T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WİRTİNGER TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

EDA ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Eda ŞAHİN

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-2006 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖZET

WİRTİNGER TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

EDA ŞAHİN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 43 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Prof. Dr. ERHAN SET)

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Wirtinger eşitsizliğinin tarihsel gelişimi ile ilgili bilgileri içermektedir. İkinci bölüm ise Wirtinger integral eşitsizliklerinin farklı versiyonlarını ve genelleştirmelerinin yanı sıra konveks fonksiyon sınıfları için elde edilen Wirtinger tipli integral eşitsizliklerini içermektedir. Üçüncü bölüm ise η-konveks, *s*-konveks, p-fonksiyonu, quasi-konveks, *m*-konveks, (α, *m*)-konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni Wirtinger tipli eşitsizliklerin sunulduğu bulgular bölümüdür. Son bölüm ise bazı sonuç ve önerileri içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Wirtinger eşitsizliği, konveks fonksiyon, *s*-konveks fonksiyon, quasi-konveks fonksiyon, *m*-konveks fonksiyon, (α, *m*)-konveks fonksiyon, MN-konveks fonksiyon, p-fonksiyonu.

ABSTRACT

WIRTINGER TYPE INTEGRAL INEQUALITIES

EDA ŞAHİN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 43 PAGES

(SUPERVISOR: Prof. Dr. ERHAN SET)

This thesis consists of four chapters. The first chapter contains information about the historical development of Wirtinger inequality. The second chapter includes different versions and generalizations of Wirtinger integral inequalities as well as Wirtinger type integral inequalities obtained for convex function classes. The third chapter is the section of findings where the new Wirtinger type inequalities for η-convex, *s*-convex, p-function, quasi-convex, *m*-convex, (α, *m*)-convex functions are presented. The last chapter contains some results and recommendations.

Keywords: Wirtinger inequality, convex function, *s*-convex function, quasi-convex function, *m*-convex function, (α, *m*)-convex function, MN-convex function, p-function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca yüksek bilgi ve tecrübeleriyle iyi bir yol gösterici olan, her zaman anlayışla yaklaşan, tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince her türlü desteği gösteren çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan SET'e ve tez yazım aşamasında desteklerini ve fikirlerini esirgemeyen kardeşim Rıdvan ERKOÇ ve arkadaşım Barış ÇELİK'e teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim annem, babam, kardeşlerim ve eşim Ozan ŞAHİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{B}$	:	Beta Fonksiyonu
$\boldsymbol{C^1[a,b]}$	:	[a,b] Aralığında Birinci Mertebeden Sürekli Türevlere Sahip Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{C^n[a,b]}$	:	[a,b] Aralığında n. Mertebeden Sürekli Türevlere Sahip Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{f'}$	:	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$\boldsymbol{I}$	:	Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
$\boldsymbol{I^\circ}$	:	I'nın İçi
$\boldsymbol{J_p(x)}$	:	Birinci Türden Bessel Fonksiyonları
$\boldsymbol{K_m(b)}$	:	m-Konveks Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{K_m^\alpha(b)}$	:	(α, m)-Konveks Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{K_s^1}$	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{K_s^2}$	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{L[a,b]}$	:	[a,b] Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{L_2[a,b]}$	:	[a,b] Aralığında İkinci Mertebeden İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{L_r[a,b]}$	:	[a,b] Aralığında r. Mertebeden İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Gama Fonksiyonu

1. GİRİŞ

1969 Yılına kadar Wirtinger eşitsizliği üzerine yapılmış çalışmalar Mitrovic ve Vasic tarafından yazılan "An Integral Inequality Ascribed To Wirtinger and Its Variations and Generalizations" başlıklı çalışmada aşağıdaki gibi özet olarak verilmiştir [30].

f, periyodu 2π olan bir periyodik fonksiyon ve $f' \in L^2$ olsun. $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ ise,

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx \tag{1.0.1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart A ve B sabitler olmak üzere, $f(x) = A\cos x + B\sin x$ olmasıdır. (1.0.1) eşitsizliği literatürde Wintinger eşitsizliği olarak bilinir. Wirtinger'in ispatı ilk kez 1916'da W. Blaschke'nin kitabında yayınlanmıştır. Ancak (1.0.1) eşitsizliğinin daha önce var olduğu da bilinmektedir. Örneğin, 1905 yılında E. Almansi f ve f', (a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olması şartları altında,

$$\int_a^b f'(x)^2 dx \geq \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b f(x)^2 dx \tag{1.0.2}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamıştır. Bu şartlar 1911'de E. E. Levi ve 1914'te L. Tonele tarafından zayıflatılmıştır. Bununla birlikte, (1.0.2) formundaki eşitsizlikler ve daha genel eşitsizlikler Almansi'nin sonucundan önce bile bulunabilir. Örneğin, 1896 yılında E. Picard tarafından yazılan kitapta,

$$\frac{\int_a^b p(x)f(x)^2 dx}{\int_a^b f'(x)^2 dx}$$

ifadesini maksimize eden f fonksiyonunu bulma problemi, f ve f' sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve p, (a, b) aralığında pozitif sürekli fonksiyon olma şartları altında ele alınmıştır. Ayrıca (1.0.2) eşitsizliği 1910'da J. Hadamard tarafından yazılan kitapta da bulunabilir.

1885'te H. A. Schwarz makalesinde,

$$\frac{\iint\limits_T p(x,y)f(x,y)^2 dxdy}{\iint\limits_T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) dxdy}$$

bölümünün maksimum değerini vermiştir. Daha sonra 1894'te H. Poincare, T konveks bir bölge, $\int\int_T f(x,y)dxdy = 0$ ve l bu bölgenin maksimum kirişi olmak üzere Schwarz'ın yukarıda verdiği bölümün $p(x,y) \equiv 1$ için $\frac{7l^2}{24}$'ten daha küçük olduğunu ispatlamıştır. Aynı makalede H. Poincare üç boyutlu bir bölge için benzer bir problemi ele almış ve ilgili bölüm için tahmin vermiştir. 1906 yılında da E. E. Levi; $p(x,y) \equiv 1$ için aynı bölümü biraz farklı koşullar altında incelemiş ve "O, bir T bölgesinin çevresinde maksimum ve minimum mesafesi sırasıyla, l ve L olan bir nokta olmak üzere T, bu noktaya göre konveks bir bölge olsun. $\int\int_T f(x,y)dxdy = 0$ ise, bu taktirde bu bölüm $K = \min\left(\frac{3l}{2L^3}, \frac{1}{13L^2}\right)$ olmak üzere $\frac{1}{K}$'dan daha küçüktür" sonucunu ispatlamıştır.

E. E. Levi 1913 yılında da (1.0.1)'e benzer formda ki eşitsizliklerle birlikte (1.0.1)'deki aynı integralleri içeren bazı eşitsizlikleri ispatlamıştır. Örneğin bunlardan biri aşağıdaki gibidir:

f, türevi (a,b) üzerinde sınırlı bir fonksiyon ve $f(a) = f(b) = 0$ olsun. Ayrıca $|f(x)| < a$ olsun. (a,b) aralığında k_1 ve k_2 iki tamamlayıcı ölçülebilir alt küme olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_{k_1} f'(x)^2 dx + a(b-a) \int_{k_2} |f'(x)| dx,$$

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2 + 8}{16} \int_{k_1} f'(x)^2 dx + a\left(\frac{b-a}{2} + 1\right) \int_{k_2} |f'(x)| dx$$

olur.

1949'da A. Pleijel, f, 2π periyotlu bir fonksiyon ve $f'' \in L^2[0,2\pi]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx}{\int_0^{2\pi} f''(x)^2 dx} \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \left(\int_0^{2\pi} f(x) dx\right)^2 \\ &\leq 2\pi \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx \end{aligned}$$

eşitsizliğini ispatlamış olup ikinci eşitsizlik aslında (1.0.2)'nin bir geliştirilmiş halidir. Bu eşitsizlik daha önce 1919'da M. Janet tarafından daha genel bir formda ele alınmıştır.

M. Janet'ın makalelerinden esinlenerek 1930'da G. Cimmino aşağıdaki sonucu ispatlamıştır:

$p < n$ ve f fonksiyonunun $(n-1)$. mertebeye kadar olan türevleri (a,b) üzerinde sürekli olmak üzere $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = f(b) = f'(b) = ... = f^{(n-1)}(b) = 0$ olsun. Bu taktirde, $2v_{n,p}$, $f^{(2n)}(x) - (-1)^{n+p} f^{(2p)}(x) = 0$ denkleminin n bağımsız çözümünün

Wronskian'ın en küçük pozitif sıfırı olmak üzere,

$$\frac{\int_a^b f^{(n)}(x)^2 dx}{\int_a^b f^{(p)}(x)^2 dx} \geq \left(\frac{2v_{n,p}}{b-a}\right)^{2n-2p} \tag{1.0.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Daha sonra M. Janet 1932'de (1.0.3) eşitsizliğinin minimum değerini açıkça belirleme problemini ele almıştır.

1940'ta E. Schwidt, aşağıdaki sonucu ispatlamıştır:
z, $[0, \lambda]$ aralığında sürekli bir fonksiyon, $z(0) = z(\lambda)$, $\min\limits_{0 \leq t \leq \lambda} z(t) = m$, $\max\limits_{0 \leq t \leq \lambda} z(t) = M$ ve $M+m = 0$ olsun. z', türevi tanımlı, sonlu sayıda nokta dışındaki tüm noktalarda sürekli ve mutlak integrallenebilir olsun. Bu taktirde, $a > 0$, $b \geq 1$ ve $H(u,v) = \frac{u^u v^v}{(u+v)^{u+v}} \frac{\Gamma(1+u+v)}{\Gamma(1+u)\Gamma(1+v)}$ olmak üzere,

$$\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda |z(t)|^a dt\right)^{\frac{1}{a}} \leq \frac{1}{4} H\left(\frac{1}{a}, \frac{b-1}{b}\right)\left(\lambda^{b-1}\int_0^\lambda |z'(t)|^b dt\right)^{\frac{1}{b}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğin hipotezindeki koşullar $a = b \geq 1$ olacak şekilde değiştirilirse ve $m + M = 0$ koşulu ihmal edilirse, $0 < t < \lambda$ için,

$$\int_0^\lambda \left|z(t) - \frac{1}{2}(m+M)\right|^b dt \leq \frac{1}{b-1}\left(\frac{b}{4\pi}\sin\frac{\pi}{b}\right)^b \lambda^b \int_0^\lambda |z'(t)|^b dt$$

olur ki buradan $b = 2$ için, $\int_0^\lambda z(t)dt = 0$ ek koşulu ile birlikte Wirtinger eşitsizliği,

$$\int_0^\lambda z(t)^2 dt \leq \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^\lambda z'(t)^2 dt - \lambda\left(\frac{m+M}{2}\right)^2$$

şeklinde geliştirilmiş olur. Ayrıca E. Scmidt'in bu sonucu ile ilişkili olan sonuçlar 1944'te R. Bellman tarafından verilmiştir.

D. G. Northcott'in sonucunun genelleştirilmesi 1943'te R. Bellman tarafından k, n doğal sayılar ve a_n'ler sabitler olmak üzere, $f^{(n)} \in L^{2k}[-\pi, \pi]$, $f(x) = f(x + 2\pi)$ ve $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = 0$ koşulları altında,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^{2k} dx \leq a_n^{2k} \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n)}(x)^{2k} dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğin $k = 1$ ve $n = 1$ için (1.0.1) eşitsizliğinden daha zayıf olduğu görülmektedir.

1958'de P. R. Beesach, (1.0.1) eşitsizliğinin çeşitli genelleştirmelerini vermiştir ki bunlardan biri şu şekildedir:

p, bazı $(-a, a)$ aralıklarında sürekli bir fonksiyon olmak üzere ,

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0$$

diferansiyel denklemi $\int_{-a}^{+a} p(x)dx \geq 0$ ve $x \in (-a, a)$ için $y_1(x) \geq 0$ çözümüne sahip olsun. Bu taktirde,

$$\int_{-a}^{+a} f'(x)^2 dx \geq \int_{-a}^{+a} p(x)f(x)^2 dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ ve ya $y_1(-a) \neq 0$ ya da $y_1(a) \neq 0$ iken, $f(x) = Ay_1(x)$ olmasıdır. Aynı makalede P. R. Beesack,

$$\int_{-a}^{+a} f''(x)^2 dx \geq \int_{-a}^{+a} f(x)f(x)^2 dx$$

formundaki eşitsizlikleri de dikkate almıştır.

1969'da W. J. Kim, Wirtinger eşitsizliği ile ilişkili aşağıdaki eşitsizliği vermiştir: f, $[a, b]$ üzerinde m. mertebeye kadar türevleri ile birlikte sürekli bir fonksiyon olsun ve bu fonksiyon ilk $m-1$ türevleri ile birlikte $x = a$ ve $x = b$ için sıfıra eşit olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b f^m(x)^2 dx > \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m} \prod_{k=0}^{m-1} (2k+1)^2 \int_a^b \frac{f(x)^2}{(a-x)^{2m}(b-x)^{2m}} dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

1959'da P. R. Beesack makalesinde (1.0.1) eşitsizliğinin aşağıdaki genelleştirmesini de ispatlamıştır:

$[-\pi, \pi]$ aralığında $f' \in L^{2k}$, $f(-\pi) = f(\pi)$ ve $\int_{-\pi}^{+\pi} f^{2k-1}(x)dx = 0$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^{2k} dx \leq \frac{1}{2k-1} \left(k \sin \frac{\pi}{2k}\right)^{2k} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)^{2k} dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Aynı makalede P. Beesack, r ve s, (a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_a^b s(x)f(x)^p dx \leq \int_a^b r(x)f'(x)^p dx$$

eşitsizliğini de vermiştir.

1960'ta W. J. Coles (1.0.1) eşitsizliğinin ileri genelleştirmelerini vermiş olup bunlardan biri şu şekildedir:

m doğal sayı, $n = 2m$ olsun ve k_i'ler $(0 \le i \le m)$ ya 0 ya da 1 olsun ki böylece $\sum_{i=0}^{m} k_i$ çift sayı olur. $h_i = \sum_{j=0}^{i} k_j$, $p_i = (-1)^{h_i}$, $q_i = (-1)^i p_i$ olsun. p, $[a,b]$ aralığında reel sürekli bir fonksiyon, $c_i = (1-k_i)a + k_i b$, $d_i = k_{i+1}a + (1-k_{i+1})b$ ve $d_i' = a + b - d_i$ olsun. Eğer $y^n(x) - p(x)y(x) = 0$ diferansiyel denklemi, $[a,b]$ aralığında $(-1)^m p(x)y(x) \ge 0$, $p_i y^{(m-i)}(c_i) \ge 0$ $(1 \le i \le m)$ ve $q_i y^{(m+i)}(d_i) \ge 0$ $(0 \le i \le m-1)$ olmak üzere bir y çözümüne sahipse, her f fonksiyonu için $f^{(i)}(d'_{m-i-1}) = 0$ $(0 \le i \le m-1)$ ve $f^{(m)}(x) \in L^2$ olmak üzere,

$$(-1)^m \int_a^b p(x) f(x)^2 dx \le \int_a^b f^m(x)^2 dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

1965'te J. B. Diaz ve F. T. Metcalf, (1.0.2) eşitsizliğini genelleştiren eşitsizlikler ispatlamışlardır. Bu eşitsizliklerin en temel olanlarını şu şekilde sıralayabiliriz.

i) Reel değerli f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli türevlenebilir olsun. t_1 ve t_2 reel sayılar olsun öyle ki, $a \le t_1 \le t_2 \le b$ ve $f(t_1) = f(t_2)$ dir. Bu taktirde,

$$\int_a^b (f(x) - f(t_1))^2 dx \le \frac{4}{\pi^2} \max\left((t_1 - a)^2, (b - t_2)^2, \left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^2\right) \int_a^b f'(x)^2 dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

ii) f fonksiyonu, i'deki koşulları sağlıyorsa ve $f(a) = f(b)$ ise,

$$\int_a^b (f(x) - f(t_1))^2 dx \le \frac{1}{\pi^2} \max\left((t_2 - t_1)^2, (b - a - t_2 + t_1)^2\right) \int_a^b f'(x)^2 dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

iii) f fonksiyonu ii'deki koşulları sağlıyorsa ve $(b-a)f(t_1)^2 \ge 2f(t_1)\int_a^b f(x)dx$ ise,

$$\int_a^b f(x)^2 dx \le \frac{1}{\pi^2} \max\left((t_2 - t_1)^2, (b - a - t_2 + t_1)^2\right) \int_a^b f'(x)^2 dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

iv) f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ikinci türeve sahipse, $\forall \varepsilon > 0$ için, $K(\varepsilon) = \frac{P}{\varepsilon} + \frac{Q}{(b-a)^2}$ ve $P = 1$, $Q = 12$ olmak üzere,

$$\int_a^b f'(x)^2 dx \le \varepsilon \int_a^b f''(x)^2 dx + K(\varepsilon) \int_a^b f(x)^2 dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

1966'da A. M. Pfeffer, $f(x) \in C^m[a,b]$, $1 \leq k < m$, $f(a) = f(b)$, $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b)$ $(i = 1, ..., m-1)$ ve $\varepsilon > 0$ koşulları altında,

$$\int_a^b f^{(k)}(x)^2 dx \leq \varepsilon \int_a^b f^{(m)}(x)^2 dx + H_{k,m}(\varepsilon) \int_a^b f(x)^2 dx \tag{1.0.4}$$

şeklinde (1.0.2) eşitsizliğinin olası en iyi versiyonunu ispatlamıştır. Buradan $H_{k,m}$,

$\varepsilon > \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^{2m-2k}$ için $H_{k,m}(\varepsilon) = 0$,

$\frac{b-a}{2\pi}\left(\frac{k}{m\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2m-2k}}$ pozitif tam sayı ise $H_{k,m}(\varepsilon) = \left(\frac{k}{m\varepsilon}\right)^{\frac{k}{m-k}}\left(1 - \frac{k}{m}\right)$,

diğer durumlarda $J = \left[\frac{b-a}{2\pi}\left(\frac{k}{m\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2m-2k}}\right]$ olmak üzere,

$H_{k,m} = \max\left(\left(\frac{2J\pi}{b-a}\right)^{2k} - \varepsilon\left(\frac{2J\pi}{b-a}\right)^{2m}, \left(\frac{2(J+1)\pi}{b-a}\right)^{2k} - \varepsilon\left(\frac{2(J+1)\pi}{b-a}\right)^{2m}\right)$

şeklindedir. Ayrıca P. R. Beesack, yukarıdaki formüllerde yanlış yazılmış olan $\left(\frac{k}{m\varepsilon}\right)^{\frac{k}{m}-k}$ sabitini gerçek değeri olan $\left(\frac{k}{m\varepsilon}\right)^{\frac{k}{m-k}}$ şeklinde değiştirmiştir.

1967'de B. A. Troesch, aşağıdaki sonucu elde etmiştir:
h, $I = [0,1]$ üzerinde parçalı düzgün türevli pozitif bir fonksiyon, $-h$, I üzerinde konveks ve $h'(0) = 0$ olsun. f, I'da sürekli ve parçalı düzgün, $f(0) = 0$ olsun. Bu taktirde,

$$\frac{\int_0^1 h(x) f'(x)^2 dx}{\int_0^1 h(x) dx \int_0^1 f(x)^2 dx} \geq \frac{\pi^2}{4}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart h ve A sabit olmak üzere $f(x) = A\sin(\frac{1}{2}\pi x)$ olmasıdır.

1968'de D. M. Mangeron, çok değişkenli fonksiyonlar için (1.0.2) eşitsizliğini H. A. Schwarz'ın sonucundan farkli şekilde ispatlamıştır. Aslında D. M. Mangeron, belirli koşullar altında,

$$\frac{\int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_m}^{b_m} p(x_1, ..., x_m)\left(\frac{\partial^m f(x_1,...,x_m)}{\partial x_1, ..., \partial x_m}\right)^2 dx_1...dx_m}{\int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_m}^{b_m} q(x_1, ..., x_m) f(x_1, ..., x_m)^2 dx_1...dx_m}$$

bölümünün minimum değerini belirlemiştir.

1969'da H. D. Boyd,

$$\int_a^b |f(x)|^p |f^{(n)}(x)|^q w(x)dx \leq K \left(\int_a^b |f^n(x)|^r v(x)dx \right)^{\frac{p+q}{r}} \tag{1.0.5}$$

formundaki eşitsizliklerde mümkün olan en iyi K sabitlerini belirlemek için bir yöntem vermiştir. Burada $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ ve $f^{(n-1)}$ mutlak sürekli bir fonksiyondur. Wirtinger ve Opial eşitsizlikleri arasındaki ilişkinin kurulduğu ilk eşitsizlik (1.0.5) eşitsizliğidir.

Wirtinger eşitsizliğinin ayrık versiyonları da 1955'te K. Fan, O. Taussky ve J. Todd tarafından verilmiştir.

1999'da B. Florkiewicz ve K. Wojteczek [17] bazı ileri Wirtinger-Beesach integral eşitsizliklerini, 2002'de R. R. Hall [21] yeni bir Wirtinger tipli integral eşitsizliğini, R. Hilscher [22] Wirtinger tipli eşitsizliğin zaman skalasındaki versiyonunu, 2004'te C-F. Lee ve arkadaşları [26] genelleştirilmiş bir Wirtinger eşitsizliğini, 2007'de R. P. Agarwal ve arkadaşları [2] Wirtinger eşitsizliğinin genelleştirmesini ve bunların sürekli analoglarını, 2009'da R. Cheng ve D. Zhang [10] genelleştirilmiş bir Wirtinger eşitsizliğini ve bu eşitsizliğin adi diferansiyel denklemler sınıfına uygulanmasını, 2011'de J. Jaroš [24] yeni bir Picone tipli bir özdeşliği kullanarak klasik Wirtinger eşitsizliğinin genelleştirmesi olan bir integral eşitsizliğini, 2018'de L. Zhang ve S. Wang [41] Wirtinger tipli iki katlı integral eşitsizliğinin yeni bir sınıfını, 2019'da M. Z. Sarikaya ve C. C. Bilişik [37] uyumlu kesirli integraller için Wirtinger eşitsizliğinin yeni bir genelleştirmesini, S. Aslıyüce [6] uyumlu kesirli integral oparatörleri yardımıyla yeni Wirtinger tipi eşitsizlikleri ve J. Cufí ve arkadaşları [12] parçalı, eşit aralıklı lineer fonksiyonlar için Wirtinger eşitsizliğinin ayrık bir versiyonunu, 2020'de T. M. Costa ve arkadaşları [11] aralık değerli fonksiyonlar için Wirtinger tipli integral eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Bu tezin amacı ilk olarak 2020 yılı ve öncesinde elde edilen Wirtinger tipli eşitsizliklerin tarihsel gelişim süreci ile ilgili bilgiler vermektir. İkinci olarak literatürdeki konveks ve MN-konveks fonksiyon sınıfları için elde edilen Wirtinger tipli integral eşitsizlikleri ve bazı diğer genelleştirilmiş veya genişletilmiş Wirtinger tipli eşitsizlikleri sunmaktır. Üçüncü olarakta η-konveks, s-konveks, quasi-konveks, m-konveks, (α, m)-konveks ve p-fonksiyonu gibi konveksliğin farklı sınıfları için yeni Wirtinger tipli eşitsizlikler elde etmektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 Wirtinger Tipli Eşitsizliklerin Farklı Versiyonları

Bu bölümde ilk olarak, üç bağımsız değişkenli fonksiyonlar ve onların kısmi türevlerini içeren bazı yeni Wirtinger tipli integral eşitsizlikleri verilmiştir.

$a, b, c, k, m, n \in \mathbb{R}$ için $\Delta = [a, k] \times [b, m] \times [c, n]$ olsun. Eğer $f(r, s, t)$, Δ üzerinde tanımlı diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise, kısmi türevleri $D_1 f(r, s, t) = \frac{\partial}{\partial r} f(r, s, t)$, $D_2 f(r, s, t) = \frac{\partial}{\partial s} f(r, s, t)$, $D_3 f(r, s, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(r, s, t)$ ve $D_3 D_2 D_1 f(r, s, t) = \frac{\partial^3}{\partial t \partial s \partial r} f(r, s, t)$ ile gösterilir. $f : \Delta \to \mathbb{R}$, sürekli fonksiyonlar sınıfını $f(\Delta)$ ile gösterilsin ki buradan $D_1 f(r, s, t), D_2 f(r, s, t), D_3 f(r, s, t), D_3 D_2 D_1 f(r, s, t)$'nin kısmi türevleri Δ üzerinde var ve sürekli, ayrıca $a \le r \le k$, $b \le s \le m$, $c \le t \le n$ için $f(a, s, t) = f(k, s, t) = f(r, b, t) = f(r, m, t) = f(r, s, c) = f(r, s, n) = 0$ dır.

Teorem 2.1.1 $f, g \in F(\Delta)$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^k \int_b^m \int_c^n |f(r, s, t)|\, |g(r, s, t|\, dtdsdr \le \frac{1}{2} \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^2 \times \int_a^k \int_b^m \int_c^n \left[|D_3 D_2 D_1 f(r, s, t)|^2 + |D_3 D_2 D_1 g(r, s, t)|^2 \right] dtdsdr \tag{2.1.1}$$

dir [34].

Sonuç 2.1.1 $(r, s, t) \in \Delta$ için $g(r, s, t) = f(r, s, t)$ olduğunda (2.1.1) eşitsizliği

$$\int_a^k \int_b^m \int_c^n |f(r, s, t)|^2\, dtdsdr \le \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^2 \times \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 f(r, s, t)|^2\, dtdsdr \tag{2.1.2}$$

şeklinde Wirtinger tipli integral eşitsizliğine indirgenmektedir [34].

Teorem 2.1.2 $f, g, h \in F(\Delta)$ ve $i = 1, 2, 3$ için $1 < p_i < \infty$ sabitler olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
&\int_a^k \int_b^m \int_c^n \left[|f(r,s,t)|^{p_1} |g(r,s,t)|^{p_2} + |g(r,s,t)|^{p_2} |h(r,s,t)|^{p_3} \right. \\
&\qquad \left. + |h(r,s,t)|^{p_3} dtdsdr \, |f(r,s,t)|^{p_1} \right] \\
&\le \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^{2p_1} \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 f(r,s,t)|^{2p_1} \, dtdsdr \\
&+ \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^{2p_2} \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 g(r,s,t)|^{2p_2} \, dtdsdr \\
&+ \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^{2p_3} \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 h(r,s,t)|^{2p_3} \, dtdsdr,
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{aligned}
&\int_a^k \int_b^m \int_c^n |f(r,s,t)|^{p_1} |g(r,s,t)|^{p_2} |h(r,s,t)|^{p_3} \\
&\qquad \times \left[|f(r,s,t)|^{p_1} + |g(r,s,t)|^{p_2} + |h(r,s,t)|^{p_3} \right] dtdsdr \\
&\le \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^{4p_1} \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 f(r,s,t)|^{4p_1} \, dtdsdr \\
&+ \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^{4p_2} \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 g(r,s,t)|^{4p_2} \, dtdsdr \\
&+ \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^{4p_3} \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 h(r,s,t)|^{4p_3} \, dtdsdr
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

dir [34].

Sonuç 2.1.2 (2.1.3) ve (2.1.4)'de $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ ve $g(r,s,t) = h(r,s,t) = f(r,s,t)$ alınırsa, sırasıyla (2.1.2) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\int_a^k \int_b^m \int_c^n |f(r,s,t)|^4 \, dtdsdr \\
&\le \left[\frac{(k-a)(m-b)(n-c)}{8} \right]^4 \int_a^k \int_b^m \int_c^n |D_3 D_2 D_1 f(r,s,t)|^4 \, dtdsdr
\end{aligned}$$

şeklindeki Wirtinger tipli integral eşitsizliği elde edilir [34].

Wirtinger tipli eşitsizliklerle ilgili daha fazla bilgi için $[1, 31]$ numaralı kaynaklara bakılabilir.

2008'de R. Giova , $p > 1$, $w \in W^{1,p}(0, 2\pi)$ şartını sağlayan 2π periyotlu bir fonksiyon, a ve b uygun uzaylara ait iki sınırlı ve negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_0^{2\pi} a|w|^p \le C(a,b) \int_0^{2\pi} b|w'|^p$$

ağırlıklı Wirtinger tipli integral eşitsizliği ile ilişkili aşağıdaki genelleştirmeleri sunmuştur

[18].

Teorem 2.1.3 $a \in L[0,2\pi]$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$\int_0^{2\pi} a|w|^p \leq C\left(a, \frac{1}{a^{p-1}}\right) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^{p-1}}|w'|^p$$

şeklindeki Wirtinger eşitsizliği geçerlidir. Burada $W^{1,p}_{per}\left(\frac{1}{a^{p-1}}\right)$, $L^p\left(\frac{1}{a^{p-1}}\right)$, $[0,2\pi]$ üzerinde tüm ölçülebilir u fonksiyonlarının kümesi ve $a:(0,2\pi) \to \mathbb{R}$ integrallenebilir pozitif bir fonksiyon olmak üzere $w' \in L^p\left(\frac{1}{a^{p-1}}\right)$ ve $w(0) = w(2\pi)$ şartını sağlayan tüm $w \in L[0,2\pi]$ fonksiyonlarının kümesini göstermek üzere $\forall w \in W^{1,p}_{per}\left(\frac{1}{a^{p-1}}\right)$ ve $\int_0^{2\pi} a|w|^{p-2}w = 0$ için,

$$C\left(a, \frac{1}{a^{p-1}}\right) = \left(\frac{4}{\int_0^{2\pi} a}\left(\frac{1}{p'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p'}} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p\prime}\right)\right)^{-p}$$

dır ve $B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right)$ ise,

$$B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right) = \int_0^1 t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{\frac{1}{p'}-1}dt$$

şeklinde bilinen beta fonksiyonudur.

Teorem 2.1.4 $a, \frac{1}{b}$ ve $\sqrt[p]{ab^{-1}} \in L[0,2\pi]$ olmak üzere $a, b : (0,2\pi) \to [0,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $0 < I = \inf \sqrt[p]{a^{p-1}b} \leq S = \sup \sqrt[p]{a^{p-1}b} < \infty$ ve $\forall x, y \geq 0$ için $A(x,y) = \int_x^y \frac{1}{1+t^{\frac{p}{p-1}}}dt$ olsun. $\int_0^{2\pi} a|w|^{p-2}w = 0$ olmak üzere $\forall w \in W^{1,p}_{per}(b)$ için,

$$\int_0^{2\pi} a|w|^p \leq \left(\frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt[p]{a(t)b(t)^{-1}}}{\frac{2}{\pi}\frac{1}{(p-1)^{\frac{p-1}{p}}}[c_{p'} - \Psi(S,I)]}\right)^p \int_0^{2\pi} b|w'|^p$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$\Psi(S,I) = A\left(\frac{I}{S}\left(\frac{(S-I)S^{\frac{1}{p-1}}}{I(S^{\frac{1}{p-1}} - I^{\frac{1}{p-1}})}\right)^{\frac{p-1}{p}}, \left(\frac{(S-I)S^{\frac{1}{p-1}}}{I(S^{\frac{1}{p-1}} - I^{\frac{1}{p-1}})}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)$$

ve $1 < q < \infty$ için,

$$c_q = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^q}dx = \frac{1}{q}B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{q'}\right)$$

dir.

1971'de Beesack, mutlak sürekli fonksiyonlar için Wirtinger eşitsizliğini aşağıdaki gibi genelleştirmiştir.

Teorem 2.1.5 f, $[0, \frac{\pi}{2})$ üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu taktirde $\forall p > 1$ için,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^p dx \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{2}\sin\frac{\pi}{p}\right)^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'^p dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada, eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $y(x)$,

$$x = \frac{1}{2}p\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\int_0^y (1-t^p)^{\frac{-1}{p}} dt, \qquad 0 \leq y \leq 1$$

denkleminin tekil bir çözümü olmak üzere, $f(x) = cy(x)$ olmasıdır [8].

2017'de M. W. Alomari mutlak sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki Wirtinger tipli eşitsizlikleri elde etmiştir.

Lemma 2.1.1 I reel bir aralık ve $a, b \in I^\circ$ (I'nın içi) ve $a < b$ olsun. f, I üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon, f ve f' pozitif ve $f(a) = 0$ olsun. $\int_a^b (f')^p dx$ ise, $\forall p > 1$ için,

$$\int_a^b f^p dx \leq \frac{p^p \sin^p\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\pi^p(p-1)}(b-a)^p \int_a^b f'^p dx \tag{2.1.5}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\frac{p^p \sin^p\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\pi^p(p-1)}(b-a)^p$ sabiti $\forall p > 1$ için mümkün olan en iyi değerdir [4].

Lemma 2.1.2 I reel bir aralık ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. f, I üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon, f ve f' pozitif ve $f(b) = 0$ olsun. $\int_a^b (f')^p dx < \infty$ ise, $\forall p > 1$ için (2.1.5) eşitsizliği geçerlidir [4].

Teorem 2.1.6 $\xi \in (a, b)$ olsun. Bu taktirde $\forall f \in L_p(a, b)$ için,

$$\int_a^b |f(t) - f(\xi)|^p dt \leq \frac{p^p \sin^p\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\pi^p(p-1)}\left[\frac{b-a}{2} + \left|\xi - \frac{a+b}{2}\right|\right]\int_a^b f'^p dx$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

Teorem 2.1.7 $f(x)$, 2π periyotlu düzgün bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - f(x+t)]^2 dx \leq 4\sin^2\frac{t}{2}\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart a, b, c reel sabitler olmak üzere, $f(x) = a\cos x + b\sin x + c$ olmasıdır ($t = 0$ için eşitlik her zaman geçerlidir).

1961'de Beesack tarafından, $k > 1$, $f(x) \in C^1([0,\pi])$, $f(0) = 0$ için,

$$\int_0^\pi (f'(x))^{2k} dx \geq \frac{2k-1}{(k \sin \frac{\pi}{2k})^{2k}} \int_0^\pi f^{2k}(x) dx, \qquad k \geq 1.$$

şeklinde Wirtinger eşitsizliğinin bir genelleştirmesi elde edilmiştir [7].

Şimdi Bessel fonksiyonları hakkında önbilgiler ve bu fonksiyonlar için elde edilen Wirtinger tipli integral eşitsizlikleri verilecektir.

Bessel fonksiyonları, $x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$ Bessel diferansiyel denkleminin çözümleridir.

$J_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$ şeklinde tanımlanan $J_p(x)$ fonksiyonuna p. dereceden Bessel fonksiyonu denir. Burada $p > 0$ olup x'in her sonlu değeri için bu kuvvet serisi yakınsaktır. Burada, $\Gamma(k+1) = k!$ olduğundan,

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

yazılır.

p, tam sayı ise J_p ve J_{-p} fonksiyonları lineer bağımsız değildir ve $J_{-p} = (-1)^p J_p$ dir. Bunun aksine p tam sayı değilse, J_p ve J_{-p} lineer bağımsızdır.

$J_0(x)$ ve $J_1(x)$ fonksiyonları en önemli Bessel fonksiyonlarıdır. $p = -\frac{1}{2}$ ve $p = \frac{1}{2}$ için, bu fonksiyonlar,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.8 $[0,\pi]$ üzerinde $f' \in L^{2k}$ ve $f(0) = f(\pi) = 0$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_0^\pi f^{2k}(x) dx \leq \frac{1}{2k-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0 \left(\frac{\pi}{2k} \cos t\right) \cos t dt \right)^{2k} \int_0^\pi f'^{2k}(x) dx$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

Teorem 2.1.9 $[0,\pi]$ üzerinde $f' \in L^{2k}$ mutlak sürekli ve $f(0) = f(\pi) = 0$ ise,

$$\int_0^{\pi} f^{2k}(x)dx \leq \frac{\pi^{2k}}{2k+1} C(k) \int_0^{\pi} f'^2(x) f^{2(k-1)}(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(k) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^k J_{\frac{1}{2}}^{2k}(x)dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{k+1} J_{\frac{1}{2}}^{2k+1}(x)dx}$ dir [28].

Teorem 2.1.10 $f(x)$, 2π periyotlu düzgün bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $\forall t \in \mathbb{R}$ için,

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - f(x+t)]^2 dx \leq t\pi J_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{t}{2}\right) \int_0^{2\pi} f'^2(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart A, B, C reel sabitler olmak üzere, $f(x) = A\cos x + B\sin x + C$ olmasıdır ($t = 0$ için eşitlik her zaman geçerlidir) [28].

Şimdi de 2019'da M. Z. Sarıkaya tarafından elde edilen Wirtinger tipli eşitsizliklerin bazı genelleştirmeleri ve yeni versiyonları verilecektir.

Teorem 2.1.11 $f \in C^1([a,b])$ için $f(a) = f(b) = 0$ ve $f' \in L_2[a,b]$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{6} \int_a^b [f'(x)]^2 dx \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

Teorem 2.1.12 $f \in C^1([a,b])$ için $f(a) = f(b) = 0$, $p > 1$ ve $f' \in L_p[a,b]$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq \frac{(b-a)^{p-1}}{2^{p-1}p} \int_a^b |f'(x)|^p dx$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

Teorem 2.1.13 $f, g \in C^1([a,b])$ için $f(a) = f(b) = 0$, $g(a) = g(b) = 0$ ve $f', g' \in L_2[a,b]$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b |f(x)||g(x)|dx \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b \left[|f'(x)|^2 + |g'(x)|^2\right] dx$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

2019'da N. Alp ve M. Z. Sarıkaya, Wirtinger eşitsizliği ile ilgili yeni sonuçları aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Teorem 2.1.14 f, $[a,b]$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon olsun. $f' \in L_2[a,b]$ ve $\int_a^b f(t)dt$ için,

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt + \frac{f^2(a)+f^2(b)}{2}(b-a) \leq \frac{3(b-a)^2}{8}\int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

Teorem 2.1.15 f, $[a,b]$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon olsun. $f' \in L_2[a,b]$ ve $\int_a^b f(t)dt$ için,

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt + \frac{f^2(a)+f^2(b)}{2}(b-a) - 2NM \leq \frac{(b-a)^2}{6}\int_a^b |f'(t)|^2 dt$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $N = \max_{t\in[a,b]}\{|f(t)|\}$ ve $M = \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$ dir [3].

Teorem 2.1.16 f, $[a,b]$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon olsun. $f' \in L_2[a,b]$ ve $f(a) = f(b) = 0$ ise, bu taktirde $p > 1$ için,

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq 2^{p-2}(b-a)^p \frac{((p-1)!)^2}{(2p-1)!}\int_a^b |f'(t)|^p dt \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

Sonuç 2.1.1 (2.1.7)'da $p = 3$ seçilirse,

$$\int_a^b |f(t)|^3 \leq \frac{(b-a)^3}{15}\int_a^b |f'(t)|^3 dt$$

eşitsizliği elde edilir [3].

Sonuç 2.1.2 (2.1.7)'da $p = 4$ seçilirse,

$$\int_a^b |f(t)|^4 \leq \frac{(b-a)^4}{35}\int_a^b |f'(t)|^4 dt$$

eşitsizliği elde edilir [3].

Sonuç 2.1.3 (2.1.7)'da $p = 2$ seçilirse, bilinen Wirtinger eşitsizliği elde edilir [38].

2.2 Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Wirtinger Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde Wirtinger tipli eşitsizlikleri elde etmek için kullanılan bazı eşitsizlikler ve tanımlar verilecektir.

Teorem 2.2.1 (Hölder eşitsizliği) f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f|^p$ ve $|g|^p$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [32].

Teorem 2.2.2 (Ters Hölder eşitsizliği) f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $p,q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $|f|^p$ ve $|g|^p$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ve $0<m\leq \frac{f^p}{g^q}\leq M<\infty$ ise,

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \int_a^b |f(x)g(x)|dx$$

eşitsizliği geçerlidir [36].

Tanım 2.2.1 $f\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in[a,b]$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y) \tag{2.2.1}$$

eşitsizliği sağlanırsa f'ye konveks fonksiyon denir. $(-f)$ konveks ise f konkavdır [35].

Tanım 2.2.2 $0<s\leq 1$ olsun. Her $x,y\in[0,\infty)$, $\alpha,\beta\geq 0$, ve $\alpha^s+\beta^s=1$ olmak üzere,

$$f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha^s f(x)+\beta^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna s-Orlicz konveks veya birinci anlamda s-konveks denir. Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar kümesi K_s^1 ile gösterilir [14, 33].

Tanım 2.2.3 $0<s\leq 1$ olsun. Her $x,y\in[0,\infty)$ ve $\alpha,\beta\geq 0$, $\alpha+\beta=1$ olmak üzere,

$$f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha^s f(x)+\beta^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna s-Breckner konveks veya ikinci anlamda s-konveks denir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar kümesi K_s^2 ile gösterilir [9, 23].

Tanım 2.2.4 $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, negatif değilse ve her $x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq f(x)+f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye P fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir [13].

Tanım 2.2.5 $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $m \in [0, 1]$, her $x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye m-konveks denir. $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ üzerinde tanımlı m-konveks fonksiyonlar kümesi $K_m(b)$ ile gösterilir [15, 40].

Tanım 2.2.6 $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, her $x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^{\alpha} f(x) + m(1-t^{\alpha})f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye (α, m)-konveks denir. $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ üzerinde tanımlı (α, m)-konveks fonksiyonlar kümesi $K_m^{\alpha}(b)$ ile gösterilir [15, 27].

Tanım 2.2.7 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye I üzerinde quasi-konveks fonksiyon denir [20].

Tanım 2.2.8 $\Re(a) > 0$ ve $\Re(b) > 0$ olmak üzere, Beta fonksiyonu $B(a, b)$ ile gösterilir ve

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

şeklinde tanımlanır. Gama ve Beta fonksiyonlarını birbirine bağlayan önemli bir özellik aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Tanım 2.2.9 I, $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(y) + t\eta(f(x), f(y))$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna η-konveks veya $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna göre konvekstir denir [19].

Yukarıdaki eşitsizlikte $\eta(f(x), f(y)) = f(x) - f(y)$ olarak alınırsa, klasik konveks fonksiyonun tanımı elde edilir. Böylece bir fonksiyon konveks ise η-konvekstir. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve her $x, y \in (-\infty, 0]$ için $\eta(x, y) = -x - y$ olsun. Bu taktirde, f, η-konvekstir fakat klasik anlamda konveks değildir.

Tanım 2.2.10 $M : (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

a) Simetrik: $M(x, y) = M(y, x)$

b) Yansıyan: $M(x, x) = x$

c) Monotonluk: $min\{x, y\} \leq M(x, y) \leq max\{x, y\}$

d) Homojenlik: $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x, y)$, λ, herhangi bir pozitif skaler olmak üzere,

şartları sağlanıyorsa M' ye ortalama fonksiyon denir [5].

Tanım 2.2.11 $I, (0, \infty)$ alt aralığı olmak üzere, $f : I \to (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon ve M , N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. $x, y \in I$ olmak üzere f, MN-konveks ise $f(M(x, y)) \leq (\geq) N(f(x), f(y))$ dir [5].

Tanım (2.2.11)'e göre MN-konveks fonksiyonlar aşağıdaki gibi verilebilir:

i) f, $AA - konveks$ ise (2.2.1) eşitsizliği geçerlidir,

ii) f, $AG - konveks$ ise

$$f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq [f(\alpha)]^t [f(\beta)]^t, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

iii) f, $AH - konveks$ ise

$$f((1-t)\alpha + t\beta) \leq \frac{f(\alpha)f(\beta)}{tf(\alpha) + (1-t)f(\beta)}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

iv) f, $GA - konveks$ ise

$$f(\alpha^t \beta^{1-t}) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

v) f, $GG - konveks$ ise

$$f(\alpha^t \beta^{1-t}) \leq [f(\alpha)]^t [f[\beta)]^{1-t}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

vi) f, $GH-konveks$ ise

$$f(\alpha^{1-t}\beta^{t}) \leq \frac{f(\alpha)f(\beta)}{tf(\alpha)+(1-t)f(\beta)}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

vii) f, $HA-konveks$ ise

$$f\left(\frac{\alpha\beta}{(1-t)\alpha+t\beta}\right) \leq tf(\alpha)+(1-t)f(\beta), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

viii) f, $HG-konveks$ ise

$$f\left(\frac{\alpha\beta}{(1-t)\alpha+t\beta}\right) \leq [f(\alpha)]^{t}[f[\beta)]^{1-t}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

ix) f, $HH-konveks$ ise

$$f\left(\frac{\alpha\beta}{(1-t)\alpha+t\beta}\right) \leq \frac{f(\alpha)f(\beta)}{(1-t)f(\alpha)+tf(\beta)}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

2019'da T. Z. Mirković, bazı klasik eşitsizlikleri kullanarak konveks ve MN-konveks fonksiyonlar vasıtasıyla Wirtinger tipli bazı eşitsizlikleri aşağıdaki gibi vermiştir [29].

Teorem 2.2.3 $a < b$, f ve f' , (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. $(f')^2$, $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{8\pi^2}\{[f'(a)]^2+[f'(b)]^2\} \tag{2.2.2}$$

dir.

İspat. $(f')^2$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 [f'(ta+(1-t)b)]^2 dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[t[f'(a)]^2+(1-t)[f'(b)]^2\right] dt = \frac{[f'(a)]^2+[f'(b)]^2}{2}$$

elde edilir.

Şimdi yukarıdaki fonksiyonun her iki tarafı $\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}$ ile çarpılır ve (1.0.2) eşitsizliği gözönüne alınırsa (2.2.2) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.4 $a < b$, f ve f' , (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. (f'), $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \le \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{\frac{(f'(a))^2 + (f'(a))(f'(b)) + (f'(b))^2}{3}\right\} \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (f'), $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\
=\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 [f'(ta+(1-t)b)]^2 dt \\
\le\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 [tf'(a)+(1-t)f'(b)]^2 dt \\
=\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{\frac{(f'(a))^2 + (f'(a))(f'(b)) + (f'(b))^2}{3}\right\}
\end{aligned}$$

yazılır ve (1.0.2) eşitsizliği uygulanırsa (2.2.3) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.5 $a < b$, f ve f' , (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. Eğer f' pozitif, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere, $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$, $[a,b]$ de konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \le \alpha(b-a)^3 \frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}} + [f'(b)]^{\frac{1}{\alpha}}}{8\pi^2} + \beta(b-a)^3 \frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}} + [f'(b)]^{\frac{1}{\beta}}}{8\pi^2} \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. İyi bilinen $cd \le \alpha c^{\frac{1}{\alpha}} + \beta d^{\frac{1}{\beta}}$ $(\alpha, \beta, c, d > 0$ ve $\alpha + \beta = 1)$ eşitsizliği ve $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$'nın $[a,b]$ üzerindeki konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\
=\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 f'(ta+(1-t)b)f'(ta+(1-t)b)dt \\
\le\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{\alpha\int_0^1 [f'(ta+(1-t)b)]^{\frac{1}{\alpha}} dt + \beta\int_0^1 [f'(ta+(1-t)b)]^{\frac{1}{\beta}} dt\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\Bigg\{\alpha\int_0^1[t(f'(a))^{\frac{1}{\alpha}}+(1-t)(f'(b))^{\frac{1}{\alpha}}]dt$$

$$+\beta\int_0^1[t(f'(a))^{\frac{1}{\beta}}+(1-t)(f'(b))^{\frac{1}{\beta}}]dt\Bigg\}$$

$$\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{\alpha\frac{(f'(a))^{\frac{1}{\alpha}}+(f'(b))^{\frac{1}{\alpha}}}{2}+\beta\frac{(f'(a))^{\frac{1}{\beta}}+(f'(b))^{\frac{1}{\beta}}}{2}\right\}$$

yazılır ve (1.0.2) eşitsizliği gözönüne alınırsa istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 2.2.6 $a<b$, f ve f' , (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a)=f(b)$, $\int_a^b f(x)dx=0$ ve $f>0$ olsun. $p,q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $0<m\leq\frac{|f|^p}{|f|^q}\leq M<\infty$ olsun. Eğer $|f|^p$, $|f|^q$ $[a,b]$ de konkav ise,

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pq}}[f(a)+f(b)]^2\leq\frac{b-a}{\pi^2}\int_a^b[f'(x)]^2dx \tag{2.2.5}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|f|^p$, $|f|^q$'nun konkavlığı, Ters Hölder eşitsizliği ve $u,v\in\mathbb{R}$ için $|u+v|^r\leq 2^{r-1}(|u|^r+|v|^r)$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^2dx$$

$$=\int_0^1[f(ta+(1-t)b)]^2dt$$

$$\geq\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\int_0^1|f(ta+(1-t)b)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f(ta+(1-t)b)|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\int_0^1[t|f(a)|^p+(1-t)|f(b)|^p]dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1[t|f(a)|^q+(1-t)|f(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\frac{|f(a)|^p+|f(b)|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f(a)|^q+|f(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\frac{|f(a)+f(b)|^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f(a)+f(b)|^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{pq}}\frac{(f(a)+f(b))^2}{4}$$

yazılır ve (1.0.2) eşitsizliği uygulanırsa (2.2.5) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.7 $a < b$, f ve f' , (a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun.

i) f' , AG konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{8\pi^2} \frac{[f'(a)f'(b)]^2 - 1}{\ln[f'(a)f'(b)]},$$

ii) f' , AH konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} f'(a)f'(b),$$

iii) f', GA konveks ise,

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)]^2 dx \quad &\leq \quad \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \left\{ \left[-a + \frac{2a}{\ln \frac{a}{b}} + 2\frac{b-a}{\ln^2 \frac{a}{b}} \right] [f'(a)]^2 \right. \\ &+ \left[-2(a+b)\frac{1}{\ln \frac{a}{b}} - 4\frac{b-a}{\ln^2 \frac{a}{b}} \right] f'(a)f'(b) \\ &+ \left. \left[b + \frac{2b}{\ln \frac{a}{b}} + \frac{2(b-a)}{\ln^2 \frac{a}{b}} \right] [f'(b)]^2 \right\},\end{aligned}$$

iv) f', GG konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \ln\frac{a}{b} \frac{b[f'(b)]^2 - a[f'(a)]^2}{\ln a[f'(a)]^2 - \ln b[f'(b)]^2},$$

v) f', HA konveks ise,

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)]^2 dx \quad &\leq \quad \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \left[a(b-a)\left(b + a(b-a)^2\right) - a^2 b \ln\frac{b}{a} \right] [f'(a)]^2 \right. \\ &+ \quad \left[ab(b-a)\left(1 - (b-a)^2\right) - ab(a+b)\ln\frac{b}{a} \right] f'(a)f'(b) \\ &+ \quad \left. \left[b(b-a)\left(a + b(b-a)^2\right) - ab^2 \ln\frac{b}{a} \right] [f'(b)]^2 \right\}\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat.

i) (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak, $|f'|$, AG konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)]^2 dx &\leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 [f'(ta+(1-t)b)]^2 dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 [(f'(a))^t (f'(b))^t]^2 dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{8\pi^2} \frac{[f'(a)f'(b)]^2 - 1}{\ln[f'(a)f'(b)]}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $|f'|$ nin AH konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)]^2 dx &\leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 [f'((1-t)a+tb)]^2 dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 \left[\frac{f'(a)f'(b)}{tf'(a)+(1-t)f'(b)}\right]^2 dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} f'(a)f'(b)
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $|f'|$, GA konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)]^2 dx &\leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\
&= \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \ln\frac{a}{b} \int_1^0 [f'(a^t b^{1-t})]^2 a^t b^{1-t} dt \\
&\leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \ln\frac{a}{b} \int_1^0 [tf'(a)+(1-t)f'(b)]^2 a^t b^{1-t} dt \\
&= b\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \ln\frac{a}{b} \Bigg\{ \left[(f'(a))^2 - 2f'(a)f'(b) + (f'(b))^2\right] \int_1^0 t^2 \left(\frac{a}{b}\right)^t dt
\end{aligned}$$

$$+[2f'(a)f'(b)-2(f'(b))^2]\int_1^0 t\left(\frac{a}{b}\right)^t dt+(f'(b))^2\int_1^0\left(\frac{a}{b}\right)^t dt\Bigg\}$$

$$\begin{aligned}
= & \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\Bigg\{\left[-a+\frac{2a}{\ln\frac{a}{b}}+2\frac{b-a}{\ln^2\frac{a}{b}}\right][f'(a)]^2 \\
& +\left[-2(a+b)\frac{1}{\ln\frac{a}{b}}-4\frac{b-a}{\ln^2\frac{a}{b}}\right]f'(a)f'(b) \\
& +\left[b+\frac{2b}{\ln\frac{a}{b}}+\frac{2(b-a)}{\ln^2\frac{a}{b}}\right][f'(b)]^2\Bigg\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv) $|f'|$, GG konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)]^2dx &\leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx \\
&= \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\ln\frac{a}{b}\int_1^0 [f'(a^tb^{1-t})]^2a^tb^{1-t}dt \\
&\leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\ln\frac{a}{b}\int_1^0 \left\{[f'(a)]^t[f'(b)]^{1-t}\right\}^2a^tb^{1-t}dt \\
&= b\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\ln\frac{a}{b}[f'(b)]^2\int_1^0\left\{\frac{a[f'(a)]^2}{b[f'(b)]^2}\right\}^t dt \\
&= \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\ln\frac{a}{b}\frac{b[f'(b)]^2-a[f'(a)]^2}{\ln a[f'(a)]^2-\ln b[f'(b)]^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

v) $|f'|$, HA konveks olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)]^2dx &\leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx \\
&= ab\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_1^0\left[f'\left(\frac{ab}{(1-t)a+tb}\right)\right]^2\frac{1}{[(1-t)a+tb]^2}dt \\
&\leq ab\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_1^0\left[\left(\frac{tf'(a)+(1-t)f'(b)}{(1-t)a+tb}\right)\right]^2dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\Bigg\{\left[a(b-a)\left(b+a(b-a)^2\right)-a^2b\ln\frac{b}{a}\right][f'(a)]^2
\end{aligned}$$

$$+\left[ab(b-a)\left(1-(b-a)^2\right)-ab(a+b)\ln\frac{b}{a}\right]f'(a)f'(b)$$

$$\left.+\left[b(b-a)\left(a+b(b-a)^2\right)-ab^2\ln\frac{b}{a}\right][f'(b)]^2\right\}$$

elde edilir.

2.3 Wirtinger Eşitsizliğinin n. Kez Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar İçin Yeni Genelleştirmeleri

2020 yılında S. Erdem Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği yardımıyla klasik Wirtinger eşitsizliğinin genelleştirilmiş versiyonlarını aşağıdaki teoremlerde verildiği gibi elde etmiştir [16].

Teorem 2.3.1 $f\in C^n([a,b])$, $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $f^{(n)}\in L_2[a,b]$ ve $k=0,1,2,...,n-1$ için $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b [f(x)]^2dx\leq\frac{(b-a)^{2n}}{[(n-1)!]^2(2n-1)(2n)(2n+1)}\int_a^b\left[f^{(n)}(x)\right]^2dx \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 2.3.1 (2.3.1) eşitsizliğinde $n=1$ alınırsa, Sarıkaya tarafından elde edilen (2.1.6) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 2.3.2 $f\in C^n([a,b])$, $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $f^{(n)}\in L_r[a,b]$, $r>1$ ve $k=0,1,2,...,n-1$ için $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$ olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b|f(x)|^rdx\leq\frac{(b-a)^{nr}}{[(n-1)!]^r}\left(\frac{r-1}{nr-1}\right)^{r-1}\frac{1}{(nr)(nr+1)}\int_a^b\left|f^{(n)}(x)\right|^rdx \tag{2.3.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 2.3.1 Teorem 2.3.2'deki şartlar altında $n=1$ için,

$$\int_a^b|f(x)|^rdx\leq(b-a)^r\frac{1}{r(r+1)}\int_a^b|f'(x)|^rdx$$

şeklinde yeni bir Wirtinger tipli eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 2.3.2 (2.3.2) eşitsizliğinde $r=2$ alınırsa, (2.3.2) eşitsizliği (2.3.1) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 2.3.2 Teorem 2.3.2'deki şartlar altında $r = 4$ için,

$$\int_a^b |f(x)|^4 dx \leq \frac{(b-a)^{4n}}{[(n-1)!]^4} \left(\frac{3}{4n-1}\right)^3 \frac{1}{(4n)(4n+1)} \int_a^b \left|f^{(n)}(x)\right|^4 dx$$

eşitsizliği yazılır.

Ayrıca, yukarıdaki eşitsizlikte $n = 1$ alınırsa,

$$\int_a^b |f(x)|^4 dx \leq \frac{(b-a)^4}{20} \int_a^b |f'(x)|^4$$

eşitsizliği elde edilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 η-Konveks Fonksiyonlar İçin Wirtinger Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Bu bölümde konveks fonksiyonların genelleştirilmesi olan η-konveks fonksiyon kullanılarak bazı yeni Wirtinger tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 3.1.1 $a < b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. η, $f([a,b]) \times f([a,b])$'de sınırlı bir fonksiyon olmak üzere, $(f')^2$, $[a,b]$'de η-konveks fonksiyon ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left([f'(a)]^2 + \eta\left([f'(b)]^2, [f'(a)]^2\right)\right) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^2$, $[a,b]$ aralığında η-konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b [f'(x)]^2 dx &= \int_0^1 \left[f'\left((1-t)a+tb\right)\right]^2 dt \\
&\leq \int_0^1 [f'(a)]^2 dt + \int_0^1 t\eta\left([f'(b)]^2, [f'(a)]^2\right) dt \\
&= [f'(a)]^2 + \frac{1}{2}\eta\left([f'(b)]^2, [f'(a)]^2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left([f'(a)]^2 + \frac{1}{2}\eta\left([f'(b)]^2, [f'(a)]^2\right)\right)$$

eşitsizliği elde edilir.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak (3.1.1) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1 Her $x, y \in [a,b]$ için $\eta(x,y) = x - y$ olarak alınırsa, Teorem 3.1.1 Teorem 2.2.3'e indirgenir.

Teorem 3.1.2 $a < b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. η, $f([a,b]) \times f([a,b])$'de sınırlı bir fonksiyon olmak üzere, f', $[a,b]$'de η-konveks fonksiyon ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{[f'(a)]^2 + f'(a)\eta\left(f'(b), f'(a)\right) + \frac{\eta^2\left(f'(b), f'(a)\right)}{3}\right\} \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f''nün $[a,b]$'de η-konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{(b-a)^2}{(2\pi)^2}\int_a^b [f'(x)]^2dx &= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \left[f'\left((1-t)a+tb\right)\right]^2 dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \left[f'(a)+t\eta\left(f'(b),f'(a)\right)\right]^2 dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{[f'(a)]^2+f'(a)\eta\left(f'(b),f'(a)\right)+\frac{\eta^2\left(f'(b),f'(a)\right)}{3}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak (3.1.2) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.2 Her $x,y\in[a,b]$ için $\eta(x,y)=x-y$ olarak alınırsa, Teorem 3.1.2 Teorem 2.2.4'e indirgenir.

Teorem 3.1.3 $a<b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a)=f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx=0$ olsun. f' pozitif, η, $f([a,b])\times f([a,b])$'de sınırlı bir fonksiyon olmak, $\alpha,\beta>0$ ve $\alpha+\beta=1$ için $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$, $[a,b]$ aralığında η-konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x)]^2dx &\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\alpha\left[\frac{2[f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}}+\eta\left([f'(b)]^{\frac{1}{\alpha}},[f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{2}\right] \\
&\quad+\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\beta\left[\frac{2[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}+\eta\left([f'(b)]^{\frac{1}{\beta}},[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}\right)}{2}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. İyi bilinen $cd\leq\alpha c^{\frac{1}{\alpha}}+\beta d^{\frac{1}{\beta}}$ $(\alpha,\beta,c,d>0$ ve $\alpha+\beta=1)$ eşitsizliğini ve $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$'nın $[a,b]$ aralığında η-konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^2}{(2\pi)^2}\int_a^b [f'(x)]^2dx \\
\leq\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{\alpha\int_0^1 \left[f'\left((1-t)a+tb\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}dt+\beta\int_0^1 \left[f'\left((1-t)a+tb\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}dt\right\} \\
\leq\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{\alpha\int_0^1 \left([f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}}+t\eta\left([f'(b)]^{\frac{1}{\alpha}},[f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)dt\right. \\
&\left.+\beta\int_0^1 \left([f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}+t\eta\left([f'(b)]^{\frac{1}{\beta}},[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}\right)\right)dt\right\} \\
=\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left\{\alpha\left([f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{\eta\left([f'(b)]^{\frac{1}{\alpha}},[f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{2}\right)\right. \\
&\left.+\beta\left([f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}+\frac{\eta\left([f'(b)]^{\frac{1}{\beta}},[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}\right)}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve (1.0.2) eşitsizliği ile birleştirildiğinde istenen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 3.1.3 Her $x, y \in [a,b]$ için $\eta(x,y) = x - y$ olarak alınırsa, Teorem 3.1.3 Teorem 2.2.5'e indirgenir.

3.2 P-Fonksiyonu İçin Wirtinger Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 3.2.1 $a < b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. $(f')^2$, $[a,b]$ üzerinde P-fonksiyonu ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left([f'(a)]^2 + [f'(b)]^2\right) \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^2$, $[a,b]$ üzerinde P-fonksiyonu olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b [f'(x)]^2 dx &= \int_0^1 \left[f'(ta + (1-t)b)\right]^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \left([f'(a)]^2 + [f'(b)]^2\right) dt \\
&= [f'(a)]^2 + [f'(b)]^2
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left([f'(a)]^2 + [f'(b)]^2\right)$$

eşitsizliği elde edilir.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak (3.2.1) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 $a < b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. f', $[a,b]$ üzerinde P-fonksiyonu ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left[f'(a) + f'(b)\right]^2 \tag{3.2.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f', $[a,b]$ üzerinde P-fonksiyonu olduğu ve değişken değişikliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx &= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 \left[f'(ta + (1-t)b)\right]^2 dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 \left[f'(a) + f'(b)\right]^2 dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left[f'(a) + f'(b)\right]^2
\end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak, (3.2.2) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3 $a < b$, f ve f', (a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. f' pozitif, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$, $[a, b]$'de P-fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \left[(f'(a))^{\frac{1}{\alpha}} + (f'(b))^{\frac{1}{\alpha}} \right] + \beta \left[(f'(a))^{\frac{1}{\beta}} + (f'(b))^{\frac{1}{\beta}} \right] \right\} \tag{3.2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\alpha, \beta, c, d > 0$, $\alpha + \beta = 1$ için $cd \leq \alpha c^{\frac{1}{\alpha}} + \beta d^{\frac{1}{\beta}}$ eşitsizliği ve f''nün P-fonksiyonu olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\
= \; & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 f'\big(ta + (1-t)b\big)\, f'\big(ta + (1-t)b\big)\, dt \\
\leq \; & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \Big[f'\big(ta + (1-t)b\big) \Big]^{\frac{1}{\alpha}} dt + \beta \int_0^1 \Big[f'\big(ta + (1-t)b\big) \Big]^{\frac{1}{\beta}} dt \right\} \\
\leq \; & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \Big[\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\alpha}} + \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \Big] dt + \beta \int_0^1 \Big[\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}} + \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}} \Big] dt \right\} \\
= \; & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \Big[\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\alpha}} + \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \Big] + \beta \Big[\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}} + \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}} \Big] \right\}
\end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliğin kullanılarak (3.2.3) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.3 İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar İçin Wirtinger Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 3.3.1 $0 \leq a < b$, f ve f', (a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. $(f')^2$, $[a, b]$'de ikinci anlamda s-konveks ise $s \in (0, 1]$ için,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left(\frac{[f'(a)]^2 + [f'(b)]^2}{s+1} \right) \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^2$, $[a,b]$'de s-konveks fonksiyon olduğundan, $t\in[0,1]$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b [f'(x)]^2dx &= \int_0^1 \left[f'(ta+(1-t)b)\right]^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \left[t^s[f'(a)]^2+(1-t)^s[f'(b)]^2\right] dt \\
&= \frac{1}{s+1}[f'(a)]^2+\frac{1}{s+1}[f'(b)]^2 \\
&= \frac{[f'(a)]^2+[f'(b)]^2}{s+1}
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\frac{[f'(a)]^2+[f'(b)]^2}{(s+1)}$$

eşitsizliği elde edilir.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği yardımıyla (3.3.1) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.1'de $s=1$ seçilirse, (3.3.1) eşitsizliği (2.2.2) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.3.2 $0\leq a<b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a)=f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx=0$ olsun. f', $[a,b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks fonksiyon ve $s\in(0,1]$ ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{2s+1}[f'(a)]^2+2B(s+1,s+1)f'(a)f'(b)+\frac{1}{2s+1}[f'(b)]^2\right] \tag{3.3.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f', $[a,b]$'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\int_a^b [f'(x)]^2dx \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \left[f'(ta+(1-t)b)\right]^2dt \\
&\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \left[t^sf'(a)+(1-t)^sf'(b)\right]^2dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \left[t^{2s}[f'(a)]^2+2t^s(1-t)^sf'(a)f'(b)+(1-t)^{2s}[f'(b)]^2\right] dt \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left[[f'(a)]^2\int_0^1 t^{2s}dt+2f'(a)f'(b)\int_0^1 t^s(1-t)^sdt+[f'(b)]^2\int_0^1(1-t)^{2s}dt\right] \\
&= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{2s+1}[f'(a)]^2+2B(s+1,s+1)f'(a)f'(b)+\frac{1}{2s+1}[f'(b)]^2\right]
\end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak (3.3.2) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.2 Teorem 3.3.2'da, $s = 1$ seçilirse (3.3.2) eşitsizliği (2.2.3) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.3.3 $0 \leq a < b$, f ve f', (a, b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. f' pozitif, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$, $[a, b]$ üzerinde ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar olmak üzere $s \in (0, 1]$ ise,

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x)]^2 dx \\ \leq\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\alpha}{s+1} \left[(f'(a))^{\frac{1}{\alpha}} + (f'(b))^{\frac{1}{\alpha}} \right] + \frac{\beta}{s+1} \left[(f'(a))^{\frac{1}{\beta}} + (f'(b))^{\frac{1}{\beta}} \right] \right\} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$'nın $[a, b]$'de ikinci anlamda s-konveksliği ve $\alpha, \beta, c, d > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $cd \leq \alpha c^{\frac{1}{\alpha}} + \beta d^{\frac{1}{\beta}}$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\ =\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 f'\big(ta + (1-t)b\big)\ f'\big(ta + (1-t)b\big)\, dt \\ \leq\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \left[f'\big(ta + (1-t)b\big) \right]^{\frac{1}{\alpha}} dt + \beta \int_0^1 \left[f'\big(ta + (1-t)b\big) \right]^{\frac{1}{\beta}} dt \right\} \\ \leq\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \left[t^s \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\alpha}} + (1-t)^s \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \right] dt \right. \\ & \left. + \beta \int_0^1 \left[t^s \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}} + (1-t)^s \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}} \right] dt \right\} \\ =\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \left[\frac{1}{s+1} \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{s+1} \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \right] + \beta \left[\frac{1}{s+1} \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}} + \frac{1}{s+1} \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}} \right] \right\} \\ =\ & \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{\alpha}{s+1} \left[\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\alpha}} + \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \right] + \frac{\beta}{s+1} \left[\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}} + \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}} \right] \right\} \end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak (3.3.3) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3 Teorem (3.3.3)'de $s = 1$ seçilirse, (3.3.3) eşitsizliği (2.2.4) eşitsizliğine indirgenir.

3.4 Quasi-Konveks Fonksiyonlar İçin Wirtinger Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 3.4.1 $a < b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. $(f')^2$, $[a,b]$'de quasi-konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \max\left\{[f'(a)]^2, [f'(b)]^2\right\} \tag{3.4.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^2$, $[a,b]$'de quasi-konveks olduğundan, $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b [f'(x)]^2 dx &= \int_0^1 \left[f'(ta + (1-t)b)\right]^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \max\left\{[f'(a)]^2, [f'(b)]^2\right\} dt \\ &= \max\left\{[f'(a)]^2, [f'(b)]^2\right\} \end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \max\left\{[f'(a)]^2, [f'(b)]^2\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.
Elde edilen eşitsizlikte (1.0.2) eşitsizliği kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2 $a < b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. f', $[a,b]$'de quasi-konveks ise,

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left[\max\left\{f'(a), f'(b)\right\}\right]^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f''nün $[a,b]$'de quasi-konveksliği ve değişken değişikliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx &= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 \left[f'(ta + (1-t)b)\right]^2 dt \\ &\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 \left[\max\left\{f'(a), f'(b)\right\}\right]^2 dt \\ &= \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left[\max\left\{f'(a), f'(b)\right\}\right]^2 \end{aligned}$$

yazılır.
Yukarıdaki eşitsizlikte (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.3 $a < b$, f ve f', (a,b) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. f' pozitif, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$, $[a,b]$'de quasi-konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} &\int_a^b [f(x)]^2 dx \\ &\leq \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \left[\max\left\{ (f'(a))^{\frac{1}{\alpha}}, (f'(b))^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right] + \beta \left[\max\left\{ (f'(a))^{\frac{1}{\beta}}, (f'(b))^{\frac{1}{\beta}} \right\} \right] \right\} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$'nın $[a,b]$'de quasi-konveksliği ve $\alpha, \beta, c, d > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $cd \leq \alpha c^{\frac{1}{\alpha}} + \beta d^{\frac{1}{\beta}}$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\ = \;& \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 f'\big(ta + (1-t)b\big)\, f'\big(ta + (1-t)b\big)\, dt \\ \leq \;& \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \Big[f'\big(ta + (1-t)b\big) \Big]^{\frac{1}{\alpha}} dt + \beta \int_0^1 \Big[f'\big(ta + (1-t)b\big) \Big]^{\frac{1}{\beta}} dt \right\} \\ \leq \;& \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \max\left\{ \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\alpha}}, \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} dt + \beta \int_0^1 \max\left\{ \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}}, \big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}} \right\} dt \right\} \\ = \;& \frac{(b-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \left[\max\left\{ (f'(a))^{\frac{1}{\alpha}}, (f'(b))^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \right] + \beta \left[\max\left\{ (f'(a))^{\frac{1}{\beta}}, (f'(b))^{\frac{1}{\beta}} \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak, (3.4.2) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.5 m-Konveks Fonksiyonlar İçin Wirtinger Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 3.5.1 $m \in [0,1]$, $0 \leq a < mb$, f ve f', (a, mb) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(mb)$ ve $\int_a^{mb} f(x)dx = 0$ olsun. $(f')^2$, $[a,b]$'de m-konveks fonksiyon ise,

$$\int_a^{mb} [f(x)]^2 dx \leq \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left[\frac{[f'(a)]^2 + m[f'(b)]^2}{2} \right] \tag{3.5.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^2$, $[a,b]$'de m-konveksliğini kullanarak, $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}[f'(x)]^2dx &= \int_0^1 \left[f'(ta+m(1-t)b)\right]^2 dt \\
&\leq \int_0^1 \left(t[f'(a)]^2 + m(1-t)[f'(b)]^2\right) dt \\
&= \frac{[f'(a)]^2 + m[f'(b)]^2}{2}
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{mb-a}{2\pi}\right)^2\int_a^{mb}[f'(x)]^2dx \leq \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\left[\frac{[f'(a)]^2 + m[f'(b)]^2}{2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.1 Teorem 3.5.1'de $m = 1$ seçilirse, (3.5.1) eşitsizliği (2.2.2) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.5.2 $m \in [0,1]$, $0 \leq a < mb$, f ve f', (a, mb) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(mb)$ ve $\int_a^{mb} f(x)dx = 0$ olsun. f', $[a,b]$'de m-konveks fonksiyon ise,

$$\int_a^{mb}[f(x)]^2dx \leq \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\left[\frac{[f'(a)]^2 + m[f'(a)][f'(b)] + m^2[f'(b)]^2}{3}\right] \tag{3.5.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f''nün $[a,b]$'de m-konveksliği ve değişken değişikliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{mb-a}{2\pi}\right)^2\int_a^{mb}[f'(x)]^2dx \\
= \ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \left[f'(ta+m(1-t)b)\right]^2 dt \\
\leq \ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \Big[tf'(a) + m(1-t)f'(b)\Big]^2 dt \\
= \ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1 \Big[t^2[f'(a)]^2 + (2mt-2mt^2)f'(a)f'(b) + (m^2-2m^2t+m^2t^2)[f'(b)]^2\Big] dt \\
= \ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{3}[f'(a)]^2 + \frac{m}{3}[f'(a)][f'(b)] + \frac{m^2}{3}[f'(b)]^2\right]
\end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak, (3.5.2) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5.2 Teorem 3.5.2'de, $m = 1$ seçilirse (3.5.2) eşitsizliği (2.2.3) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.5.3 $m \in [0,1]$, $0 \le a < mb$, f ve f', (a, mb) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(mb)$ ve $\int_a^{mb} f(x)dx = 0$ olsun. f' pozitif, $\alpha, \beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$, $[a, b]$'de m-konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} &\int_a^{mb} [f(x)]^2 dx \\ \le\ & \alpha(mb-a)^3 \frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}} + m[f'(b)]^{\frac{1}{\alpha}}}{8\pi^2} + \beta(mb-a)^3 \frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}} + m[f'(b)]^{\frac{1}{\beta}}}{8\pi^2} \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\alpha, \beta, c, d > 0$, $\alpha+\beta = 1$ için $cd \le \alpha c^{\frac{1}{\alpha}} + \beta d^{\frac{1}{\beta}}$ eşitsizliği ve $(f')^{\frac{1}{\alpha}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$'nın m-konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{mb-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^{mb} [f'(x)]^2 dx \\ =\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 f'(ta+m(1-t)b)\ f'(ta+m(1-t)b)\, dt \\ \le\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \left[f'(ta+m(1-t)b)\right]^{\frac{1}{\alpha}} dt + \beta \int_0^1 \left[f'(ta+m(1-t)b)\right]^{\frac{1}{\beta}} dt \right\} \\ \le\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \int_0^1 \left[t\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\alpha}} + m(1-t)\big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\alpha}}\right] dt \right. \\ & \left. + \beta \int_0^1 \left[t\big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}} + m(1-t)\big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}}\right] dt \right\} \\ =\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \alpha \left(\frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\alpha}}}{2} + \frac{m[f'(b)]^{\frac{1}{\alpha}}}{2} \right) + \beta \left(\frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}}{2} + \frac{m[f'(b)]^{\frac{1}{\beta}}}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak, (3.5.3) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.5.3 Teorem 3.5.3'de, $m = 1$ seçilirse (3.5.3) eşitsizliği (2.2.4) eşitsizliğine indirgenir.

3.6 (α, m)-Konveks Fonksiyonlar İçin Wirtinger Tipli İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 3.6.1 $(\alpha, m) \in [0,1]^2$, $0 \le a < mb$, f ve f', (a, mb) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(mb)$ ve $\int_a^{mb} f(x)dx = 0$ olsun. $(f')^2$, $[a, b]$'de (α, m)-konveks fonksiyon ise,

$$\int_a^{mb} [f(x)]^2 dx \le \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left(\frac{[f'(a)]^2 + \alpha m [f'(b)]^2}{\alpha+1} \right) \tag{3.6.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $(f')^2$, $[a,b]$'de (α,m)-konveks olduğundan, $t\in[0,1]$ ve $(\alpha,m)\in[0,1]^2$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}[f'(x)]^2dx &= \int_0^1 \left[f'(ta+m(1-t)b)\right]^2dt\\ &\le \int_0^1\left(t^\alpha[f'(a)]^2+m(1-t^\alpha)[f'(b)]^2\right)dt\\ &= \frac{1}{\alpha+1}[f'(a)]^2+m\frac{\alpha}{\alpha+1}[f'(b)]^2\\ &= \frac{[f'(a)]^2+\alpha m[f'(b)]^2}{\alpha+1}\end{aligned}$$

yazılır.
Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}$ ile çarpılır ve elde edilen eşitsizlik için (1.0.2) eşitsizliği kullanılırsa istenen eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 3.6.1 Teorem 3.6.1'da $m=1$ ve $\alpha=1$ seçilirse, (3.6.1) eşitsizliği (2.2.2) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.6.2 $(\alpha,m)\in[0,1]^2$, $0\le a<mb$, f ve f', (a,mb) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a)=f(mb)$ ve $\int_a^{mb}f(x)dx=0$ olsun. f', $[a,b]$'de (α,m)-konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}&\int_a^{mb}[f(x)]^2dx \qquad (3.6.2)\\ \le\ &\frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\left[\frac{(\alpha+1)[f'(a)]^2+2m\alpha[f'(a)][f'(b)]+2\alpha^2m^2[f'(b)]^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f''nün (α,m)-konveks fonksiyon olduğu ve değişken değişikliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{mb-a}{2\pi}\right)^2\int_a^{mb}[f'(x)]^2dx\\ =\ &\frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1\left[f'(ta+m(1-t)b)\right]^2dt\\ \le\ &\frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1\left[t^\alpha f'(a)+m(1-t^\alpha)f'(b)\right]^2dt\\ =\ &\frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\int_0^1\Big[t^{2\alpha}[f'(a)]^2\\ &+(2mt^\alpha-2mt^{2\alpha})f'(a)f'(b)+(m^2-2m^2t^\alpha+m^2t^{2\alpha})[f'(b)]^2\Big]dt\\ =\ &\frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2}\left[\frac{[f'(a)]^2}{2\alpha+1}+\frac{2m\alpha[f'(a)][f'(b)]}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}+\frac{2\alpha^2m^2[f'(b)]^2}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}\right]\end{aligned}$$

yazılır.
Önceki teoremin ispatına benzer şekilde (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6.2 Teorem 3.6.2'de, $m = 1$, $\alpha = 1$ seçilirse (3.6.2) eşitsizliği (2.2.3) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.6.3 $(\alpha, m) \in [0,1]^2$, $0 \leq a < mb$, f ve f', (a, mb) aralığında sürekli fonksiyonlar, $f(a) = f(mb)$ ve $\int_a^{mb} f(x)dx = 0$ olsun. f' pozitif, $\theta, \beta > 0$ ve $\theta + \beta = 1$ için $(f')^{\frac{1}{\theta}}$ ve $(f')^{\frac{1}{\beta}}$, $[a, b]$'de (α, m)-konveks fonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} &\int_a^{mb} [f(x)]^2 dx \\ \leq\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \theta \left(\frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\theta}}}{\alpha+1} + \frac{m\alpha[f'(b)]^{\frac{1}{\theta}}}{\alpha+1} \right) + \beta \left(\frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha+1} + \frac{m\alpha[f'(b)]^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha+1} \right) \right\} \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Teorem 3.5.3'in ispatına benzer işlemler ve aynı eşitsizlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{mb-a}{2\pi} \right)^2 \int_a^{mb} [f'(x)]^2 dx \\ =\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \int_0^1 f'(ta + m(1-t)b)\ f'(ta + m(1-t)b)\, dt \\ \leq\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \theta \int_0^1 \left[f'(ta + m(1-t)b) \right]^{\frac{1}{\theta}} dt + \beta \int_0^1 \left[f'(ta + m(1-t)b) \right]^{\frac{1}{\beta}} dt \right\} \\ \leq\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \theta \int_0^1 \left[t^\alpha \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\theta}} + m(1-t^\alpha)\big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\theta}} \right] dt \right. \\ & \left. + \beta \int_0^1 \left[t^\alpha \big(f'(a)\big)^{\frac{1}{\beta}} + m(1-t^\alpha)\big(f'(b)\big)^{\frac{1}{\beta}} \right] dt \right\} \\ =\ & \frac{(mb-a)^3}{(2\pi)^2} \left\{ \theta \left(\frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\theta}}}{\alpha+1} + \frac{m\alpha[f'(b)]^{\frac{1}{\theta}}}{\alpha+1} \right) + \beta \left(\frac{[f'(a)]^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha+1} + \frac{m\alpha[f'(b)]^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha+1} \right) \right\} \end{aligned}$$

yazılır.
Daha sonra (1.0.2) eşitsizliği kullanılarak, (3.6.3) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.6.3 Teorem 3.6.3'de $m = 1$, $\alpha = 1$ seçilirse, (3.6.3) eşitsizliği (2.2.4) eşitsizliğine indirgenir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Çalışmanın temelini oluşturan üçüncü bölümde, η-konveks fonksiyon, p-fonksiyonu, ikinci anlamda s-konveks fonksiyon, quasi-konveks fonksiyon, m-konveks fonksiyon, (α, m)-konveks fonksiyon sınıfları için yeni Wirtinger tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiş olup elde edilen sonuçların literatürde var olan sonuçların bir genelleştirmesi veya genişlemesi olduğu görülmüştür. Elde edilen bu yeni sonuçlar iki farklı makale olarak hazırlanmış olup bunlardan bir tanesi "Some New Wirtinger Type Inequalities for η-Convex Functions" başlıklı çalışma altında "The 7^{th} International Conference on Control and Optimization With Industrial Applications" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş ve konferans "Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications" kitabında tam metin olarak basılmıştır [39]. Diğer makale ise "New Inequalities of Wirtinger Type for Different Kinds of Convex Functions" başlıklı çalışma olup "Miskolc Mathematical Notes" isimli SCI-Expanded indeksli dergide yayına kabul edilmiştir [25].

Konuyla ilgilenen araştırmacılar bu tezde kullanılan yöntemlerden ve sonuçlardan faydalanarak bu tezde kullanılmayan konvekslik sınıfları için yeni Wirtinger tipli eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Agarwal, RP. & Pang, PYH. (1995). Opial inequalities with applications in differential and difference equations. Kluwer, Dordrecht.

[2] Agarwal, RP., Čuljak, V. & Pečarić, J. (2007). On discrete and continuous Wirtinger inequalities. *Applicable Analysis*, 70(1-2), 195-204.

[3] Alp, N. & Sarıkaya, MZ. (2019). Refinement of Wirtinger inequality. *Demonstratio Mathematica*, 2019;1.

[4] Alomari, MW. (2017). On Beesack-Wirtinger inequality. Results in Mathematics, 72, 1213-1225.

[5] Anderson, GD., Vamanamurthy, MK. & Vuorinen, M. (2007). Generalized convexity and inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 335, 1294-1308.

[6] Aslıyüce, S. (2019). Wirtinger type inequalities via fractional integral operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 64, 1, 35-42.

[7] Beesach, P. (1961). Hardy's inequality and its extension. *Pacific Journal of Mathematics*, 11, 39-61.

[8] Beesack, PR. (1971). Integral inequalities involving a function and its derivative. *American Mathematical Monthly*, 78, 705-741.

[9] Breckner, WW. (1978). Stetigkeitsaussagenf ureine klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlianeren Raumen. *Publications de I'Institut Mathématique*, 23, 13-20.

[10] Cheng, R. & Zhang, D. (2009). A generalized Wirtinger's inequality with applications to a class of ordinary differential equations. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID710475, 1-7.

[11] Costa, TM., Chalco-Cano, Y. & Román-Flores, H. (2020). Wirtinger-type integral inequalities for interval-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 396, 102-114.

[12] Cufí, J., Reventós, A. & Rodríguez, CJ. (2019). A discrete approach to Wirtinger's inequality. *Journal Mathematical Inequalities*, 13, 3, 737-746.

[13] Dragomir, SS., Pečarić, J. & Person, LE. (1995). Some inequalities of Hadamard type. *Soochow Journal of Mathematics*, 21, 335-341.

[14] Dragomir, SS. & Fitzpatrick, S. (1998).The Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense. *Demonstratio Mathematica*, 31 (3), 633-642.

[15] Dragomir, SS. & Pearce, CEM. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. RGMIA Monographs, Victoria University. On-line:http:rgma.vu.edu.au/-monographs.

[16] Erdem, S. (2020). Wirtinger type inequalities for higher order differentiable functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 44: 656-661.

[17] Florkiewicz, B. & Wojteczek, K. (1999). On some further Wirtinger-Beesack integral inequalities. *Demonstratio Mathematica*, 32, 3, 495-502.

[18] Giova, R. (2008). An estimate for the best constant in the L^p-Wirtinger inequality with weights. *Journal of Function Spaces and Applications*, 6, 1, 1-16.

[19] Gordji, ME., Delavar, MR. & La sen, MD. (2016). On η-convex functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, 10, 1, 173-183.

[20] Greenberg, HJ. & Pierskalla, WP. (1971). A review of quasi-convex functions. Operations Research, 19 (7).

[21] Hall, RR. (2002). A Wirtinger type inequality and the spacing of the zeros of the Riemann zeta-function. *Journal of Number Theory*, 93(2), 235-245.

[22] Hilscher, R. (2002). A time scales version of a Wirtinger-type inequality and applicationsk. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 141, 219-226.

[23] Hudzik, H. & Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 48, 100-111.

[24] Jaroš, J. (2011). On an integral inequality of the Wirtinger type. *Applied Mathematics Letters*, 24, 1389-1392.

[25] Karaoğlan, A., Set, E., Akdemir, AO. & Şahin, E. (2020). New inequalities of Wirtinger type for different kinds of convex functions. *Miskolc Mathematical Notes*, Accepted.

[26] Lee, CF., Yeh, CC., Hong, CH. & Agarwall, RP. (2004). Lyapunov and Wirtinger inequalities. *Applied Mathematics Letters*, 17, 847-853.

[27] Miheşan, VG. (1993). A generalization of the convexity. Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca (Romania).

[28] Mirković, TZ. (2018). Wirtinger inequality using Bessel functions. *Advances in Difference Equations*, 2018:206.

[29] Mirković, TZ. (2019). New inequalities of Wirtinger type for convex and MN-convex functions. Series Mathematics and Informatics, Facta Universitatis, 34(2), 165-173.

[30] Mitrinović, DS. & Vasić, PM. (1969). An integral inequality ascribed to Wirtinger and its variations and generalizations. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., 247-273, 157-170.

[31] Mitrinović, DS., Pečarić, JE. & Fink, AM. (1991). Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Kluwer, Dordrecht.

[32] Mitrinović, DS., Pečarić, J. & Fink, AM. (2013). Classical and new inequalities in analysis. Springer Science and Business Media, 61, 126-127.

[33] Orlicz, W. (1968). A note on modular spacess. IX. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 16, 801-808, MR 39:3278.

[34] Pachpatte, BG. (1999). Integral inequalities of Wirtinger and Opial type in three independent variables. *Fasciculi Mathematici*, 30, 113-129.

[35] Pečarić, J., Proschan, F. & Tong, YL. (1992). Convex functions. Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.

[36] Saitoh, S., Tuan, VK. & Yamamoto, M. (2002). Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 3, 5, 80.

[37] Sarıkaya, MZ. & Bilişik, CC. (2019). Wirtinger type inequalities for conformable fractional integrals. *Mathematica*, 61(84), 79-84.

[38] Sarıkaya, MZ. (2019). On the new Wirtinger type inequalities. *Konuralp Journal of Mathematics*, 7 (1), 112-116.

[39] Set, E., Akdemir, AO. & Şahin, E. (2020). Some new Wirtinger type inequalities for η-convex functions. Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Bakü, Azerbaycan, 1, 368-370.

[40] Toader, G. (1984). Some generalizations of the convexity. Proc. Colloq. Approx. Optim., Cluj-Napoca (Romania), 329-338.

[41] Zhang, L. & Wang, S. (2018). Refined Wirtinger-type integral inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018:109.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Eda ŞAHİN
Doğum Yeri	Gölköy/ORDU
Doğum Tarihi	01.05.1987
Uyruğu	☒ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	05063823887
E-Posta Adresi	edaerkoc52@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Erciyes Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Tarihi	06.07.2010

Yayınlar

Karaoğlan, A., Set, E., Akdemir, AO. & Şahin, E. (2020). New inequalities of Wirtinger type for different kinds of convex functions. Miskolc Mathematical Notes, Accepted.

Set, E., Akdemir, AO. & Şahin, E. (2020). Some new Wirtinger type inequalities for η-convex functions. Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Bakü, Azerbaycan, 1, 368-370.