\\ 1, u \leq s\end{cases}\right)u^3 + \frac{2}{3}\left(\begin{cases}0, s < u\\ 1, u \leq s\end{cases}\right)s^3\right]$$

$$= M\left[\frac{(u-a)^2+(b-u)^2}{2} + \frac{(s-a)^2+(b-s)^2}{2} + \frac{b^3-a^3}{3}\right.$$

$$\left.-\frac{b^2-a^2}{2}(u+s) + us(b-a) + \begin{cases}\frac{(u-s)^3}{3}, s < u\\ \frac{(s-u)^3}{3}, u \leq s\end{cases}\right]$$

olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

4.4 Konveks Stokastik Süreçler için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Ostrowski tipine ilişkin bazı eşitsizlikleri ikinci anlamda konveks stokastik süreçler yoluyla sunacağız. Bunun için aşağıdaki Lemma ‘yı kullanmalıyız.

Lemma 4.4.1 $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç,$a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer X' ortalama kare integrallenebilir ise, bu takdirde her $y \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik hemen her yerde doğrudur (Materano ve Ark., 2016):

$$X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du = (b-a)\int_0^1 p(y)\, X'(ya + (1-y)b,\cdot)dy$$

burada $\forall t \in [a,b]$ için

$$p(y) = \begin{cases} y, & y \in \left[0, \dfrac{b-t}{b-a}\right] \\ y-1, & y \in \left(\dfrac{b-t}{b-a}, 1\right] \end{cases}$$

dir.

İspat: $\beta = \frac{b-t}{b-a}$ dikkate alınarak kısmi integrali alınırsa

$$I = \int_0^1 p(y)\, X'(ya + (1-y)b,\cdot)dy$$

$$= \int_0^\beta yX'(ya + (1-y)b,\cdot)\, dy + \int_\beta^1 (1-y)\, X'(ya + (1-y)b,\cdot)dy$$

$$= y\frac{X(ya+(1-y)b,\cdot)}{b-a}\Big|_0^\beta - \int_0^\beta \frac{X(ya+(1-y)b,\cdot)}{a-b}dy$$

$$+(1-y)\frac{X(ya+(1-y)b,\cdot)}{b-a}\Big|_\beta^1 - \int_\beta^1 \frac{X(ya+(1-y)b,\cdot)}{a-b}dy$$

$$= \frac{b-t}{(b-a)^2}X(t,\cdot) - \int_0^\beta \frac{X(ya+(1-y)b,\cdot)}{a-b}dy$$

$$+\frac{y-a}{(b-a)^2}X(y,\cdot) - \int_\beta^1 \frac{X(ya+(1-y)b,\cdot)}{a-b}dy$$

$$= \frac{1}{b-a}X(t,\cdot) - \int_0^1 \frac{X(ya+(1-y)b,\cdot)}{a-b}dy$$

$$= \frac{1}{b-a}X(t,\cdot) - \int_a^b X(u,\cdot)\, du$$

olduğu görülür. Bu durumda yukardaki integral $(b-a)$ ile çarpılarak istenen sonuç sağlanır.

Birinci türevinin konveks olması durumunda Ostrowski eşitsizliğinin ispatı ile devam edeceğiz.

Teorem 4.4.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir stokastik süreç, X' ortalama kare integrallenebilir, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|X'|$, $[a, b]$'de konveks ise her $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik hemen her yerde gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016).

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{6}\left[\left(4\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^3 - 3\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2 + 1\right)|X'(a,\cdot)|\right.$$
$$\left. + \left(9\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2 - 4\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^3 - 6\left(\frac{b-t}{b-a}\right) + 2\right)|X'(b,\cdot)|\right]. \tag{4.49}$$

İspat: Lemma 4.4.1 deki eşitliğe mutlak değer uygulayarak, üçgen eşitsizliğini kullanırarak $|X'|$ in konveksliği ve $\beta = \frac{b-t}{b-a}$ eşitliğinden

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\leq (b-a)\int_0^\beta y|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|\,dy$$
$$+(b-a)\int_\beta^1 (1-y)\,|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|dy$$
$$\leq (b-a)\int_0^\beta y[y|X'(a,\cdot)| + (1-y)|X'(b,\cdot)|]\,dy$$
$$+(b-a)\int_\beta^1 (1-y)\,[y|X'(a,\cdot)| + (1-y)|X'(b,\cdot)|]dy$$
$$= (b-a)\left[|X'(a,\cdot)|\frac{1}{3}\beta^3 + |X'(b,\cdot)|\frac{1}{2}\beta^2 - |X'(b,\cdot)|\frac{1}{3}\beta^3 + |X'(a,\cdot)|\frac{1}{6}\right.$$
$$\left. -|X'(a,\cdot)|\frac{1}{2}\beta^2 + |X'(a,\cdot)|\frac{1}{3}\beta^3 + |X'(b,\cdot)|\frac{1}{3}(1 - 3\beta + 3\beta^2 - \beta^3)\right]$$
$$= (b-a)\left[\frac{2}{3}\beta^3|X'(a,\cdot)| - \frac{1}{2}\beta^2|X(a,\cdot)| + \frac{1}{6}|X'(a,\cdot)|\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}|X'(b,\cdot)| - \beta|X'(b,\cdot)| + \frac{3}{2}\beta^2|X'(b,\cdot)| - \frac{2}{3}\beta^3|X'(b,\cdot)|\right]$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\leq (b-a)\left[\frac{2}{3}\beta^3 - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{6}\right]|X(a,\cdot)| + (b-a)\left[\frac{1}{3} - \beta + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{2}{3}\beta^3\right]|X'(b,\cdot)|$$

ve buradan da

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{6}\left[\left(4\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^3-3\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2+1\right)|X'(a,\cdot)|\right.$$

$$\left.+\left(9\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2-4\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^3-6\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+2\right)|X'(b,\cdot)|\right].$$

olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Türevleri sınırlı olan stokastik süreçler için Ostrowski tipi eşitsizlikleri aşağıdaki gibi çıkarabiliriz:

Sonuç 4.4.1 Teorem 4.4.1 in koşullarına ek olarak, eğer $|X'(t,\cdot)| \leq M,\ \ M>0$ ise bu takdirde

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq M(b-a)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2-\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+\frac{1}{2}\right]$$

eşitsizliği daima gerçeklenir. Burada $\frac{1}{2}$ sabiti kendinden daha küçük bir sabitle değiştirilemez bu anlamda mümkün olanın en iyisidir (Materano ve Ark., 2016).

Birinci türevlerin mutlak değerinin kuvvetlerine karşılık gelen ifadeler aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 4.4.2 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R},\ I$ da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama kare integrallenebilir, $a, b \in I,\ a<b$ olsun. Eğer $|X'|^{p/(p-1)},\ [a,b]$'de konveks ise $\forall t \in [a,b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{2^{-1/q}}{[(b-a)(p+1)]^{1/p}}\left[(b-t)^{\frac{p+1}{p}}\left(|X'(t,\cdot)|^q+|X(b,\cdot)|^q\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+(t-a)^{\frac{p+1}{p}}\left(|X'(a,\cdot)|^q+|X'(t,\cdot)|^q\right)^{1/q}\right]. \tag{4.50}$$

İspat: Kabul edelim ki $p>1$ olsun. Lemma 4.4.1 den Hölder eşitsizliğini kullanarak, $\beta=\frac{b-t}{b-a}$ alırsak

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^\beta y|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1|y-1|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^\beta y^p dy\right)^{1/p}\left(\int_0^\beta|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_\beta^1(1-y)^p dy\right)^{1/p}\left(\int_\beta^1|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

olduğu görülür. $|X'|$ konveks olduğundan ve Hermite–Hadamard eşitsizliğinden;

$$\int_0^\beta|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|\,dy \leq \frac{|X\prime(b,\cdot)|+|X\prime(t,\cdot)|}{2}$$

ve

$$\int_\beta^1|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|\,dy \leq \frac{|X\prime(b,\cdot)|+|X\prime(t,\cdot)|}{2}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu nedenle, eğer $\gamma=\frac{t-a}{b-a}$ ise

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\beta^{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{|X\prime(b,\cdot)|^q+|X\prime(t,\cdot)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\gamma^{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{|X\prime(t,\cdot)|^q+|X\prime(a,\cdot)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\frac{(b-a)^p}{p+1}\beta^{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{|X\prime(b,\cdot)|^q+|X\prime(t,\cdot)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

$$+\left(\frac{(b-a)^p}{p+1}\gamma^{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{|X\prime(t,\cdot)|^q+|X\prime(a,\cdot)|^q}{2}\right)^{1/q}$$

$$=\frac{1}{2^{1/q}}\left[\left(\frac{1}{p+1}\frac{(b-t)^{p+1}}{(b-a)}\right)^{1/p}(|X'(b,\cdot)|^q+|X'(t,\cdot)|^q)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{p+1}\frac{(t-a)^{p+1}}{(b-a)}\right)^{1/p}(|X'(t,\cdot)|^q+|X'(a,\cdot)|^q)^{1/q}\right]$$

$$=\frac{2^{-1/q}}{[(p+q)(b-a)]^{1/p}}\left[(b-t)^{\frac{p+1}{p}}(|X'(b,\cdot)|^q+|X'(t,\cdot)|^q)^{1/q}\right.$$

$$+(t-a)^{\frac{p+1}{p}}\left(|X'(a,\cdot)|^q+|X'(t,\cdot)|^q\right)^{1/q}\Bigg]$$

olduğu görülür, burada $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ dir.

Sonuç 4.4.2 Teorem 4.4.2 de verilenlere ek olarak eğer $M>0$ için $|X'(t,\cdot)|\leq M$ ise bu takdirde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|\leq M\,\frac{(b-t)^{\frac{p+1}{p}}+(t-a)^{\frac{p+1}{p}}}{(p+1)^{1/p}(b-a)^{1/p}}$$

eşitsizliği her yerde sağlanır (Materano ve Ark., 2016).

Sonuç 4.4.3 Teorem 4.4.2 de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ seçilirse bu durumda

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{4(p+1)^{1/p}}\left[\left(\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q+|X'(b,\cdot)|^q\right)^{1/q}+\left(|X'(a,\cdot)|^q+\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q}\right]$$

eşitsizliği her zaman yazılabilir (Materano ve Ark., 2016).

Teorem 4.4.3 $X\colon I\times\Omega\to\mathbb{R}$, I da ortalama kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' süreci ortalama-kare integrallenebilir, $a,b\in I$, $a<b$ olsun. .Eğer $|X'|^{p/(p-1)}$ süreci $[a,b]$ de konkav ise her $t\in[a,b]$ ve $p>1$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)}{(p+1)^{1/p}}\left[\left(\frac{(b-t)}{b-a}\right)^{(p+1)/p}\left|X'\left(\frac{t+b}{2},\cdot\right)\right|(17)+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{(p+1)/p}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|\right]\quad(4.51)$$

İspat: Farz edelim ki $p>1$ olsun. Teorem 4.4.2 de olduğu gibi hemen her yerde

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq(b-a)\int_0^\beta y|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1|y-1||X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\beta} y^p dy\right)^{1/p}\left(\int_0^{\beta}|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\beta}^{1}(1-y)^p\, dy\right)^{1/p}\left(\int_{\beta}^{1}|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

yazılabilir. $|X'|^q$ $[a,b]$'de konkav olduğundan Hermit–Hadamard eşitsizliğine göre

$$\int_0^{\beta}|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q\, dy \leq \left|X'\left(\frac{b+t}{2},\cdot\right)\right|^q$$

ve

$$\int_{\beta}^{1}|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy \leq \left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)^q\right|$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\beta^{p+1}\right)^{1/p}\left(\left|X'\left(\frac{t+b}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\gamma^{p+1}\right)^{1/p}\left(\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-a)}{(p+1)^{1/p}}\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{(p+1)/p}\left|X'\left(\frac{t+b}{2},\cdot\right)\right|+\frac{(b-a)}{(p+1)^{1/p}}\gamma^{(p+1)/p}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|$$

$$=\frac{(b-a)}{(p+1)^{1/p}}\left[\beta^{(p+1)/p}\left|X'\left(\frac{t+b}{2},\cdot\right)\right|+\gamma^{(p+1)/p}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|\right]$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.4 Teorem 4.4.3 de $t=\frac{a+b}{2}$ seçilirse, her $y \in [a,b]$ ve $p>1$ için

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-a)}{\left(2^{p+1}(p+1)\right)^{1/p}}\left[\left|X'\left(\frac{a+3b}{4},\cdot\right)\right|+\left|X'\left(\frac{3a+b}{4},\cdot\right)\right|\right]$$

dir (Materano ve Ark., 2016).

Aşağıdaki sonuç yukarıdaki eşitsizliği geliştirmektedir.

Teorem 4.4.4 $X: I\times\Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama kare integrallenebilir, $a,b \in I$, $a<b$ olsun. Eğer. $|X'|^{p(p-1)}$, $[a,b\,]$'de konkav ise $\forall t \in [a,b]$ ve $p>1$ için

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(b-t)^2}{(b-a)(p+1)^{1/p}}\left|X'\left(\frac{t+b}{2},\cdot\right)\right| + \frac{(t-a)^2}{(b-a)(p+1)^{1/p}}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right| \tag{4.52}$$

dir (Materano ve Ark., 2016).

İspat: $p > 1$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.4.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_a^\beta t_0|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy + (b-a)\int_\beta^1|y-1|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq \left(\int_0^\beta y^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_0^\beta|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_\beta^1(1-y)^p\right)^{1/p}\left(\int_\beta^1|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

yazılabilir. $|X'|^q$ süreci $[a,b]$'de konkav olduğundan ve Jensen integral eşitsizliğinden

$$\int_0^\beta|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy = \int_0^\beta 1|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy$$

$$\leq \left(\int_0^\beta vdy\right)\left|X'\left(\frac{1}{\int_0^\beta vdy}\int_0^\beta(ya+(1-y)b,\cdot)\,dy\right)\right|^q$$

$$= \frac{b-t}{b-a}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|^q$$

ve

$$\int_\beta^1|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy = \int_\beta^1 1|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy$$

$$\leq \left(\int_\beta^1 vdy\right)\left|X'\left(\frac{1}{\int_\beta^1 vdy}\int_\beta^1(ya+(1-y)b,\cdot)\,dy\right)\right|^q$$

$$= \frac{t-a}{b-a}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|^q$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-t)^2}{(b-a)(p+1)^{1/p}}\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right| + \frac{(t-a)^2}{(b-a)(p+1)^{1/p}}\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|$$

olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç 4.4.5 Teorem 4.4.4 de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ seçilirse $\forall t \in [a,b]$ ve $p > 1$ için

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-a)}{4(p+1)^{1/p}}\left[\left|X'\left(\frac{a+3b}{4},\cdot\right)\right| + \left|X'\left(\frac{3a+b}{4},\cdot\right)\right|\right]$$

dir (Materano ve Ark., 2016).

İlk türevin mutlak değeri için farklı bir yaklaşım aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Teorem 4.4.5 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $q \geq 1$ olmak üzere $|X'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $|X'(t)| \leq M$, $t \in [a,b]$ ise bu takdirde $\forall t \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right)^{1-1/q}\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2} - \frac{1}{3}\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right)|X'(b,\cdot)|^q + \frac{1}{3}\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}|X'(a,\cdot)|^q\right\}^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\frac{1}{2} - \frac{(b-t)}{(b-a)} + \frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right)^{1-1/q}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{3}\left(1 - \frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right) - \left(1 - \frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right) + \left(1 - \frac{(b-t)}{(b-a)}\right)\right]|X'(b,\cdot)|^q + \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right)\right]|X'(a,\cdot)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{4.53}$$

İspat: $q \geq 1$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.4.1 ve Power-mean eşitsizliğinden

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^\beta y|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1 |y-1||X'(ya + (1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^\beta y dy\right)^{1-1/q}\left(\int_0^\beta y|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(b-a)\left(\int_\beta^1 (1-y)dy\right)^{1-1/q}\left(\int_\beta^1 (1-y)|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğu görülür. $|X'|^q$ konveks olduğundan

$$\int_0^\beta y|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|^q\,dy$$

$$\leq \int_0^{\beta} y[y|X'(a,\cdot)|^q + (1-y)|X'(b,\cdot)|^q]\,dy$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2} - \frac{1}{3}\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right)|X'(b,\cdot)|^q + \frac{1}{3}\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}|X'(a,\cdot)|^q$$

ve

$$\int_{\beta}^{1}(1-y)\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy$$

$$\leq \int_{\beta}^{1}(1-y)[y|X'(a,\cdot)|^q + (1-y)|X'(b,\cdot)|^q]\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right) - \left(1-\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right) + \left(1-\frac{(b-x)}{(b-a)}\right)\right]|X'(b,\cdot)|^q$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right) - \frac{1}{3}\left(1-\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right)\right]|X'(a,\cdot)|^q$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right)^{1-1/q}\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2} - \frac{1}{3}\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right)|X'(b,\cdot)|^q + \frac{1}{3}\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}|X'(a,\cdot)|^q\right\}^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\frac{1}{2} - \frac{(b-t)}{(b-a)} + \frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right)^{1-1/q}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right) - \left(1-\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right) + \left(1-\frac{(b-t)}{(b-a)}\right)\right]|X'(b,\cdot)|^q + \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{(b-t)^2}{(b-a)^2}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3}\left(1-\frac{(b-t)^3}{(b-a)^3}\right)\right]|X'(a,\cdot)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.6 Teorem 4.45 te eğer $t = \frac{a+b}{2}$ seçilirse bu takdirde

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\frac{8^{\frac{1}{q}}}{192}\left[(|X'(a,\cdot)|^q + 2|X'(b,\cdot)|^q)^{\frac{1}{q}} + (2|X'(a,\cdot)|^q + |X'(b,\cdot)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Örneğin $q = 1$ ise

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-a)}{8}(|X'(a,\cdot)| + |X'(b,\cdot)|)$$

olacaktır (Materano ve Ark., 2016).

Teorem 4.4.6 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I$, ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'|^q$, $q \geq 1$ süreci $[a, b]$'de konkav ise $\forall y \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman yazılabilir:

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq 2^{-1/q}(b-a)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2 \left|X'\left(\frac{b+2t}{3},\cdot\right)\right| + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^2 \left|X'\left(\frac{a+2t}{3},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.54}$$

İspat: İlk olarak $|X'|^q$ nun konkavlığından ve Power-mean eşitsizliğinden

$$|X'(\alpha t + (1-\alpha)t_0,\cdot)|^q \geq \alpha|X'(t,\cdot)|^q + (1-\alpha)|X'(t_0,\cdot)|^q$$

olduğunu belirtelim. Bu nedenle

$$|X'(\alpha t + (1-\alpha)t_0,\cdot)| \geq \alpha|X'(t,\cdot)| + (1-\alpha)|X'(t_0,\cdot)|$$

olup, aynı zamanda $|X'|$ de konkav olduğundan

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^\beta y|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1 |y-1|\,|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^\beta ydy\right)^{1-1/q}\left(\int_0^\beta y|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_\beta^1 (1-y)\,dy\right)^{1-1/q}\left(\int_\beta^1 (1-y)\,|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

yazılabilir. Buna göre Lemma 4.4.1, Jensen eşitsizliği ve $\beta = \frac{b-t}{b-a}$, $\gamma = \frac{t-a}{b-a}$ dikkate alınırsa

$$\int_0^\beta y|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|^q\,dy$$

$$\leq \left(\int_0^\beta ydt\right)\left|X'\left(\frac{\int_0^\beta y(ya+(1-y)b)dy}{\int_0^\beta ydy}\right)\right|^q$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2\left|X'\left(\frac{2t+b}{3},\cdot\right)\right|^q$$

ve

$$\int_\beta^1 (1-y)\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dt$$

$$= \int_0^\gamma v\left|X'\big((1-v)a+vb,\cdot\big)\right|^q dv$$

$$\le \left(\int_0^\gamma vdv\right)\left|X'\left(\frac{\int_0^\gamma (v(1-v)a+vb,\cdot)dv}{\int_0^\gamma vdv},\cdot\right)\right|^q$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^2\left|X'\left(\frac{a+2t}{3},\cdot\right)\right|^q$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\le 2^{-1/q}(b-a)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^2\left|X'\left(\frac{b+2t}{2},\cdot\right)\right|+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^2\left|X'\left(\frac{a+2t}{3},\cdot\right)\right|\right]$$

olduğu gösterilmiş olur.

4.5 h- Konveks Stokastik Süreçler için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Bu kısımda birinci türevleri h–konveks olan stokastik süreç için Ostrowski tipi eşitsizlikleri, h–süper-toplamsal ve süper-çarpımsal fonksiyonlar yardımıyla ispatlanacaktır. Bu amaçla birçok çalışmada verilen Ostrowski eşitsizliğini bir kez daha ifade edelim.

I^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir $f\colon I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için eğer $a,b \in I^0$, $a<b$ olmak üzere $f^{'}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde integrallenebilir ve sınırlı ise yani $\|f'\|_\infty := sup_{t\in(a,b)}|f'(t)| < \infty$ ise bu takdirde her $t \in (a,b)$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$\left|f(t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \le \left\|f^{'}\right\|_\infty (b-a)\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(t-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}\right]. \tag{4.55}$$

Bu kısımda, birinci türevinin mutlak değeri üzerine h-konvekslik şartı koyarak, bir X stokastik sürecinin ortalama integralleri ile onun birinci türevi arasındaki mutlak değerce ağırlıklı farkın çeşitli iyileştirmelerini tahmin etmek Tunç (2013) tarafından h-konveks fonksiyonlar için yapılan çalışma h–konveks olan stokastik süreçlere uyarlanacaktır.

Şimdi h-konveks Stokastik süreç için Gonzales ve Ark.,(2016) tarafından verilen tanımı verebiliriz:

Tanım 4.5.1 (Ω, A, P) olasılık uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ keyfi bir fonksiyon ve $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde eğer her $t_1, t_2 \in I$, $\lambda \in (0,1)$ için

$$X\,(\,\lambda t^1 + \,(1-\lambda)\,t^2,\,\cdot) \leq h(\lambda)X(t^1,\cdot) + h(1-\lambda)X(t^2,\cdot) \tag{4.56}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa sürece $h-$konveks stokastik süreç adı verilir. Eğer h fonksiyonu özel olarak özdeşlik fonksiyonu seçilirse bu durumda stokastik $h-$konvekslik tanımı stokastik konvekslik tanımına indirgenmiş olur. $h-$konveks stokastik süreçlerin bazı önemli özellikleri Baraez ve Ark. (2015) tarafından verilmiştir. Eğer (4.56) daki eşitsizlik tersine çevrilirse, stokastik süreç $h-$ konkavdır denir.

Aşağıdaki Lemma da verilen eşitlik bu kısmın temelini oluşturmaktadır.

Lemma 4.5.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, $I°$da ortalama-kare diferansiyellenebilir stokastik süreç olsun. Eğer $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere X' türevi $[a,b]$ üzerinde ortalama kare integrallenebilir ise, bu takdirde $\forall\, x \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitlik yazılır (Gonzales ve Ark., 2016):

$$X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 tX'(tx+(1-t)a,\cdot)dt - \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 tX'(tx+(1-t)b,\cdot)\,dt$$

İspat: Eğer $u = yt + (1-y)a$ ve $w = yt + (1-y)b$ değişken değişimleri yapılırsa kısmi integrasyonla

$$\frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 yX'(yt+(1-y)a,\cdot)\,dy - \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 yX'(yt+(1-y)b,\cdot)dy$$

$$= \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_a^t \frac{(u-a)}{(t-a)}X'(u,\cdot)\frac{du}{(t-a)} - \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_t^b \frac{(b-w)}{(b-t)}X'(w,\cdot)\frac{dw}{(b-t)}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^t (u-a)X'(u,\cdot)du - \frac{1}{b-a}\int_t^b (b-w)\,X'(w,\cdot)dw$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[(t-a)X(t,\cdot) - \int_a^t X(u,\cdot)du\right] + \frac{1}{b-a}\left[(b-t)X(t,\cdot) - \int_t^b X(w,\cdot)dw\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[(t-a)X(t,\cdot) - \int_a^t X(u,\cdot)du + (b-t)X(t,\cdot) - \int_t^b X(w,\cdot)dw\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[X(t,\cdot)(b-a) - \int_a^b X(u,\cdot)du\right]$$

$$= X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)\,du\,,$$

olduğu görülür. Böylelikle ispat tamamlanır.

Şimdi h–convex stokastik süreçler için bazı Ostrowski tipi eşitsizlikleri verebiliriz.

Teorem 4.5.1 $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\alpha$ için $h(\alpha) > \alpha$ olacak şekilde negatif olmayan ve süper –çarpımsal bir fonksiyon ve $a, b \in I, a < b$ için X' türevi $[a, b]$ üzerinde ortalama kare integrallenebilir olmak üzere $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir ortalama-kare stokastik süreç olsun. Eğer $|X'|$ I üzerinde bir h–convex stokastik süreç ise ve her t için $\left|X'(t,\cdot)\right| \le M$ ise, bu takdirde $\forall t \in [a, b]$ için

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{M[(t-a)^2+(b-t)^2]}{b-a}\int_0^1[h(t^2) + h(h-t^2)]\,dt \qquad (4.57)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gonzales ve Ark., 2016).

İspat: Lemma 4.5.1 ve $|X'|$ h–convex olduğundan

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\le \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|\,dy + \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\le \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 y[h(y)|X'(t,\cdot)| + h(1-y)|X'(a,\cdot)|]\,dy$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 y[h(y)|X'(t,\cdot)| + h(1-y)|X'(b,\cdot)|]dy$$

$$\le \frac{M(t-a)^2}{b-a}\int_0^1[yh(y) + yh(1-y)]\,dy + \frac{M(b-t)^2}{b-a}\int_0^1[yh(y) + yh(1-y)]dy$$

$$\le \left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{b-a}\right]\int_0^1\left[\left(h(y)\right)^2 + h(y)h(1-y)\right]dy$$

$$= M\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{b-a}\right]\int_0^1[h(y)^2 + h(y-y^2)]\,dy$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5.1 (4.57) eşitsizliğinde $h(y) = y^s$ alınırsa

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{M\left[(t-a)^2+(b-t)^2\right]}{b-a}\int_0^1 [t^{2s}+t^s(1-t)^s]$$

$$\le \frac{M\left[(t-a)^2+(b-t)^2\right]}{b-a}\left[\frac{1}{2s+1}+\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(2s+2)}\right]$$

$$\le \frac{M\left[(t-a)^2+(b-t)^2\right]}{b-a}\left[\frac{\Gamma(2s+2)+(2s+1)\Gamma(s+1)^2}{2s+\Gamma(2s+2)}\right]$$

$$\le \frac{M\left[(t-a)^2+(b-t)^2\right]}{b-a}\left[\frac{\Gamma(2s+1)+s^2\left(\Gamma(s)\right)^2}{(2s+1)\Gamma(2s+1)}\right]$$

elde edilir, burada Γ Gamma fonksiyonunu göstermektedir (Gonzales ve Ark., 2016).

Teorem 4.5.2 $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her t için $h(t)\ge t$ olacak şekilde negatif olmayan süper toplamsal bir fonksiyon, $X: I\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci ortalama kare diferansiyellenebilir bir stokastik süreç ve $a<b,\ a,b\in I$ olmak üzere X' süreci $[a,b]$ üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|^q$ süreci $[a,b]$ üzerinde h–konveks bir stokastik süreç, $p,q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\forall t\in[a,b]$ için $|X'(t)|\le M$ ise, bu takdirde her $t\in[a,b]$ için

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{Mh^{1/q}(1)}{b-a}\left(\int_0^1 h(y^p)\right)^{1/p}\left[(t-a)^2+(b-t)^2\right] \qquad (4.58)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gonzales ve Ark., 2016).

İspat:$p>1$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.5.1'den ve Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\le \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|dy+\frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\le \frac{(t-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^p\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |X'(ty+(1-y)a,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^p dy\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |X'(ty+(1-y)b,\cdot)|^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliği yazılabilir. $|X'|^q$ süreci h–konveks olduğundan varsayımlarda h–konvekslik özellikleri kullanılırsa

$$\int_0^1 |X'(ty+(1-y)a,\cdot)|^q dy \le \int_0^1\left[h(y)\left|X'(t,\cdot)\right|^q+h(1-y)|X'(a,\cdot)|^q\right]dy$$

$$\le M^q\int_0^1 [h(y)+h(1-y)]dy$$

$$\leq M^q \int_0^1 h(1)\, dt$$

$$= M^q h(1)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 |X'(ty + (1-y)b,\cdot)|^q dy = M^q h(1)$$

ve

$$\int_0^1 y^p \leq \int_0^1 h(y^p) dy$$

olduğu gösterilebilir. Bu nedenle

$$\left| X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a} \int_0^1 X(u,\cdot) du \right|$$

$$\leq M h^{1/q}(1) \frac{(t-a)^2}{b-a} \left(\int_0^1 h(y^p) dy \right)^{1/p} + M h^{1/q}(1) \frac{(b-t)^2}{b-a} \left(\int_0^1 h(y^p) dy \right)^{1/p}$$

$$= \frac{M h^{1/q}(1)}{b-a} \left(\int_0^1 h(y^p) dy \right)^{1/p} [(t-a)^2 + (b-t)^2]$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.2 (4.58) eşitsizliğinde özel olarak $h(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ seçilirse,

$$\left| X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a} \int_a^b X(u,\cdot) du \right| \leq \frac{M}{b-a} \left(\frac{1}{np+1} \right)^{1/p} [(t-a)^2 + (b-t)^2] \tag{4.59}$$

eşitsizliği elde edilir (Gonzales ve Ark., 2016).

Bilindiği gibi, $h-$konveks stokastik süreçler bir konveks stokastik süreçlerin bir genellemesidir (bkz. Baraez ve Ark. (2015)). Bu anlamda, daha önce çalışılan eşitsizliklerle karşılaştırıldığında daha zayıf sonuçlar elde etmek normaldir. Çünkü oradaki eşitsizlikler yukarıda belirtilen sınıflardan daha genel olarak kabul edilmiş ve super–çarpımsal ya da super–toplamsal fonksiyonlar cinsinden dikkate alınmıştır. Bu durumda eşitsizliğin sağ tarafı daha büyük olabilir.

Bir $h-$konveks stokastik süreç için yeni bir yaklaşım aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.5.3 $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her t için $h(t) \geq t$ olacak şekilde negatif olmayan süper çarpımsal bir fonksiyon, $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci I^0 üzerinde ortalama kare diferansiyellenebilir bir stokastik süreç ve $a < b,\ a, b \in I$ olmak üzere X' süreci $[a, b]$ üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|^q$, $q \geq 1$ süreci

$[a,b]$ üzerinde h–konveks bir stokastik süreç ve t için $|X'(t)| \leq M$ ise, bu takdirde $\forall t \in [a,b]$ için

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{\sqrt[q]{2}M}{2(b-a)}[(t-a)^2 + (b-t)^2]\left(\int_0^1 \big(h(y^2) + h(y-y^2)\big)dy\right)^{1/q} \qquad (4.60)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gonzales ve Ark., 2016).

İspat: $q \geq 1$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde Lemma 4.5.1 ve Power-mean eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt + (1-y)a,\cdot)|dt + \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt + (1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 ydy\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 y|X'(yt + (1-y)a,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(\int_0^1 ydy\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 y|,X'(yt + (1-y)b),\cdot|^q\, dy\right)^{1/q}$$

elde edilir. Böylece $|X'|^q$ süreci h–konveks olduğundan

$$\int_0^1 y|X'(yt + (1-y)a,\cdot)|^q dy$$

$$\leq \int_0^1 [yh(y)|X'(t,\cdot)|^q + yh(1-y)|X'(a,\cdot)|^q dy]$$

$$= \int_0^1 yh(y)|X'(t,\cdot)|^q dy + \int_0^1 yh(1-y)\,|X(a,\cdot)|^q dy$$

$$\leq |X'(t,\cdot)|^q \int_0^1 h(y)\,h(y)dy + |X(a,\cdot)|^q \int_0^1 h(y)h(1-y)dy$$

$$\leq M^q \int_0^1 h(y^2)dy + M^q \int_0^1 h(y-y^2)dy$$

$$= M^q\left[\int_0^1 h(y^2)dy + \int_0^1 h(y-y^2)dy\right]$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\int_0^1 y|X'(yt + (1-y)b,\cdot)|^q dy \leq M^q\left[\int_0^1 h(y^2)dy + \int_0^1 h(y-y^2)dy\right]$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\left|X'(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(M^q \int_0^1 h(y^2) + h(y-y^2)\, dy\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(M^q \int_0^1 h(y^2) + (y-y^2)dy\right)^{1/q}$$

$$= M\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 h(y^2) + h(y-y^2)dy\right)^{1/q}\left(\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{(b-a)}\right)$$

$$= M\sqrt[q]{2}\left(\int_0^1 h(y^2) + h(y-y^2)\, dy\right)^{1/q}\left(\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right)$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.3

(i) Yukarıdaki eşitsizliklerde $t = \frac{a+b}{2}$ alarak değişik midpoint-tipi eşitsizlik elde etmek mümkündür.

(ii) Teorem 4.5.3 te eğer

(1) $t = \frac{a+b}{2}$ alınırsa bu takdirde

$$\left|X'(a,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{\sqrt[q]{2}M(b-a)}{4}\left(\int_0^1\left(h(y^2) + h(y-y^2)\right)dy\right)^{\frac{1}{q}},$$

(2) $t = a$ alınırsa bu takdirde

$$\left|X'(a,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{\sqrt[q]{2}M(b-a)}{2}\left(\int_0^1\left(h(y^2) + h(y-y^2)\right)dy\right)^{\frac{1}{q}},$$

(3) $t = b$ alınırsa bu takdirde

$$\left|X'(b,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{\sqrt[q]{2}M(b-a}{2}\left(\int_0^1(h\left(y^{2)} + h(y-y^2)\right)dy\right)^{1/q}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Gonzales ve Ark., 2016).

Aşağıdaki sonuç h-konkav stokastik süreç için geçerlidir.

Teorem 4.5.4 $h: (0,1) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her t için $h(t) \geq t$ olacak şekilde negatif olmayan süper toplamsal bir fonksiyon, $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci I^0 üzerinde ortalama kare diferansiyellenebilir bir stokastik süreç ve $a < b,\ a, b \in I$ olmak üzere

X' süreci $[a,b]$ üzerinde ortalama kare integrallenebilir olsun. Eğer $|X'|^q$, süreci $[a,b]$ üzerinde $h-$konkav bir stokastik süreç ve $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise, bu takdirde $\forall t\in[a,b]$ için

$$\left|X(t,.)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,.)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt[q]{2}(p+1)^{1/p}h^{1/q}\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{(t-a)^2}{b-a}\left|X\left(\frac{a+t}{2},.\right)\right|+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left|X\left(\frac{t+b}{2},.\right)\right|\right]$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gonzales ve Ark., 2016).

İspat: Kabul edelim ki $p>1$olsun. Bu takdirde Lemma 4.5.1 ve Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|dy+\frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^P dy\right)^{1/p}\left(\int_0^1|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^P dy\right)^{1/p}\left(\int_0^1|X'(yt+(1-y)b,\cdot)|^q\right)^{1/q}.$$

oldupu görülebilir. Öte yandan $|X'|^q$ süreci h-konkav olduğundan Baraez ve Ark. (2015) tarafından verilen Teorem kullanılarak

$$\left(\int_0^1|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|^q dy\right)\leq \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\left|X\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|^q$$

ve

$$\left(\int_0^1|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|^q dy\right)\leq \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\left|X\left(\frac{t+b}{2},\cdot\right)\right|^q$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Ayrıca

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_0^1 X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\left(\frac{y^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(\frac{y^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\left|X'\left(\frac{b+t}{2},\cdot\right)\right|^q\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(t-a)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{1/q}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{1/q}\left|X'\left(\frac{b+t}{2},\cdot\right)\right|$$

$$=\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{1/q}\left[\frac{(t-a)^2}{b-a}\left|X'\left(\frac{a+1}{2},\cdot\right)\right|+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left|X'\left(\frac{b+t}{2},\cdot\right)\right|\right]$$

$$=\frac{1}{(p+1)^{1/p}}\frac{1}{\sqrt[q]{2}h^{1/q}\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{(t-a)^2}{b-a}\left|X'\left(\frac{a+t}{2},\cdot\right)\right|+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left|X'\left(\frac{b+t}{2},\cdot\right)\right|\right]$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki sonuçtan yararlanarak türevlerinin mutlak değerleri h-konkav olan skotastik süreç için bir midpoint tipi eşitsizlik aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 4.5.4 Teorem 4.5.4 de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ alınırsa, bu takdirde

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{\sqrt[q]{2^{2q+1}(p+1)^{\frac{1}{p}}h^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2}\right)}}\left[\left|X'\left(\frac{3a+b}{4},\cdot\right)\right|+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left|X'\left(\frac{t+b}{2},\cdot\right)\right|\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Örneğin, eğer $h(y)=y$ alınırsa bu durumda

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)\,du\right|$$
$$\leq\frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left|X'\left(\frac{3a+b}{4},\cdot\right)\right|+\left|X'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right]$$

bulunur, burada $|X'|^q$ süreci $[a,b], p,q>1$ üzerinde bir h-konkav stokastik süreçtir.

4.6 *s*- Konveks Stokastik Süreçler için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Bu kısımda *s*–konveks (*s*–konkav) stokastik süreçler için bazı Ostrowski tipi eşitsizlikler ele alınacaktır.

Lemma 4.6.1 $X: [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir stokastik süreç, X' ortalama kare integrallenebilir, $a,b \in I,\ a < b$ olsun. Eğer $|X'|$ bir ortalama-kare integrallenebilir ise her $y \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$= \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 yX'(yt+(1-y)a,\cdot)\,dy - \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 yX'(yt+(1-y)b,\cdot)\,dy \qquad (4.61)$$

İspat: $u = yt + (1-y)a$ ve $w = yt + (1-y)b$ şeklinde değişken değişimi yapar ve daha sonra da kısmi integral alınırsa

$$\frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 yX'(yt+(1-y)a,\cdot)\,dy - \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 yX'(yt+(1-y)b,\cdot)\,dy$$

$$= \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_a^t \frac{(u-a)}{(t-a)}X'(u,\cdot)\frac{du}{(t-a)} - \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_t^b \frac{(b-w)}{(b-t)}X'(w,\cdot)\frac{dw}{(b-t)}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^t (u-a)\,X'(u,\cdot)du - \frac{1}{b-a}\int_t^b (b-w)\,X'(w,\cdot)dw$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[(t-a)X(t,\cdot) - \int_a^t X(u,\cdot)du\right] + \frac{1}{b-a}\left[(b-t)X(t,\cdot) - \int_t^b X(w,\cdot)dw\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[(t-a)X(t,\cdot) - \int_a^t X(u,\cdot)du + (b-t)X(t,\cdot) - \int_t^b X(w,\cdot)dw\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[X(t,\cdot)(b-a) - \int_a^b X(u,\cdot)du\right]$$

$$= X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)\,du$$

elde edilir ve böylece ispat biter.

Teorem 4.6.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ **,** I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama kare integrallenebilir, $a,b \in I,\ a < b$ olsun. Eğer $|X'|$, keyfi bir $s \in (0,1]$ sabiti için ikinci anlamda s–konveks ve $|X'(t,\cdot)| \le M,\ x \in [a,b]$ ise bu takdirde $t \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{M}{b-a}\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{s+1}\right] \qquad (4.62)$$

İspat: Lemma 4.6.1 ve $|X'|$ sürecinin s–konveks olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|\,dy + \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 t[y^s|X'(t,\cdot)| + (1-y)^s|X'(a,\cdot)|]dy$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 y[y^s|X'(t,\cdot)| + (1-y)^s|X'(b,\cdot)|]\,dy$$

$$= \frac{(t-a)^2}{b-a}|X'(t,\cdot)|\int_0^1 y^{s+1}dy + |X'(a,\cdot)|\int_0^1 y(1-y)^s dy$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}|X'(t,\cdot)|\int_0^1 y^{s+1} + |X'(b,\cdot)|\int_0^1 y(1-y)^s dy$$

$$= \frac{(t-a)^2}{b-a}\left(|X'(t,\cdot)|\frac{1}{s+2} + |X'(a,\cdot)|\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(|X'(t,\cdot)|\frac{1}{s+2} + |X'(b,\cdot)|\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)$$

$$\leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{s+1}\right]$$

yazılır.

Teorem 4.6.2 $X: I\times\Omega\to\mathbb{R},\ I$ da ortalama kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Eğer $|X'|^q$ süreci keyfi bir $s\in(0,1]$ sabiti için $[a,b]\,de$ ikinci anlamda s–konveks, $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $|X'(t,\cdot)|\leq M,\ t\in[a,b]$ ise bu takdirde her $t\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{M}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{1/q}\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{b-a}\right] \tag{4.63}$$

İspat: $p>1$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.6.1 ve Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left|X(t,\cdot)-\frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\int_0^1 t|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|\,dy + \frac{(b-t)^2}{b-a}\int_0^1 t|X'(yt+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |X'(yt+(1-y)a,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |X'(yt+(1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

elde edilir. Öte yandan $|X'|^q$ ikinci anlamda s–konveks ve $|X'(t,\cdot)|\leq M$ olduğundan

$$\int_0^1 |X'(yt+(1-y)a,\cdot)|^q dy \le \int_0^1 [y^s|X'(t,\cdot)|^q + (1-y)^s|X'(a,\cdot)|^q]\,dy$$

$$= |X'(t,\cdot)|^q \int_0^1 y^s dy + |X'(a,\cdot)|^q \int_0^1 (1-y)^s\,dy$$

$$= \frac{|X\prime(t,\cdot)|^q + |X\prime(a,\cdot)|^q}{s+1} \le \frac{2M^q}{s+1}$$

ve

$$\int_0^1 |X'(yt+(1-y)b,\cdot)|^q dy \le \int_0^1 [y^s|X'(t,\cdot)|^q + (1-y)^s|X'(b,\cdot)|^q]\,dy$$

$$= |X'(t,\cdot)|^q \int_0^1 y^s dy + |X'(b,\cdot)|^q \int_0^1 (1-y)^s\,dy$$

$$= \frac{|X\prime(t,\cdot)|^q + |X\prime(b,\cdot)|^q}{s+1} \le \frac{2M^q}{s+1}$$

yazılabilir. Bu nedenle $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{M}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{1/q}\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{b-a}\right]$$

dir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.6.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R},\ I$ da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' ortalama-kare integrallenebilir, $a,b \in I,\ a<b$ olsun. Eğer $p>1$ olmak üzere $|X'|^{p/(p-1)},\ [a,b]$ aralığında konveks ve $|X'(y,\cdot)| \le M, y \in [a,b]$ ise

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le \frac{M}{b-a}\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{(1+p)^{\frac{1}{p}}}\right] \quad \forall t \in [a,b] \qquad (4.64)$$

eşitsizliği geçerlidir (Materano ve Ark., 2016).

Teorem 4.6.3 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R},\ I$ da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç ve X' ortalama-kare integrallenebilir,$a,b \in I,\ a<b$ olsun. Eğer $q \ge 1$ olmak üzere $|X'|^q$,keyfi bir $s \in (0,1]$ sabiti için $[a,b]\ de$ ikinci anlamda s–konveks ve $|X'(t,\cdot)| \le M,\ t \in [a,b]$ ise bu takdirde her $t \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \le M\left(\frac{2}{s+1}\right)^{1/q}\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right] \qquad (4.65)$$

İspat: $q \le 1$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.6.1 ve Power -mean eşitsizliğinden

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)a,\cdot)|\,dy + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt+(1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 ydy\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 y|X'(yt+(1+y)a,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 ydy\right)^{1-1/q}\left(\int_0^1 y|X'(yt+(1+y)a,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

eşitsizliği her zaman yazılabilir. Öte yandan $|X'|^q$, s–konveks olduğundan

$$\int_0^1 y|X'(yt+(1+y)a,\cdot)|^q\,dy$$

$$\leq \int_0^1 [y^{s+1}|X'(yt+(1+y)a,\cdot)|^q + y(1-y)^s|X'(yt+(1+y)a,\cdot)|^q]\,dy$$

$$= \frac{|X\prime(t,\cdot)|^q+(s+1)|X\prime(a,\cdot)|^q}{(s+1)(s+2)} \leq \frac{M^q}{s+1}$$

ve

$$\int_0^1 y|X'(yt+(1+y)b,\cdot)|^q\,dy \leq \int_0^1 [y^{s+1}|X'(t,\cdot)|^q + y(1-y)^s|X'(a,\cdot)|^q]\,dy$$

$$= \frac{|X\prime(t,\cdot)|^q+(s+1)|X\prime(a,\cdot)|^q}{(s+1)(s+2)} \leq \frac{M^q}{s+1}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq M\left(\frac{2}{s+1}\right)^{1/q}\left[\frac{(t-a)^2+(b-t)^2}{2(b-a)}\right]$$

olduğu görülür ki istenen sonuç budur.

Sonuç 4.6.2 Eğer (4.65) eşitsizliğinde $t = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{M(b-a)}{4}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{1/q}, q \geq 1,$$

olduğu görülür, burada $s \in (0,1]$ ve $q \geq 1$ için $|X'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s–konvekstir (Materano ve Ark., 2016).

Şimdi s–konkav dönüşümler için sağlanan aşağıdaki sonuç için bir Ostrowski tipi eşitsizlik verilebilir.

Teorem 4.6.4 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'|^q, [a, b]$ aralığında s–konkav, $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ise bu takdirde her $t \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{2^{(s-1)/q}}{(1+p)^{1/p}(b-a)}\left[(t-a)^2\left|X'\left(\frac{t+a}{2},\cdot\right)\right| + (b-t)^2\left|X'\left(\frac{b+t}{2},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.66}$$

İspat: $q > 1$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.6.1 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt + (1-y)a,\cdot)|\,dy + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 y|X'(yt + (1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |X'(yt + (1-y)a,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 y^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |X'(yt + (1-y)a,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

eşitsizliği her zaman yazılabilir. Fakat $|X'|^q$ konkav olduğundan (4.61) eşitliğini kullanırsak

$$\int_0^1 |X'(yt + (1-y)a,\cdot)|^q\,dy \leq 2^{s-1}\left|X'\left(\frac{x+a}{2},\cdot\right)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1 |X'(yt + (1-y)a,\cdot)|^q\,dy \leq 2^{s-1}\left|X'\left(\frac{b+x}{2},\cdot\right)\right|^q$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizlikler birleştirilirse

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{2^{(s-1)/q}}{(1+p)^{1/p}(b-a)}\left[(t-a)^2\left|X'\left(\frac{t+a}{2},\cdot\right)\right| + (b-t)^2\left|X'\left(\frac{b+t}{2},\cdot\right)\right|\right]$$

elde edilmiş olur. Bu nedenle türevlerinin mutlak değeri ikinci anlamda s–konkav olan stokastik süreçler için aşağıdaki midpoint tipi eşitsizliği verebiliriz:

Sonuç 4.6.3 Eğer (4.66) daki eşitsizlikte özel olarak $s = 1$ ve $t = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{b-a}{4(1+p)^{1/p}}\left[\left|X'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right| + \left|X'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right]$$

olduğu görülür, burada $|X'|^q, [a,b]$ aralığı üzerinde konkav ve $p > 1$ dir (Materano ve Ark., 2016).

4.7 Quazi - Konveks Stokastik Süreçler için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Bu kısımda birinci türevleri belirli konvekslik varsayımlarını sağlayan mutlak sürekli stokastik süreçler için bazı Ostrowski tipi eşitsizlikler ifade edilecektir.

Teorem 4.7.1 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'|$ süreci $[a,b]$ aralığında Quasi–konveks ise her $t \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(b-t)^2}{2(b-a)} max\{|X'(t,\cdot)|, |X'(b,\cdot)|\} + \frac{(t-a)^2}{2(b-a)} max\{|X'(t,\cdot)|, |X'(a,\cdot)|\} \quad (4.67)$$

İspat: Lemma 4.4.1' e göre $|X'|$ süreci Quasi–konveks olduğundan $\beta = \frac{b-t}{b-a}$ alınırsa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^\beta |y|\,|X'(ya + (1-y)b,\cdot)|dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1 |y-1||X'(ya + (1-y)b,\cdot)|\,dy$$

$$\leq (b-a)\int_0^\beta y\, max\,\{|X'(a,\cdot)|, |X'(b,\cdot)|\}dy$$

$$+(b-a)\int_\beta^1 (1-y) max\{|X'(a,\cdot)|, |X'(b,\cdot)|\}dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(b-t)^2}{(b-a)} max\{|X'(a,\cdot)|, |X'(b,\cdot)|\} + \frac{1}{2}\frac{(t-a)^2}{(b-a)} max\{|X'(a,\cdot)|, |X'(b,\cdot)|\}$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.7.1 Teorem 4.7.1 deki verilere ek olarak, eğer X', $[a,b]$'de sınırlı ise, yani $|X'(t,\cdot)| \leq M, t \in [a,b,]$ olacak şekilde $M > 0$ mevcutsa, bu takdirde (4.33) eşitsizliği her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016).

Sonuç 4.7.2 Teorem 4.7.1 de verilenlere ek olarak, eğer

1. X' süreci artansa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-t)^2}{2(b-a)}|X'(b,\cdot)| + \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}|X'(t,\cdot)| \tag{4.68}$$

2. X' süreci azalansa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-t)^2}{2(b-a)}|X'(t,\cdot)| + \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}|X'(a,\cdot)| \tag{4.69}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Materano ve Ark., 2016).

Sonuç 4.7.3 Teorem 4.7.1' de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ seçilirse bu takdirde

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{8}\left[max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|, |X'(b,\cdot)|\right\} + max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|, |X'(a,\cdot)|\right\}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle

1. Eğer $|X'|$ süreci artansa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[|X'(b,\cdot)| + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.70}$$

2. Eğer $|X'|$ süreci azalansa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[|X'(a,\cdot)| + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.71}$$

olacaktır (Materano ve Ark., 2016).

Teorem 4.7.2 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I da ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'|, [a,b]$ aralığında Quasi–konveks ise her $t \in [a,b]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \left(\frac{(b-t)^{p+1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(b,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$+\left(\frac{(t-a)^{p+1}}{(b-a)(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(a,\cdot)|^q\}\right]^{1/q} \quad (4.72)$$

dir (Materano ve Ark., 2016)

İspat: $p > 1$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.4.1 e göre, Hölder eşitsizliği ve $\beta = \frac{b-t}{b-a}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^{\beta}|y|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$+(b-a)\int_{\beta}^{1}|y-1|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\beta}|y|^p dy\right)^{1/p}\left(\int_0^{\beta}|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\beta}^{1}(1-y)^p dy\right)^{1/p}\left(\int_{\beta}^{1}|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

$$=\frac{(b-a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{(b-t)^{p+1}}{(b-a)^p(b-a)}\right)^{1/p}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(b,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\gamma^{p+1}\right)^{1/p}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(a,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$=\frac{(b-t)^{\frac{p+1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(b,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

$$+\frac{(t-a)^{\frac{p+1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(a,\cdot)|^q\}\right]^{1/q}$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.7.4 Teorem 4.7.2 de verilenlere ek olarak eğer

1. $|X'|$ süreci artansa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[(b-t)^{\frac{p+1}{p}}|X'(b,\cdot)| + (t-a)^{\frac{p+1}{p}}|X'(t,\cdot)|\right] \quad (4.73)$$

2. $|X'|$ süreci azalansa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{p}}}\left[(b-a)^{\frac{p+1}{p}}|X'(t,\cdot)| + (t-a)^{\frac{p+1}{p}}|X'(a,\cdot)|\right] \tag{4.74}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Materano ve Ark., 2016).

Sonuç 4.7.5 Teorem 4.7.2 de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left[max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q, |X'(b,\cdot)|^q +\right\}^{1/q} + \right.$$

$$\left. + \, max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q, |X'(a,\cdot)|^q +\right\}^{1/q}\right] \tag{4.75}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle

1. Eğer $|X'|$ süreci artıyorsa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-a)}{2^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left[|X'(b,\cdot)| + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.76}$$

2. Eğer $|X'|$ azalıyorsa

$$\left|X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right| \leq \frac{(b-a)}{2^{1/p}(p+1)^{1/p}}\left[|X'(a,\cdot)| + \left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|\right] \tag{4.77}$$

olacaktır (Materano ve Ark., 2016).

Teorem 4.7.3 $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$, I aralığında ortalama-kare türevlenebilir bir stokastik süreç, X' ortalama-kare integrallenebilir, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|X'|^q$, $[a, b]$'de bir quasi–konveks stokastik süreç, $q \geq 1$ ve $|X'(x,\cdot)| \leq M,\ x \in [a, b]$ ise bu takdirde her $t \in [a, b]$ içn aşağıdaki eşitsizlik her zaman sağlanır (Materano ve Ark., 2016):

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}\left(max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(a,\cdot)|^q\}\right)^{1/q}$$

$$+ \frac{(b-t)^2}{2(b-a)}\left(max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(b,\cdot)|^q\}\right)^{1/q} \tag{4.78}$$

İspat: $q \geq 1$ kabul edelim. Lemma 4.4.1, Power-mean eşitsizliği ve $\beta = \frac{b-t}{b-a}$ ifadesi dikkate alınırsa

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq (b-a)\int_0^{\beta} y\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$+(b-a)\int_{\beta}^{1}|y-1|\,|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|dy$$

$$\leq (b-a)\left(\int_0^{\beta} ydy\right)^{1-1/p}\left(\int_0^{\beta} y|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q\,dy\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\left(\int_{\beta}^{1} ydy\right)^{1-1/q}\left(\int_{\beta}^{1} y|X'(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy\right)^{1/q}$$

olduğu görülür. Öte yandan $|X'|^q$ bir quasi–konveks olduğundan

$$\int_0^{\beta} y|X(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy \leq \int_0^{\beta} y\, max\,\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(b,\cdot)|^q\}dy$$

$$= \frac{(b-t)^2}{2(b-a)^2} max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(b,\cdot)|^q\}$$

ve

$$\int_0^{\beta}(1-y)\,|X(ya+(1-y)b,\cdot)|^q dy \leq \int_0^{\beta}(1-y)max\{|X'(a,\cdot)|^q, |X'(t,\cdot)|^q\}\,dy$$

$$= \frac{(t-a)^2}{2(b-a)^2} max\{|X'(a,\cdot)|^q, |X'(t,\cdot)|^q\}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu nedenle

$$\left|X(t,\cdot) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du\right|$$

$$\leq \frac{(t-a)^2}{2(b-a)}\left(max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(a,\cdot)|^q\}\right)^{1/q}$$

$$+\frac{(b-t)^2}{2(b-a)}\left(max\{|X'(t,\cdot)|^q, |X'(b,\cdot)|^q\}\right)^{1/q}$$

elde edilir ve böylece de istenen sonuç bulunmuş olur.

Sonuç 4.7.6 Teorem 4.7.3' te eğer

1. $|X'|$ artıyorsa bu takdirde (4.68) eşitsizliği her zaman sağlanır.

2. $|X'|$ azalıyorsa bu takdirde (4.69) eşitsizliği her zaman sağlanır.

Sonuç 4.7.7 Teorem 4.7.3' te eğer $t = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left| X\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b X(u,\cdot)du \right| \le$$

$$\frac{(b-a)}{8}\left[\left(max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q, |X'(b,\cdot)|^q\right\}\right)^{1/q} + \left(max\left\{\left|X'\left(\frac{a+b}{2},\cdot\right)\right|^q, |X'(a,\cdot)|^q\right\}\right)^{1/q}\right]$$

(4.79)

elde edilir. Bu nedenle

1. $|X'|$ artıyorsa bu takdirde (4.70) eşitsizliği her zaman sağlanır.

2. $|X'|$ azalıyorsa bu takdirde (4.71) eşitsizliği her zaman sağlanır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizliklerden yola çıkarak aynı eşitsizliklerin stokastik süreçler için de sağlandığına yer verilmiştir. Ayrıca konveks stokastik süreçler, Jensen konveks, güçlü konveks, Log-konveks, güçlü log-konveks, birinci ve ikinci anlamda s-konveks stokastik ve harmonik konveks süreçler için Hermite-Hadamard, Jensen, Fejer tipi eşitsizliklerin sağlandığına yer verilmiştir. Ayrıca konveks, konkav, h- konveks, s- konveks ve Quazi - konveks stokastik süreçler için Ostrowski tipi bazı eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan yola çıkarak koordinatlarda konveks, (α, m) −konveks, (h_1, h_2)− konveks (h_1, h_2, m) − konveks ve benzeri tipten konveks fonsksiyonlar için sağlanan eşitsizliklerin stokastik süreçler için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

Adams R.A. and C. Essex, C. 2010. Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc. Toronto, Ontario.

Azocar, A., Gimenez J., Nikodem, K. and Sanchez, J. L. 2011. On strongly midconvex funtions, Opuscula Math., 31(1): 15-26.

Azpeitia, A.G. 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28: 7-12.

Bagdasar, O. 2006. Inequalities and Applications, Bachelor's Degree Thesis, Babeş Bolyai University, Cluj Napoca.

Baraez, D., Gonzales, L., Merentez, N. and Moros, M. 2015. On h-convex stochastic processes, Math. Aeterna. 5(5):571-581.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN: 975-442-035-1.

Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.

Beckenbach, E.F. and Bellman, R. 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Bullen, P. S., Mitrinovic , D. S., Vasis , P. M., 1988. Means and Their Inequalities, Springer Science and Business Media, B. V.

Cortez, M.V. and Garcia, C. 2017. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are $(m, h_1, h_2) -$ Convex, Appl. Math. Inf. Sci. 11(1) 79-86.

Dragomir, S.S. 1992. Two functions in connection to Hadamard's inequalities, J. Math. Anal. Appl., 167: 49–56.

Dragomir, S.S. 1994. Some remarks on Hadamard's inequalities for convex functions, Extracta Math. 9 (2): 88–94.

Dragomir, S.S. 2000. Refinements of the Hermite–Hadamard integral inequality for log convex functions, RGMIA Res. Rep. Collect, 3 (4): 527–533.

Dragomir, S.S. 2001. Refinements of the Hermite-Hadamard integral inequality for logconvex functions, The Australian Math. Soc. Gazette, 28(3): 129-133.

Dragomir, S.S. and Wang, S.S. 1997. An inequality of Ostrowski-Grüss' type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrate rules, Computers Math. Appl. 33 (11), 15-20 (1997).

Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S. 1998. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense, Demonstratio Math., 31 (3): 633-642.

Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense, Demonstratio Math., 32 (4): 687-696.

Dragomir, S.S. and Mond, B. 1998. Integral inequalities of Hadamard's type for log-convex functions, Demonstratio Math., 31 (2): 354-364.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 1998. Pearce, Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57 (1998), 377-385.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M. 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, Victoria University.

Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. and Sandor, J. 1990. A note on the Jensen–Hadamard inequality, Anal. Num. Theor. Approx., 19: 29–34.

Dragomir, S. S., Pecaric, J. and Persson, L. E. 1995. Some inequalities of Hadamard type, Soochow Journal of Mathematics, 21: 335-341.

Ekinci, A. 2014. Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar İçin Integral Eşitsizlikler, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Godunova, E. K., Levin, V. I., 1985. Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderz ascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii, Vycislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.

Gonzales,L., Materano, J. and Lopez, M.V., 2015. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through convex and Quasi-convex stochastic processes, Mathematica Aeterna 5(5):745-767.

Gonzales,L., Materano, J. and Lopez, M.V., 2016. Ostrowski-Type inequalities via h-convex stochastic processes, JP Journal of Mathematical Sciences, 16(2):15-29.

Greenberg, H. J., Pierskalla, W. P., 1970. A review of quasi convex functions, Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G. 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press.

Hudzik, H. and Maligranda, L. 1994. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math., 48: 100-111.

Hwang, D-Y. 2011. Some inequalities for differentiable convex mapping with application to weighted trapezoidal formula and higher moments of random variables, Applied Mathematics and Computation, 217: 9598-9605.

Hwang, D.Y. and Dragomir, S.S. 2014. Comparing two integral means for absolutely continuous functions whose absolute value of the derivative are convex and applications, Applied Mathematics and Computation, 230, 259-266.

Ion, D. A. 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of CraiovaMath. Comp. Sci. Ser., vol. 34, 82-87.

İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequaities for harmonically convex functions Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic 43, 6, 935-942.

İşcan, İ., 2015. Hermite-Hadamard-Fejer Type Inequalities for convex Functions via Fractional Integrals, Stud. Univ. Babe¸s-Bolyai Math., 60, No. 3, 355-366.

İşcan, İ. and Wu, S. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, Applied Mathematics and Computation, 238: 237-244.

İşcan, İ. and Kunt M. 2015. Fejer and Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for harmonically s-convex functions via Fractional Integrals, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 12(10): 1-6.

Jeffrey, A. and Dai, H.H. 2008. Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. 2013. Genel Matematik, ISBN: 978-975-8151-57-8.

Kırmacı, U.S. and Özdemir, M.E. 2004. Some inequalities for mappings whose derivatives are bounded and applications to specials means of real numbers, Applied Math. Letters, 17: 641–645.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam.

Kotrys, D. 2012a. Hermite-Hadamart inequality for convex stochastic processes, Aequationes Math., 83: 143-151.

Kotrys, D. 2012b. Remarks on strongly convex stochastic processes, Aequationes Math., 86: 143-151.

Kotrys, D. 2014. Some characterizations of strongly convex stochastic processes, Mathe. Aeterna, 4(8): 855-861.

Kotrys, D. 2015. Remarks on Jensen, Hermite-Hadamard and Fejer inequalities for strongly convex stochastic processes, Math. Aeterna, 5(1): 95-104.

Kuczma, M. 1985. An Introduction to the Theory of Funtional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice.

Kuhn, N. 1984. A note on t-convex functions, In General inequalities 4. International Schriftenreihe Numerical Mathematics, Birkhauser, Basel, 71: 269-276.

Latif, M.A., Dragomir, S.S. and Momoniat E. 2015. Some Fejer type inequalities for harmonically-convex functions with applications to special means, http://rgmia.org/papers/v18/v18a24.pdf.

Maden, S. 2013. Olasılığa Giriş, Seçkin Yayıncılık, ISBN 978-975-02-2413-3.

Maden, S. Tomar, M. and Set, E. 2015. Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the first sense, Pure and Applied Mathematics Letters: 1-7.

Maden, S., Turhan, S., İşcan, İ., 2016. New Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for GA-convex functions, AIP conference proceedings 1726, 020043 (2016).

Manfrino, R.B., Delgado, R.V. and Ortega, J.A.G. 2009. Inequalities a Mathematical Olympiad Approach, Birkhauser.

Materano, J., Merentes, N. and Lopez, M.V. 2016. On Ostrowski's type inequalities via convex, s-convex and Quasi-convex stochastic processes, Mathematica Aeterna, 6(1): 47-85.

Matic ,M., Pecaric, J. and Ujevic, N. 2000. İmprovement and Further Generalization of İnequalities of Ostrowski-Grüss Type,Computers and Mathematics with Applications 39 (2000) 161-175.

Merentes, N. and Nikodem, K. 2010. Remarks on strongly convex functions, Aequat. Math., 80: 193-199.

Mitrinoviç, D.S. 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinoviç, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Niculescu, C. P. 2003. Convexity according to means, Math. Inequal. Appl. 6 (4), 571–579.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. 2005. Convex Functions and Their Applications, Springer, Berlin.

Niculescu, C.P. and Persson, L.E. 2006. Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media Inc.

Nikodem, K. 1980a. On convex stochastic processes, Aequationes Mathematicae, 20: 184-197.

Nikodem, K. 1980b. Wypukle i kwadratowe procesy stochastyczne, Thesis, Silesian University, Katowice.

Okur, N., İşcan, İ. And Dizdar, E.Y. 2018. Hermite-Hadamard Type Inequalities for Harmonically Convex Stochastic Processes. International Journal of Economic and Administrative Studies, 281-292.

Ostrowski, A. 1938. Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert, Comment. Math. Hel. 10 (1938), 226-227.

Özdemir, M.E. 2000. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means, Appl. Math. Lett., 13: 19–25.

Özdemir, M. E., Yıldız, C. 2013. The Hadamard's inequality for quasiconvex functions via fractional integrals, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series Volume 40(2): 167-173.

Pachpatte, B.G. 2004. A note on integral inequalities involving two log-convex functions, Math. Ineq. Appl., 7 (4): 511–515.

Pales, Zs. 2000. Nonconvex functions and separation by power means, Math. Inequel. Appl., 3: 169-176.

Pecaric, L., Proschan, F. and Tong, Y.L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., Marichev, O. J. 1981. Integral and series, Elementary Functions, Vol. 1, Nauka, Moscow.

Roberts, A.W. and Varberg, D.E. 1973. Convex Functions, Academic Press, New York.

Set, E. 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Set, E., Tomar, M. and Maden, S. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the second sense, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2(6): 202-207.

Set, E., Sarıkaya, M.Z. and Tomar, M. 2015. Hermite-Hadamard type inequalities for coordinates convex stochastic processes, Mathematica Aeterna, 5(2): 363-382.

Shi, D.P., Xi, B.Y. and Qi, F. 2014. Hermite - Hadamard type inequalities for $(m, h_1, h_2)-$ Convex fonctionsvia Riemann-Liouville integrals, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2(1): 23-28.

Shynk, J.J. 2013. Fractional integrals, Probability, Random Variables, and Random Processes: Theory and Signal Processing Applications, Wiley.

Skowronski, A. 1992. On some Properties of J-convex stochastic processes, Aequationes Math., 44: 249-258.

Skowronski, A. 1995. On wright-convex stochastic processes, Annales Mathematicae Silesianne, 9: 29-32.

Tomar, M., Set, E. and Bekar, N.O. 2014. On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly log convex stochastic processes, Journal of Global Engineering Studies, 1: 53-62.

Tomar, M., Set, E. and Maden, S. 2015. Hermite-Hadamard type inequalities for log-convex stochastic processes, New Theory, 2: 23-32.

Tunç, M. 2011. Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadaamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Tunç, M. 2013. Ostrowski-type inequalities via h-convex functions with applications to special means, Journal Inequal. Appl., 326:1-10.

Tunç, M. 2014. Some integral inequalities for logarithmically convex functions, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22: 177-181.

Wright, E. M. 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61: 620-622.

Young, W. H. 1912. On Classes of Summable Functions and Their Fourier Series, Proc. Roy. Soc. London A 87, 225-229.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Fatih KOMAN
Doğum Yeri	**:**	Bayburt
Doğum Tarihi	**:**	10. 10. 1988
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	fkoman1988@gmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2012

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**

Yayınlar :

1.

2.