T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZ EŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR *h*-PREİNVEKS FONKSİYONLAR.

Elif BAŞKÖY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZ EŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR h-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Elif BAŞKÖY

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2019

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Elif BAŞKÖY tarafından hazırlanan ve Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "Öz Eşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları İçin Operatör h-Preinveks Fonksiyonlar" adlı bu tez jürimiz tarafından 27 / 12 / 2018 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

Başkan : Prof. Dr. Mahir KADAKAL
Matematik, Giresun Üniversitesi
İmza:

Üye : Doç. Dr. Erhan SET
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL
Matematik, Ordu Üniversitesi
İmza:

ONAY:

14 / 01 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 17 / 01 / 2019 tarih ve 2019 / 24 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Elif BAŞKÖY

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ÖZ EŞLENİK OPERATÖRLERİN SÜREKLİ FONKSİYONLARI İÇİN OPERATÖR *h*-PREİNVEKS FONKSİYONLAR

Elif BAŞKÖY

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2018
Yüksek Lisans Tezi, 40 s.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışmasında bir Hilbert uzayında sınırlı öz eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör *h*-preinveks fonksiyonlar sınıfının tanımı verildi. Daha sonra Hermite-Hadamard eşitsizliği yardımıyla yeni lemmalar, teoremler ifade ve ispat edildi. Son olarak ise türevlerinin mutlak değerlerinin bazı kuvvetlerinin operatör *h*-preinveks olması durumunda yeni eşitsizlikler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı, sınırlı öz eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonu, operatör *h*-preinveks fonksiyonlar, Hermite-Hadamard eşitsizliği.

ABSTRACT

OPERATOR *h*-PREINVEX FUNCTIONS FOR CONTINIOUS FUNCTIONS OF SELF ADJOINT OPERATORS

Elif BAŞKÖY

University of Ordu
Institute of Science
Departmentof Mathematics, 2018
MsC. Thesis, 40 p.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

In this thesis, It is defined operator *h*-preinvex functions for continious function of bounded self adjoint operator in a Hilbert space. Then it is proved some new lemmas, theorems via Hermite-Hadamard inequality. Finally, it is obtained some new inequalities for functions whose derivatives are operator *h*-preinvex.

Key Words: Hilbert space, continuous functions of bounded, self adjoint operator, operator *h*-preinvex functions, Hermite-Hadamard inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle danışmanlığımı yürüten, ayrıca manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, insani ve ahlak değerleri ile de örnek aldığım çok değerli danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL' a sonsuz teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca gösterdikleri maddi, manevi destekleri ve fedakârlıkları için başta annem Rahime BAŞKÖY ve babam İsa BAŞKÖY' e ve beni yüksek lisans yapma konusunda yüreklendiren kardeşim Yasin BAŞKÖY' e teşekkür ediyorum.

Lisansüstü çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen ve her zaman yakın ilgilerini gördüğüm Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü çalışanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne B-1802 numarası ile Yüksek Lisans Tez Proje desteği verdiğinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi, yani $(-\infty, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}_0$	:	$[0, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^m$	:	m-boyutlu Reel sayılar kümesi, $m \in \mathbb{N}$
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$U_{\epsilon(a)}$	:	a noktasının ϵ komşuluğu
$(\cdot, \cdot)$	:	İç-çarpım fonksiyonu
H	:	Hilbert uzayı
$Sp(A), \sigma(A)$	:	A operatörünün spekturumu
$\nabla f(.)$	:	f fonksiyonunun diverjansı
$L[a, b]$	:	$[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı
$H - H$	:	Hermite-Hadamard
$B(H)$	:	H'dan H'ya sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	H'dan H'ya pozitif sınırlı operatörlerin kümesi
$B(H)^+_{sa}$	:	H'dan H'ya sınırlı, öz eşlenik, pozitif operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

Elster ve Neshse [1] konveksel fonksiyonlar sınıfını incelemişlerdir, yani $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(z) \quad \leq \quad \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1.0.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $z \in S$ noktalarını içeren fonksiyonlara konveksel denir. Eğer S bir konveks küme ve f de konveks bir fonksiyon ise, bu durumda f'nin konveksel olduğu açıktır. Aslında Elster ve Nehse konveksel matematiksel programlama için optimal şart altında bir eyer(büküm) noktası elde etmişlerdir.

Hayaski ve Komiya [2] hem konveksel fonksiyonları hem de konveksel fonksiyonlar için bir Gordan tipi teorem geliştirmişler. İlaveten, konveksel programlar için Lograngion dualliğini araştırmışlardır.

Hanson [3], her $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}$ için

$$f(x) - f(u) \quad \geq \quad [\eta(x,u)]^T \nabla f(u) \tag{1.0.2}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x,u)$ vektör fonksiyona sahip $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlarını göz önüne almıştır. Burada "∇" sembolü diverjansı göstermektedir. Bu tarz fonksiyonlar Craven [4] tarafından inveks olarak isimlendirilmiştir. Bu terim ise "**<u>in</u>**variant con**<u>vex</u>**" ifadesinden kısaltılmıştır.

Craven ve Glover [5], Ben-Israel ve Mond [6], ayrıca Martin [7] invex fonksiyonlar sınıfıyla ilgili çalışmaları mevcuttur. Ben-Israel ve Mond [6], Hanson ve Mond [8] daha genel olan yani, S üzerinde diferensiyellenebilen fonksiyonların, her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(u + \lambda \eta(x,u)) \quad \leq \quad \lambda f(x) + (1-\lambda) f(u) \tag{1.0.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n-boyutlu $\eta(x,u)$ vektör fonksiyonunun varlığını ispat etmişler ve diferensiyellenebilen fonksiyonların hem (1.0.2) yi hem de (1.0.3)'ü sağladığını göstermişlerdir. Bu koşullar altında (1.0.3) eşitsizliğini sağlayan bu fonksiyonlara V. Jeyakumar tarafından "pre-invex" ismi verilmiştir. Ayrıca, $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ m-boyutlu vektör değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer f'nin bileşenlerinin her biri, η-ya göre S üzerinde pre-inveks ise, bu f'ye η'ya göre S üzeinde preinvekstir denir. Her $x, u \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$u + \lambda \eta(x,u) \in S$$

olup, buradan preinvex fonksiyonlar konvekseldir.

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere, invekslik ve preinveksliğin nasıl ortaya çıktığının özetini verdik. Şimdi bu fonksiyon sınıfının "neden" ortaya çıktığını kısaca söyleyelim. Konveksliğin bu yeni genelleştirmesi, optimizasyon poblemleri, statik ve dinamik problemleri, Pareto veya çoklu-amaç programlama problemleri vb. konularının daha iyi anlaşılması ve çözülmesi için matematikçiler tarafından elde edilmiştir.

Bu yüksek lisans tez çalışması klasik preinveks fonksiyonlar teorisi ile herhangi bir Hilbert Uzayı' nda sınırlı, öz eşlenik operatörler teorisinin bir araya gelmesiyle oluşmuştur. Bu alanda Barani ve ark. [9], Ghazanfari ve ark. [10], Wang ve ark. [11]-[12], ayrıca daha bir çok bilim insanı çalışmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.0.1 L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $. : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.
G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$dir.
G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.
G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.
G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ omak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta.x)$ dir.
L5. $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır). $F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.0.2 $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Eğer, $a \in E$ ve $U_{\epsilon(a)} \subset E$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa a ya E'nin bir iç noktası denir.E nin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve E^0 ile gösterilir. Eğer , $E^0 = E$ ise E ye $\mathbb{R}$ de bir açık küme denir.

Tanım 2.0.3 f, A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı A kümesinin her elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşliyorsa f bağıntısına A dan B ye bir fonksiyon denir.

$$f : A \to B$$

ile gösterilir. A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi B kümesine ise değer kümesi denir.Bu tanıma göre f bağıntısının A dan B ye bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, $(x, y) \in f$

ii) $\forall x \in A$,$\forall y, z \in B$, $[(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f] \Rightarrow x = z$ olmasıdır.

Tanım 2.0.4 $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.Eğer
$\mid x - x_0 \mid < \delta$ iken her $x \in S$ için $\mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$
olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.0.5 $I, \to \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f, g : I \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ için

$$\Big[f(x) - f(y)\Big]\Big[g(x) - g(y)\Big] \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ve g fonksiyonlarına aynı sıralı fonksiyon denir.

Tanım 2.0.6 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar, aynı kümede kalıyorsa C ye konveks küme ya da afin denir. Yani, $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in C$, için

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$$

ise $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi konveks bir kümedir.

Tanım 2.0.7 I,$\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.0.8 $F \subseteq \mathbb{R}^n, f : F \to \mathbb{R}$ ve $\eta(\cdot, \cdot) : F \times F \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in F$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$y + t\eta(x, y) \in F$$

ise F ye $\eta(\cdot, \cdot)$ ya göre inveks bir küme denir.

Not 2.0.1 Her konveks kümenin $\eta(y, x) = y - x$ fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan inveks kümeler mevcuttur [13].

Örnek 2.0.1 ([13] Örnek 4) $S \subset \mathbb{R}^2$ bir küme ve $\eta(\cdot, \cdot) : S \times S \to \mathbb{R}^2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S &:= \Big([-9, -2] \cup [1, 8]\Big) \times \Big([-9, -2] \cup [1, 8]\Big) \\ \eta(x, u) &:= \Big\{\eta_1(x, u), \eta_2(x, u)\Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\eta_1(x,u) = \begin{cases} x_1 - u_1, & x_1 \geq 0, \quad u_1 \geq 0, \\ -9 - u_1, & x_1 \geq 0, \quad u_1 \leq 0, \\ 1 - u_1, & x_1 \leq 0, \quad u_1 \geq 0, \\ x_1 - u_1, & x_1 \leq 0, \quad u_1 \leq 0, \end{cases} \quad \eta_2(x,u) = \begin{cases} x_2 - u_2, & x_2 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \\ -9 - u_2, & x_2 \geq 0, \quad u_2 \leq 0, \\ 1 - u_2, & x_2 \leq 0, \quad u_2 \geq 0, \\ x_2 - u_2, & x_2 \leq 0, \quad u_2 \leq 0, \end{cases}$$

olarak seçilirse $S \subset \mathbb{R}^2$ konveks bir küme olmayıp, yukarıdaki şekilde seçilen $\eta(x,u)$-ya göre inveks bir kümedir.

Tanım 2.0.9 $F \subseteq \mathbb{R}^n, \eta$-ya göre boştan farklı bir inveks küme, x ve u, S-nin keyfi iki elemanı olsun. Bu durumda

$$P_{uv} := \Big\{ y = u + t\eta(x,u) : t \in [0,1] \Big\}$$

şeklinde tanımlanan P_{uv} kümesine, S-de bulunan u ve $v = u+\eta(x,u)$ noktalarını birleştiren kapalı bir η-yolu denir. Benzer şekilde,

$$P_{uv}^o := \Big\{ y = u + t\eta(x,u) : t \in (0,1) \Big\}$$

açık bir η-yolu da tanımlanır.

Tanım 2.0.10 $F \subseteq \mathbb{R}^n, \eta$-ya göre boştan farklı bir inveks küme olsun. Bu durumda her $x, y \in F$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} (C) \;\; \eta(y, y + t\eta(x,y)) &= -t\eta(x,y) \\ \eta(x, y + t\eta(x,y)) &= (1-t)\eta(x,y) \end{aligned}$$

ise η dönüşümü (C) koşulunu sağlar denir.

Not 2.0.2 Eğer $\eta(C)$ koşulunu sağlarsa, her $x, y \in F$ ve her $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta\Big(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)\Big) = (t_2 - t_1)\eta(x,y) \tag{2.0.1}$$

eşitliği sağlanır. Bunun ispatı için [14] ve [15]'ye bakabilirsiniz.

Tanım 2.0.11 Eğer

$$lim_{x \to a} f(x) = 0$$

ise f ye $x \in X, x \to a$ iken sonsuz küçük bir fonksiyon denir ve $x \in X, x \to a$ iken

$$f(x) = o(1)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.12 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x \in [a,b]$ noktası verilmiş olsun. Eğer $x+h \in [a,b]$ için $B(x)$ reel bir sayı olmak üzere

$$f(x+h) - f(x) = B(x).h + \varphi(x;h)$$

olacak şekilde $h \to B(x)h$ fonksiyonu ve $h \to 0$ ($x = a$ için $h \to 0^+$ ve $x = b$ için $h \to 0^-$) iken $\varphi(x;h) = o(h)$ olacak şekilde bir $\varphi(x;h)$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu x noktasında diferensiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.0.13 $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sınırlı olan f fonksiyonu için, $[a,b]$ aralığının P parçalanması, ξ-ye bağımlı olarak,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=k-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

sonlu limiti varsa bu limite "f-nin $[a,b]$ aralığı üzerinde Riemann veya Belirli integrali" denir ve

$$\int_a^b f(x)dx$$

sembolü ile gösterilir. Bu durumda "f, $[a,b]$ aralığı üzerinde (Riemann anlamında) integrallenebilirdir" denir. Burada a-ya integralin alt sınırı, b-ye ise üst sınırı denir.

Tanım 2.0.14 $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $\mid f \mid^p$ ve $\mid g \mid^q$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\int_a^b \left|f(x)g(x)\right|dx \leq \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left|g(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.15 $q \geq 1$ olmak üzere $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen reel değerli iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Power-Mean Eşitsizliği denir.

Tanım 2.0.16 $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $a < b, a, b \in I$ olsun. Bu durumda herhangi bir konveks $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.0.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu eşitsizliğe Hermite-Hadamard Eşitsizliği denir. Hermite-Hadamard eşitsizliği $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyonun ortalama değerini verir.

Tanım 2.0.17 Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.0.18 F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüşümü,
a $T(u + v) = T(u) + T(v)$
b $T(cu) = cT(u)$ şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir .

Tanım 2.0.19 F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. $(\cdot, \cdot) : X \times X \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise "$(\cdot, \cdot)$" dönüşümüne X kümesi üzerinde bir iç-çarpım, $(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine de bir "iç-çarpım" uzayı denir:

1. $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;

2. $\forall x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4. $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Not 2.0.3 $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. özellik $(x, y) = (y, x)$ olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,

2. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \in F$ için $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$;

3. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$.

Tanım 2.0.20 X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyondur. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için
a. $\|x\| > 0$,
b. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
c. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| 0$,
d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
üzerinde bir $\| \cdot \|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına "normlu vektör uzay" denir.

Tanım 2.0.21 $(X,(\cdot,\cdot))$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı tam ise, yani $(X,(\cdot,\cdot))$ iç-çarpım uzayı içindeki her Cauchy Dizisi yakınsak ise bu iç çarpım uzayına bir "Hilbert Uzayı" denir.

Tanım 2.0.22 $A : X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. I, E, I_X veya 1_X sembollerinden biriyle gösterilir.

Tanım 2.0.23 X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$ 'nın X' de sınırlı her kümesi $R(A)$'nın Y de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A' ya "sınırlı bir operatör" denir. Başka bir deyişle her $x \in D(A)$ için

$$\| Ax \|_Y \leq c \| x \|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa, A'ya "sınırlı bir operatör"denir.

Tanım 2.0.24 X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A), X$' in bir alt uzayı, her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A'ya "lineer operatör"denir.

Tanım 2.0.25 A, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her$f, g \in D(A) \subset H$ için

$$(Af, g) = (f, A^* g)$$

sağlanıyorsa A^* a A'nın "eşlenik operatörü"denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A' ya öz eşlenik operatör denir.

Tanım 2.0.26 H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(X)\}$$

kümesine A operatörünün "regüler değerler kümesi" veya "rezolvent kümesi" denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatorüne A operatorünün "rezolventası" veya "çözücü operatörü" adı verilir.

Tanım 2.0.27 H bir Hilbert uzayı olsun.

$$Sp(A) = \sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

kümesine A operatörünün "spektrumu " denir. A operatörünün spektrum kümesi "$\sigma(A)$" veya "$Sp(A)$" ile gösterilir.

Tanım 2.0.28 $A, (H; (\cdot, \cdot)$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir özeşlenik lineer operatör olsun. $C(Sp(A))$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. Gelfand dönüşümü yardımıyla aşağıdaki özellikleri yazılan Φ ile $C(Sp(A))$ kümesi arasında bir $*$-izometrik izomorfizm vardır. Ayrıca H üzerinde 1_H birim operatörü ve A operatörü tarafından üretilen bir $C^*(A)$ cebiri vardır. Keyfi $f, g \in C(Sp(A))$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

1. $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$,
2. $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ ve $\Phi(f^*) = \Phi(f)^*$,
3. $|\Phi(f)\| = \|f\| := \sup_{t \in Sp(A)} |f(t)|$,
4. $\Phi(f_0) = 1_H$ ve $\Phi(f_1) = A$,

burada $t \in Sp(A)$ için $f_0(t) = 1$ ve $f_1(t) = t$. Şimdi bir operatörün, bir fonksiyon altındaki görüntüsünün ne anlama geldiğini ifade edelim. A, $(H; (\cdot, \cdot))$ kompleks bir Hilbert uzayı üzerinde keyfi bir öz eşlenik lineer operatör olsun. $C(Sp(A))$, A operatörünün spektrumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini ve Φ de tanımdaki fonksiyon olsun. Bu durumda $f \in C(Sp(A))$ için

$$f(A) := \Phi(f) \tag{2.0.3}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye keyfi bir A öz eşlenik operatörünün sürekli fonksiyonel hesabı denir.

Tanım 2.0.29 A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki öz eşlenik operatör olsun. Bu durumda her $x \in H$ için operatörlerde sıralama aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$A \leq B \qquad ise \qquad (Ax, x) \leq (Bx, x).$$

Tanım 2.0.30 Eğer A öz eşlenik bir operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq 0$$

dır. Buradan

$$f(A) \geq 0$$

olup, $f(A)$'ya H Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatör denir. Ayrıca eğer f ve g, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise bu durumda her $t \in Sp(A)$ için

$$f(t) \geq g(t) \qquad ise \qquad f(A) \geq g(A)$$

elde edilir.

Not 2.0.4 Operatör konveks (operatör konkav) ve operatör monoton fonksiyonlar üzerinde bazı temel sonuçlar [16] ve [17] de açıkça verilmiştir.

Tanım 2.0.31 [17] A ve B, spektrumları $I \subseteq \mathbb{R}$ de olan keyfi öz eşlenik operatörler ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$$

eşitsizliğini sağlayan, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyona operatör konveks fonksiyon denir. Buradaki eşitsizlik yön değiştirirse o zaman bu $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyona operatör konkav fonksiyon denir.

Dragomir [17] operatör konveks fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği ispatlamıştır.

Teorem 2.0.1 [17] $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığı üzerinde operatör konveks olsun. O halde spekturumları I'da olan her özeşlenik A ve B operatörleri için

$$\begin{aligned} &\Big(\Big(f(\frac{A+B}{2})\Big) \leq \Big)\frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+B}{4}\Big) + f\Big(\frac{A+3B}{4}\Big)\Big] \qquad (2.0.4)\\ \leq\ & \int_0^1 f((1-t)A + tB)dt \\ \leq\ & \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{A+B}{2}\Big) + \frac{f(A)+f(B)}{2}\Big]\Big(\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}\Big) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.0.32 [10] $F \subseteq B(H)_{sa}$ kümesi $\eta : F \times F \to B(H)_{sa}$ ya göre inveks bir küme olsun.Eğer her $A, B \in F$ ve $t \in [0,1]$ için sürekli olan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(A + t\eta(B,A)) \leq (1-t)f(A) + tf(B) \qquad (2.0.5)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona F üzerinde η ya göre operatör preinvekstir denir.

Teorem 2.0.2 [10] $S \subseteq B(H)_{sa}$, $\eta : S \times S \to B(H)_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme ve η, (C) koşulunu sağlasın. Eğer her $A, B \in S$ ve $V = A + \eta(B, A)$ için $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A ve V operatörleriyle P_{AV} η yolu üzerinde η ye göre preinveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} f(\frac{A+V}{2}) &\leq \frac{1}{2}\Big[f(\frac{3A+V}{4}) + f(\frac{A+3V}{4})\Big] \\ &\leq \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt \\ &\leq \frac{1}{2}\Big[f(\frac{A+V}{2}) + \frac{f(A)+f(V)}{2}\Big] \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2} \end{aligned} \tag{2.0.6}$$

İspat. : $\langle Ax, x\rangle \in Sp(A)$, $\langle Vx, x\rangle \in Sp(V)$ olmak üzere $x \in H$, $\| x \| = 1$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\langle (A + t\eta(B, A))x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + t\langle \eta(B, A)x, x\rangle \in I \tag{2.0.7}$$

yazabiliriz. f fonksiyonunun sürekliliğinden ve (2.0.7) eşitliğinden

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt$$

operatör değerli integrali vardır. η, (C) koşulunu sağladığından her $t \in [0, 1]$ için

$$A + \frac{1}{2}\eta(B, A) = A + t\eta(B, A) + \frac{1}{2}\eta(A + (1-t)\eta(B, A), A + t\eta(B, A)). \tag{2.0.8}$$

eşitliği doğrudur. f fonksiyonu η'ye göre preinveks olduğundan

$$\begin{aligned} f(A + \frac{1}{2}\eta(B, A)) &\leq \frac{1}{2}f(A + t\eta(B, A)) + \frac{1}{2}f(A + (1-t)\eta(B, A)) \\ &\leq \frac{1}{2}[(1-t)f(A) + tf(B)] + \frac{1}{2}[tf(A) + (1-t)f(B)] \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2} \end{aligned} \tag{2.0.9}$$

Buradan (2.0.9)'nin her iki tarafını $[0, 1]$ üzerinde t'ye göre integrali alınır ve doğru olan

$$\int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt = \int_0^1 f(A + (1-t)\eta(B, A))dt \tag{2.0.10}$$

integral eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{A + (A + \eta(B, A))}{2}\Big) &\leq \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece her $A, B \subseteq I$ özeşlenik operatörler ve preinveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde ederiz.

Reel değerli $\varphi_{x,A,B} : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\varphi_{x,A,B}(t) = \langle f(A + t\eta(B, A))x, x\rangle$$

şeklinde tanımlansın. Bir önceki önermeden ile f operatör preinveks olduğundan $\varphi_{x,A,B}$, [0,1] üzerinde konveks fonksiyondur. Reel değerli konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanırsak

$$\varphi\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(s)ds \leq \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$$

Burada $a = 0$,$b = \frac{1}{2}$ alırsak

$$\Big\langle f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big)x, x\Big\rangle \leq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \Big\langle \frac{f(A) + f(\frac{A+V}{2})}{2}x, x\Big\rangle$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $a = \frac{1}{2}$,$b = 1$ olarak seçersek

$$\Big\langle f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)x, x\Big\rangle \leq 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi_{x,A,B}(t)dt \leq \langle \frac{f(V) + f(\frac{A+V}{2})}{2}x, x\rangle$$

Yukarıdaki (2.0.11) ve (2.0.11) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}\Big\langle \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{3A+V}{4}\Big) + f\Big(\frac{A+3V}{4}\Big)\Big]x, x\Big\rangle &\leq \int_0^1 \langle f(A + t\eta(B, A))x, x\rangle dt \\ &\leq \Big\langle \frac{1}{2}\Big[f(\frac{A+V}{2}) + \frac{f(A)+f(V)}{2}\Big]x, x\Big\rangle\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Son olarak f fonksiyonunun sürekliliğinden

$$\int_0^1 \langle f(A + t\eta(B, A))x, x\rangle dt = \Big\langle \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dtx, x\Big\rangle$$

ve (2.0.8) eşitliğinden

$$f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big[f(\frac{3A+V}{4}) + f(\frac{A+3V}{4})\Big] \leq \frac{f(A)+f(B)}{2}$$

Böylece ispat tamamlanır. Bu teoremin bir sonucu olarak

Sonuç 2.0.1 Teorem 2.0.2'in varsayımları altında,

$$0 \leq \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt - f\Big(\frac{A+V}{2}\Big) \leq \frac{f(A)+f(V)}{2} - \int_0^1 f(A + t\eta(B, A))dt$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Örnek 2.0.2 Örnek (2.0.3) deki şartlar altında Her $A, B \in S$ ve $V = A + \eta_1(B, A)$ için

$$\begin{aligned} \left(\frac{A+V}{2}\right)^2 &\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3A+V}{4}\right)^2 + \left(\frac{A+3V}{4}\right)^2\right] \\ &\leq \int_0^1 (A + t\eta_1(B, A))^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A+V}{2}\right)^2 + \left(\frac{A^2+V^2}{2}\right)\right] \\ &\leq \frac{A^2+B^2}{2} \end{aligned}$$

sağlanır.

Şimdi η dönüşümüne göre (C) koşulunu sağlayan bazı operatör preinveks fonksiyon ve inveks küme örnekleri verelim.

Örnek 2.0.3 ([10], Örnek 1-a) Varsayalım 1_H H Hilbert uzayı üzerinde bir birim operatörü,

$$\begin{aligned} T := (-3 \times 1_H, -1 \times 1_H) &= \{A \in B(H)_{sa} : -3 \times 1_H < A < -1 \times 1_H\} \\ U := (1_H, 4 \times 1_H) &= \{A \in B(H)_{sa} : 1_H < A < 4 \times 1_H\} \\ S := T \cup U &\subseteq B(H)_{sa} \end{aligned}$$

ve $\eta_1 : S \times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_1(A, B) = \begin{cases} A - B & A, B \in U \\ A - B, & A, B \in T \\ 1_H - B, & A, B \in T \\ -1_H - B, & A \in U, B \in T \end{cases}$$

olsun. η_1'in (C) koşulunu sağladığı ve S kümesinin η_1 fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. $f(t) = t^2$ reel fonksiyonu S kümesi üzrinde η_1 e göre preinvekstir. Fakat $a, b \in \mathbb{R}$ için $g(t) = a + bt$ fonksiyonu S kümesi üzerinde η_1 e göre preinveks değildir.

Örnek 2.0.4 ([10], Örnek 1-b) $V := (-2\times 1_H, 0)$, $W := (0, 2\times 1_H)$, $S := V \cup W \subseteq B(H)_{sa}$ ve $\eta_2 : S \times S \to B(H)_{sa}$ fonksiyonu

$$\eta_2(A, B) \begin{cases} A - B, & A, B \in V \text{ veya } A, B \in W \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. η_2, (C) koşulunu sağlar ve S kümesi η_2 ye göre invekstir. $a \in \mathbb{R}$ için $f(t) = a$ sabit fonksiyonu S üzerinde η_2 ye göre sadece preinveks fonksiyondur.

Not 2.0.5 Her operatör konveks fonksiyon, $\eta(A, B) = A - B$ dönüşümüne göre operatör preinveks bir fonksiyondur, fakat tersi genelde doğru değildir [10].

Örnek 2.0.5 ([10] Örnek 1-c) $f(t) = -|t|$ konveks bir fonksiyon değildir, fakat f-fonksiyonu

$$\eta_3(A, B) = \begin{cases} A - B, & A, B \geq 0 \text{ veya } A, B \leq 0, \\ B - A, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

Örnek 2.0.6 $f(t) = - \mid t \mid$ fonksiyonu

$$\eta_3(A, B) \begin{cases} A - B, & A, B \geq 0 \;\text{ veya }\; A, B \leq 0 \\ B - A, & \qquad\qquad \text{diğer} \end{cases}$$

fonksiyonuna göre konveks olmayan fakat preinveks olan bir fonksiyondur.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

3.1 Operatör h-preinveks Fonksiyonlar

Biz bu kısımda literatürde olmayan ve ilk defa burada tanımlayacağımız "Operatör h-preinveks Fonksiyonlar" sınıfını ineleyeceğiz.

Tanım 3.1.1 I ve $(0,1) \subset J, \mathbb{R}$'de iki aralık ve $S \subseteq B(H)^+_{sa}, \eta : S \times S \to B(H)^+_{sa}$ dönüşümüne göre invex bir küme olsun. $h \neq 0, h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $\alpha \in [0,1], A$ ve B ise spektrumları I'da olan S' deki keyfi iki pozitif operatör için

$$f(A + \alpha\eta(B,A)) \leq h(\alpha)f(A) + h(1-\alpha)f(B)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye S'deki operatörler için I üzerinde η dönüşümüne göre operatör h-preinveks fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1 $S \subseteq B(H)^+_{sa}$, $\eta : S \times S \to B(H)^+_{sa}$ dönüşümüne göre inveks bir küme ve $f : I \subseteq \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$, I aralığında sürekli fonksiyon olsun.η dönüşümünün S üzerinde (C) şartını sağladığını kabul edelim. Bu durumda her $A, B \in S$, $V = A + \eta(B,A)$ ve $t \in [0,1]$ için f'nin I'da A ve V'nin spektrumları ile birlikte P_{AV} η-yolu üzerinde η'ye göre operatör h-preinveks olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x \in H$, $\| x \|= 1$ için

$$\varphi_{x,A,B}(t) :=< f(A + t\eta(B,A))x, x >$$

şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B}[0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında h-konveks olmasıdır.
İspat. $x \in H$, $\| x \|= 1$,$\varphi_{x,A,B}$ $[0,1]$ üzerinde operatör h-konveks ve

$$C_1 := A + t_1\eta(B,A) \in P_{AV} \subseteq I$$
$$C_2 := A + t_2\eta(B,A) \in P_{AV} \subseteq I$$

$$\begin{aligned}
< f(C_1 + \lambda\eta(C_2, C_1)x, x) > &= < f(A + t_1\eta(B,A) + \lambda\eta(A + t_2\eta(B,A), A + t_1\eta(B,A)))x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) + \lambda(t_2 - t_1)\eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + (1-\lambda)t_1\eta(B,A) + \lambda t_2\eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\eta(B,A))x, x > \\
&= \varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \\
&\leq h(\lambda)\varphi_{x,A,B}(t_1) + h(1-\lambda)\varphi_{x,A,B}(t_2) \\
&= h(\lambda) < f(C_1)x, x > + h(1-\lambda) < f(C_2)x, x >
\end{aligned}$$

Doğru olan aşağıdaki eşitliklerden

$$\varphi_{x,A,B}(t_1) =< f(A + t_1\eta(B,A))x, x >=< f(C_1)x, x >$$

$$\varphi_{x,A,B}(t_2) =< f(A + t_2\eta(B,A))x, x >=< f(C_2)x, x >$$

$f, P_{AV}\eta$-yolu üzerinde η'ye göre operatör h-preinvekstir. Tersine, her $A, B \in S$, $V = A + \eta(B, A)$, f fonksiyonu P_{AV} η-yolu üzerindeki η'ye göre operatör h-preinveks ve t_1,t_2 $\in [0, 1]$ olsun. Bu durumda ,

$$\varphi_{x,A,B}(t) :=< f(A + \eta(B,A))x, x >$$

Şeklinde tanımlanan $\varphi_{x,A,B}$: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun h-konveks olduğunu gösterelim. İddiaya göre f fonksiyonu P_{AV} η-yolu üzerinde η'ya göre operatör h-preinveks olduğundan her A,$B \in S$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,A,B}((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) &= < f(A + ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)\eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) - \lambda t_1\eta(B,A) + \lambda t_2\eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) + (t_2 - t_1)\lambda\eta(B,A))x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) + \lambda[(t_2 - t_1)\eta(B,A)])x, x > \\
&= < f(A + t_1\eta(B,A) + \lambda[\eta(A + t_2\eta(B,A), A + t_1\eta(B,A))]) > \\
&= < f(A^* + \lambda\eta(B^*, A^*))x, x >
\end{aligned}$$

$$A^* := A + t_1\eta(B,A)$$

$$B^* := A + t_2\eta(B,A)$$

f operatör h-preinveks olduğundan

$$\begin{aligned}
< f(A^* + \lambda\eta(B^*, A^*))x, x > &\leq h(\lambda) < f(A^*)x, x > +h(1-\lambda) < f(B^*)x, x > \\
&\leq h(\lambda) < f(A + t_1\eta(B,A))x, x > \\
&\quad +h(1-\lambda) < f(A + t_2\eta(B,A))x, x > \\
&\leq h(\lambda)\varphi_{x,A,B}(t_1) + h(1-\lambda)\varphi_{x,A,B}(t_2)
\end{aligned}$$

olup buradan $\varphi_{x,A,B}$ $[0, 1]$ aralığı üzerinde h-konvekstir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2 f,g iki operatör h-preinveks fonksiyon olsun. Bu durumda eğer f ve g aynı sıralı fonksiyonlar ve $h(t) + h(1-t) \leq 1$ ise o zaman fg'de aynı zamanda bir operatör

h-preinveks fonksiyondur.

İspat. f ve g operatör h-preinveks fonksiyon olduğundan,

$$f(A+t\eta(B,A)) \leq h(1-t)f(A)+h(t)f(B)$$
$$g(A+t\eta(B,A)) \leq h(1-t)g(A)+h(t)g(B)$$

yazabiliriz. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarparsak

$$\begin{aligned}
f(A+t\eta(B,A))g(A+t\eta(B,A)) &\leq [h(1-t)f(A)+h(t)f(B)][h(1-t)g(A)+h(t)g(B)] \\
&= [h(1-t)]^2 f(A)g(A)+h(t)h(1-t)[f(A)g(B)+f(B)g(A)] \\
&\quad +[h(t)]^2 f(B)g(B) \\
&\leq [h(1-t)]^2 f(A)g(A)+h(t)h(1-t)[f(A)g(A)+f(B)g(B)] \\
&\quad +[h(t)]^2 f(B)g(B) \\
&= [h(1-t)f(A)g(A)+h(t)f(B)g(B)][h(t)+h(1-t)] \\
&\leq h(1-t)f(A)g(A)+h(t)f(B)g(B)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece iki operatör h-preinveks fonksiyonun çarpımı da operatör h-preinvekstir.

Teorem 3.1.3 f bir operatör h-preinveks fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f(2A+\eta(B,A)-x) \leq [h(t)+h(1-t)][f(A)+f(B)]-f(x)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $f: I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve f operatör h-preinveks olduğundan $x = A+t\eta(B,A) \in I$ yazabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
f(2A+\eta(B,A)-x) &= f(2A+\eta(B,A)-A+t\eta(B,A)) \\
&= f(A+(1-t)\eta(B,A)) \\
&\leq h(t)f(A)+h(1-t)f(B) \\
&= [h(t)+h(1-t)][f(A)+f(B)]-[h(1-t)f(A)+h(t)f(B)] \\
&\leq [h(t)+h(1-t)][f(A)+f(B)]-f(A+t\eta(B,A)) \\
&= [h(t)+h(1-t)][f(A)+f(B)]-f(x)
\end{aligned}$$

istenen sonucu elde ederiz.

Teorem 3.1.4 $f: I \to (0,\infty)$ bir operatör h-preinveks fonksiyon ve $w: [A, A+\eta(B,A)] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilir ve $A+\frac{1}{2}\eta(B,A)$'ya göre simetrik bir fonksiyon olsun.

Burada $A < A + \eta(B, A), h(\frac{1}{2}) \neq 0$ ve η da (C) şartını sağlasın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) \int_A^{A+\eta(B,A)} w(x)dx &\leq \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \\ &\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}(h(t)+h(1-t)) \int_A^{A+\eta(B,A)} w(x)dx\end{aligned}$$

İspat. İddiaya göre f operatör h-preinveks olduğundan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) \int_A^{A+\eta(B,A)} w(x)dx = \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) w(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(\frac{2A+\eta(B,A)-x+x}{2}) w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} \int_A^{A+\eta(B,A)} [h(\frac{1}{2}) f(2A+\eta(B,A)-x) + f(x)] w(x)dx \\
&= \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(2A+\eta(B,A)-x) w(2A+\eta(B,A)-x)dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \\
&= \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \\
&= \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(2A+\eta(B,A)-x) w(2A+\eta(B,A)-x)dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \\
&= \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(2A+\eta(B,A)-x) w(x)dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} [(h(t)+h(1-t))[f(A)+f(B)] - f(x)] w(x)dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \\
&\leq \frac{f(A)+f(B)}{2}(h(t)+h(1-t)) \int_A^{A+\eta(B,A)} w(x)dx
\end{aligned}$$

Gerekli hesaplamalar yapıldığında teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.1.5 $f : I \to (0, \infty)$ ve $w : I \to (0, \infty)$ sırasıyla operatör h_1-preinveks ve operatör h_2-preinveks fonksiyon olsunlar. Burada $A + \eta(B, A)$, $h_1(\frac{1}{2}) \neq 0$,$h_2(\frac{1}{2}) \neq 0$. Bu durumda eğer $\eta(\cdot,\cdot)(C)$ şartını sağlıyorsa aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\frac{1}{2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2})w(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) \quad - \quad \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx$$

$$\leq M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt + N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt.$$

Burada

$$M(A,B) = f(A)w(A) + f(B)w(B) \tag{3.1.1}$$

ve

$$N(A,B) = f(A)w(B) + f(B)w(A) \tag{3.1.2}$$

İspat. İddiaya göre f ve w sırasıyla operatör h_1 ve h_2-preinveks olduklarından ve η da (C) şartını sağladığından aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2})w(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) = f(A+(1-t)\eta(B,A)$$

$+\frac{1}{2}\eta(A+t\eta(B,A), A+(1-t)\eta(B,A)))w(A+(1-t)\eta(B,A)+\frac{1}{2}\eta(A+t\eta(B,A), A+(1-t)\eta(B,A)))$
$\leq h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})[f(A+t\eta(B,A)) + f(A+(1-t)\eta(B,A))][w(A+t\eta(B,A)) + w(A+(1-t)\eta(B,A))]$
$\leq h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})\big[f(A+t\eta(B,A)) + w(A+t\eta(B,A)) + f(A+(1-t)\eta(B,A))w(A+(1-t)\eta(B,A))\big]$
$+h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})[h_1(t)h_2(t)]M(A,B) + [h_1(t)h_2(t) + h_1(1-t)h_2(1-t)]N(A,B)$
Yukarıdaki eşitsizliğin t'ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinden integralini alırsak

$$f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2})w(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) - \frac{2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx$$

$$\leq 2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})[M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt + N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt]$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.6 $f : I \to (0,\infty)$ ve $w : I \to (0,\infty)$ sırasıyla operatör h_1-preinveks ve operatör h_2-preinveks fonksiyon olsunlar. Bu durumda $A < A+\eta(B,A)$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \leq M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt + N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt$$

Burada $M(A,B)$, (3.1.1) ve $N(A,B)$ (3.1.2) ise ifadeleridir.

İspat. f, w negatif olmayan h_1 preinveks ve h_2-preinveks fonksiyon olsun, her $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned} f(A+t\eta(B,A))w(A+t\eta(B,A)) &\leq [h_1(1-t)f(A)+h_1(t)f(B)][h_2(1-t)w(A)+h_2(t)w(B)] \\ &= h_1(1-t)h_2(1-t)f(A)w(A)+h_1(t)h_2(1-t)f(B)w(A) \\ &+ h_1(1-t)h_2(t)f(A)w(B)+h_1(t)h_2(t)f(B)w(B) \end{aligned}$$

Üstteki eşitsizliğin $[0,1]$ aralığında t'ye göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx &\leq f(A)w(A)\int_0^1 h_1(1-t)h_2(1-t)dt \\ &\quad +f(A)w(B)\int_0^1 h_1(1-t)h_2(t)dt \\ &\quad +f(B)w(A)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \\ &\quad +f(B)w(B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\ &= [f(A)w(A)+f(B)w(B)]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt \\ &\quad +[f(A)w(B)+f(B)w(A)]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \\ &= M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt+N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise

$$\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)w(x)dx \leq M(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)dt+N(A,B)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)dt$$

olup, böylece ispat tamamlanır .

3.2 Mutlak Değerlerinin Kuvveti Operatör h-Preinveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Şimdi diferensiyellenebilen operatör h-preinveks fonksiyonlar için bazı yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri elde edelim. Bunu yapabilmek için ilk önce bazı lemmalara ihtiyacımız var.

Lemma 3.2.1 $f : I \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilen bir dönüşüm $A < A+\eta(B,A)$ ve $f' \in L_1[A, A+\eta(B,A)]$ olsun.

Eğer

$$\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx-\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2}=\frac{\eta(B,A)}{2}[\int_0^1 (1-2t)f'(A+t\eta(B,A))dt]$$

ise aşağıdaki eşitlik doğrudur.

İspat. Lemmanın iddialarına göre aşağıdakileri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-2t)f'(A+t\eta(B,A))dt &= |\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}(1-2t)|_0^1+2\int_0^1 \frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}dt \\
&= -\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}-\frac{f(B)}{\eta(B,A)}+\frac{2}{\eta(B,A)}\int_0^1 f(A+t\eta(B,A))dt \\
&= -\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{\eta(B,A)}+\frac{2}{[\eta(B,A)]^2}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx \\
&= \frac{2}{\eta(B,A)}[-\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2}+\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx]
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır .

Teorem 3.2.1 $f: I\to\mathbb{R}$, I^o diferensiyellenebilir bir dönüşüm $A<A+\eta(B,A)$ şartını sağlayan A,$A+\eta(B,A)\in I^o$ olsun. Bu durumda eğer $|f'|$,$[A,A+\eta(B,A)]$ üzerinde bir operatör h-preinvex fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2}-\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\right| \\
&\leq \frac{\eta(B,A)}{2}\Big[|f'(A)|+|f'(B)|\Big]\int_0^1 |1-2t|h(t)dt
\end{aligned}$$

İspat. Bu teoremin şartları altında ispat aşağıda açık bir şekilde yapılmıştır.

$$\begin{aligned}
&|\frac{f(A)+f(A+\eta(B,A))}{2}-\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx| \\
&= |\frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(A+t\eta(B,A))dt| \\
&\leq \frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|dt \\
&\leq \frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1 |1-2t|[h(1-t)|f'(A)|+h(t)|f'(B)|]dt \\
&\leq \frac{\eta(B,A)}{2}[|f'(A)|+|f'(B)|]\int_0^1 |1-2t|h(t)dt
\end{aligned}$$

Teorem 3.2.2 $f : I \to \mathbb{R}$, I^o diferensiyellenebilir bir dönüşüm $A < A + \eta(B, A)$ şartını sağlayan A,$A + \eta(B, A) \in I^o$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[A, A + \eta(B, A)]$ üzerinde bir operatör h-preinvex fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur. Burada $q \geq 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$'dir.

$$\Big|\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} - \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big|$$

$$\leq \frac{\eta(B, A)}{2(p + 1)^{\frac{1}{p}}} \Big[[|f'(A)|^{\frac{p}{p-1}} + |f'(B)|^{\frac{p}{p-1}}] \int_0^1 h(t)dt\Big]^{\frac{p-1}{p}}$$

İspat. Bu teoremin şartları altında aşağıdakileri yazabiliriz.

$$|\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} - \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx| = |\frac{\eta(B, A)}{2} \int_0^1 (1-2t)f'(A+t\eta(B, A))dt|$$

$$\leq \frac{\eta(B, A)}{2} \int_0^1 |1 - 2t||f'(A + t\eta(B, A))|dt$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu biliyoruz. Şimdi integraller için Hölder eşitsizliğini yukarıdaki eşitsizliğe uygularsak

$$\Big|\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} - \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big|$$

$$\leq \frac{\eta(B, A)}{2}\Big(\int_0^1 |1 - 2t|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^1 |f'(A + t\eta(B, A))|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$

elde ederiz. İddiaya göre f operatör h-preinveks olduğundan

$$\int_0^1 |f'(A + t\eta(B, A))|^q \leq \int_0^1 \Big[h(1 - t)|f'(A)|^q + h(t)|f'(B)|^q\Big]dt$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.3 $f : I \to \mathbb{R}$, I^o diferensiyellenebilir bir dönüşüm $A < A + \eta(B, A)$ şartını sağlayan A,$A + \eta(B, A) \in I^o$ olsun . Eğer $|f'|^q$,$[A, A + \eta(B, A)]$ aralığı üzerinde bir operatör h-preinvex fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$\Big|\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} - \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\Big|$$

$$\leq \frac{\eta(B, A)}{2}(\frac{1}{2})^{1-\frac{1}{q}}\Big[[|f'(A)|^q + |f'(B)|^q] \int_0^1 h(t)dt\Big]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Lemma 3.2.1' i kullanarak aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$|\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} - \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx|$$

$$= |\frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(A+t\eta(B,A))dt| \leq \frac{\eta(B,A)}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|dt$$

Power mean eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|dt \leq (\int_0^1 |1-2t|dt)^{1-\frac{1}{q}}(\int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|^q dt)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. f operatör h-preinveks olduğundan

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t||f'(A+t\eta(B,A))|^q dt &\leq \int_0^1 |1-2t|[h(1-t)|f'(A)|^q + h(t)|f'(B)|^q]dt \\ &= [|f'(A)|^q + h(t)|f'(B)|^q]\int_0^1 |1-2t|h(t)dt\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.4 $f : I \to (0,\infty)$ diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $A, A+\eta(B,A) \in I, A < A+\eta(B,A)$ olsun. Eğer $f' \in L_1[A, A+\eta(B,A)]$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta(B,A)}f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2}) - \frac{1}{[\eta(B,A)]^2}\int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A+t\eta(B,A))dt \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(A+t\eta(B,A))dt\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur.

İspat

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A+t\eta(B,A))dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(A+t\eta(B,A))dt$$

$$\begin{aligned}t = u \int f'(A+t\eta(B,A))dt &= \int dv \\ dt = du\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)} &= v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A+t\eta(B,A) &= x, & \text{for} \quad t = 0 \;\; x = A \\ \eta(B,A)dt &= dx, & \text{for} \quad t = \frac{1}{2} \;\; x = A + \frac{\eta(B,A)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t-1 = u \int f'(A+t\eta(B,A))dt &= \int dv \\ dt = du\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)} &= v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A+t\eta(B,A) &= x, & \text{for} \quad t = \frac{1}{2} \;\; x = A + \frac{\eta(B,A)}{2} \\ \eta(B,A)dt &= dx, & \text{for} \quad t = 1 \;\; x = A + \eta(B,A)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u.v-\int v.du &= |\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}t|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}dt\\
&+|\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}(t-1)|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(A+\frac{\eta(B,A)}{2})}{\eta(B,A)}+\frac{f(A+\frac{\eta(B,A)}{2})}{\eta(B,A)} &- [\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(A+t\eta(B,A))}{\eta(B,A)}dt]\\
&- [\int_A^{A+\frac{\eta(B,A)}{2}}\frac{f(x)dx}{[\eta(B,A)]^2}+\int_{A+\frac{\eta(B,A)}{2}}^{A+\eta(B,A)}\frac{f(x)dx}{[\eta(B,A)]^2}]\\
&= \frac{1}{\eta(B,A)}f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2})\\
&- \frac{1}{[\eta(B,A)]^2}\int_A^{A+\eta(B,A)}f(x)dx
\end{aligned}
$$

İspat böylece tamamlanır.

Teorem 3.2.5 $f: I \to \mathbb{R}$, I^0 diferensiyellenebilir bir dönüşüm $A < A+\eta(B,A)$ şartını sağlayan $A, A+\eta(B,A) \in I^0$ olsun. Bu durumda eğer $|f'|$,$[A, A+\eta(B,A)]$ üzerinde bir operatör h-preinvex fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)}f(x)dx-f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2})\right| &\leq \eta(B,A)[|f'(A)|(\int_0^{\frac{1}{2}}th(1-t)dt\\
&+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)h(1-t)dt)\\
&+|f'(B)|(\int_0^{\frac{1}{2}}th(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)h(t)dt)]
\end{aligned}
$$

İspat. Lemma 3.2.1'i uygulayarak,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\eta(B,A)}\int_A^{A+\eta(B,A)}f(x)dx-f(\frac{2A+\eta(B,A)}{2})\right|\\
&\leq \eta(B,A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}tf'(A+t\eta(B,A))dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f'(A+t\eta(B,A))dt\right]\\
&\leq \eta(B,A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t\Big[h(1-t)|f'(A)|+h(t)|f'(B)|\Big]dt\right.\\
&\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\Big[h(1-t)|f'(A)|+h(t)|f'(B)|\Big]dt\right]\\
&= \eta(B,A)\left[|f'(A)|\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}th(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)h(1-t)dt\Big)\right.\\
&\left.+|f'(B)|\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}th(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)h(t)dt\Big)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.6 $f : I \to \mathbb{R}$, I^0 diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $A < A + \eta(B, A)$ için $A, A + \eta(B, A) \in I^0$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[A, A + \eta(B, A)]$ üzerinde bir operatör h-preinvex fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur. Burada $q \geq 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$'dir.

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(A) + f(A + \eta(B, A))}{2} - \frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx\right| \\ \leq \frac{\eta(B, A)}{2} \Big(\frac{1}{2(p+1)}\Big)^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \Big[h(1-t)|f'(A)|^q + h(t)|f'(B)|^q\Big]^{\frac{1}{q}} dt \right. \\ \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \Big[h(1-t)|f'(A)|^q + h(t)|f'(B)|^q\Big]^{\frac{1}{q}} dt\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\eta(B, A)} \int_A^{A+\eta(B,A)} f(x)dx - f(\frac{2A + \eta(B, A)}{2})\right| \\ \leq \eta(B, A)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(A + t\eta(B, A))dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f'(A + t\eta(B, A))dt\right] \\ \leq \eta(B, A)\left[\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(A + t\eta(B, A))|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \Big(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(A + t\eta(B, A))|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}\right]\end{aligned}$$

yazabiliriz. İddiaya göre f operatör h-preinveks olduğundan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Big|f'(A + t\eta(B, A))\Big|^q dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \Big[h(1-t)|f'(A)|^q + h(t)|f'(B)|^q\Big]$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \Big|f'(A + t\eta(B, A))\Big|^q dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \Big[h(1-t)|f'(A)|^q + h(t)|f'(B)|^q\Big] dt$$

yazabiliriz . Ayrıca

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p dt = \frac{1}{2^{p+1}(p+1)}$$

doğru olan eşitsizliklerini kullanarak ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak, bu yüksek lisans tez çalışmasında;

1. Bir Hilbert uzayında öz eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için operatör h preinveks kavramı verildi.
2. Bu yeni tanım yardımıyla yeni eşitsizlikler ifade ve ispat edildi.
3. Elde edilen bu sonuçlar uluslararası sempozyumlarda sözlü olarak sunuldu[18], [19], [20].
4. Sunulan bildiriler uluslararası hakemli dergilerde basıldı[21], [22].

Bu tezden elde edilen sonuçlar doğrultusundaki önerimiz,

1. Sınırlı operatörler teorisi ile eşitsizlikler teorisi alanında çalışmak isteyen bilim insanlarına konveksliğin diğer çeşitlerini bir Hilbert uzayında öz eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonlarına taşıyabilmesi için yol ve yöntem göstereceğini,
2. Bu yüksek lisans tez çalışmasında elde edilen sonuçlar daha da genelleştirilebilir.
3. Böylece bu alandaki boşluklar yeni yapılacak bilimsel çalışmalarla doldurulabileceğini düşünüyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Elster K. H., Neshe R. 1980 *Optimality conditions fo some non-convex problems*, Springer-Verlog, New York,

[2] Hayaski M., Komiya H., 1980 *Perfect duality for convexlike programs*, J. Optim. Theory Appl. 38: 179-189.

[3] Hanson M. A. , 1981 *On sufficency of the Kuhn-Tucker conditions*, J. Math. Anal. Appl., 80: 545-550.

[4] Craven B. D., 1981 *Invex functions and constrained local minima*, Bull. Austral. Math. Soc. 24: 357-366.

[5] Craven B. D., Glover B. M. 1985 *Invex functions and duality*, J. Austral Math. Soc. Ser. A. 39: 1-20.

[6] Ben-Israel A., Mond B., 1986 *What is invexity?*, J. Austral Math. Soc. Ser. B. 28: 1-29.

[7] Martin D. H., 1985 *The essence of invexity*, J.Optim. Theory Appl. 47: 65- 76.

[8] Hanson M. A., Mond B. 1987 *Convex Transformable Probamming Problems and Invexity*, J. Inf. Opt. Sci. 8: 201- 207.

[9] Barani A., Ghazanfari A.G. , Dragomir S.S., 2012 *Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex*, J. Inequal. Appl. Vol: Article ID 247.

[10] Ghazanfari A. G. ,Shakoori M. ,Barani A. ,Dragomir S. S., *Hermite-Hadamard type inequality for operator preinvex functions*, math. FA, 4(2013); Available online at http://arXiv:1306.0730vl.

[11] Wang S. H. and Liu X. M.,2015 *Hermite-Hadamard type inequalities for operator s-preinvex functions*, J. Nonlinear Sci. Appl., 8, 1070-1081.

[12] Wang S. H. and Liu X. M.,2017 *Hermite-Hadamard type inequalities for operator α-preinvex functions*, J. Ana. Num. Theor. 5, No. 1, 13-17

[13] Antczak T. , 2005 *Mean value in invexity analysis*, Nonlinear Anal., 60: 1473-1484.

[14] Mohan S. R., Neogy S. K., 1995 On invex sets and preinvex function, J. Math. Anal. Appl., 189: 901-908; Available online at http://dx.doi.org/10.1006/jmaa. 1995-1057.

[15] Yang X. M., Li D. 2001 *On properties of preinvex functions*, J. Math. Anal. Appl., 256: 229-241

[16] Furuta T. , Mićić Hot J., Pečarić J. , Seo Y., Mond-Pečarić, 2015 *Method in Operator Inequalities*, Monograhs in Inequalities, Element, Zagreb.

[17] Dragomir S. S., 2011 *Hermite Hadamard type inequalities for operator convex functions*, Appl. Math. Comput. 218(3): 766-772.

[18] Unluyol E., Başköy E., Başköy (Ünal) E., *On operator h-preinvex functions*, International Conference on Computational and Statistical Methods in Applied Sciences (COSTAS 2017), 9-11 Nov. 2017, Samsun, Turkey, p. 53.

[19] Unluyol E., Başköy E., Altunç C., *Some new Hermite-Hadamard type inequalities in terms of operator h-preinvex functions in Hilbert space*, International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2018), 30 April-4 May 2018, IC Santai Family Resort, Belek-Antalya Turkey, p. 35.

[20] Unluyol E., Başköy E., *New Integral Inequalities for Operator h-preinvex Functions in Hilbert Spaces*, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), Ordu University, Ordu, 27-29 June 2018, p. 171-172.

[21] Unluyol E., Başköy E., Altunç C., *Some new Hermite-Hadamard type inequalities in terms of operator h-preinvex functions in Hilbert space*, AIP Conference Proceedings 1991, 020021 (2018); https://doi.org/10.1063/1.5047894

[22] Unluyol E., Başköy E., *Operator h-preinvex class for continuous functions of selfadjoint operators*, Rom. J. Math. Comp. Sci., 2018 8(2) 102-109.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	ELİF BAŞKÖY
Doğum Yeri	**:**	Altınordu, Ordu
Doğum Tarihi	**:**	03.10.1989
Medeni Hali	**:**	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	**:**	İngilizce
İletişim Bilgileri	**:**	Şirinevler mahallesi 681.sokak No:12 D:9 Altınordu Ordu baskoy.elf@gmail.com
Lisans	**:**	Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2012
Çalıştığı Yer	**:**	Alankent Çok Programlı Anadolu Lisesi, 2015 − *Halen*,