



**T. C.**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EQUİDİSTANTE REGLE YÜZEYLERİN BAZI YENİ**  
**ÖZELLİKLERİ**

**AHMET ÖZDURAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ORDU 2019**

**T.C.**  
**ORDU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**EQUİDİSTANTE REGLE YÜZEYLERİN BAZI YENİ  
ÖZELLİKLERİ**

**AHMET ÖZDURAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ORDU 2019**

## TEZ ONAY

Ahmet ÖZDURAN tarafından hazırlanan "EQUISTANTE REGLE YÜZEYLERİN BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 13.03.2019 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

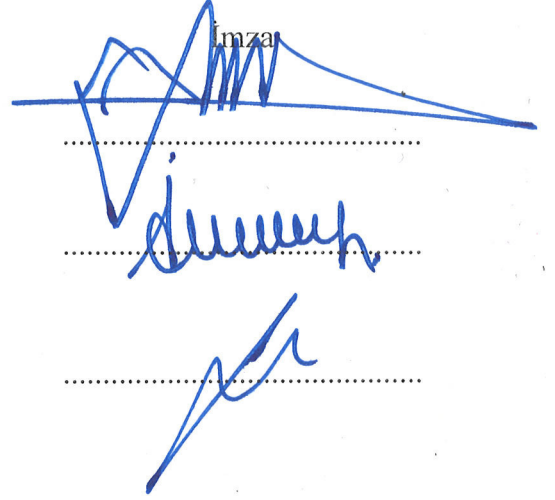
Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

Jüri Üyeleri

Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT

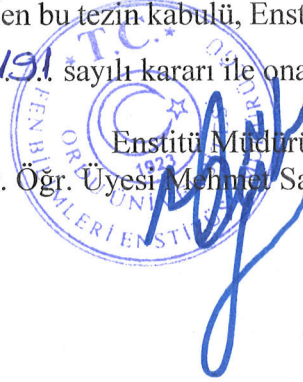
Üye  
Prof. Dr. İsmail AYDEMİR  
Matematik, Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Üye  
Prof. Dr. Emin KASAP  
Matematik, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

İmza



11 / 04 / 2019 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 12 / 04 / 2019 tarih ve 2019 / 191 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü  
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER



## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

AHMET ÖZDURAN



**Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1828 numaralı projesi ile desteklenmiştir.**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### EQUİDİSTANTE REGLE YÜZEYLERİN BAZI YENİ ÖZELLİKLERİ

AHMET ÖZDURAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 123 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Dr. Öğr. Üyesi SÜLEYMAN ŞENYURT)

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş Bölümü'nde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma şekli tartışıldı. Genel Bilgiler Bölümü'nde Diferensiyel Geometriden temel kavramlara yer verildi. Materyal ve Metot Bölümü'nde üç boyutlu Öklid uzayında teğet ve aslı normal vektörler tarafından üretilen equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikler verildi. Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak diferensiyellenebilir herhangi iki eğrinin binormal vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin striksiyon eğrileri boyunca binormal vektörleri paralel ve uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek elde edilen equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzeyler tanımlandı ve bu yüzeyler arasındaki bağıntılar hesaplandı. Regle yüzeylerin kapalı olması halinde integral invaryantları arasında ilişkiler kuruldu. Benzer şekilde üretici vektör olarak birim Darboux vektörleri alınıp bu vektörlerin oluşturduğu equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzeyler tanımlandı ve bu regle yüzeylerin kapalı olması halinde integral invaryantları arasındaki bağıntılar bulundu. Son olarak teğet, aslı normal, binormal ve Darboux vektörlerinin üretmiş oldukları equidistanteregle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisi, Gauss (total) ve ortalama eğrilikleri hesaplandı.

**Anahtar Kelimeler:** Eş Uzaklıklı Regle Yüzey, *Equidistante* Regle Yüzey, *Weingarten* Dönüşümünün Matrisi.

## ABSTRACT

### SOME NEW PROPERTIES OF EQUIDISTANT RULED SURFACES

AHMET ÖZDURAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED  
SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 123 PAGES

(SUPERVISOR: Asst. Prof. Dr. SÜLEYMAN ŞENYURT)

This study is organized in four sections. The aim and style of the work are described in introduction part. The basic concepts from differential geometry are introduced in preliminaries section. In the material and method section, some characteristic features of equidistant regular surfaces produced by tangent and principal normal vectors in three-dimensional Euclidean space are given. The findings section which makes up the original part of our present study, consists of new propositions. In this section we first take two differentiable curves, then we define equidistant ruled surfaces in such a way that along the striction curves of the ruled surfaces formed by the binormals of two differentiable curves, binormal vectors are parallel and the distance between asymptotic surfaces is constant at appropriate points. Then the relations between these ruled surfaces are computed. Relationships between integral invariants have been established when the ruled surfaces are closed. By the similar way, we define the equidistant ruled surfaces generated by the unit Darboux vectors and also calculate the relations between the integral invariants of these surfaces that are given in closed form. Finally we work out the Weingarten transformation matrices, Gauss curvature and mean curvature of equidistant ruled surfaces generated by the tangent vectors, normal vectors, binormal vectors and Darboux vectors.

**Keywords:** *Equidistant Ruled Surface, Matrix of Weingarten Transformation.*

## TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalıőmanın yűrűtűlmesi ve yazımı esnasında baőta danıőman hocam Sayın Dr. Őđr. Őyesi Sűleyman ŐENYURT'a en samimi duygularımla teőekkűrlerimi sunarım. Ayrıca desteklerini esirgemeyen Matematik Bűlűmű'nűn tűm akademik personeline en içten Őűkranlarımı sunuyorum. Ve son olarak Őđrenim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teőekkűrű bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	I
<b>ÖZET</b> .....	II
<b>ABSTRACT</b> .....	III
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	IV
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	V
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....	VI
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ</b> .....	VII
<b>1. GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR</b> .....	1
<b>2. GENEL BİLGİLER</b> .....	2
2.1 Temel Kavramlar .....	2
2.2 Öklid Uzayında Regle Yüzeyley .....	5
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b> .....	13
3.1 Teğet Vektörlerinin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyley.....	13
3.2 Asli Normal Vektörlerinin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyley.....	18
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI</b> .....	25
4.1 Binormal Vektörlerin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyley .....	26
4.2 Birim Darboux Vektörlerin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyley .....	74
4.3 $p$ , $z$ , $q$ ve $d$ – Equidistante Regle Yüzeyleylerin Weingarten Dönüşümünün Matrisi, Gauss (Total) ve Ortalama Eğriliği .....	107
<b>5. SONUÇ ve ÖNERİLER</b> .....	121
<b>6. KAYNAKLAR</b> .....	122
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	123



## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1.1 $W$ Darboux vektörü .....	4
Şekil 2.2.1 Yüzey.....	5
Şekil 2.2.2 $\varphi_X(t, v)$ regle yüzeyi.....	7
Şekil 2.2.3 Açılabilir regle yüzey .....	7
Şekil 2.2.4 $P, Q$ striksiyon noktası ve $\gamma(t)$ striksiyon çizgisi .....	8
Şekil 2.2.5 Ortogonal yörünge eğrisi .....	9
Şekil 2.2.6 $\lambda_X$ açılım açısı.....	10
Şekil 2.2.7 $L_X$ açılım uzunluğu .....	11
Şekil 4.1.1 $\varphi_{V_3}(t, v)$ ve $\varphi_{V_3^*}(t, v)$ regle yüzeylerinin $\gamma, \gamma^*$ striksiyon çizgileri.....	28
Şekil 4.1.2 $t = 0$ anında $H, H^*$ asimptotik düzlemleri ve $q$ uzaklığı.....	34
Şekil 4.1.3 $t = \frac{\pi}{6}$ anında $H, H^*$ asimptotik düzlemleri ve $q$ uzaklığı .....	37
Şekil 4.1.4 $t = \frac{\pi}{4}$ anında $H, H^*$ asimptotik düzlemleri ve $q$ uzaklığı .....	39
Şekil 4.1.5 $t = \frac{\pi}{3}$ anında $H, H^*$ asimptotik düzlemleri ve $q$ uzaklığı .....	41
Şekil 4.1.6 $t = \frac{\pi}{2}$ anında $H, H^*$ asimptotik düzlemleri ve $q$ uzaklığı .....	43
Şekil 4.1.7 $q$ – equidistante regle yüzeyler .....	44
Şekil 4.1.8 $X, X^*$ vektörleri .....	59
Şekil 4.2.1 $C, C^*$ birim Darboux vektörleri .....	74
Şekil 4.2.2 $C = C^*$ birim Darboux vektörleri .....	75
Şekil 4.2.3 $\varphi_C(t, v)$ ve $\varphi_{C^*}(t, v)$ regle yüzeylerinin $\gamma, \gamma^*$ striksiyon çizgileri.....	78
Şekil 4.2.4 $d$ – equidistante regle yüzeyler.....	83
Şekil 4.2.5 $X, X^*$ vektörleri .....	97
Şekil 4.3.1 $p$ – equidistante regle yüzeyler.....	110
Şekil 4.3.2 $z$ – equidistante regle yüzeyler .....	113

## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

---

$E^3$	: 3– boyutlu Öklid uzayı
$E^n$	: $n$ – boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	: Öklid iç çarpımı
$\  \ $	: Norm
$W$	: Darboux vektörü
$C$	: Birim Darboux vektörü
$D$	: Steiner dönme vektörü
$V$	: Steiner öteleme vektörü
$\varphi_x(t, v)$	: Regle yüzey
$k_1$	: Regle yüzeyin tabii eğriliği
$k_2$	: Regle yüzeyin tabii torsiyonu
$\gamma$	: Regle yüzeyin striksiyon çizgisi
$T$	: Regle yüzeyin striksiyon çizgisinin birim teğet vektörü
$\lambda_x$	: Regle yüzeyin açılım açısı
$L_x$	: Regle yüzeyin açılım uzunluğu
$P_x$	: Regle yüzeyin dralı
$S$	: Weingarten dönüşümünün matrisi
$K$	: Gauss (Total) eğriliği
$H$	: Ortalama eğrilik

---

## 1. GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Diferansiyel Geometri de regle yüzeyler geniş bir yer tutmaktadır. En basit ifadesiyle regle yüzey, bir doğrunun bir eğri boyunca hareketi ile oluşan doğrular ailesine verilen isimdir (Hacısalıhoğlu, 1983). Valenontis regle yüzeyler üzerine çalışmış, “Parallel  $p$  – Äquidistante Regelflachen” isimli çalışmasında Öklid uzayında iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca dayanak eğrilerinin teğet vektörleri birbirine paralel ve uygun noktalarda polar düzlemler arasındaki uzaklığı sabit kabul ederek (bu uzaklık  $p$  olarak gösterildi)  $p$ –equidistante regle yüzeyleri tanımlamış ve bu yüzeyin bazı karakteristik özelliklerini vermiştir (Valenontis, 1986).

“Some characteristic properties of the parallel  $p$ –equidistant ruled surfaces in the Euclidean space  $E^3$ ” isimli çalışmada  $p$ –equidistante regle yüzeylerin kapalı olmaları durumunda integral invaryantları arasında ki bağlantıları hesaplanmıştır (Masal ve Kuruoğlu, 1999).

“Some characteristic properties of the shape operators of parallel  $p$ –equidistant ruled surfaces” isimli çalışmada yüzeylerin şekil operatörünün bazı karakteristik özelliklerini ve “Some characteristic properties of the spherical indicatrices of leading curves of parallel  $p$ –equidistant ruled surfaces” isimli çalışmada ise yüzeylerin küresel gösterge eğrilerinin bazı karakteristik özellikleri incelenmiştir (Masal ve Kuruoğlu, 2000).

“Generalized parallel  $p$ –equidistant ruled surfaces” isimli çalışmada  $p$ –equidistante regle yüzeyler  $n$  boyutlu Öklid uzaya genelleştirilmiştir (Masal ve Kuruoğlu, 2013).

“Integral invariants of parallel  $p$ –equidistant ruled surfaces which are generated by instantaneous pfaff vector” isimli çalışmada  $p$ –equidistante regle yüzeylerin kapalı olmaları halinde Darboux vektörlerinin çizdiği kapalı regle yüzeylerin integral invaryantları hesaplanmıştır (Şenyurt, 2012).

“Some characteristic Properties Of Parallel  $z$ –Equidistant Ruled Surfaces” isimli çalışmada iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca dayanak eğrilerinin asli normal vektörleri birbirine paralel ve uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek (bu uzaklık  $z$  olarak gösterildi)  $z$ –equidistante regle yüzeyler tanımlamış, bu yüzeyin bazı karakteristik özellikleri ve integral invaryantları arasındaki bağıntılar elde edilmiştir (Şenyurt ve As, 2013).

Bu tezde ise üretici vektör olarak binormal vektörler ve Darboux vektörler alınarak elde edilen equidistante regle yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri verildi. Yüzeylerin kapalı olmaları halinde integral invaryantları arasındaki bağıntılar hesaplandı. Son olarak teğet, asli normal, binormal ve Darboux vektörlerinin üretmiş oldukları equidistante regle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisleri, Gauss (Total) ve ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulundu.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1 Temel Kavramlar

$A$  boş olmayan bir cümle  $V, \mathfrak{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri sağlayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonsiyonu varsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir:

$$(A_1): \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$$(A_2): \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır.  $P, Q \in A$  için  $f(P, Q) = \overline{PQ}$  şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).  $V$  bir vektör uzayı ve  $A$  da  $V$  ile birleşen bir afin uzay olsun.  $P_0, P_1, P_2, P_3 \in A$  noktaları için  $\{P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3\}$  cümlesi  $V$  nin bir bazı ise  $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$  nokta dörtlüsüne  $A$  afin uzayının bir **afin çatısı** denir. Burada  $P_0$  noktasına çatının **başlangıç noktası** ve  $P_1, P_2, P_3$  noktalarına da çatının **birim noktaları** denir. Eğer  $\text{boy}V = 3$  ise  $A$  ya **3-boyutlu bir afin uzay** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).  $V$  üzerinde tanımlanan

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow IR$$

reel değerli fonksiyonu  $\forall x, y, z \in V$  için aşağıdaki aksiyomları sağlarsa fonksiyona **iç çarpım fonksiyonu** denir (Hacısalıhoğlu, 1983):

**i)** Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle, \quad \langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$$

**ii)** Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

**iii)** Pozitif Tanımlılık Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}.$$

$IR^3$  standart reel afin uzay,  $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in IR^3$  için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu çarpıma  $\mathbb{R}^3$  de **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpım** denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayı ile birleşen  $\mathbb{R}^3$  afin uzayına 3 – **boyutlu Öklid uzayı** bilinir ve  $E^3$  ile gösterilir.  $X = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $Y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$  için

$$d: E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna **uzaklık fonksiyonu** denir (Hacısalihoglu, 1983).

$r: I \rightarrow E^3$  diferansiyellenebilir eğrisinin Frenet vektörleri  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$ ,  $V_3(t)$  eğriliği  $k_1(t)$  ve torsiyonu (burulması)  $k_2(t)$  olsun.  $t$  yay parametresi ise Frenet vektörleri ve eğrilikler

$$V_1(t) = r'(t), \quad V_2(t) = \frac{r''(t)}{\|r''(t)\|}, \quad V_3(t) = V_1(t) \wedge V_2(t), \quad (2.1.1)$$

$$k_1(t) = \langle V_1'(t), V_2(t) \rangle, \quad k_2(t) = \langle V_2'(t), V_3(t) \rangle,$$

$t$  keyfi parametre ise Frenet vektörleri ve eğrilikler

$$V_1(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}, \quad V_2(t) = V_1(t) \wedge V_3(t), \quad V_3(t) = \frac{r'(t) \wedge r''(t)}{\|r'(t) \wedge r''(t)\|}, \quad (2.1.2)$$

$$k_1(t) = \frac{\|r'(t) \wedge r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}, \quad k_2(t) = \frac{\det(r'(t), r''(t), r'''(t))}{\|r'(t) \wedge r''(t)\|^2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda Frenet formülleri

$$V_1'(t) = k_1(t)V_2(t), \quad V_2'(t) = -k_1(t)V_1(t) + k_2(t)V_3(t), \quad V_3'(t) = -k_2(t)V_2(t) \quad (2.1.3)$$

şeklinde verilir (Hacısalihoglu, 1983).  $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t)\}$  Frenet çatısı her  $t$  anında bir eksen etrafında döndüğü varsayılır. Bu eksene eğrinin Darboux (**ani dönme**) **ekseni**,

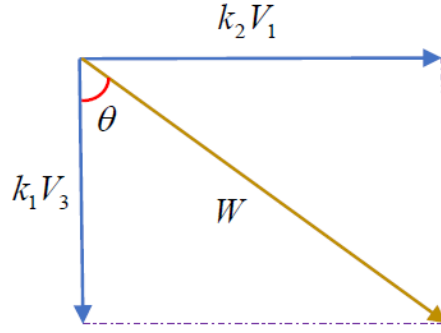
bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre de **Darboux vektörü** adı verilir. Bu vektör  $W(t)$  ile gösterilirse,

$$W(t) = V_2(t) \wedge V_2'(t) = k_2(t)V_1(t) + k_1(t)V_3(t) \quad (2.1.4)$$

birim Darboux yönündeki birim vektör  $C(t)$  ile gösterilirse

$$C(t) = \frac{k_2(t)}{\sqrt{k_1^2(t) + k_2^2(t)}}V_1(t) + \frac{k_1(t)}{\sqrt{k_1^2(t) + k_2^2(t)}}V_3(t) \quad (2.1.5)$$

olur.  $V_3(t)$  ile  $W(t)$  arasındaki açıyı  $\theta$  ile gösterilsin (Şekil 2.1.1).



**Şekil 2.1.1**  $W$  Darboux vektörü

Şekil 2.1.1 den

$$\cos \theta = \frac{k_1(t)}{\|W(t)\|} = \frac{k_1(t)}{\sqrt{k_1^2(t) + k_2^2(t)}}, \quad \sin \theta = \frac{k_2(t)}{\|W(t)\|} = \frac{k_2(t)}{\sqrt{k_1^2(t) + k_2^2(t)}} \quad (2.1.6)$$

olur ve buradan birim Darboux vektörü

$$C(t) = \sin \theta V_1(t) + \cos \theta V_3(t) \quad (2.1.7)$$

şeklinde bulunur (Hacısalihoglu, 1983).  $r: I \rightarrow E^3$  kapalı eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$D(t) = \oint_{(r)} W(t) dt = V_1(t) \oint_{(r)} k_2(t) dt + V_3(t) \oint_{(r)} k_1(t) dt \quad (2.1.8)$$

vektörüne hareketin **Steiner dönme vektörü**,

$$d(r(t)) = r_1(t)V_1(t) + r_2(t)V_2(t) + r_3(t)V_3(t)$$

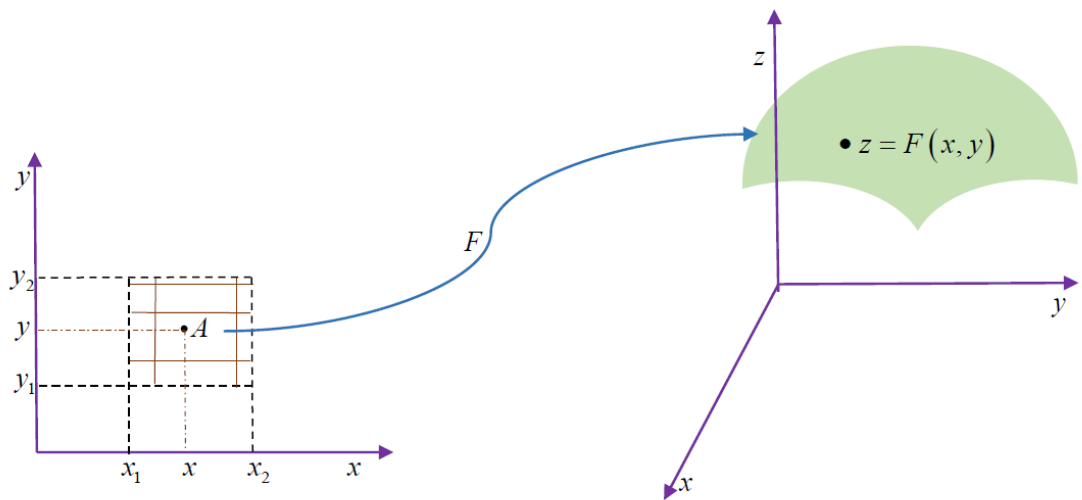
olmak üzere

$$V(t) = \oint_{(r)} d(r(t)) dt = V_1(t) \oint_{(r)} dt \quad (2.1.9)$$

vektörüne de hareketin **Steiner öteleme vektörü** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

## 2.2 Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

$IR^2$  de herhangi bir  $A$  bölgesinde  $(x, y)$  noktasının  $F$  diffeormorfizması altındaki resmi  $z = F(x, y)$  olsun.  $(x, y)$  noktaları  $A$  bölgesini tararken,  $(x, y, z)$  noktalarının geometri yeri de uzayda bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeyin denklemi  $z = F(x, y)$  şeklinde yazılır. Bu yazılış şekline **yüzeyin açık denklemi**,  $F(x, y, z) = 0$  yazılış şekline de **yüzeyin kapalı denklemi** denir (Şenatalar, 1978) (Şekil 2.2.1).



**Şekil 2.2.1** Yüzey

$M \subset E^3$  yüzeyinin birim normal vektör alanı  $N$ , Riemann konneksiyonu  $D$  olmak üzere,  $\forall X \in \chi(F)$  için  $S(X) = D_X N$  şeklinde tanımlı  $S$  dönüşümüne  $F$  üzerinde **şekil operatörü** veya  $F$  yüzeyinin **weingarten dönüşümü** denir. Bu dönüşüm simetrik ve lineer bir dönüşümdür (Hacısalıhoğlu, 1983).  $M$  nin parametrik ifadesi

$$F : E^2 \rightarrow E^3, \quad (u, v) \rightarrow (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))$$

şeklinde verilsin. Bu yüzey için Weingarten dönüşümünün matrisel ifadesi

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{\det(F_{uu}, F_u, F_v)}{\|F_u\|^3 \cdot \|F_v\|} & -\frac{\det(F_{uv}, F_u, F_v)}{\|F_u\|^2 \cdot \|F_v\|^2} \\ -\frac{\det(F_{uv}, F_u, F_v)}{\|F_u\|^2 \cdot \|F_v\|^2} & -\frac{\det(F_{vv}, F_u, F_v)}{\|F_u\| \cdot \|F_v\|^3} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

şeklinde olur.  $M$  yüzeyinin herhangi bir  $P$  noktasındaki Gauss (Total) eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

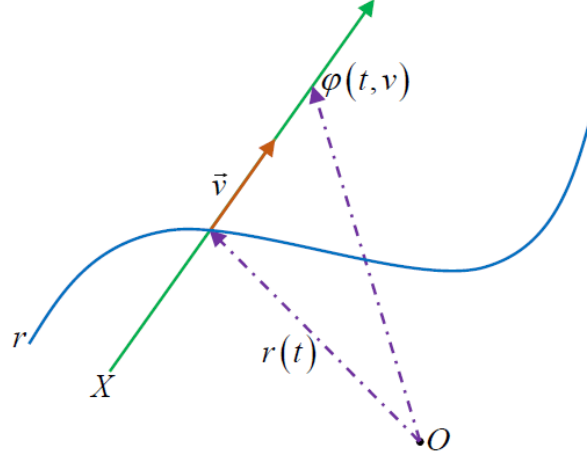
$$K(P) = \det(S), \quad H(P) = I_z(S) \quad (2.2.2)$$

bağıntısıyla verilir. Bir  $X$  doğrunun bir  $r$  eğrisine bağlı hareketiyle oluşan yüzeye **regle yüzey** adı verilir ve bu yüzeyin parametrik denklemi

$$\varphi_X(t, v) = r(t) + vX(t) \quad (2.2.3)$$

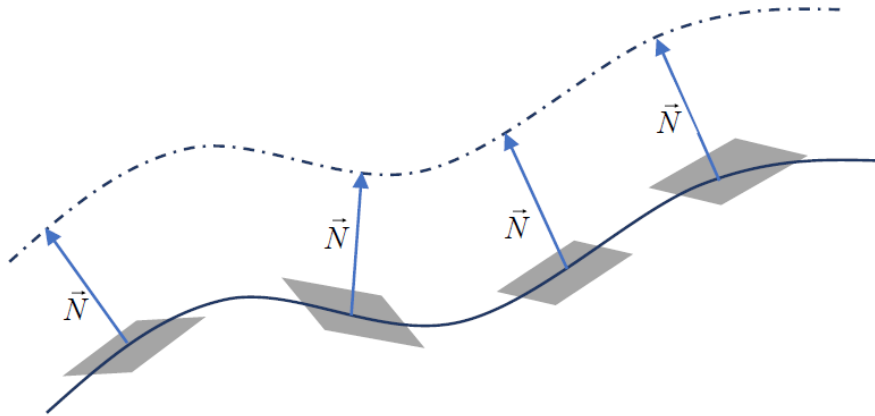
şeklinde yazılır. Burada  $X(t)$  doğrusuna regle yüzeyin ana doğrusu (doğrultmanı),  $r(t)$  eğrisine de yüzeyin dayanak eğrisi denir (Hacısalıhoğlu, 1994), (Şekil 2.2.2).





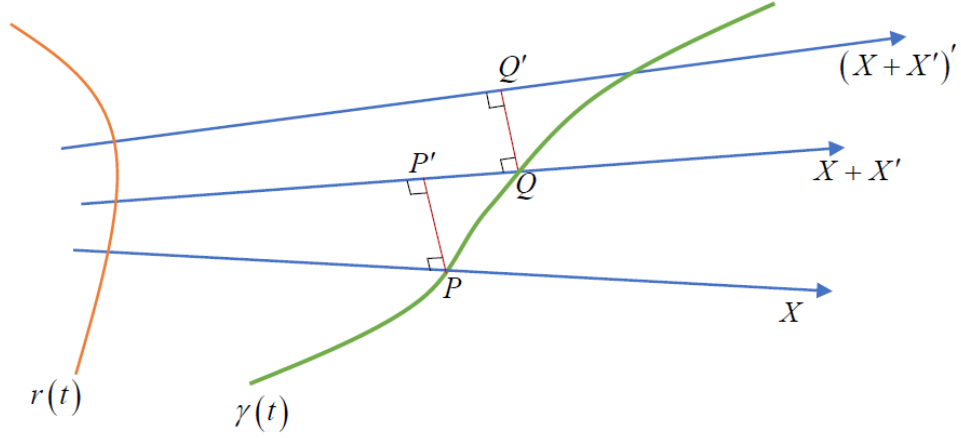
Şekil 2.2.2  $\varphi_X(t, v)$  regle yüzeyi

$\varphi_X(t, v)$  regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca  $Sp\{V_1, V_2\}$ ,  $Sp\{V_2, V_3\}$  ve  $Sp\{V_1, V_3\}$  uzaylarına karşılık gelen düzlemlere sırasıyla **oskütatör düzlem**, **normal düzlem** ve **rektifiyan düzlem** adı verilir.  $\varphi_X(t, v)$  regle yüzeyi  $\forall t \in I$  için  $\varphi_X(t + 2\pi, v) = \varphi_X(t, v)$  olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye **kapalı regle yüzey** denir.  $\varphi_X(t, v)$  regle yüzeyinin ana doğrusu boyunca yüzeyin birim normal vektörü aynı kalıyorsa yüzeye **açılabilir regle yüzey** adı verilir (Şekil 2.2.3).



Şekil 2.2.3 Açılabilir regle yüzey

$\varphi_x(t, v)$  regle yüzeyinde komşu iki ana doğrusunun ortak dikme noktalarının esas ana doğrular üzerindeki noktaya **striksiyon (merkezi veya boğaz) noktası**, bu noktaların geometrik yerine de regle yüzeyin **striksiyon çizgisi** adı verilir (Şekil 2.2.4).



**Şekil 2.2.4** P, Q striksiyon noktası ve  $\gamma(t)$  striksiyon çizgisi

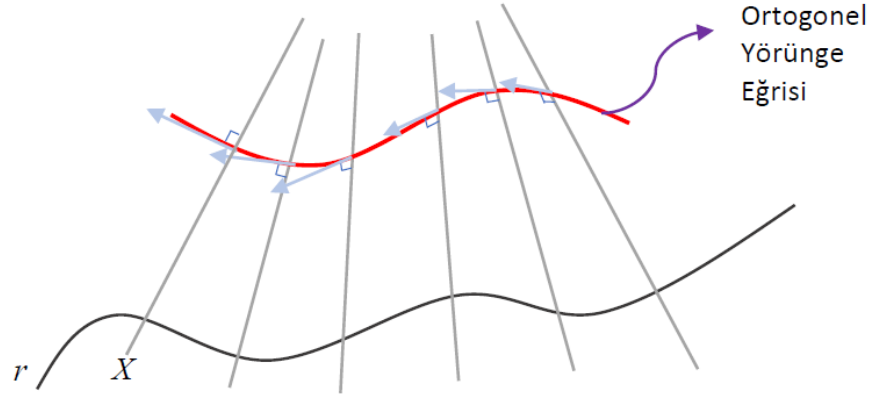
$\gamma(t)$  striksiyon çizgisinin denklemi

$$\gamma(t) = r(t) - \frac{\langle r'(t), X'(t) \rangle}{\|X'(t)\|^2} X(t), \quad X(t) \neq 0 \quad (2.2.4)$$

şeklinde (Hacısalıhoğlu, 1994).  $\varphi_x(t, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisi boyunca  $Sp\{V_1, V_2\}$ ,  $Sp\{V_2, V_3\}$  ve  $Sp\{V_1, V_3\}$  uzaylarına karşılık gelen düzlemlere sırasıyla **asimptotik düzlem**, **polar düzlem** ve **merkezi düzlem** adı verilir (Blaschke, 1994).  $\varphi_x(t, v)$  regle yüzeyinde komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın, bu ana doğrular arasındaki açığa oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (dralı)** denir. Dağılma parametresinin denklemi  $P_x$  ile gösterilirse denklemi

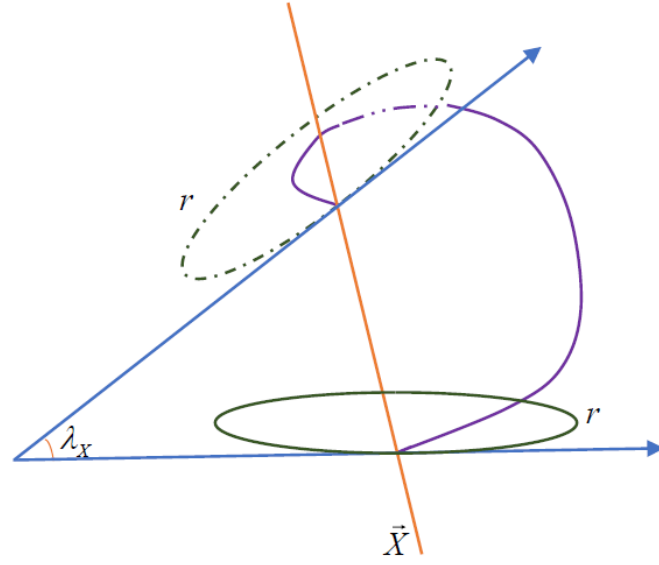
$$P_x = \frac{\det(r'(t), X(t), X'(t))}{\|X'(t)\|^2} \quad (2.2.5)$$

şeklinde verilir.  $\varphi_x(t, v)$  regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca ana doğruların her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin **ortogonal yürünge eğrisi** denir (Şekil 2.2.5).



**Şekil 2.2.5** Ortogonal yürünge eğrisi

$\varphi_x(t, v)$  kapalı regle yüzeyinin  $r(t)$  dayanak eğrisi üzerinde bir  $X$  ana doğrusunun bir periyod sonra ilk konumu ile yaptığı açığa regle yüzeyin **açılım açısı** denir ve  $\lambda_x$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1994), (Şekil 2.2.6).

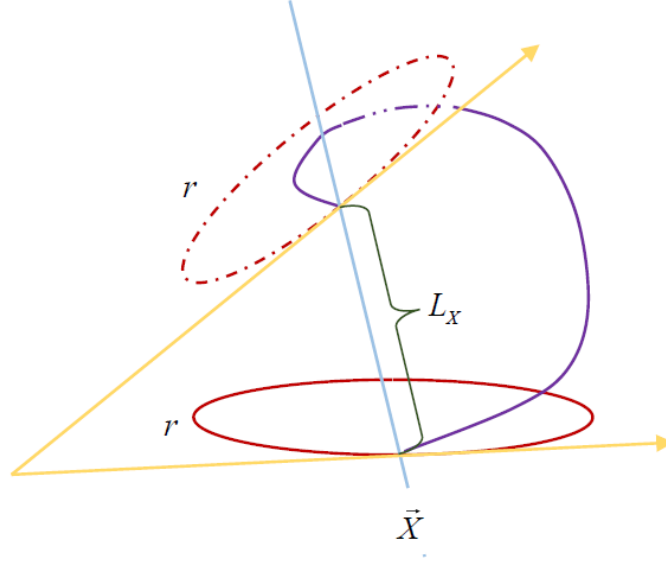


**Şekil 2.2.6**  $\lambda_x$  açılım açısı

$\varphi_x(t, v)$  kapalı regle yüzeyinin ana doğrularının ortogonal yörünge eğrileri için

$$L_x = \oint_{(r)} \langle dr(t), X(t) \rangle = \oint_{(r)} dt$$

şeklinde tanımlı  $L_x$  fonksiyonuna, regle yüzeyin **açılım uzunluğu** denir (Hacısalıhoğlu, 1994), (Şekil 2.2.7).



**Şekil 2.2.7**  $L_X$  açılım uzunluğu

$\varphi_X(t, v)$  kapalı regle yüzeyinin açılım açısı,  $X$  ana doğrusunun Steiner öteleme vektörü üzerine dik izdüşümüdür. Aynı şekilde açılım uzunluğu da  $X$  ana doğrusunun Steiner dönme vektörleri üzerindeki dik izdüşümüdür. Buna göre  $\lambda_X$  ve  $L_X$

$$\lambda_X = \langle D(t), X(t) \rangle, \quad L_X = \langle V(t), X(t) \rangle \quad (2.2.6)$$

şeklinde olur (Hacısalihoglu, 1994).  $X$  ana doğrusu yerine  $r$  eğrisinin Frenet vektörleri alınırsa elde edilen kapalı regle yüzeylerin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dağılma parametreleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} \lambda_{V_1} &= \oint_{(r)} k_2(t) dt, & \lambda_{V_2} &= 0, & \lambda_{V_3} &= \oint_{(r)} k_1(t) dt, \\ L_{V_1} &= \oint_{(r)} dt, & L_{V_2} &= 0, & L_{V_3} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$P_{V_1} = 0, \quad P_{V_2} = \frac{k_2(t)}{k_1^2(t) + k_2^2(t)}, \quad P_{V_3} = \frac{1}{k_2(t)}$$

şeklinde verilir. Yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen  $D(t)$  dönme ve  $V(t)$  öteleme vektörleri

$$D(t) = \lambda_{v_1(t)} V_1(t) + \lambda_{v_3(t)} V_3(t), \quad V(t) = L_{v_1(t)} V_1(t) \quad (2.2.8)$$

bağıntısıyla verilir (Hacısalıhoğlu, 1994).

Bu bölümde kullanılan şekiller Sümeyye Gür ün doktora tezinden alınmıştır (Gür, 2015).

### 3. MATERYAL ve METOT

Bu bölümde “Parallel  $p$  – equidistante regelflachen”, “Some characteristic properties of the parallel  $p$  – equidistant ruled surfaces in the Euclidean space  $E^3$ ” ve “Some characteristic properties of parallel  $z$  – equidistant ruled surfaces” isimli çalışmalardan elde edilen bulgular verilecektir. Burada ifade edilen teoremlerin ispatlarına yer verilmeyecektir. Çünkü benzer teoremler bulgular kısmında da ifade edilecek ve ispatlar orada yapılacaktır.

#### 3.1 Teğet Vektörlerinin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyler

$E^3$  de dayanak eğrisi  $r$  ve doğrulmak vektörü  $r$  eğrisinin teğet vektörü olan regle yüzeyini parametrik denklemi  $\varphi_{V_1}(t, v) = r(t) + vV_1(t)$  şeklinde yazılır.  $\varphi_{V_1}(t, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin birim teğet vektörü  $T$  ve  $T$  ile  $V_1$  vektörü arasındaki açı  $\sigma$  alınırsa

$$T = \cos \sigma V_1 + \sin \sigma V_3, \quad -\frac{\pi}{2} < \sigma \leq \frac{\pi}{2}$$

dır. Burada  $\sigma$  açısına **striksiyon** ve  $\{k_1, k_2, \sigma\}$  sistemine de  $\varphi_{V_1}(t, v)$  yüzeyinin **tamamlanmış invaryant sistemi (kruppa invaryantları)** denir (Kruppa, 1957).  $\varphi_{V_1}(t, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisi  $\gamma$ , striksiyonu  $\sigma$ , tabii eğriliği  $k_1$  ve dralı  $P_{V_1}$  olmak üzere,  $P_{V_1} = \frac{\sin \sigma}{k_1}$  şeklinde bulunur (Valeontis, 1986).  $r$  ve  $r^*$  eğrilerinin  $V_1$  ve  $V_1^*$  teğet vektörlerin ürettiği regle yüzeylerin parametrik denklemi sırasıyla

$$\varphi_{V_1}(t, v) = r(t) + vV_1(t), \quad \varphi_{V_1^*}(t, v) = r^*(t) + vV_1^*(t) \quad (3.1.1)$$

olsun. Eğer,

- i) striksiyon eğrileri boyunca teğet vektörleri paralel,
- ii) uygun noktalarda polar düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklık  $p$  ile gösterildi)

ise  $\varphi_{V_1}(t, v)$  ve  $\varphi_{V_1^*}(t, v)$  yüzeylerine  **$p$  – equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzeyler** adı verilir. Dayanak eğrisi olarak  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon çizgileri alınırsa yüzeyin parametrik denklemleri

$$\varphi_{V_1}(t, v) = \gamma(t) + vV_1(t), \quad \varphi_{V_1^*}(t, v) = \gamma^*(t) + vV_1^*(t)$$

şeklinde olur (Valeontis, 1986).  $p$ -equidistante regle yüzeylerin uygun noktalardaki merkezi düzlemler, asimptotik düzlemler ve polar düzlemler arasındaki uzaklıklar sırasıyla  $|z|$ ,  $|q|$  ve  $|p|$  ile gösterilirse ve  $r^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + qV_3$  olmak üzere  $\varphi_{V_1^*}(t, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin denklemi,

$$\gamma^* = \gamma + zV_2 + qV_3 - \left( \frac{z' - qk_2}{k_1} \right) V_1$$

şeklinde yazılır. Burada polar düzlemleri arasındaki uzaklık

$$p = \frac{-z' + qk_2}{k_1} \tag{3.1.2}$$

şeklinde verilir (Valeontis, 1986).

**Teorem 3.1.1:**  $p$ -equidistante regle yüzeylerin  $r$  ve  $r^*$  dayanak eğrilerinin tabii eğrilikleri ve tabii torsiyonları sırasıyla  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_1^*$ ,  $k_2^*$  olsun. Bu eğrilikler arasında

$$k_1^* = k_1 \frac{dt}{dt^*}, \quad k_2^* = k_2 \frac{dt}{dt^*} \tag{3.1.3}$$

bağıntıları vardır (Valeontis, 1986).

**Teorem 3.1.2:**  $p$ -equidistante regle yüzeyin  $r$  dayanak eğrisi yerine  $\gamma$  striksiyon çizgisi alınırsa drallar ve striksiyonlar arasında

$$P_{V_1^*} = \frac{\sin \sigma + q' + zk_2}{k_1} \quad \text{veya} \quad P_{V_1^*} = P_{V_1} + \frac{q' + zk_2}{k_1},$$

$$\cos \sigma^* = \left( \cos \sigma - zk_1 - \left( \frac{z' - qk_2}{k_1} \right)' \right) \frac{dt}{dt^*}, \quad \sin \sigma^* = (\sin \sigma + q' + zk_2) \frac{dt}{dt^*}$$

bağıntıları vardır (Valeontis, 1986).



**Teorem 3.1.3:**  $p$ -equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin Frenet çatıları tarafından çizilen regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralları arasında

$$\lambda_{V_1^*} = \lambda_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad \lambda_{V_2^*} = \lambda_{V_2} = 0, \quad \lambda_{V_3^*} = \lambda_{V_3} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_1 dt,$$

$$L_{V_1^*} k_1^* = k_1 L_{V_1} + k_1 \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} dt, \quad L_{V_2^*} = L_{V_2} = L_{V_3^*} = L_{V_3} = 0,$$

$$P_{V_1^*} = P_{V_1} = 0, \quad P_{V_2^*} = P_{V_2} \frac{dt^*}{dt}, \quad P_{V_3^*} = P_{V_3} \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntıları vardır (Baykut, 1994).

**Teorem 3.1.4:**  $p$ -equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrilerine ait birim Darboux vektörleri sırasıyla  $C$  ve  $C^*$  olsun. Bu vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralları arasında sırasıyla

$$\lambda_{C^*} = \lambda_C + \sin \beta \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt + \cos \beta \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_1 dt,$$

$$L_{C^*} = \sin \beta L_C + \sin \beta \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_1 dt, \quad P_{C^*} = P_C \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntısı vardır (Şenyurt, 2012).

**Teorem 3.1.5:**  $p$ -equidistante regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı olarak hareket eden vektörler  $X = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$  ve  $X^* = x_1^* V_1^* + x_2^* V_2^* + x_3^* V_3^*$  olsun. Bu durumda  $X^*$  vektörü

$$X^* = (x_1 - p) V_1^* + (x_2 - z) V_2^* + (x_3 - q) V_3^* \quad (3.1.4)$$

şeklinde verilir. (Baykut, 1994).

**Teorem 3.1.6:**  $p$ -equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı olarak hareket eden vektörler  $X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$  ve  $X^* = x_1^*V_1^* + x_2^*V_2^* + x_3^*V_3^*$  olsun. Bu vektörlerin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları ve açılım uzunlukları arasında

$$\lambda_X = \lambda_{V_1}x_1 + \lambda_{V_3}x_3,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_X - p(\lambda_{V_1} + a_1) - q(\lambda_{V_3} + a_2) + a_1x_1 + a_2x_2,$$

$$L_X = L_{V_1}x_1, \quad L_{X^*}k_1^* = k_1L_X + k_1(pL_{V_1} + (x_1 - p)a_3),$$

$$a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad a_2 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_1 dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} dt$$

bağıntıları vardır. (Baykut, 1994).

**Teorem 3.1.7:**  $p$ -equidistante regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı olarak hareket eden vektörler  $X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$  ve  $X^* = x_1^*V_1^* + x_2^*V_2^* + x_3^*V_3^*$  olsun. Bu vektörlerin çizmiş olduğu regle yüzeylerin dralları arasında

$$P_X = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_1^2 + x_2^2) + k_2^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_3k_1k_2}, \quad P_{X^*} = \frac{C_p(x_2 - z) - B_p(x_3 - q)}{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2},$$

$$A_p = -p' - k_1(x_2 - z)\frac{dt}{dt^*}, \quad C_p = -q' - k_2(x_2 - z)\frac{dt}{dt^*},$$

$$B_p = -z' - k_1(x_1 - p)\frac{dt}{dt^*} + k_2(x_3 - q)\frac{dt}{dt^*}$$

bağıntıları vardır.

**İspat:**  $X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$  vektörünün türevi ve türevinin normunun karesi

$$X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 \Rightarrow X' = x_1V_1' + x_2V_2' + x_3V_3'$$

$$\Rightarrow X' = x_1k_1V_2 + x_2(-k_1V_1 + k_2V_3) + x_3(-k_1V_2)$$

$$\Rightarrow X' = -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3,$$

$$\|X'\|^2 = (-x_2k_1)^2 + (x_1k_1 - x_3k_2)^2 + (x_2k_2)^2 \Rightarrow \|X'\|^2 = x_2^2k_1^2 + x_1^2k_1^2 + x_3^2k_2^2 - 2x_1k_1x_3k_2 + x_2^2k_2^2$$

$$\Rightarrow \|X'\|^2 = k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2$$

olur. Bu değerler drall tanımında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P_x = \frac{\det(r', X, X')}{\|X'\|^2} \Rightarrow P_x = \frac{\det(V_1, x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3, -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3)}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{x_2^2k_2 - x_3x_1k_1 + x_3^2k_2}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.4) ifadesinin türevi

$$(X^*)' = (-p' - k_1^*(x_2 - z))V_1^* + (-z' - k_1^*(x_1 - p) + k_2^*(x_3 - q))V_2^* + (-q' - k_2^*(x_2 - z))V_3^*$$

şeklinde olur.  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  in yerine (3.1.3) den karşılıkları yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$(X^*)' = \left(-p' - k_1(x_2 - z)\frac{dt}{dt^*}\right)V_1^* + \left(-z' - k_1(x_1 - p)\frac{dt}{dt^*} + k_2(x_3 - q)\frac{dt}{dt^*}\right)V_2^* + \left(-q' - k_2(x_2 - z)\frac{dt}{dt^*}\right)V_3^*$$

bulunur. Burada işlemleri kolaylaştırmak için,

$$A_p = -p' - k_1(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*}, \quad C_p = -q' - k_2(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*},$$

$$B_p = -z' - k_1(x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} + k_2(x_3 - q) \frac{dt}{dt^*}$$

alınırsa  $(X^*)' = A_p V_1^* + B_p V_2^* + C_p V_3^*$  ve  $\|(X^*)'\|^2 = A_p^2 + B_p^2 + C_p^2$  olur. Bu ifadeler (2.2.5) de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa  $P_{X^*}$  dralı

$$P_{X^*} = \frac{\det\left((r^*)', X^*, (X^*)'\right)}{\|(X^*)'\|^2} \Rightarrow P_{X^*} = \frac{\det\left(V_1^*, X^*, (X^*)'\right)}{\|(X^*)'\|^2}$$

$$\Rightarrow P_{X^*} = \frac{C_p(x_2 - z) - B_p(x_3 - q)}{A_p^2 + B_p^2 + C_p^2}$$

şeklinde elde edilir.

### 3.2 Asli Normal Vektörlerinin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyler

$E^3$  de  $r$  ve  $r^*$  eğrilerine ait  $V_2$  ve  $V_2^*$  asli normal vektörlerinin ürettiği regle yüzeylerin parametrik denklemi sırasıyla

$$\varphi_{V_2}(t, v) = r(t) + vV_2(t), \quad \varphi_{V_2^*}(t, v) = r^*(t) + vV_2^*(t) \quad (3.2.1)$$

olsun. Eğer;

- i) striksiyon eğrileri boyunca asli normal vektörleri paralel
- ii) uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklığa  $z$  diyelim)

$\varphi_{V_2}(t, v)$  ve  $\varphi_{V_2^*}(t, v)$  yüzeylerine  $z$ -**equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzey** adı verilir. Dayanak eğrisi olarak  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon çizgileri alınırsa regle yüzeylerin parametrik denklemleri

$$\varphi_{V_2}(t, v) = \gamma(t) + vV_2(t), \quad \varphi_{V_2^*}(t, v) = \gamma^*(t) + vV_2^*(t)$$

şeklinde olur (As, 2010).  $z$ -equidistante regle yüzeylerin uygun noktadaki merkezi düzlemler, asimptotik düzlemler ve polar düzlemler arasındaki uzaklıklar sırasıyla  $|z|$ ,  $|q|$  ve  $|p|$  ile gösterilirse  $\varphi_{V_2^*}(t, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin denklemi,

$$\gamma^* = \gamma + pV_1 + qV_3 + \left( \frac{k_1 \left( 1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left( q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right) V_2$$

şeklinde bulunur. Burada merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık

$$z = \frac{k_1 \left( 1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left( q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2} \quad (3.2.2)$$

şeklinde verilir (As, 2010).

**Teorem 3.2.1:**  $z$ -equidistante regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin teğet vektörlerinin arasındaki açı  $\phi$  ile gösterilirse Frenet çatıları, tabii eğrilikleri ve tabii torsiyonları arasında

$$V_1^* = \cos \phi V_1 + \sin \phi V_3, \quad V_2^* = V_2, \quad V_3^* = -\sin \phi V_1 + \cos \phi V_3$$

$$k_1^* = (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*}, \quad k_2^* = (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*} \quad (3.2.3)$$

bağıntıları vardır (As, 2010).

**Teorem 3.2.2:**  $z$ -equidistante regle yüzeylerinin striksiyon çizgilerinin teğet bileşenleri arasında

$$\cos \delta^* \sin \beta^* = \left( \cos \phi \left( \cos \delta \sin \beta \frac{dt_\gamma}{dt} + p' - k_1 z \right) + \sin \phi \left( \cos \delta \cos \beta \frac{dt_\gamma}{dt} + q' - k_2 z \right) \right) \frac{dt_\gamma}{dt},$$

$$\sin \delta^* = \left( \sin \delta \frac{dt_\gamma}{dt} + p k_1 - q k_2 + z' \right) \frac{dt_\gamma}{dt},$$

$$\cos \delta^* \cos \beta^* = \left( -\sin \phi \left( \cos \delta \sin \beta \frac{dt_\gamma}{dt} + p' - k_1 z \right) + \cos \phi \left( \cos \delta \cos \beta \frac{dt_\gamma}{dt} + q' - k_2 z \right) \right) \frac{dt_\gamma}{dt}$$

bağıntıları vardır (As, 2010).

**Teorem 3.2.3:**  $z$ -equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrilerine ait Frenet çizgilerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralları arasında

$$\lambda_{V_1^*} = \cos \phi \lambda_{V_1} + \sin \phi \lambda_{V_3} + b_1, \quad \lambda_{V_2^*} = \lambda_{V_2} = 0, \quad \lambda_{V_3^*} = -\sin \phi \lambda_{V_1} + \cos \phi \lambda_{V_3} + b_2,$$

$$L_{V_1^*} k_1^* = (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) L_{V_1} + b_3, \quad L_{V_2^*} = L_{V_2} = 0, \quad L_{V_3^*} = L_{V_3} = 0$$

$$P_{V_1^*} = P_{V_1} = 0, \quad P_{V_2^*} = P_{V_2} \left( \cos \phi + \sin \phi \frac{k_1}{k_2} \right) \frac{dt^*}{dt}, \quad P_{V_3^*} = P_{V_3} \left( \frac{k_2}{k_1 \cos \phi + k_2 \sin \phi} \right) \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntıları vardır (As, 2010). Burada  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$  ifadeleri

$$b_1 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} k_2^* dt^* + \oint_{((\frac{k_1^*}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} k_2^* dt^*, \quad b_2 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} k_1^* dt^* + \oint_{((\frac{k_1^*}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} k_1^* dt^*,$$

$$b_3 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} dt^* + \oint_{((\frac{k_1^*}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} dt^*.$$

**Teorem 3.2.4**  $z$ -equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrilerine ait birim Darboux vektörleri sırasıyla  $C$  ve  $C^*$  olsun. Bu vektörlerin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dralları arasında

$$\lambda_{C^*} = \lambda_C + b_1 (\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi) + b_2 (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi),$$

$$L_{C^*} = (\cos \phi + \sin \phi \cot \theta) \left( \cos \phi \frac{k_1}{k_1^*} - \sin \phi \frac{k_2}{k_2^*} \right) L_C + b_3 \sin \theta^*,$$

$$P_{C^*} = P_C (\cos \phi - \sin \phi \tan \theta) \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntıları vardır (As, 2010). Burada  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$  ifadeleri

$$b_1 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} k_2^* dt^* + \oint_{((\frac{k_1^*}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} k_2^* dt^*, \quad b_2 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} k_1^* dt^* + \oint_{((\frac{k_1^*}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} k_1^* dt^*,$$

$$b_3 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} dt^* + \oint_{((\frac{k_1^*}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} dt^*.$$

**Teorem 3.2.5:**  $z$ -equidistante regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı olarak hareket eden vektörler sırasıyla  $X = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$  ve

$X^* = x_1^* V_1^* + x_2^* V_2^* + x_3^* V_3^*$  olsun. Bu durumda  $X^*$  vektörü

$$X^* = ((x_1 - p) \cos \phi + (x_3 - q) \sin \phi) V_1^* + (x_2 - z) V_2^* + ((x_3 - q) \cos \phi - (x_1 + p) \sin \phi) V_3^* \quad (3.2.4)$$

bağıntısı ile verilir (As, 2010).

**Teorem 3.2.6:**  $z$ -equidistante kapalı regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı olarak hareket eden vektörler  $X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$  ve  $X^* = x_1^*V_1^* + x_2^*V_2^* + x_3^*V_3^*$  olsun. Bu vektörlerin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları ve açılım uzunlukları arasında

$$\lambda_X = \lambda_{V_1}x_1 + \lambda_{V_3}x_3,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_X - p\lambda_{V_1} - q\lambda_{V_3} + b_1(\cos\phi(x_1 - p) + \sin\phi(x_3 - q)) + b_2(\cos\phi(x_3 - q) - \sin\phi(x_1 - p))$$

$$L_X = L_{V_1}x_1, \quad L_{X^*} = L_X \left( \cos^2\phi \frac{k_1}{k_1^*} - \sin\phi \cos\phi \frac{k_2}{k_1^*} \right) + b_3x_1 \cos\phi + ((x_3 - q)\sin\phi - p \cos\phi) L_{V_1}$$

bağıntıları vardır (As, 2010). Burada  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$  ifadeleri

$$b_1 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} k_2^* dt^* + \oint_{((\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} k_2^* dt^*, \quad b_2 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} k_1^* dt^* + \oint_{((\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} k_1^* dt^*,$$

$$b_3 = \oint_{(pV_1 + (z - \frac{k_1^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2})V_2 + qV_3)} dt^* + \oint_{((\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2})V_2)} dt^*.$$

**Teorem 3.2.7:**  $z$ -equidistante regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı olarak hareket eden vektörler  $X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$  ve  $X^* = x_1^*V_1^* + x_2^*V_2^* + x_3^*V_3^*$  olsun. Bu vektörlerin çizdiği regle yüzeylerin dralları arasında

$$P_X = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_1^2 + x_2^2) + k_2^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_3k_1k_2},$$

$$P_{X^*} = \frac{C_z(x_2 - z) - B_z(\cos\phi(x_3 - q) - \sin\phi(x_1 - p))}{A_z^2 + B_z^2 + C_z^2},$$



$$A_z = \cos \phi (x_3 - q - p') - \sin \phi (x_1 - p - q') - (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*},$$

$$B_z = \cos \phi \frac{dt}{dt^*} ((k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi)(x_1 - p) + (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi)(x_3 - q)) \\ + \sin \phi \frac{dt}{dt^*} ((k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi)(x_3 - q) - (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi)(x_1 - p)) - z',$$

$$C_z = \sin \phi (-x_3 + q + p') - \cos \phi (x_1 - p + q') - (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*}$$

bağıntısı vardır.

**İspat:**  $X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$  vektörünün türevi ve türevinin normunun karesi

$$X = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 \Rightarrow X' = x_1V_1' + x_2V_2' + x_3V_3'$$

$$\Rightarrow X' = x_1k_1V_2 + x_2(-k_1V_1 + k_2V_3) + x_3(-k_1V_2)$$

$$\Rightarrow X' = -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3,$$

$$\|X'\|^2 = (-x_2k_1)^2 + (x_1k_1 - x_3k_2)^2 + (x_2k_2)^2 \Rightarrow \|X'\|^2 = x_2^2k_1^2 + x_1^2k_1^2 + x_3^2k_2^2 - 2x_1k_1x_3k_2 + x_2^2k_2^2$$

$$\Rightarrow \|X'\|^2 = k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2$$

olur. Bu değerler drall tanımında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$P_x = \frac{\det(r', X, X')}{\|X'\|^2} \Rightarrow P_x = \frac{\det(V_1, x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3, -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3)}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{x_2^2k_2 - x_3x_1k_1 + x_3^2k_2}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}$$

$$\Rightarrow P_x = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.2.4) ifadesinin türevi alınır  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  in yerine (3.2.3) den karşılıkları yazılırsa

$$\begin{aligned} (X^*)' = & \left( \cos \phi (x_3 - q - p') - \sin \phi (x_1 - p - q') - (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) V_1^* \\ & + \left( \begin{aligned} & \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \left( (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) (x_1 - p) + (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) (x_3 - q) \right) \\ & + \sin \phi \frac{dt}{dt^*} \left( (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) (x_3 - q) - (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) (x_1 - p) \right) - z' \end{aligned} \right) V_2^* \\ & + \left( \sin \phi (-x_3 + q + p') - \cos \phi (x_1 - p + q') - (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) V_3^* \end{aligned}$$

olur. Burada işlemi kolaylaştırmak için

$$A_z = \cos \phi (x_3 - q - p') - \sin \phi (x_1 - p - q') - (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*},$$

$$\begin{aligned} B_z = & \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \left( (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) (x_1 - p) + (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) (x_3 - q) \right) \\ & + \sin \phi \frac{dt}{dt^*} \left( (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) (x_3 - q) - (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) (x_1 - p) \right) - z', \end{aligned}$$

$$C_z = \sin \phi (-x_3 + q + p') - \cos \phi (x_1 - p + q') - (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*}$$

alınırsa  $(X^*)' = A_z V_1^* + B_z V_2^* + C_z V_3^*$  ve  $\left\| (X^*)' \right\|^2 = A_z^2 + B_z^2 + C_z^2$  olur. Bu ifadeler

(2.2.5) de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa  $P_{X^*}$  dralı

$$\begin{aligned} P_{X^*} = & \frac{\det \left( (r^*)', X^*, (X^*)' \right)}{\left\| (X^*)' \right\|^2} \Rightarrow P_{X^*} = \frac{\det \left( V_1^*, X^*, (X^*)' \right)}{\left\| (X^*)' \right\|^2} \\ \Rightarrow P_{X^*} = & \frac{C_z (x_2 - z) - B_z (\cos \phi (x_3 - q) - \sin \phi (x_1 - p))}{A_z^2 + B_z^2 + C_z^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Yapılan işlemler üç kısımda incelendi.

İlk kısımda diferensiyellenebilir herhangi iki eğrinin binormal vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin striksiyon eğrileri boyunca binormal vektörleri paralel ve uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek elde edilen equidistante (eŐ uzaklıklı) regle yüzeyler tanımlandı ve bu yüzeylere ait bazı karakterizasyonlar verildi. Regle yüzeylerin kapalı olmaları halinde integral invaryantları arasında ilişkiler kuruldu.

İkinci kısımda ilk kısma benzer şekilde üretici vektör olarak birim Darboux vektörler alınıp bu vektörler tarafından üretilen equidistante (eŐ uzaklıklı) regle yüzeyler tanımlanarak bazı karakterizasyonları verildi. Regle yüzeylerin kapalı olması halinde integral invaryantları arasındaki bağıntılar bulundu.

Son kısımda ise teğet, asli normal, binormal ve Darboux vektörlerinin üretmiş olduğu equidistante regle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisleri, Gauss (total) ve ortalama eğrilikleri hesaplandı.

#### 4.1 Binormal Vektörlerinin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyler

**Tanım 4.1.1:**  $r$  ve  $r^*$  eğrilerine ait  $V_3$  ve  $V_3^*$  binormal vektörlerin ürettiği regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\varphi_{V_3}(t, v) = r(t) + vV_3(t), \quad \varphi_{V_3^*}(t, v) = r^*(t) + vV_3^*(t) \quad (4.1.1)$$

olsun. Eğer;

- i) striksiyon eğrileri boyunca binormal vektörleri paralel,
- ii) uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklık  $q$  ile gösterildi)

bu yüzeylere  $q$  – **equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzeyler** adı verilir.

**Teorem 4.1.1:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin Franet çatıları sırasıyla  $\{V_1, V_2, V_3\}$  ve  $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*\}$  ve teğet vektörler arasındaki açı  $\phi = \phi(t)$  ile gösterilsin. Bu durumda Frenet çatıları arasında

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

bağıntısı vardır.

**İspat:**  $V_1^*$  vektörünün  $\{V_1, V_2, V_3\}$  Frenet vektörleri cinsinden  $V_1^* = a_1V_1 + b_1V_2 + c_1V_3$

şeklinde yazılır. Burada  $a_1 = \cos \phi$ ,  $b_1 = -\sin \phi$  ve  $c_1 = 0$  olur. Bu değerler yerine yazılırsa  $V_1^* = \cos \phi V_1 - \sin \phi V_2$  şeklinde olur. Benzer hesap yöntemiyle  $V_2^*$  vektörü de  $V_2^* = \sin \phi V_1 + \cos \phi V_2$  şeklinde bulunur. Tanımdan binormal vektörler paralel olduğundan  $V_3^* = V_3$  olur.

**Teorem 4.1.2:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerin  $r$  ve  $r^*$  dayanak eğrilerinin tabii eğriliği ve tabii torsiyonu sırasıyla  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_1^*$ ,  $k_2^*$  olsun. Bu eğrilikler arasında

$$k_1^* = (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*}, \quad k_2^* = k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \quad (4.1.3)$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** (4.1.2) bağıntısından  $V_1^*$  in türevi alınırsa

$$\frac{dV_1^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = -\sin \phi V_1 + \cos \phi V_1' - \cos \phi V_2 - \sin \phi V_2',$$

$$\frac{dV_1^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = (-\sin \phi + k_1 \sin \phi) V_1 + (k_1 \cos \phi - \cos \phi) V_2 + (k_2 \sin \phi) V_3,$$

$$(V_1^*)' = (-\sin \phi + k_1 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_1 + (k_1 \cos \phi - \cos \phi) \frac{dt}{dt^*} V_2 + (k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_3$$

olur. (2.1.1) ifadesinden  $k_1^*$  eğriliği

$$k_1^* = \left\langle (V_1^*)', V_2^* \right\rangle,$$

$$k_1^* = \left\langle (-\sin \phi + k_1 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_1 + (k_1 \cos \phi - \cos \phi) \frac{dt}{dt^*} V_2 + (k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_3, \sin \phi V_1 + \cos \phi V_2 \right\rangle,$$

$$k_1^* = (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*}$$

bulunur. Benzer yöntem kullanılarak  $k_2^*$  eğriliği

$$\frac{dV_2^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} = \cos \phi V_1 + \sin \phi V_1' - \sin \phi V_2 + \cos \phi V_2',$$

$$(V_2^*)' = (\cos \phi - k_1 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_1 + (k_1 \sin \phi - \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_2 + (k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*} V_3,$$

$$k_2^* = \left\langle (V_2^*)', V_3^* \right\rangle,$$

$$k_2^* = \left\langle (\cos \phi - k_1 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_1 + (k_1 \sin \phi - \sin \phi) \frac{dt}{dt^*} V_2 + (k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*} V_3, V_3 \right\rangle,$$

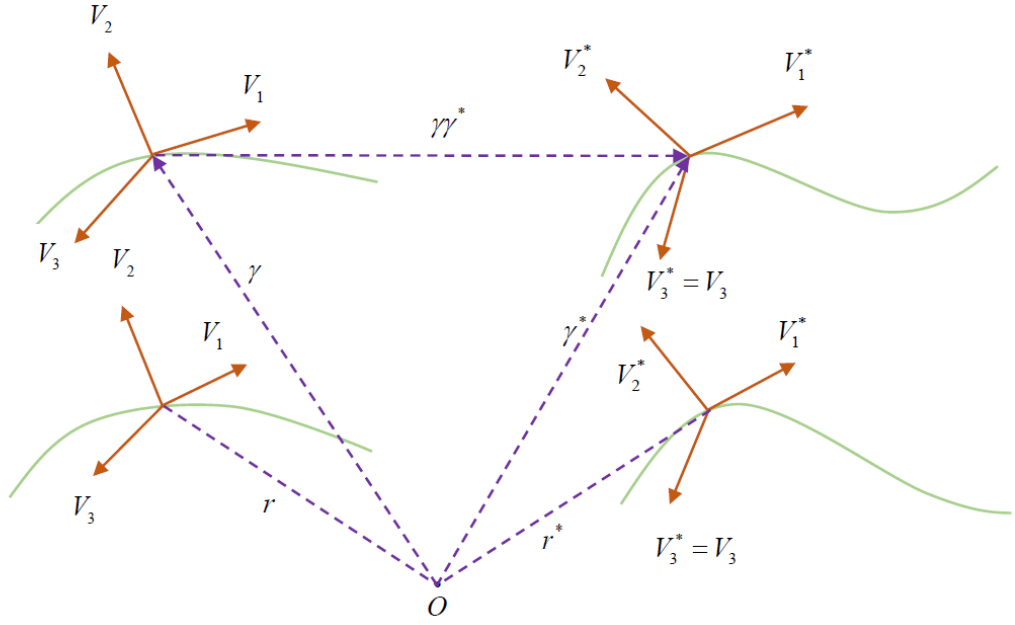
$$k_2^* = k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}$$

şeklinde bulunur.

Dayanak eğrisi olarak striksiyon eğrisi alınırsa  $q$ -equidistante regle yüzeylerin parametrik ifadeleri

$$\varphi_{V_3}(t, v) = \gamma(t) + vV_3(t), \quad \varphi_{V_3^*}(t, v) = \gamma^*(t) + vV_3^*(t) \quad (4.1.4)$$

şeklinde yazılır. Bu yüzeylerin uygun noktalardaki polar, merkezi ve asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık sırasıyla  $|p|$ ,  $|z|$  ve  $|q|$  ile gösterilsin (Şekil 4.1.1).



**Şekil 4.1.1**  $\varphi_{V_3}(t, v)$  ve  $\varphi_{V_3^*}(t, v)$  regle yüzeylerinin  $\gamma$ ,  $\gamma^*$  striksiyon çizgileri

$\gamma^*$  striksiyon çizgisinin denklemi  $\gamma^* = \gamma + aV_1 + bV_2 + cV_3$  şeklinde yazılır. Burada

$$a = \langle \overrightarrow{\gamma^*}, V_1 \rangle, \quad b = \langle \overrightarrow{\gamma^*}, V_2 \rangle, \quad c = \langle \overrightarrow{\gamma^*}, V_3 \rangle$$

dır.  $\overrightarrow{\gamma^*}$  vektörünün  $V_1$  vektörü üzerine izdüşüm uzunluğu olan  $a$ , uygun noktalarda polar düzlemler arasındaki  $|p|$  uzaklığına;  $V_2$  vektörü üzerine izdüşüm uzunluğu olan  $b$ , uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki  $|z|$  uzaklığına ve  $V_3$  vektörü üzerine izdüşüm uzunluğu olan  $c$ , uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki  $|q|$  uzaklığına eşittir. Buna göre striksiyon çizgilerinin yazılışı

$$\overline{\gamma^*} = pV_1 + zV_2 + qV_3 \quad \text{veya} \quad \gamma^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + qV_3. \quad (4.1.5)$$

**Teorem 4.1.3:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerin striksiyon çizgileri arasında

$$\gamma^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + \left( \frac{z' + pk_1}{k_2} \right) V_3 \quad (4.1.6)$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** Dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olarak alındığında (4.1.5) den

$$r^* = r + pV_1 + zV_2 + qV_3 \quad (4.1.7)$$

yazılır. Türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$(r^*)' = (1 + p' - k_1z)V_1 + (k_1p + z' - k_2q)V_2 + (k_2z + q')V_3$$

olur. Bulunan bu ifade  $V_3'$  ile iç çarpılırsa

$$\langle (r^*)', V_3' \rangle = \langle (1 + p' - k_1z)V_1 + (k_1p + z' - k_2q)V_2 + (k_2z + q')V_3, V_3' \rangle,$$

$$\langle (r^*)', V_3' \rangle = \langle (1 + p' - k_1z)V_1 + (k_1p + z' - k_2q)V_2 + (k_2z + q')V_3, -k_2V_2 \rangle,$$

$$\langle (r^*)', V_3' \rangle = (1 + p' - k_1z)\langle V_1, -k_2V_2 \rangle + (k_1p + z' - k_2q)\langle V_2, -k_2V_2 \rangle + (k_2z + q')\langle V_3, -k_2V_2 \rangle,$$

$$\langle (r^*)', V_3' \rangle = -k_1k_2p - k_2z' + k_2^2q$$

bulunur. Bu ifade  $\gamma^*$  striksiyonunun (2.2.4) ifadesinde yerine yazılırsa  $\gamma^*$  striksiyon çizgisi

$$\gamma^* = r + pV_1 + zV_2 + qV_3 - \left( \frac{-k_1k_2p - k_2z' + k_2^2q}{k_2^2} \right) V_3,$$

$$\gamma^* = r + pV_1 + zV_2 + \left( q - \frac{-k_1k_2p - k_2z' + k_2^2q}{k_2^2} \right) V_3,$$

$$\gamma^* = r + pV_1 + zV_2 + \left( \frac{qk_2^2 + k_1k_2p + k_2z' - k_2^2q}{k_2^2} \right) V_3,$$

$$\gamma^* = r + pV_1 + zV_2 + \left( \frac{z' + k_1p}{k_2} \right) V_3$$

olur. Striksiyon çizgisi aynı zamanda dayanak eğrisi olduğundan

$$\gamma^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + \left( \frac{z' + k_1p}{k_2} \right) V_3$$

şeklinde elde edilir.

**Sonuç 4.1.1:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerin asimptotik düzlemler arasındaki  $q$  uzaklığı

$$q = \frac{z' + k_1p}{k_2} \quad (4.1.8)$$

bağıntısı ile verilir.

**Örnek 4.1.1:** Dayanak eğrileri olarak  $r(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$  ve

$r^*(t) = \left( 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$  eğrileri, üretici vektör olarak bu eğrilerin

$$V_3(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ ve } V_3^*(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

binormal vektörleri alınırsa regle yüzeylerinin parametrik denklemleri sırasıyla



$$\varphi_{V_3}(t, v) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + v \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\varphi_{V_3^*}(t, v) = \left( 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + v \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

şeklinde yazılır. Simdi bu yüzeylerin eş uzaklıklı regle yüzeyler olduğunu gösterelim.

$\varphi_{V_3}(t, v)$  ve  $\varphi_{V_3^*}(t, v)$  regle yüzeyinin striksiyon çizgileri ve  $r(t)$  eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve burulması sırasıyla

$$\gamma(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \quad \gamma^*(t) = \left( 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right),$$

$$V_1(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad V_2(t) = (-\sin t, -\cos t, 0),$$

$$V_3(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur.  $\overrightarrow{\gamma\gamma^*} = \gamma^* - \gamma$  olduğundan  $\overrightarrow{\gamma\gamma^*} = (4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 0)$  olur. Bu durumda polar ve merkezi düzlemler arasındaki  $p$  ve  $z$  uzaklığı sırasıyla

$$p = 4 \cos t - 4 \sin t \quad \text{ve} \quad z = -4\sqrt{2} \sin t - 4\sqrt{2} \cos t$$

şeklinde bulunur.  $z$  nin türevi alınır ve (4.1.8) de yerine yazılırsa  $q$  uzaklığı

$$q = 4 \cos t - 4 \sin t \tag{4.1.9}$$

şeklinde olur. Asimptotik düzlemler sırasıyla  $H = Sp\{V_1, V_2\}$  ve  $H^* = Sp\{V_1^*, V_2^*\}$  ile gösterilirse bunların denklemleri

$$\langle \overline{\gamma X}, V_3 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \left( x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, y - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z - \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \cos t - y \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{2} \sin t \cos t - z \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - y \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - z \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} = 0$$

$$H \dots \quad x \cos t - y \sin t - z + \frac{\sqrt{2}}{2} t = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\langle \overline{\gamma^* X^*}, V_3^* \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle \left( x - 4\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, y - 4\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z - \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - 4 \cos t - \frac{1}{2} \sin t \cos t - y \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + 4 \sin t + \frac{1}{2} \sin t \cos t - z \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - y \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - z \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \sin t - 4 \cos t + \frac{t}{2} = 0$$

$$H^* \dots \quad x \cos t - y \sin t - z + 4\sqrt{2} (\sin t - \cos t) + \frac{\sqrt{2}}{2} t = 0 \quad (4.1.11)$$

şeklinde bulunur.

- $t = 0$  için  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon noktaları,  $V_3$  ve  $V_3^*$  binormal vektörleri,  $H$  ve  $H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

$$\gamma(0) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \gamma^*(0) = \left(4\sqrt{2}, \frac{9}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

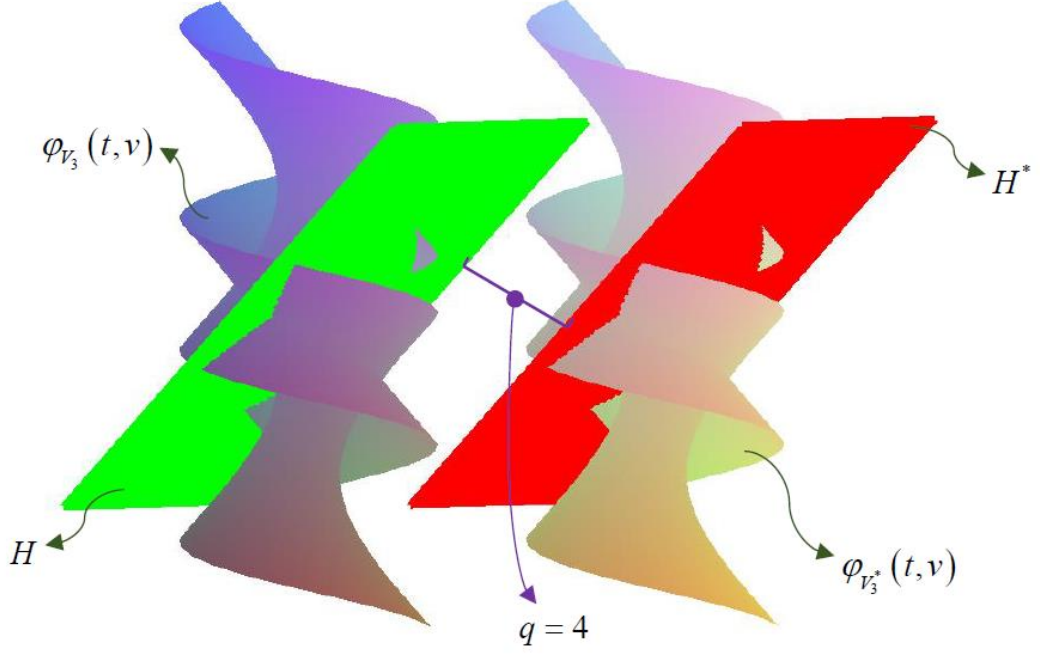
$$V_3(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V_3^*(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$H \dots x - z = 0, \quad H^* \dots x - z - 4\sqrt{2} = 0, \quad q = 4$$

şeklinde bulunur. Açıkta ki striksiyon noktasında binormal vektörler birbirine paraleldir. Asimptotik düzlemlere ait iki nokta  $A$  ve  $B$  olsun. Bu noktalar  $A(a, 0, a) \in H$  ve  $B(b, 0, b - 4\sqrt{2}) \in H^*$  şeklinde olur.  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki uzaklık 4 olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{R}$  sayılarını bulalım. İki nokta arası uzaklık bağıntısından

$$\|AB\| = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a-4\sqrt{2})^2} = 4.$$

$\lambda = b - a$  alınırsa  $\lambda^2 - 4\sqrt{2}\lambda + 8 = 0$  olur. Bu denklem çözülürse  $\lambda = 2\sqrt{2}$  ve buradan  $b - a = 2\sqrt{2}$  bulunur.  $b = 3\sqrt{2}$  ve  $a = \sqrt{2}$  alınırsa  $A$  ve  $B$  noktaları  $A(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$  ve  $B(3\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$  şeklinde olur. Bu durumda  $A$  ve  $B$  noktaları arası uzaklık  $\|AB\| = 4$  (Şekil 4.1.2).



**Şekil 4.1.2**  $t=0$  anında  $H, H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

$b = \sqrt{2}$ ,  $a = -\sqrt{2}$  alınırsa  $A(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$  ve  $B(\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2})$  ve  $\|AB\| = q = 4$ .  
 $b - a = 2\sqrt{2}$  şartını sağlayan başka  $A$  ve  $B$  noktaları bulunabilir ve aralarındaki uzaklık 4 olur.

- $t = \frac{\pi}{6}$  için  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon noktaları,  $V_3$  ve  $V_3^*$  binormal vektörleri,

$H$  ve  $H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

$$\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6\sqrt{2}}\right), \quad \gamma^*\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{17}{2\sqrt{2}}, \frac{16+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6\sqrt{2}}\right),$$

$$V_3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V_3^*\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$H \dots \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - z + \frac{\sqrt{2}\pi}{12} = 0,$$

$$H^* \dots \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - z + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}\pi}{12} = 0, \quad q = 2\sqrt{3} - 2.$$

şeklinde bulunur. Açıkça ki striksiyon noktasında binormal vektörler birbirine paraleldir. Asimptotik düzlemlere ait iki nokta  $A$  ve  $B$  olsun. Bu noktalar

$$A\left(a_1, a_2, \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{\sqrt{2}\pi}{12}\right) \in H \quad \text{ve} \quad B\left(b_1, b_2, \frac{\sqrt{3}}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}\pi}{12}\right) \in H^*$$

şeklinde olur.  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki uzaklık  $2\sqrt{3} - 2$  olacak şekilde  $a_1, a_2, b_1$  ve  $b_2 \in \mathbb{R}$  sayılarını bulalım. İki nokta arası uzaklık bağıntısından

$$\|AB\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(b_1 - a_1) - \frac{1}{2}(b_2 - a_2) + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)^2} = 2\sqrt{3} - 2$$

dir.  $\lambda_1 = b_1 - a_1$  ve  $\lambda_2 = b_2 - a_2$  alınırsa

$$7\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 - 2\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2 + (8\sqrt{6} - 24\sqrt{2})\lambda_1 + (8\sqrt{6} - 8\sqrt{2})\lambda_2 + 64 - 32\sqrt{3} = 0 \quad (*)$$

olur. Bu denklemde  $\lambda_2$  sabit alınır ve  $\lambda_1$  e göre düzenlenirse (tersi de yapılabilir)

$$7\lambda_1^2 + (-2\sqrt{3}\lambda_2 + 8\sqrt{6} - 24\sqrt{2})\lambda_1 + (5\lambda_2^2 + (8\sqrt{6} - 8\sqrt{2})\lambda_2 + 64 - 32\sqrt{3}) = 0$$

bulunur. Burada  $\Delta_{\lambda_1}$  değeri

$$\Delta_{\lambda_1} = -128\lambda_2^2 + (128\sqrt{2} - 128\sqrt{6})\lambda_2 - 256 + 128\sqrt{3}$$

olur. Özel çözümler arandığından  $\Delta_{\lambda_1} = 0$  için  $\lambda_1 = -\frac{b_{\lambda_1}}{2a_{\lambda_1}}$  olur. Bu durumda  $\Delta_{\lambda_1}$

ifadesinden  $\lambda_2^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\lambda_2 + 2 - \sqrt{3} = 0$  olur.  $\lambda_2$  ye göre çözüm yapılırsa

$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  bulunur. Öte yandan  $\lambda_1 = -\frac{b_{\lambda_1}}{2a_{\lambda_1}}$  olduğundan  $\lambda_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  olur.

Buradan  $b_1 - a_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  ve  $b_2 - a_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  olur. Bu eşitlikleri sağlayan

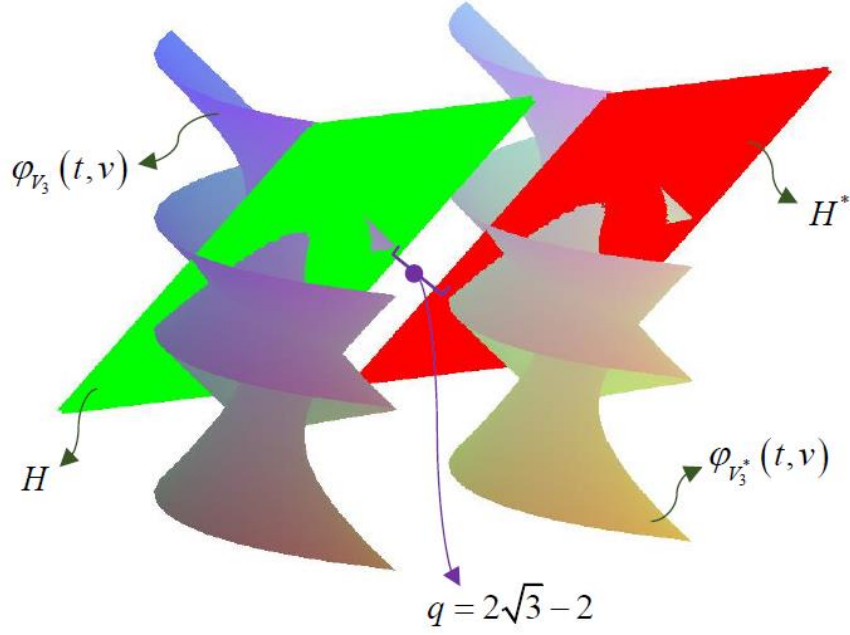
$b_1, b_2, a_1$  ve  $a_2$  değerleri

$$b_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}, \quad b_2 = \sqrt{2}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

şeklinde alınırsa düzlemlere ait  $A$  ve  $B$  noktaları

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{12}\right) \text{ ve } B\left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}, \sqrt{2}, -\sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}\pi}{12}\right)$$

şeklinde bulunur ve bu noktalar arası uzaklık  $\|AB\| = q = 2\sqrt{3} - 2$  olur (Şekil 4.1.3).



**Şekil 4.1.3**  $t = \frac{\pi}{6}$  anında  $H, H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

Bir başka  $b_1 = 4\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,  $b_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,  $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ,  $a_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}$

değerleri için  $A$  ve  $B$  noktaları

$$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{12}\right) \text{ ve } B\left(4\sqrt{2} + \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{6}, 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{12}\right)$$

şeklinde olur ve bu noktalar arası uzaklık  $\|AB\| = q = 2\sqrt{3} - 2$  bulunur.

$b_1 - a_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  ve  $b_2 - a_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  şartını sağlayan bir başka  $A$  ve  $B$  noktaları

bulunur ve aralarındaki uzaklık  $2\sqrt{3} - 2$  olur.

- $t = \frac{\pi}{4}$  için  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon noktaları,  $V_3$  ve  $V_3^*$  binormal vektörleri,

$H$  ve  $H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

$$\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right), \quad \gamma^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(4\sqrt{2} + \frac{1}{2}, 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right),$$

$$V_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V_3^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$H \dots \quad \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - z + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} = 0,$$

$$H^* \dots \quad \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - z + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} = 0, \quad q = 0.$$

şeklinde bulunur. Açıkta ki striksiyon noktasında binormal vektörler birbirine paraleldir. Asimptotik düzlemlere ait iki nokta  $A$  ve  $B$  olsun. Bu noktalar

$$A\left(a_1, a_2, \frac{\sqrt{2}}{2}a_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}a_2 + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) \in H \quad \text{ve} \quad B\left(b_1, b_2, \frac{\sqrt{2}}{2}b_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}b_2 + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) \in H^*$$

şeklinde olur.  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki uzaklık  $\|AB\| = 0$  olacak şekilde  $a_1, a_2, b_1$  ve  $b_2 \in \mathbb{R}$  sayılarını bulalım. İki nokta arası uzaklık bağıntısından

$$\|AB\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(b_1 - a_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(b_2 - a_2)\right)^2} = 0.$$

$\lambda_1 = b_1 - a_1, \lambda_2 = b_2 - a_2$  alınırsa  $3\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = 0$  olur.  $\lambda_2$  sabit alınır ve  $\lambda_1$

göre düzenlenirse (tersi de yapılabilir)  $3\lambda_1^2 + (2\lambda_2)\lambda_1 + 3\lambda_2^2 = 0$  olur. Burada  $\Delta_{\lambda_1}$

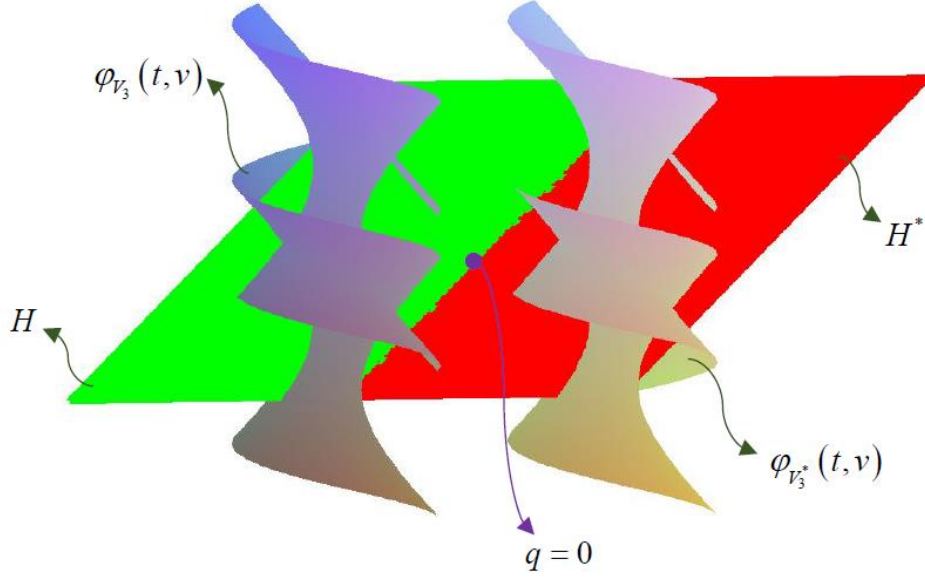
değeri  $\Delta_{\lambda_1} = -8\lambda_2^2$ .  $\Delta_{\lambda_1} = 0$  için  $\lambda_1 = -\frac{b_{\lambda_1}}{2a_{\lambda_1}}$  olur. Bu durumda  $\Delta_{\lambda_1}$  ifadesinden  $\lambda_2 = 0$

ve  $\lambda_1 = 0$  bulunur.  $\lambda_1 = b_1 - a_1$  ve  $\lambda_2 = b_2 - a_2$  olduğundan  $b_1 = a_1$  ve  $b_2 = a_2$  olur.  $b_1 = a_1 = 2$  ve  $b_2 = a_2 = 4$  alınırsa düzlemlere ait  $A$  ve  $B$  noktaları



$$A\left(2, 4, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) \text{ ve } B\left(2, 4, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$$

şeklinde bulunur ve bu noktalar arası uzaklık  $\|AB\| = 0$  (Şekil 4.1.4).



**Şekil 4.1.4**  $t = \frac{\pi}{4}$  anında  $H, H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

Bir başka  $b_1 = a_1 = -2$  ve  $b_2 = a_2 = 2$  değerleri için  $A$  ve  $B$  noktaları

$$A\left(-2, 2, -2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right) \text{ ve } B\left(-2, 2, -2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$$

şeklinde olur ve bu noktalar arası uzaklık  $\|AB\| = q = 0$ .  $b_1 = a_1$  ve  $b_2 = a_2$  şartını sağlayan başka  $A$  ve  $B$  noktaları bulunabilir.

- $t = \frac{\pi}{3}$  için  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon noktaları,  $V_3$  ve  $V_3^*$  binormal vektörleri,

$H$  ve  $H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

$$\gamma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right), \quad \gamma^*\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{16+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{17}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\right),$$

$$V_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V_3^*\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$H \dots \quad \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - z + \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 0,$$

$$H^* \dots \quad \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - z + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{6} = 0, \quad q = 2\sqrt{3} - 2.$$

şeklinde bulunur. Açıkta ki striksiyon noktasında binormal vektörler birbirine paraleldir. Asimptotik düzlemlere ait iki nokta  $A$  ve  $B$  olsun. Bu noktalar

$$A\left(a_1, a_2, \frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 + \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right) \in H \quad \text{ve} \quad B\left(b_1, b_2, \frac{1}{2}b_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right) \in H^*$$

şeklinde olur.  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki uzaklık  $2\sqrt{3} - 2$  olacak şekilde  $a_1, a_2, b_1$  ve  $b_2 \in \mathbb{R}$  sayılarını bulalım. İki nokta arası uzaklık bağıntısından

$$\|AB\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \left(\frac{1}{2}(b_1 - a_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(b_2 - a_2) + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{3} - 2.$$

$\lambda_1 = b_1 - a_1$  ve  $\lambda_2 = b_2 - a_2$  alınırsa

$$5\lambda_1^2 + 7\lambda_2^2 - 2\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2 + (8\sqrt{6} - 8\sqrt{2})\lambda_1 + (8\sqrt{6} - 24\sqrt{2})\lambda_2 + 64 - 32\sqrt{3} = 0$$

olur. Bu denklem (\*) denklemini ile hemen hemen aynıdır. Sadece  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  nin rolleri değişmiştir. Dolayısıyla çözümler yer değişmiştir. Buna göre

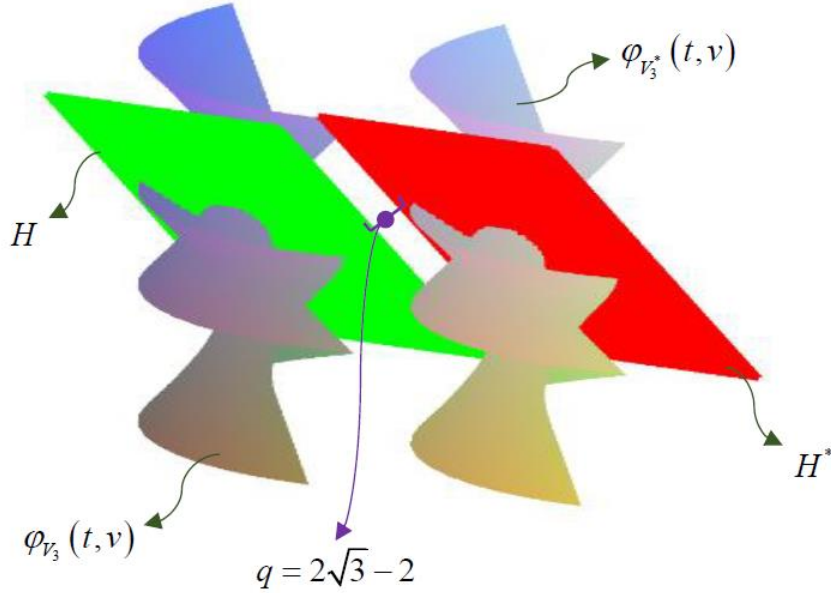
$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}.$$

$\lambda_1 = b_1 - a_1$ ,  $\lambda_2 = b_2 - a_2$  olduğundan  $b_1 - a_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  ve  $b_2 - a_2 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ .

$b_1 = \sqrt{2}$ ,  $b_2 = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$ ,  $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$  ve  $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$  alınırsa düzlemlere ait  $A$  ve  $B$  noktaları

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right) \text{ ve } B\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - \sqrt{6}, \sqrt{6} + \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda  $A$  ve  $B$  noktaları arası uzaklık  $\|AB\| = 2\sqrt{3} - 2$  (Şekil 4.1.5).



**Şekil 4.1.5**  $t = \frac{\pi}{3}$  anında  $H$ ,  $H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

Bir başka  $b_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,  $b_2 = 4\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,  $a_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}$  ve  $a_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}$  değerleri için  $A$  ve  $B$  noktaları

$$A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right) \text{ ve}$$

$$B\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}, 4\sqrt{2} + \sqrt{6}, -\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{6}\right)$$

şeklinde olur ve bu noktalar arası uzaklık  $\|AB\| = 2\sqrt{3} - 2$  olur. Benzer şekilde  $b_1 - a_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  ve  $b_2 - a_2 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$  şartını sağlayan bir başka  $A$  ve  $B$  noktaları bulunabilir.

- $t = \frac{\pi}{2}$  için  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon noktaları,  $V_3$  ve  $V_3^*$  binormal vektörleri,

$H$  ve  $H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right), \quad \gamma^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{9}{\sqrt{2}}, 4\sqrt{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$V_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad V_3^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$H \dots -y - z + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0, \quad H^* \dots -y - z - 4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0, \quad q = 4.$$

şeklinde bulunur. Açıkça ki striksiyon noktasında binormal vektörler birbirine paraleldir. Asimptotik düzlemlere ait iki nokta  $A$  ve  $B$  olsun. Bu noktalar

$$A\left(0, -a, a + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) \in H \text{ ve } B\left(0, -b, b - 4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) \in H^*$$

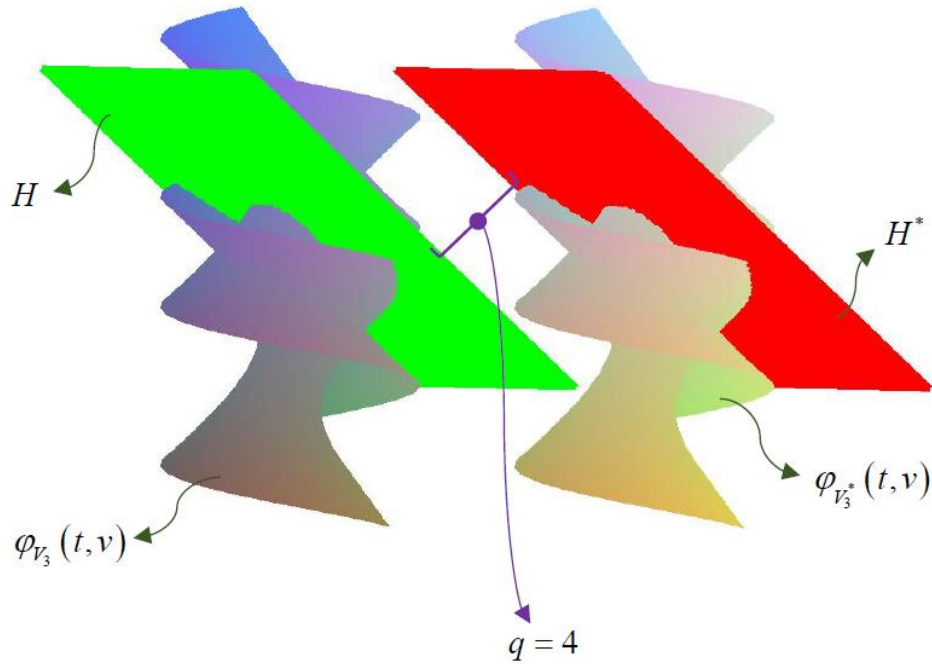
şeklinde olur.  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki uzaklık 4 olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{R}$  sayılarını bulalım. İki nokta arası uzaklık bağıntısından

$$\|AB\| = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a-4\sqrt{2})^2} = 4.$$

$\lambda = b - a$  alınırsa  $\lambda^2 - 4\sqrt{2}\lambda + 8 = 0$  olur. Bu denklem çözülürse  $\lambda = 2\sqrt{2}$  ve buradan  $b - a = 2\sqrt{2}$  bulunur.  $b = 3\sqrt{2}$  ve  $a = \sqrt{2}$  için  $A$  ve  $B$  noktaları

$$A\left(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) \text{ ve } B\left(0, -3\sqrt{2}, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)$$

şeklinde bulunur ve bu noktalar arası uzaklık  $\|AB\| = 4$  olur (Şekil 4.1.6).



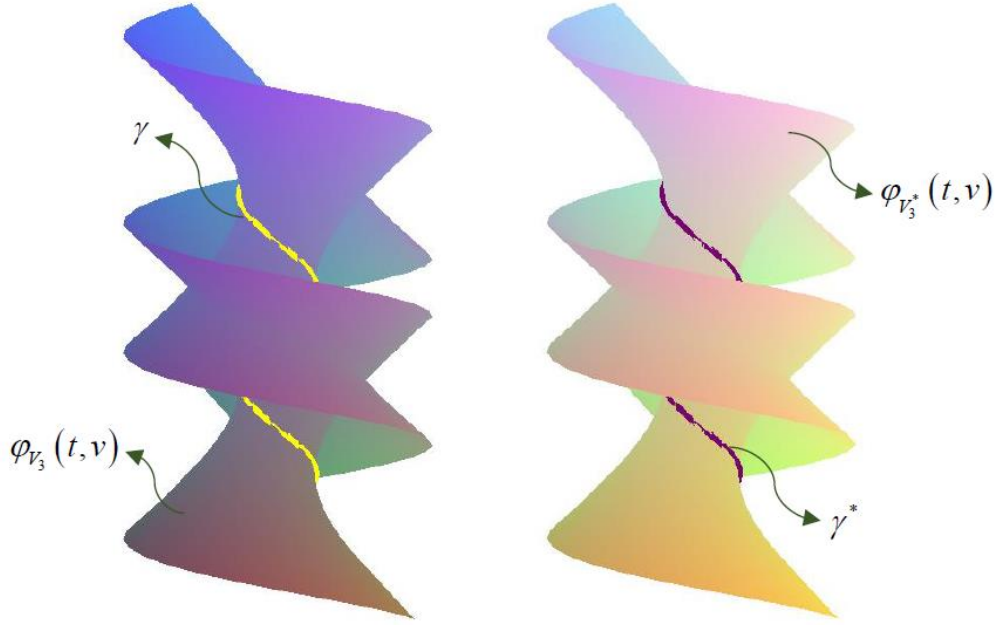
**Şekil 4.1.6**  $t = \frac{\pi}{2}$  anında  $H, H^*$  düzlemleri ve  $q$  uzaklığı

Bir başka  $b = \sqrt{2}, a = -\sqrt{2}$  değeri için  $A$  ve  $B$  noktaları

$$A(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \text{ ve } B(\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2})$$

şeklinde bulunur ve bu noktalar arasındaki uzaklık  $\|AB\| = 4$  olur.  $b - a = 2\sqrt{2}$  şartını sağlayan  $A$  ve  $B$  noktaları bulunabilir.

Sonuç olarak  $t$  nin bazı değerleri için  $\varphi_{V_3}(t, v)$  ve  $\varphi_{V_3^*}(t, v)$   $q$ -equidistante regle yüzeylerin striksiyon eğrileri boyunca binormal vektörleri paralel ve uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık sabit olur (Şekil 4.1.7).



Şekil 4.1.7  $q$ -equidistante regle yüzeyler

$q$ -equidistante regle yüzeylerin striksiyon eğrilerine ait birim teğetler sırasıyla  $T$  ve  $T^*$  olsun.  $T$  ile  $V_1$  arasındaki açı  $\sigma$  ve  $T^*$  ile  $V_1^*$  arasındaki açı  $\sigma^*$  ile gösterilirse

$$T = \cos \sigma V_1 + \sin \sigma V_3, \quad T^* = \cos \sigma^* V_1^* + \sin \sigma^* V_3^* \quad (4.1.12)$$

olur.

**Teorem 4.1.4:**  $q$ -equidistante regle yüzeylerinin  $t$  ve  $t^*$  parametreleri arasında

$$\frac{dt^*}{dt} = \sqrt{(\cos \sigma + p' - zk_1)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + (\frac{z' + k_1 p}{k_2})')^2} \quad (4.1.13)$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** (4.1.6) ifadesinden türev alınırsa

$$\frac{d\gamma^*}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + p'V_1 + pV_1' + z'V_2 + zV_2' + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right)' V_3 + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right) V_3',$$

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = T + p'V_1 + p(k_1V_2) + z'V_2 + z(-k_1V_1 + k_2V_3) + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right)' V_3 + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right) (-k_2V_2),$$

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = T + (p' - zk_1)V_1 + (z' + pk_1 - z' - k_1p)V_2 + \left(zk_2 + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right)'\right) V_3,$$

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = T + (p' - zk_1)V_1 + \left(zk_2 + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right)'\right) V_3$$

bulunur.  $T$  nin (4.1.12) değeri burada yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = \cos \sigma V_1 + \sin \sigma V_3 + (p' - zk_1)V_1 + \left(zk_2 + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right)'\right) V_3,$$

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = (\cos \sigma + p' - zk_1)V_1 + \left(\sin \sigma + zk_2 + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right)'\right) V_3 \quad (4.1.14)$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{dt^*}{dt} = \sqrt{(\cos \sigma + p' - zk_1)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + \left(\frac{z' + k_1p}{k_2}\right)')^2}.$$

**Sonuç 4.1.2:**  $q$ -equidistante regle yüzeyinin  $T^*$  teğet vektörünün Frenet çatısı cinsinden ifadesi

$$T^* = \frac{(\cos \sigma + p' - zk_1)V_1 + \left( \sin \sigma + zk_2 + \left( \frac{z' + k_1 p}{k_2} \right)' \right) V_3}{\left( (\cos \sigma + p' - zk_1)^2 + \left( \sin \sigma + zk_2 + \left( \frac{z' + k_1 p}{k_2} \right)' \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.1.15)$$

şeklinde verilir.

**Teorem 4.1.5:**  $q$ -equidistante regle yüzeylerinin striksiyonları sırasıyla  $\sigma$  ve  $\sigma^*$  olsun. Bu striksiyonlar arasında

$$\cos \sigma^* = \frac{\sec \phi (\cos \sigma + p' - zk_1)}{\sqrt{(\cos \sigma + p' - zk_1)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + (\frac{z' + k_1 p}{k_2})')^2}},$$

$$\cos \sigma^* \sin \phi = 0, \quad (4.1.16)$$

$$\sin \sigma^* = \frac{(\sin \sigma + zk_2 + (\frac{z' + k_1 p}{k_2})')}{\sqrt{(\cos \sigma + p' - zk_1)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + (\frac{z' + k_1 p}{k_2})')^2}}$$

bağıntıları vardır.

**İspat:**  $T^* = \cos \sigma^* V_1^* + \sin \sigma^* V_3^*$  ifadesinde  $V_1^*$  ve  $V_3^*$  in yerine (4.1.2) den karşılıkları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T^* = \cos \sigma^* \cos \phi V_1 - \cos \sigma^* \sin \phi V_2 + \sin \sigma^* V_3$$

bulunur. Bu ifade (4.1.15) ile karşılaştırılırsa istenilen elde edilir.



**Sonuç 4.1.3:**  $q$ -equidistante regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin teğet vektörleri birbirine paraleldir.

**İspat:**  $\cos \sigma^* \sin \phi = 0$  eşitliğinde  $\cos \sigma^* = 0$  ise  $\sigma^* = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$  olur. Bu durumda  $T^*$  ile  $V_1^*$  birbirine diktir. Bu durumda  $T^*$  polar düzlemde bulunur. Bu ise (4.1.12) ile çelişir. O halde  $\cos \sigma^* = 0$  olamaz.  $\sin \phi = 0$  olacağından  $\phi = 0 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$  olur. Bu durumda  $V_1$  ve  $V_1^*$  vektörleri paralel olur ve  $\cos \phi = \mp 1$ ,  $\sin \phi = 0$  bulunur.

**Sonuç 4.1.4:**  $q$ -equidistante regle yüzeyinin dayanak eğrisine ait Frenet vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.2) den iddia gösterilmiş olur.

**Sonuç 4.1.5:**  $q$ -equidistante regle yüzeyinin dayanak eğrilerinin tabii eğrilikleri arasında

$$k_1^* = (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*}, \quad k_2^* = k_2 \frac{dt}{dt^*} \quad \text{veya} \quad k_2^* = -k_2 \frac{dt}{dt^*} \quad (4.1.18)$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.3) den iddia gösterilmiş olur.

$\varphi_{V_3^*}(t, v)$  regle yüzeyi kapalı Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$\lambda_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} k_2^* dt^*, \quad \lambda_{V_2^*} = 0, \quad \lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} k_1^* dt^*, \quad (4.1.19)$$

$$L_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} dt^*, \quad L_{V_2^*} = L_{V_3^*} = 0, \quad (4.1.20)$$

$$P_{V_1^*} = 0, \quad P_{V_2^*} = \frac{k_2^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2}, \quad P_{V_3^*} = \frac{1}{k_2^*} \quad (4.1.21)$$

şeklinde olur.

**Teorem 4.1.6:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\lambda_{V_1^*} = \cos \phi \lambda_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad \lambda_{V_2^*} = \lambda_{V_2} = 0, \quad (4.1.22)$$

$$\lambda_{V_3^*} = \lambda_{V_3} - L_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt$$

bağıntıları vardır.

**İspat:**  $\lambda_{V_1^*}$  in (4.1.19) ifadesinde  $k_2^*$  in (4.1.3) deki eşitliği yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_{V_1^*} &= \oint_{(r^*)} k_2^* dt^* \Rightarrow \lambda_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} dt^* \\ &\Rightarrow \lambda_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} k_2 \cos \phi dt \\ &\Rightarrow \lambda_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} k_2 \cos \phi dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $r^* = r + pV_1 + zV_2 + qV_3$  yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_{V_1^*} &= \oint_{(r^*)} k_2 \cos \phi dt \Rightarrow \lambda_{V_1^*} = \oint_{(r+pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt \\ &\Rightarrow \lambda_{V_1^*} = \oint_{(r)} k_2 \cos \phi dt + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt \end{aligned}$$

olur. (2.2.7) ifadesi dikkate alınırsa  $\lambda_{V_1^*} = \cos \phi \lambda_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt$  bulunur.

Benzer hesaplamalar  $\lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} k_1^* dt^*$  ifadesi için de yapılırsa

$$\lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} k_1^* dt^* \Rightarrow \lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*} dt^*$$

$$\Rightarrow \lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} (k_1 - 1) dt$$

$$\Rightarrow \lambda_{V_3^*} = \oint_{(r+pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt$$

$$\Rightarrow \lambda_{V_3^*} = \oint_{(r)} (k_1 - 1) dt + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt$$

$$\Rightarrow \lambda_{V_3^*} = \oint_{(r)} k_1 dt - \oint_{(r)} dt + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt$$

bulunur. Burada (2.2.7) ve (4.1.19) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\lambda_{V_3^*} = \lambda_{V_3} - L_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt \text{ ve } \lambda_{V_2^*} = \lambda_{V_2} = 0.$$

**Sonuç 4.1.6:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\lambda_{V_1^*} = \mp \lambda_{V_1} \mp \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad \lambda_{V_2^*} = \lambda_{V_2} = 0, \quad (4.1.23)$$

$$\lambda_{V_3^*} = \lambda_{V_3} - L_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.22) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.7:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri eğilim çizgisi olmaları halinde Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$L_{V_1^*} k_2^* = \cos \phi k_2 L_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad L_{V_2^*} = L_{V_3^*} = L_{V_2} = L_{V_3} = 0 \quad (4.1.24)$$

bağıntıları vardır.

**İspat:**  $dt^* = \frac{k_2}{k_2^*} \cos \phi dt$ ,  $L_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} dt^*$  ve dayanak eğrileri birer eğilim çizgisi alınırsa

$L_{V_1^*} = \frac{k_2}{k_2^*} \cos \phi \oint_{(r^*)} dt$  olur. Burada (4.1.7) ifadesi yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler

yapılırsa

$$\begin{aligned} L_{V_1^*} &= \frac{k_2}{k_2^*} \cos \phi \oint_{(r+pV_1+zV_2+qV_3)} dt \Rightarrow L_{V_1^*} = \frac{k_2}{k_2^*} \cos \phi \left( \oint_{(r)} dt + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} dt \right) \\ &\Rightarrow L_{V_1^*} k_2^* = k_2 \cos \phi \left( \oint_{(r)} dt + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} dt \right) \\ &\Rightarrow L_{V_1^*} k_2^* = k_2 \cos \phi \oint_{(r)} dt + k_2 \cos \phi \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} dt \\ &\Rightarrow L_{V_1^*} k_2^* = \cos \phi k_2 \oint_{(r)} dt + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt \\ &\Rightarrow L_{V_1^*} k_2^* = \cos \phi k_2 L_{V_1} + \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt \end{aligned}$$

olur. (2.2.7) ve (4.1.20) ifadelerinden  $L_{V_2^*} = L_{V_3^*} = L_{V_2} = L_{V_3} = 0$  elde edilir.

**Sonuç 4.1.7:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri eğilim çizgisi olması halinde Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$L_{V_1^*} k_2^* = \mp k_2 L_{V_1} \mp \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad L_{V_2^*} = L_{V_3^*} = L_{V_2} = L_{V_3} = 0 \quad (4.1.25)$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.24) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.8:**  $q$ -equidistante regle yüzeylerin Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$P_{V_1^*} = P_{V_1} = 0, \quad P_{V_3^*} = P_{V_3} \sec \phi \frac{dt^*}{dt}, \quad (4.1.26)$$

$$P_{V_2^*} = \left( \frac{P_{V_3} \cos \phi}{(k_1 - 1)^2 P_{V_3}^2 + \cos^2 \phi} \right) \frac{dt^*}{dt} \quad \text{veya} \quad P_{V_2^*} = \left( \frac{k_2 \cos \phi}{(k - 1)^2 + k_2^2 \cos^2 \phi} \right) \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** (2.2.7) ve (4.1.21) ifadelerinden  $P_{V_1^*} = P_{V_1} = 0$  olduğu açıktır. (4.1.21) ifadesinden

$$P_{V_2^*} \text{ değerini } \frac{1}{P_{V_2^*}} = \frac{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2}{k_2^*} \text{ şeklinde yazılır. Buradan;}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{V_2^*}} &= \frac{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2}{k_2^*} \Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = \frac{(k_1^*)^2}{k_2^*} + \frac{(k_2^*)^2}{k_2^*} \\ &\Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = \frac{(k_1^*)^2}{k_2^*} + k_2^* \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.1.3) değerleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{V_2^*}} &= \frac{\left( (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*} \right)^2}{k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}} + k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = \frac{(k_1 - 1)^2 \frac{dt}{dt^*}}{k_2 \cos \phi} + k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \\ &\Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = (k_1 - 1)^2 \frac{1}{k_2 \cos \phi} \cdot \frac{dt}{dt^*} + k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = (k_1 - 1)^2 \frac{1}{k_2} \sec \phi \frac{dt}{dt^*} + k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = \left( (k_1 - 1)^2 \frac{1}{k_2} \sec \phi + k_2 \cos \phi \right) \frac{dt}{dt^*}$$

olur. (2.2.7) ifadesinden  $P_{V_2^*}$  dralı

$$\frac{1}{P_{V_2^*}} = \left( (k_1 - 1)^2 \frac{1}{k_2} \sec \phi + k_2 \cos \phi \right) \frac{dt}{dt^*} \Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = \left( (k_1 - 1)^2 P_{V_3} \sec \phi + \frac{1}{P_{V_3}} \cos \phi \right) \frac{dt}{dt^*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_{V_2^*}} = \left( (k_1 - 1)^2 \frac{P_{V_3}}{\cos \phi} + \frac{\cos \phi}{P_{V_3}} \right) \frac{dt}{dt^*}$$

$$\Rightarrow P_{V_2^*} = \frac{1}{\left( (k_1 - 1)^2 \frac{P_{V_3}}{\cos \phi} + \frac{\cos \phi}{P_{V_3}} \right)} \cdot \frac{dt^*}{dt}$$

$$\Rightarrow P_{V_2^*} = \left( \frac{P_{V_3} \cos \phi}{(k_1 - 1)^2 P_{V_3}^2 + \cos^2 \phi} \right) \cdot \frac{dt^*}{dt}$$

şeklinde bulunur.  $P_{V_2^*}$  ifadesini başka bir yöntemle bulmak için (4.1.21) de ki  $P_{V_2^*}$  değerine  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  in (4.1.3) değerleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılır

$$P_{V_2^*} = \left( \frac{k_2 \cos \phi}{(k - 1)^2 + k_2^2 \cos^2 \phi} \right) \frac{dt^*}{dt}$$

elde edilir. Son olarak  $P_{V_3^*}$  ifadesinde (4.1.3) bağıntısı yazılır, gerekli hesaplamalar yapılır ve (2.2.7) değeri de dikkate alınır

$$P_{V_3^*} = \frac{1}{k_2^*} \Rightarrow P_{V_3^*} = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1}{\cos \phi} \cdot \frac{dt^*}{dt}$$

$$\Rightarrow P_{V_3^*} = P_{V_3} \sec \phi \frac{dt^*}{dt}$$

olur.

**Sonuç 4.1.8:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerin Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$P_{V_1^*} = P_{V_1} = 0, \quad P_{V_3^*} = \mp P_{V_3} \frac{dt^*}{dt}, \quad (4.1.27)$$

$$P_{V_2^*} = \mp \left( \frac{P_{V_3}}{(k_1 - 1)^2 P_{V_3}^2 + 1} \right) \frac{dt^*}{dt} \quad \text{veya} \quad P_{V_2^*} = \mp \left( \frac{k_2}{(k - 1)^2 + k_2^2} \right) \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.26) ifadesinden açıktır.

**Sonuç 4.1.9:**  $q$  – equidistante regle yüzeyleri aynı dağılma parametrelerine sahip ise teğet vektörleri arasındaki  $\phi$  açısı

$$\phi = \arccos \left( \frac{dt^*}{dt} \right) \quad (4.1.28)$$

şeklinde olur.

$\varphi_{V_3}(t, v)$  kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrisine ait  $C$  birim Darboux vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğu sırasıyla  $\lambda_C$  ve  $L_C$  olsun. (2.1.7), (2.2.6) ve (2.2.8) ifadelerinden  $\lambda_C$  açılım açısı ve  $L_C$  açılım uzunluğu sırasıyla

$$\lambda_C = \langle D, C \rangle \Rightarrow \lambda_C = \langle \lambda_{V_1} V_1 + \lambda_{V_3} V_3, \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3 \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda_C = \lambda_{V_1} \sin \theta + \lambda_{V_3} \cos \theta \quad (4.1.29)$$

ve

$$L_C = \langle V, C \rangle \Rightarrow L_C = \langle L_{V_1} V_1, \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3 \rangle$$

$$\Rightarrow L_C = L_{V_1} \sin \theta \quad (4.1.30)$$

olur.  $C$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin dralı  $P_C$  ile gösterilirse (2.2.5) ifadesinden

$$P_C = \frac{\det(r', C, C')}{\|C'\|^2} \Rightarrow P_C = \frac{\det\left(V_1, \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3, \cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3\right)}{\left\|\cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3\right\|^2}$$

$$\Rightarrow P_C = 0 \quad (4.1.31)$$

olur. Aynı işlemler benzer şekilde kapalı  $\varphi_{V_3^*}(t, v)$  regle yüzeyi için de yapılırsa  $C^*$  birim Darboux vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı sırasıyla

$$\lambda_{C^*} = \lambda_{V_1^*} \sin \theta^* + \lambda_{V_3^*} \cos \theta^*, \quad (4.1.32)$$

$$L_{C^*} = L_{V_1^*} \sin \theta^*, \quad (4.1.33)$$

$$P_{C^*} = 0 \quad (4.1.34)$$

şeklinde bulunur.

**Teorem 4.1.9:**  $q$ -equidistante regle yüzeylerin  $r^*$  dayanak eğrisinin  $C^*$  birim Darboux vektörünün  $V_3^*$  vektörü ile yaptığı açı  $\theta^*$  ise

$$\cos \theta^* = \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}}, \quad \sin \theta^* = \frac{k_2 \cos \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} \quad (4.1.35)$$

bağıntıları vardır.



**İspat:** (2.1.6) ifadesinde  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  eğriliklerinin (4.1.3) değerleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\cos \theta^* = \frac{k_1^*}{\sqrt{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2}} \Rightarrow \cos \theta^* = \frac{(k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*}}{\sqrt{\left( (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*} \right)^2 + \left( k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta^* = \frac{(k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*}}{\sqrt{(k_1 - 1)^2 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 + (k_2 \cos \phi)^2 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta^* = \frac{(k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*}}{\frac{dt}{dt^*} \sqrt{(k_1 - 1)^2 + (k_2 \cos \phi)^2}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta^* = \frac{(k_1 - 1)}{\sqrt{(k_1 - 1)^2 + (k_2 \cos \phi)^2}},$$

$$\sin \theta^* = \frac{k_2^*}{\sqrt{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2}} \Rightarrow \sin \theta^* = \frac{k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}}{\sqrt{\left( (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*} \right)^2 + \left( k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta^* = \frac{k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}}{\sqrt{(k_1 - 1)^2 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2 + (k_2 \cos \phi)^2 \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta^* = \frac{k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}}{\frac{dt}{dt^*} \sqrt{(k_1 - 1)^2 + (k_2 \cos \phi)^2}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta^* = \frac{k_2 \cos \phi}{\sqrt{(k_1 - 1)^2 + (k_2 \cos \phi)^2}}$$

bulunur.

**Sonuç 4.1.10:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerin  $r^*$  dayanak eğrisinin  $C^*$  birim Darboux vektörünün  $V_3^*$  vektörü ile yaptığı açı  $\theta^*$  ise

$$\cos \theta^* = \frac{k_1 - 1}{\sqrt{(k_1 - 1)^2 + k_2^2}}, \quad \sin \theta^* = \mp \frac{k_2}{\sqrt{(k_1 - 1)^2 + k_2^2}} \quad (4.1.36)$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.35) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.10:**  $q$  – equidistante regle yüzey ve  $r^*$  dayanak eğrisinin  $C^*$  birim Darboux vektörü  $\varphi_{V_3}(t, v)$  regle yüzeyi elemanları cinsinden ifadesi

$$C^* = \frac{k_2 \cos^2 \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} V_1 - \frac{k_2 \cos \phi \sin \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} V_2 + \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} V_3 \quad (4.1.37)$$

şeklinde verilir.

**İspat:** (2.1.7) ,(4.1.35) ve (4.1.2) ifadeleri dikkate alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$C^* = \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*,$$

$$C^* = \frac{k_2 \cos \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} (\cos \phi V_1 - \sin \phi V_2) + \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} V_3,$$

$$C^* = \frac{k_2 \cos^2 \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} V_1 - \frac{k_2 \cos \phi \sin \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} V_2 + \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} V_3$$

bulunur.

**Sonuç 4.1.11:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerin  $r^*$  dayanak eğrisinin birim Darboux vektörü  $C^*$  olsun.  $C^*$  vektörünün  $\varphi_{V_3}(t, v)$  regle yüzeyi elemanları cinsinden ifadesi

$$C^* = \frac{k_2}{\sqrt{k_2^2 + (k_1 - 1)^2}} V_1 + \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 + (k_1 - 1)^2}} V_3 \quad (4.1.38)$$

şeklinde verilir.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.37) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.11:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin  $r^*$  dayanak eğrisinin  $C^*$  birim Darboux vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı arasında

$$\lambda_{C^*} = \frac{k_2 \cos \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} (\cos \phi \lambda_{V_1} + a_1) + \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} (\lambda_{V_3} - L_{V_1} + a_3)$$

$$L_{C^*} k_2^* = \frac{k_2^2 \cos^2 \phi L_{V_1} + a_1 k_2 \cos \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}}, \quad P_C = P_{C^*} = 0 \quad (4.1.39)$$

bağıntısı vardır. Burada  $a_1$  ve  $a_3$  eşitlikleri

$$a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt.$$

**İspat:** (4.1.32) ifadesinde (4.1.35),  $\lambda_{V_1}^*$  ve  $\lambda_{V_3}^*$  ın (4.1.22) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\lambda_{C^*} = \lambda_{V_1}^* \sin \theta^* + \lambda_{V_3}^* \cos \theta^*,$$

$$\lambda_{C^*} = \frac{k_2 \cos \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} (\cos \phi \lambda_{V_1} + a_1) + \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} (\lambda_{V_3} - L_{V_1} + a_3)$$

(4.1.33), (4.1.35) ve (4.1.24) ifadelerinden gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L_{C^*} = L_{V_1^*} \sin \theta^* \Rightarrow L_{C^*} = \frac{k_2 \cos \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}} \left( \frac{\cos \phi k_2 L_{V_1^*} + a_1}{k_2^*} \right)$$

$$\Rightarrow L_{C^*} k_2^* = \frac{k_2^2 \cos^2 \phi L_{V_1^*} + a_1 k_2 \cos \phi}{\sqrt{k_2^2 \cos^2 \phi + (k_1 - 1)^2}}$$

elde edilir. (4.1.31) ve (4.1.34) ifadelerinden  $P_C = P_{C^*} = 0$  olduğu açıktır.

**Sonuç 4.1.12:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin  $r^*$  dayanak eğrisinin  $C^*$  birim Darboux vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı arasında

$$\lambda_{C^*} = \frac{\mp k_2}{\sqrt{k_2^2 + (k_1 - 1)^2}} (\mp \lambda_{V_1} + a_1) + \frac{k_1 - 1}{\sqrt{k_2^2 + (k_1 - 1)^2}} (\lambda_{V_3} - L_{V_1} + a_3),$$

(4.1.40)

$$L_{C^*} k_2^* = \frac{k_2^2 L_{V_1} \mp a_1 k_2}{\sqrt{k_2^2 + (k_1 - 1)^2}}, \quad P_C = P_{C^*} = 0$$

bağıntısı vardır. Burada  $a_1$  ve  $a_3$  eşitlikleri

$$a_1 = \mp \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt.$$

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.39) ifadesinden açıktır.

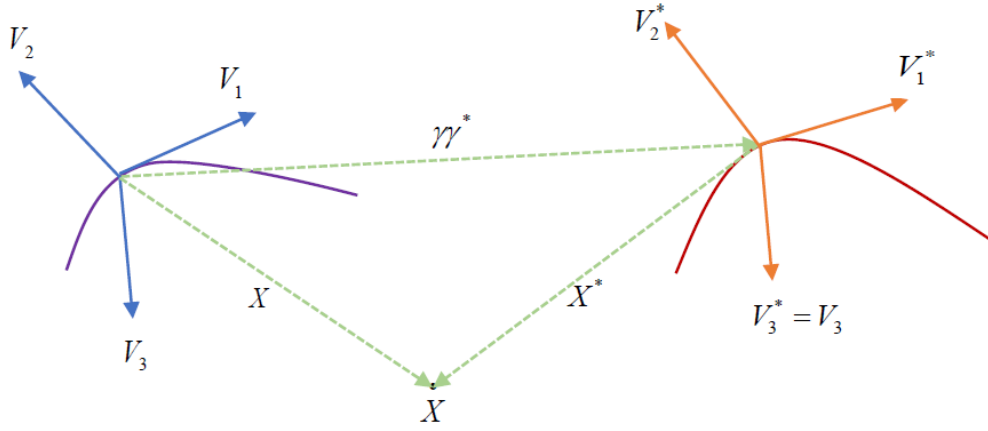
**Teorem 4.1.12:**  $q$  – equidistante regle yüzeyinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı olarak hareket eden birim vektörler  $X = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$  ve  $X^* = x_1^* V_1^* + x_2^* V_2^* + x_3^* V_3^*$  olsun. Bu durumda  $X^*$  vektörü

$$X^* = (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)) V_1^* + (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z)) V_2^* + (x_3 - q) V_3^*$$

(4.1.41)

şeklinde verilir.

**İspat:**



**Şekil 4.1.8**  $X, X^*$  vektörü

Şekil 4.1.8 ve (4.1.5) ifadelerinden  $X^*$  vektörü

$$\begin{aligned} X^* = X - \gamma^* &\Rightarrow X^* = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 - (pV_1 + zV_2 + qV_3) \\ &\Rightarrow X^* = (x_1 - p)V_1 + (x_2 - z)V_2 + (x_3 - q)V_3 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada (4.1.2) ifadesi yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X^* = (x_1 - p)(\cos \phi V_1^* + \sin \phi V_2^*) + (x_2 - z)(-\sin \phi V_1^* + \cos \phi V_2^*) + (x_3 - q)V_3^*,$$

$$X^* = (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z))V_1^* + (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z))V_2^* + (x_3 - q)V_3^*.$$

**Sonuç 4.1.13:**  $q$ -equidistante regle yüzeyinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden birim vektörler  $X^*$  vektörü

$$X^* = \mp (x_1 - p)V_1^* \pm (x_2 - z)V_2^* + (x_3 - q)V_3^*. \quad (4.1.42)$$

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.41) den açıktır.

**Teorem 4.1.13:**  $\varphi_{V_3}(t, v)$  kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden  $X$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı

$$\lambda_X = x_1\lambda_{V_1} + x_3\lambda_{V_3}, \quad L_X = x_1L_{V_1}, \quad (4.1.43)$$

$$P_X = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_1^2 + x_2^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}.$$

**İspat:** (2.2.6) ve (2.2.8) bağıntılarından  $\lambda_X = x_1\lambda_{V_1} + x_3\lambda_{V_3}$  yazılır. (2.2.6) ve (2.2.8) ifadelerinden  $L_X = x_1L_{V_1}$  olur. (2.2.5) ifadesinden  $P_X$  dralı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} X &= x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 \Rightarrow X' = x_1V_1' + x_2V_2' + x_3V_3' \\ &\Rightarrow X' = x_1k_1V_2 + x_2(-k_1V_1 + k_2V_3) + x_3(-k_1V_2) \\ &\Rightarrow X' = -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X'\|^2 &= (-x_2k_1)^2 + (x_1k_1 - x_3k_2)^2 + (x_2k_2)^2 \Rightarrow \|X'\|^2 = x_2^2k_1^2 + x_1^2k_1^2 + x_3^2k_2^2 - 2x_1k_1x_3k_2 + x_2^2k_2^2 \\ &\Rightarrow \|X'\|^2 = k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler dral tanımında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{\det(r', X, X')}{\|X'\|^2} \Rightarrow P_X = \frac{\det(V_1, x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3, -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3)}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2} \\ &\Rightarrow P_X = \frac{x_2^2k_2 - x_3x_1k_1 + x_3^2k_2}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2} \\ &\Rightarrow P_X = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.14:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı

$$\begin{aligned} \lambda_{X^*} &= \lambda_{V_1} (\cos^2 \phi(x_1 - p) - \sin \phi \cos \phi(x_2 - z)) + (\lambda_{V_3} - L_{V_1})(x_3 - q) \\ &+ a_1 (\cos \phi(x_1 - p) - \sin \phi(x_2 - z)) + a_3 (x_3 - q) \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $a_1$  ve  $a_3$  eşitlikleri

$$a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt.$$

**İspat:** (2.2.6), (4.1.41) ve (2.2.8) ifadelerinden gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_{X^*} = \langle D^*, X^* \rangle,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_{V_1^*} (\cos \phi(x_1 - p) - \sin \phi(x_2 - z)) + \lambda_{V_3^*} (x_3 - q)$$

olur. Burada (4.1.22) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_{X^*} = (\cos \phi \lambda_{V_1} + a_1) (\cos \phi(x_1 - p) - \sin \phi(x_2 - z)) + (\lambda_{V_3} - L_{V_1} + a_3) (x_3 - q),$$

$$\lambda_{X^*} = (\cos \phi \lambda_{V_1} + a_1) \cos \phi(x_1 - p) - (\cos \phi \lambda_{V_1} + a_1) \sin \phi(x_2 - z) + (\lambda_{V_3} - L_{V_1} + a_3) (x_3 - q),$$

$$\begin{aligned} \lambda_{X^*} &= \lambda_{V_1} \cos^2 \phi(x_1 - p) + a_1 \cos \phi(x_1 - p) - \lambda_{V_1} \cos \phi \sin \phi(x_2 - z) \\ &- a_1 \sin \phi(x_2 - z) + (\lambda_{V_3} - L_{V_1} + a_3) (x_3 - q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{X^*} &= \lambda_{V_1} (\cos^2 \phi(x_1 - p) - \sin \phi \cos \phi(x_2 - z)) + (\lambda_{V_3} - L_{V_1}) (x_3 - q) \\ &+ a_1 (\cos \phi(x_1 - p) - \sin \phi(x_2 - z)) + a_3 (x_3 - q) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

**Sonuç 4.1.14:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı

$$\lambda_{X^*} = (\lambda_{V_1} \mp a_1)(x_1 - p) + (\lambda_{V_3} - L_{V_1} + a_3)(x_3 - q) \quad (4.1.45)$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $a_1$  ve  $a_3$  eşitlikleri

$$a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1 - 1) dt.$$

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.44) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.15:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$\begin{aligned} L_{X^*} k_2^* &= L_{V_1} k_2 (\cos^2 \phi (x_1 - p) - \cos \phi \sin \phi (x_2 - z)) \\ &+ a_1 (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)) \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt$  şeklindedir.

**İspat:** (2.2.6) ifadesinde (4.1.41) ve (2.2.8) ifadeleri yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L_{X^*} = \langle V^*, X^* \rangle,$$

$$L_{X^*} = L_{V_1} (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z))$$

olur. Burada (4.1.24) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa



$$L_{X^*} = \left( \frac{\cos \phi k_2 L_{V_1} + a_1}{k_2^*} \right) (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)),$$

$$L_{X^*} k_2^* = (\cos \phi k_2 L_{V_1} + a_1) (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)),$$

$$L_{X^*} k_2^* = \cos \phi k_2 L_{V_1} (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)) + a_1 (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)),$$

$$L_{X^*} k_2^* = \cos^2 \phi k_2 L_{V_1} (x_1 - p) - k_2 \cos \phi L_{V_1} \sin \phi (x_2 - z) + a_1 (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)),$$

$$L_{X^*} k_2^* = L_{V_1} k_2 (\cos^2 \phi (x_1 - p) - \cos \phi \sin \phi (x_2 - z)) + a_1 (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z)).$$

**Sonuç 4.1.15:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{X^*} k_2^* = L_{V_1} k_2 (x_1 - p) \mp a_1 (x_1 - p) \quad (4.1.47)$$

bağıntısı mevcuttur. Burada  $a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt$  şeklindedir.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.46) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.16:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_{X^*} = \frac{C_q (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z)) - B_q (x_3 - q)}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2} \quad (4.1.48)$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $A_q$ ,  $B_q$  ve  $C_q$  ifadeleri

$$A_q = \sin \phi \left( z' - x_1 + p - (k_1 - 1)(x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1 - 1)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_q = \sin \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1 - 1)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -z' + x_1 - p + (k_1 - 1)(x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} \right) \\ - \cos \phi k_2 (x_3 - q) \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_q = \sin \phi \cos \phi k_2 (x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} + \cos^2 \phi k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} - q'.$$

**İspat:** (4.1.41) ifadesinin türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(X^*)' = (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z))' V_1^* + (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z))(V_1^*)' \\ + (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z))' V_2^* + (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z))(V_2^*)' \\ + (x_3 - q)' V_3^* + (x_3 - q)(V_3^*)',$$

$$(X^*)' = \left( (\cos \phi (x_1 - p))' - (\sin \phi (x_2 - z))' \right) V_1^* + (\cos \phi (x_1 - p) - \sin \phi (x_2 - z))(k_1^* V_2^*) \\ + \left( (\sin \phi (x_1 - p))' + (\cos \phi (x_2 - z))' \right) V_2^* \\ + (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z))(-k_1^* V_1^* + k_2^* V_3^*) + (x_3 - q)' V_3^* + (x_3 - q)(-k_2^* V_2^*),$$

$$(X^*)' = (-\sin \phi (x_1 - p) - p' \cos \phi - (\cos \phi (x_2 - z) - z' \sin \phi)) V_1^* \\ + (\cos \phi k_1^* (x_1 - p) - \sin \phi k_1^* (x_2 - z)) V_2^* \\ + (\cos \phi (x_1 - p) - p' \sin \phi + (-\sin \phi (x_2 - z) - z' \cos \phi)) V_2^* \\ + (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z))(-k_1^* V_1^*) \\ + (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z))(k_2^* V_3^*) - q' V_3^* - k_2 (x_3 - q) V_2^*,$$

$$\begin{aligned}
(X^*)' &= (-\sin \phi (x_1 - p) - p' \cos \phi - \cos \phi (x_2 - z) + z' \sin \phi) V_1^* \\
&+ (\cos \phi k_1^* (x_1 - p) - \sin \phi k_1^* (x_2 - z)) V_2^* \\
&+ (\cos \phi (x_1 - p) - p' \sin \phi - \sin \phi (x_2 - z) - z' \cos \phi) V_2^* \\
&+ (-\sin \phi k_1^* (x_1 - p) - \cos \phi k_1^* (x_2 - z)) V_1^* \\
&+ (\sin \phi k_2^* (x_1 - p) + \cos \phi k_2^* (x_2 - z)) V_3^* - q' V_3^* - k_2^* (x_3 - q) V_2^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X^*)' &= (\sin \phi (z' - x_1 + p) + \cos \phi (-p' - x_2 + z) - \sin \phi k_1^* (x_1 - p) - \cos \phi k_1^* (x_2 - z)) V_1^* \\
&+ (\cos \phi k_1^* (x_1 - p) - \sin \phi k_1^* (x_2 - z) + \cos \phi (x_1 - p - z') + \sin \phi (-x_2 + z - p') - k_2^* (x_3 - q)) V_2^* \\
&+ (\sin \phi k_2^* (x_1 - p) + \cos \phi k_2^* (x_2 - z) - q') V_3^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X^*)' &= (\sin \phi (z' - x_1 + p - k_1^* (x_1 - p)) + \cos \phi (-p' - x_2 + z - k_1^* (x_2 - z))) V_1^* \\
&+ (\sin \phi (-p' - x_2 + z - k_1^* (x_2 - z)) + \cos \phi (-z' + x_1 - p + k_1^* (x_1 - p)) - k_2^* (x_3 - q)) V_2^* \\
&+ (\sin \phi k_2^* (x_1 - p) + \cos \phi k_2^* (x_2 - z) - q') V_3^*
\end{aligned}$$

olur. Burada  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  yerine (4.1.3) ifadeleri yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
(X^*)' &= \left( \sin \phi \left( z' - x_1 + p - (k_1 - 1)(x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1 - 1)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) \right) V_1^* \\
&+ \left( \begin{aligned} &\sin \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1 - 1)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -z' + x_1 - p + (k_1 - 1)(x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} \right) \\ &- \cos \phi k_2 (x_3 - q) \frac{dt}{dt^*} \end{aligned} \right) V_2^* \\
&+ \left( \sin \phi \cos \phi k_2 (x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} + \cos^2 \phi k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} - q' \right) V_3^*
\end{aligned}$$

olur. Yazma kolaylığından,

$$A_q = \sin \phi \left( z' - x_1 + p - (k_1 - 1)(x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1 - 1)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_q = \sin \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1 - 1)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -z' + x_1 - p + (k_1 - 1)(x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} \right) - \cos \phi k_2 (x_3 - q) \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_q = \sin \phi \cos \phi k_2 (x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} + \cos^2 \phi k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} - q'$$

alınırsa  $(X^*)' = A_q V_1^* + B_q V_2^* + C_q V_3^*$  ve  $\|(X^*)'\|^2 = A_q^2 + B_q^2 + C_q^2$  olur. Bulunan bu ifadeler (2.2.5) de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılsa  $P_{X^*}$  dralı

$$P_{X^*} = \frac{\det \left( (r^*)', X^*, (X^*)' \right)}{\|(X^*)'\|^2} \Rightarrow P_{X^*} = \frac{\det \left( V_1^*, X^*, (X^*)' \right)}{\|(X^*)'\|^2}$$

$$\Rightarrow P_{X^*} = \frac{C_q (\sin \phi (x_1 - p) + \cos \phi (x_2 - z)) - B_q (x_3 - q)}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2}$$

olur.

**Sonuç 4.1.16:**  $q$  – equidistante regle yüzeylerinin dayanak eğrilerinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_{X^*} = \frac{\mp C_q (x_2 - z) - B_q (x_3 - q)}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2} \quad (4.1.49)$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $A_q$ ,  $B_q$  ve  $C_q$  ifadeleri

$$A_q = \mp \left( -p' - x_2 + z - (k_1 - 1)(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right), \quad C_q = k_2(x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} - q'$$

$$B_q = \mp \left( -z' + x_1 - p + ((k_1 - 1)(x_1 - p) - k_2(x_3 - q)) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

şeklindedir.

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.48) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.17:**  $q$ -equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü oskületör düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_1 V_1 + x_2 V_2, \quad \lambda_X = x_1 \lambda_{V_1}, \quad L_X = x_1 L_{V_1}, \quad P_X = \frac{k_2 x_2^2}{k_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + k_2^2 x_2^2},$$

$$X^* = (\cos \phi(x_1 - p) - \sin \phi(x_2 - z)) V_1^* + (\sin \phi(x_1 - p) + \cos \phi(x_2 - z)) V_2^* - q V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_{V_1} (\cos^2 \phi(x_1 - p) - \sin \phi \cos \phi(x_2 - z)) - \lambda_{V_3} q + L_{V_1} q + a_1 (\cos \phi(x_1 - p) - \sin \phi(x_2 - z)) - a_3 q,$$

$$L_{X^*} k_2^* = L_{V_1} k_2 (\cos^2 \phi(x_1 - p) - \cos \phi \sin \phi(x_2 - z)) + a_1 (\cos \phi(x_1 - p) - \sin \phi(x_2 - z)),$$

$$P_{X^*} = \frac{C_q (\sin \phi(x_1 - p) + \cos \phi(x_2 - z)) + B_q q}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2}. \quad (4.1.50)$$

Burada;

$$a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1-1) dt,$$

$$A_q = \sin \phi \left( z' - x_1 + p - (k_1-1)(x_1-p) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1-1)(x_2-z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_q = \sin \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1-1)(x_2-z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -z' + x_1 - p + (k_1-1)(x_1-p) \frac{dt}{dt^*} \right)$$

$$+ \cos \phi k_2 q \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_q = \sin \phi \cos \phi k_2 (x_1-p) \frac{dt}{dt^*} + \cos^2 \phi k_2 (x_2-z) \frac{dt}{dt^*} - q'.$$

**İspat:**  $X$  oskületör düzleminde olduğundan ve (4.1.41), (4.1.43), (4.1.44), (4.1.46), (4.1.48) bağıntılarından istenilen bulunur.

**Sonuç 4.1.17:**  $q$ -equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü oskületör düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_1 V_1 + x_2 V_2, \quad \lambda_X = x_1 \lambda_{V_1}, \quad L_X = x_1 L_{V_1}, \quad P_X = \frac{k_2 x_2^2}{k_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + k_2^2 x_2^2},$$

$$X^* = \mp (x_1-p) V_1^* \mp (x_2-z) V_2^* - q V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_{V_1} (x_1-p) - \lambda_{V_3} q + L_{V_1} q \mp a_1 (x_1-p) - a_3 q,$$

$$L_{X^*} k_2^* = L_{V_1} k_2 (x_1-p) \mp a_1 (x_1-p), \quad P_{X^*} = \frac{\mp C_q (x_2-z) + B_q q}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2}. \quad (4.1.51)$$

Burada;

$$a_1 = \mp \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1-1) dt,$$

$$A_q = \mp \left( -p' - x_2 + z - (k_1-1)(x_2-z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_q = \mp \left( -z' + x_1 - p + (k_1-1)(x_1-p) \frac{dt}{dt^*} \right) \mp k_2 q \frac{dt}{dt^*}, \quad C_q = k_2 (x_2-z) \frac{dt}{dt^*} - q'.$$

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.50) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.18:**  $q$ -equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü normal düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_2 V_2 + x_3 V_3, \quad \lambda_X = x_3 \lambda_{V_3}, \quad L_X = 0, \quad P_X = \frac{k_2 (x_2^2 + x_3^2)}{k_1^2 x_2^2 + k_2^2 (x_2^2 + x_3^2)},$$

$$X^* = (-p \cos \phi - \sin \phi (x_2 - z)) V_1^* + (-p \sin \phi + \cos \phi (x_2 - z)) V_2^* + (x_3 - q) V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_{V_1} (-p \cos^2 \phi - \sin \phi \cos \phi (x_2 - z)) + \lambda_{V_3} (x_3 - q) - L_{V_1} (x_3 - q)$$

$$+ a_1 (-p \cos \phi - \sin \phi (x_2 - z)) + a_3 (x_3 - q),$$

$$L_{X^*} k_2^* = L_{V_1} k_2 (-p \cos^2 \phi - \cos \phi \sin \phi (x_2 - z)) + a_1 (-p \cos \phi - \sin \phi (x_2 - z)),$$

$$P_{X^*} = \frac{C_q (-p \sin \phi + \cos \phi (x_2 - z)) - B_q (x_3 - q)}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2},$$

(4.1.52)

Burada;

$$a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1-1) dt,$$

$$A_q = \sin \phi \left( z' + p \left( (k_1-1) \frac{dt}{dt^*} + 1 \right) \right) + \cos \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1-1)(x_2-z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_q = \sin \phi \left( -p' - x_2 + z - (k_1-1)(x_2-z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -z' + x_1 + p \left( (k_1-1) \frac{dt}{dt^*} - 1 \right) \right) \\ - \cos \phi k_2 (x_3 - q) \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_q = -pk_2 \sin \phi \cos \phi \frac{dt}{dt^*} + \cos^2 \phi k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} - q'.$$

**İspat:**  $X$  normal düzleminde olduğundan ve (4.1.41), (4.1.43), (4.1.44), (4.1.46), (4.1.48) bağıntılarından istenilen bulunur.

**Sonuç 4.1.18:**  $q$  – equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü normal düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_2 V_2 + x_3 V_3, \quad \lambda_X = x_3 \lambda_{V_3}, \quad L_X = 0, \quad P_X = \frac{k_2 (x_2^2 + x_3^2)}{k_1^2 x_2^2 + k_2^2 (x_2^2 + x_3^2)},$$

$$X^* = \mp p V_1^* \mp (x_2 - z) V_2^* + (x_3 - q) V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = -\lambda_{V_1} p + \lambda_{V_3} (x_3 - q) - L_{V_1} (x_3 - q) \mp a_1 p + a_3 (x_3 - q),$$

$$L_{X^*} k_2^* = -L_{V_1} k_2 p \mp a_1 p,$$

$$P_{X^*} = \frac{\mp C_q (x_2 - z) - B_q (x_3 - q)}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2},$$

(4.1.53)

Burada;



$$a_1 = \mp \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1-1) dt,$$

$$A_q = \mp \left( -p' - x_2 + z - (k_1-1)(x_2-z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_q = \mp \left( -z' + x_1 + p \left( (k_1-1) \frac{dt}{dt^*} - 1 \right) \right) \mp k_2 (x_3-q) \frac{dt}{dt^*}, \quad C_q = k_2 (x_2-z) \frac{dt}{dt^*} - q'.$$

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.52) ifadesinden açıktır.

**Teorem 4.1.19:**  $q$ -equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü rektifiyan düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_1V_1 + x_3V_3, \quad \lambda_X = x_1\lambda_{V_1} + x_3\lambda_{V_3}, \quad L_X = x_1L_{V_1}, \quad P_X = \frac{k_2x_3^2 - x_1x_3k_1}{(k_1x_1 - k_2x_3)^2},$$

$$X^* = (\cos \phi(x_1 - p) + z \sin \phi)V_1^* + (\sin \phi(x_1 - p) - z \cos \phi)V_2^* + (x_3 - q)V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_{V_1} (\cos^2 \phi(x_1 - p) + z \sin \phi \cos \phi) + \lambda_{V_3} (x_3 - q) - L_{V_1} (x_3 - q) \\ + a_1 (\cos \phi(x_1 - p) + z \sin \phi) + a_3 (x_3 - q),$$

$$L_{X^*} k_2^* = L_{V_1} k_2 (\cos^2 \phi(x_1 - p) + z \cos \phi \sin \phi) + a_1 (\cos \phi(x_1 - p) + z \sin \phi),$$

$$P_{X^*} = \frac{C_q (\sin \phi(x_1 - p) - z \cos \phi) - B_q (x_3 - q)}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2},$$

(4.1.54)

Burada;

$$a_1 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 \cos \phi dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1-1) dt,$$

$$A_q = \sin \phi \left( z' - x_1 + p - (k_1-1)(x_1-p) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \phi \left( -p' + z \left( 1 + (k_1-1) \frac{dt}{dt^*} \right) \right),$$

$$B_q = \sin \phi \left( -p' + z \left( 1 + (k_1-1) \frac{dt}{dt^*} \right) \right) + \cos \phi \left( -z' + x_1 - p + (k_1-1)(x_1-p) \frac{dt}{dt^*} \right) \\ - \cos \phi k_2 (x_3 - q) \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_q = \sin \phi \cos \phi k_2 (x_1 - p) \frac{dt}{dt^*} - z k_2 \cos^2 \phi \frac{dt}{dt^*} - q'.$$

**İspat:**  $X$  rektifyan düzleminde olduğundan ve (4.1.41), (4.1.43), (4.1.44), (4.1.46), (4.1.48) bağıntılarından istenilen bulunur.

**Sonuç 4.1.19:**  $q$ -equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü rektifyan düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_1 V_1 + x_3 V_3, \quad \lambda_X = x_1 \lambda_{V_1} + x_3 \lambda_{V_3}, \quad L_X = x_1 L_{V_1}, \quad P_X = \frac{k_2 x_3^2 - x_1 x_3 k_1}{(k_1 x_1 - k_2 x_3)^2},$$

$$X^* = \mp (x_1 - p) V_1^* \mp z V_2^* + (x_3 - q) V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = \lambda_{V_1} (x_1 - p) + \lambda_{V_3} (x_3 - q) - L_{V_1} (x_3 - q) \mp a_1 (x_1 - p) + a_3 (x_3 - q),$$

$$L_{X^*} k_2^* = L_{V_1} k_2 (x_1 - p) \mp a_1 (x_1 - p),$$

$$P_{X^*} = \frac{\mp C_q z - B_q (x_3 - q)}{A_q^2 + B_q^2 + C_q^2},$$

(4.1.55)

Burada;

$$a_1 = \mp \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} k_2 dt, \quad a_3 = \oint_{(pV_1+zV_2+qV_3)} (k_1-1) dt,$$

$$A_q = \mp \left( -p' + z \left( 1 + (k_1-1) \frac{dt}{dt^*} \right) \right),$$

$$B_q = \mp \left( -z' + x_1 - p + (k_1-1)(x_1-p) \frac{dt}{dt^*} \right) \mp k_2 (x_3 - q) \frac{dt}{dt^*}, \quad C_q = -zk_2 \frac{dt}{dt^*} - q'.$$

**İspat:** Sonuç 4.1.3 ve (4.1.54) ifadesinden açıktır.

## 4.2 Birim Darboux Vektörlerinin Ürettiği Equidistante Regle Yüzeyler

**Tanım 4.2.1:**  $r$  ve  $r^*$  eğrilerinin Frenet çatılarına ait  $C$  ve  $C^*$  birim Darboux vektörlerinin ürettiği regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\varphi_C(t, v) = r(t) + vC(t), \quad \varphi_{C^*}(t, v) = r^*(t) + vC^*(t) \quad (4.2.1)$$

olsun. Eğer;

- i) striksiyon eğrisi boyunca birim Darboux vektörlerinin paralel
- ii) uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklık  $d$  olsun)

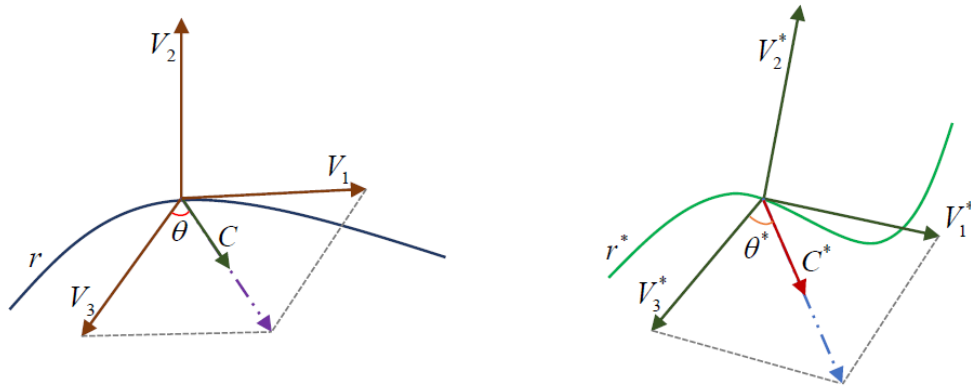
$\varphi_C(t, v)$  ve  $\varphi_{C^*}(t, v)$  yüzeylerine  $d$  – **equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzeyler** adı verilir.

**Teorem 4.2.1:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerin  $C$  ile  $V_3$  vektörü arasındaki açı  $\theta$  ve  $C^*$  ile  $V_3^*$  vektörü arasındaki açı  $\theta^*$  olsun. Bu çatılar arasında

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

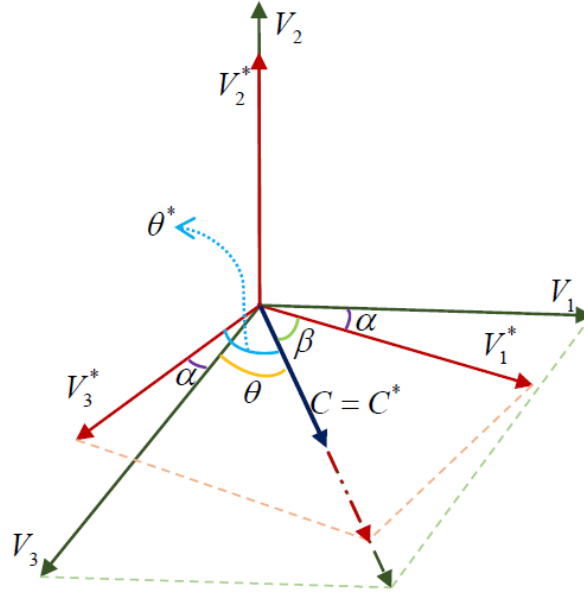
bağıntısı vardır. Burada  $\alpha = \theta^* - \theta$  şeklindedir.

**İspat:** (2.1.7) ifadesinden  $C = \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3$  ve  $C^* = \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*$  şeklinde yazılabilir (Şekil 4.2.1).



**Şekil 4.2.1**  $C, C^*$  birim Darboux vektörleri

$C$  ve  $C^*$  vektörleri paralel olduğundan  $Sp\{V_1, V_3\}$  ve  $Sp\{V_1^*, V_3^*\}$  merkezi düzlemleri birbirine paraleldir. Buradan  $V_2^* = V_2$  olur. Şekil 4.2.2 den



Şekil 4.2.2  $C = C^*$  birim Darboux vektörleri

$V_3$  ve  $V_3^*$  arasındaki açı  $\alpha$  olsun. Şekil 4.2.2 den teğetler arasındaki açı da  $\alpha$  dır.  $V_1^*$  vektörü  $V_1^* = k_1V_1 + l_1V_2 + m_1V_3$  şeklinde yazılır. Burada  $k_1 = \cos \alpha$ ,  $l_1 = 0$  ve  $m_1 = \sin \alpha$  şeklinde bulunur. Benzer yöntem kullanılarak  $V_3^*$  vektörü  $V_3^* = -\sin \alpha V_1 + \cos \alpha V_3$  olur. Böylece (4.2.2) elde edilir.

**Teorem 4.2.2:**  $d$  – equidistane regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin tabi eğriliği ve tabi torsiyonu sırasıyla  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_1^*$ ,  $k_2^*$  olsun. Bu eğrilikler arasında

$$k_1^* = (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) \frac{dt}{dt^*}, \quad k_2^* = (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) \frac{dt}{dt^*} \quad (4.2.3)$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** (4.2.2) ifadesinden  $V_1^*$  vektörünün türevi alınırsa

$$(V_1^*)' \frac{dt^*}{dt} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} V_1 + \cos \alpha V_1' + \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} V_3 + \sin \alpha V_3',$$

$$(V_1^*)' \frac{dt^*}{dt} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} V_1 + \cos \alpha k_1 V_2 + \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} V_3 + \sin \alpha (-k_2 V_2),$$

$$(V_1^*)' \frac{dt^*}{dt} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} V_1 + (\cos \alpha k_1 - \sin \alpha k_2) V_2 + \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} V_3,$$

$$(V_1^*)' = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*} V_1 + (\cos \alpha k_1 - \sin \alpha k_2) \frac{dt}{dt^*} V_2 + \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*} V_3$$

olur. (2.1.2) ifadesinden  $k_1^*$  eğriliği

$$k_1^* = \left\langle (V_1^*)', V_2^* \right\rangle = \left\langle -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*} V_1 + (\cos \alpha k_1 - \sin \alpha k_2) \frac{dt}{dt^*} V_2 + \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{dt^*} V_3, V_2 \right\rangle,$$

$$k_1^* = (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) \frac{dt}{dt^*}$$

elde edilir. Benzer yöntem kullanılarak  $k_2^*$  eğriliği

$$(V_2^*)' \frac{dt^*}{dt} = -k_1 V_1 + k_2 V_3,$$

$$(V_2^*)' = -k_1 \frac{dt}{dt^*} V_1 + k_2 \frac{dt}{dt^*} V_3,$$

$$k_2^* = \left\langle (V_2^*)', V_3^* \right\rangle = \left\langle -k_1 \frac{dt}{dt^*} V_1 + k_2 \frac{dt}{dt^*} V_3, -\sin \alpha V_1 + \cos \alpha V_3 \right\rangle,$$

$$k_2^* = (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) \frac{dt}{dt^*}$$

şeklinde bulunur.

**Teorem 4.2.3:**  $d$  – equidistane regle yüzeylerin  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon çizgisi sırasıyla

$$\gamma(t) = r(t) - \cos \theta \frac{dt}{d\theta} C(t), \quad \gamma^*(t^*) = r^*(t^*) - \cos \theta^* \frac{dt^*}{d\theta^*} C(t^*) \quad (4.2.4)$$

şeklinde verilir.

**İspat:**  $C$  vektörünün türevi

$$C' = \cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 + \sin \theta V_1' - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3 + \cos \theta V_3',$$

$$C' = \cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 + \sin \theta k_1 V_2 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3 + \cos \theta (-k_2 V_2),$$

$$C' = \cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 + (\sin \theta k_1 - \cos \theta k_2) V_2 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3,$$

$$C' = \cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3$$

olur. Norm alınırsa

$$\|C'\|^2 = \left( \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left( -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

bulunur. Bu değerler (2.2.4) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa  $\gamma$  ve  $\gamma^*$  striksiyon çizgileri

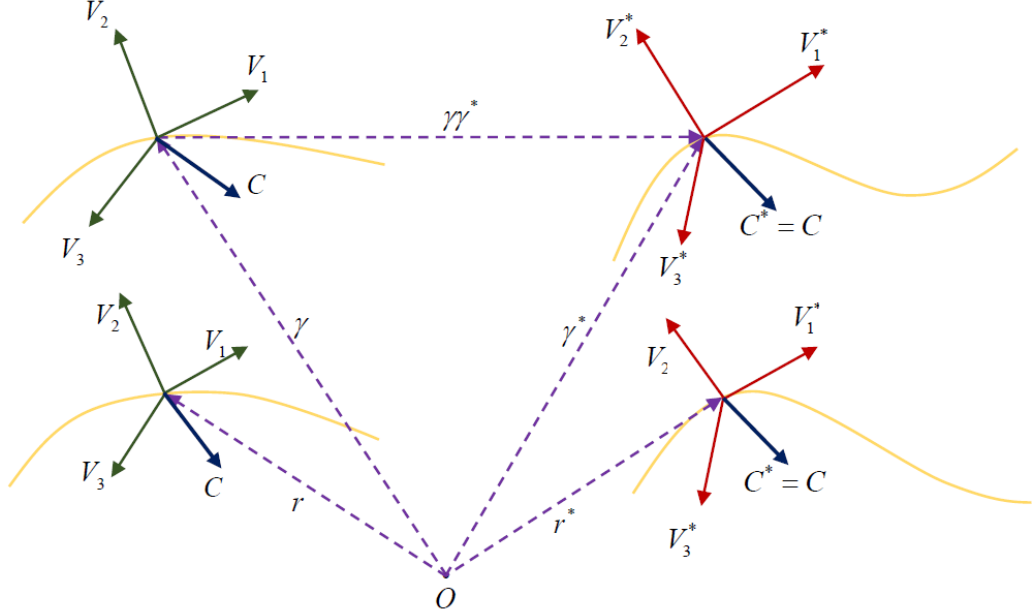
$$\gamma(t) = r(t) - \cos \theta \frac{dt}{d\theta} C(t) \quad \text{ve} \quad \gamma^*(t^*) = r^*(t^*) - \cos \theta^* \frac{dt^*}{d\theta^*} C(t^*)$$

şeklinde elde edilir.

Dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olarak alınırsa  $d$  – equidistante regle yüzeylerin parametrik ifadeleri

$$\varphi_C(t, v) = \gamma(t) + vC(t), \quad \varphi_{C^*}(t, v) = \gamma^*(t) + vC(t) \quad (4.2.5)$$

şeklinde olur.  $d$  – equidistante regle yüzeylerin merkezi, polar ve asimptotik düzlemleri arasındaki uzaklıklar sırasıyla  $|z|$ ,  $|q|$  ve  $|p|$  olsun (Şekil 4.2.3).



**Şekil 4.2.3**  $\varphi_c(t, v)$  ve  $\varphi_{c^*}(t, v)$  regle yüzeylerin  $\gamma, \gamma^*$  striksiyon çizgisi

Şekil 4.2.3 den  $\gamma^*$  striksiyon çizgisinin denklemi  $\gamma^* = \gamma + aV_1 + bV_2 + cV_3$  olur. Burada

$$a = \langle \overrightarrow{\gamma\gamma^*}, V_1 \rangle, \quad b = \langle \overrightarrow{\gamma\gamma^*}, V_2 \rangle, \quad c = \langle \overrightarrow{\gamma\gamma^*}, V_3 \rangle.$$

$\overrightarrow{\gamma\gamma^*}$  vektörünün  $V_1$  vektörü üzerine izdüşümü uzunluğu olan  $a$ , uygun noktalarda polar düzlemler arasındaki  $|p|$  uzaklığına;  $V_2$  vektörü üzerine izdüşümü uzunluğu olan  $b$ , uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki  $|z|$  uzaklığına;  $V_3$  vektörü üzerine izdüşümü uzunluğu olan  $c$ , uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki  $|q|$  uzaklığına eşittir. Buradan  $\overrightarrow{\gamma\gamma^*}$  vektörü

$$\overrightarrow{\gamma\gamma^*} = pV_1 + zV_2 + qV_3 \quad \text{veya} \quad \gamma^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + qV_3. \quad (4.2.6)$$



**Teorem 4.2.4:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerinin striksiyon çizgileri arasında

$$\begin{aligned} \gamma^* = & \gamma + \left( p - b \sin \theta - \left( (a-b) \frac{dt^*}{dt} + ((1+p'-k_1z) \cos \theta + (-q'-k_2z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta \right) V_1 \\ & + zV_2 + \left( q - b \cos \theta - \left( (a-b) \frac{dt^*}{dt} + ((1+p'-k_1z) \cos \theta + (-q'-k_2z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta \right) V_3 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

bağıntısı vardır. Burada  $a = -\cos \theta \frac{dt}{d\theta}$ ,  $b = -\cos \theta^* \frac{dt^*}{d\theta^*}$ .

**İspat:**  $a = -\cos \theta \frac{dt}{d\theta}$ ,  $b = -\cos \theta^* \frac{dt^*}{d\theta^*}$  alınırsa (4.2.4) bağıntısından striksiyon çizgileri  $\gamma = r + aC$  ve  $\gamma^* = r^* + bC$  şeklinde yazılır. Bu ifadeler (4.2.6) da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + qV_3,$$

$$r^* + bC = r + aC + pV_1 + zV_2 + qV_3,$$

$$r^* + b(\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) = r + a(\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) + pV_1 + zV_2 + qV_3,$$

$$r^* = r + (a \sin \theta - b \sin \theta + p)V_1 + zV_2 + (a \cos \theta - b \cos \theta + q)V_3,$$

$$r^* = r + ((a-b) \sin \theta + p)V_1 + zV_2 + ((a-b) \cos \theta + q)V_3 \quad (4.2.8)$$

bulunur. Türev alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(r^*)' \frac{dt^*}{dt} = r' + ((a-b)\sin\theta + p)' V_1 + ((a-b)\sin\theta + p) V_1' + z' V_2 + z V_2' \\ + ((a-b)\cos\theta + q)' V_3 + ((a-b)\cos\theta + q) V_3',$$

$$(r^*)' \frac{dt^*}{dt} = V_1 + \left( \cos\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \sin\theta + p' \right) V_1 + ((a-b)\sin\theta + p) (k_1 V_2) \\ + z' V_2 + z (-k_1 V_1 + k_2 V_3) + \left( -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \cos\theta + q' \right) V_3 \\ + ((a-b)\cos\theta + q) (-k_2 V_2),$$

$$(r^*)' \frac{dt^*}{dt} = \left( 1 + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \sin\theta + p' - k_1 z \right) V_1 \\ + ((a-b)k_1 \sin\theta + pk_1 - (a-b)k_2 \cos\theta - k_2 q) V_2 \\ + \left( -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \cos\theta + q' + k_2 z \right) V_3,$$

$$(r^*)' = \left( 1 + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \sin\theta + p' - k_1 z \right) \frac{dt^*}{dt} V_1 \\ + ((a-b)k_1 \sin\theta + pk_1 - (a-b)k_2 \cos\theta - k_2 q) \frac{dt^*}{dt} V_2 \\ + \left( -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \cos\theta + q' + k_2 z \right) \frac{dt^*}{dt} V_3,$$

bulunur. Bu ifade  $C'$  ile iç çarpılırsa

$$\left\langle (r^*)', (C^*)' \right\rangle = \left( 1 + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \sin\theta + p' - k_1 z \right) \frac{dt^*}{dt} \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \\ - \left( -\sin\theta \frac{d\theta}{dt} (a-b) + (a-b)' \cos\theta + q' + k_2 z \right) \frac{dt^*}{dt} \sin\theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\begin{aligned} \left\langle (r^*)', (C^*)' \right\rangle &= \cos \theta \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \cos^2 \theta (a-b) \frac{dt^*}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + (a-b)' \sin \theta \cos \theta \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ &+ p' \cos \theta \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - k_1 z \cos \theta \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \sin^2 \theta (a-b) \frac{dt^*}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &- (a-b)' \cos \theta \sin \theta \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - q' \sin \theta \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} - k_2 z \sin \theta \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle (r^*)', (C^*)' \right\rangle &= (a-b) \frac{dt^*}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &+ (\cos \theta + p' \cos \theta - q' \sin \theta - k_1 z \cos \theta - k_2 z \sin \theta) \frac{dt^*}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

olur.  $\gamma^* = r^* + bC$  ifadesi (4.2.4) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$r^* = \gamma + (p - b \sin \theta) V_1 + z V_2 + (q - b \cos \theta) V_3$$

bulunur. Bulunan  $\left\langle (r^*)', (C^*)' \right\rangle$  ve  $r^*$  ifadeleri (2.2.4) ifadesinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \gamma + \left( p - b \sin \theta - \left( (a-b) \frac{dt^*}{dt} + ((1+p'-k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta \right) V_1 \\ &+ z V_2 + \left( q - b \cos \theta - \left( (a-b) \frac{dt^*}{dt} + ((1+p'-k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta \right) V_3 \end{aligned}$$

istenilen elde edilmiş olur.

**Sonuç 4.2.1**  $d$  - equidistante regle yüzeylerin uygun noktalarında merkezi düzlemler arasındaki  $d$  uzaklığı

$$d = \frac{k_1 \left( 1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left( q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2} \quad (4.2.9)$$

şeklinde verilir.

**İspat:** (4.2.2) ifadesinden asli normal vektörleri paraleldir. Bu durumda merkezi düzlemler arasında ki uzaklık (3.2.2) ifadesinden

$$z = \frac{k_1 \left( 1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left( q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2}$$

şeklinde yazılır. Buradan açıktır ki  $z = d$  olur ve  $d$  uzaklığı

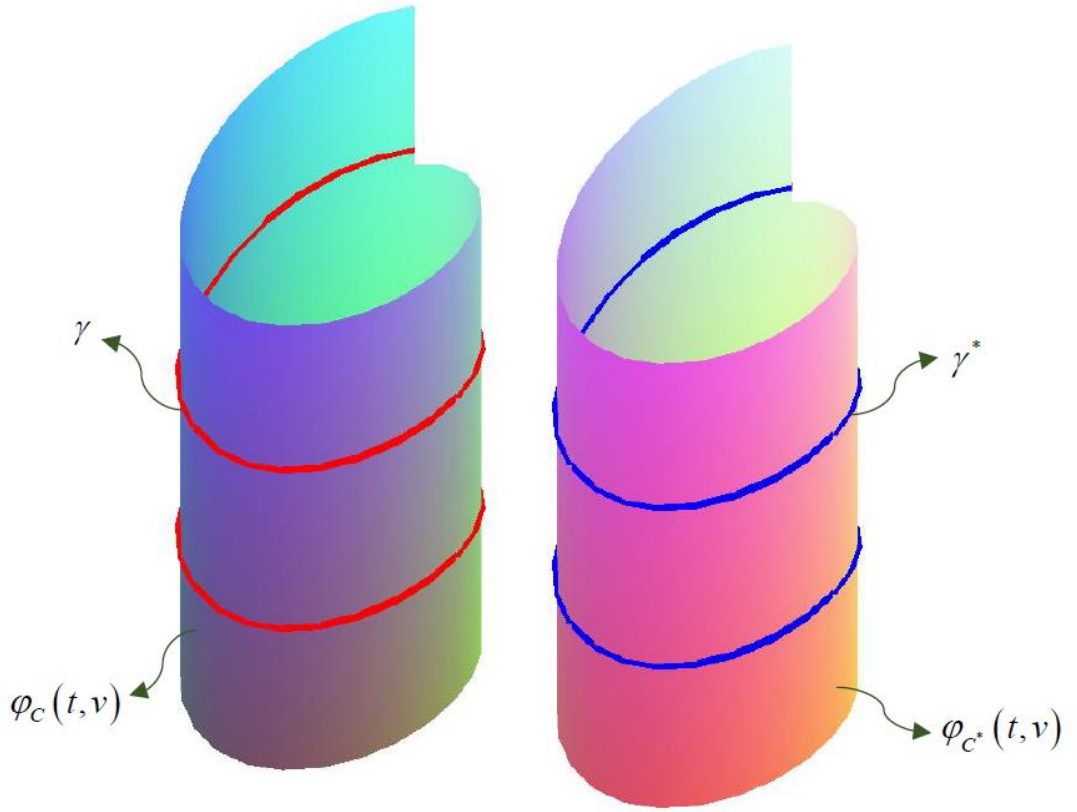
$$d = \frac{k_1 \left( 1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left( q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2}$$

şeklinde bulunur.

**Örnek 4.2.1:**  $\varphi_C(t, v) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + v(0, 0, -1)$  ve

$\varphi_{C^*}(t, v) = \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + v(0, 0, -1)$  regle yüzeyleri

$d$  – equidistante regle yüzeyleridir (Şekil 4.2.4). Böyle olduğu Örnek 4.1.1 de ki yöntem izlenerek gösterilebilir.



**Şekil 4.2.4**  $d$  – equidistante regle yüzeyler

$d$  – equidistante regle yüzeylerin striksiyon eğrilerinin birim teğet vektörleri sırasıyla  $T$  ve  $T^*$  olsun. (4.2.4) ifadesinden türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa  $T$  vektörü

$$\frac{d\gamma}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = \frac{dr}{dt} - \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)' C - \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right) C',$$

$$\frac{d\gamma}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = V_1 - \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)' (\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) - \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right) \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} V_1 - \sin \theta \frac{dt}{d\theta} V_3 \right),$$

$$\begin{aligned}
T &= \left( 1 - \sin \theta \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)' - \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)^2 \right) \frac{dt}{dt^*} V_1 \\
&+ \left( -\cos \theta \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)' + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{dt}{d\theta} \right)^2 \right) \frac{dt}{dt^*} V_3
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

şeklinde bulunur. Buradan görülür  $T \in Sp\{V_1, V_3\}$  dür.

**Sonuç 4.2.2:**  $\varphi_C(t, v)$  regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin birim teğet vektörü merkezi düzlemde yatmaktadır.

$T$  vektörü Frenet vektörleri cinsinden

$$T = aV_1 + bV_2 + cV_3 \tag{4.2.11}$$

şeklinde yazılabilir.  $T$  ile  $V_1$  vektörü arasındaki açı  $\sigma$  olsun. (4.2.11) ve  $T \in Sp\{V_1, V_3\}$  olmasından dolayı

$$T = \cos \sigma V_1 + \sin \sigma V_3 \tag{4.2.12}$$

şeklinde bulunur.  $T^*$  ile  $V_1^*$  arasındaki açı  $\sigma^*$  ile gösterilirse benzer hesaplama yöntemiyle

$$T^* = \cos \sigma^* V_1^* + \sin \sigma^* V_3^* \tag{4.2.13}$$

şeklinde olur.

**Sonuç 4.2.3:**  $\varphi_C(t, v)$  regle yüzeyinin  $\sigma$  striksiyonu ile ilgili

$$\cos \sigma = \left( 1 - \sin \theta \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)' - \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)^2 \right) \frac{dt}{dt^*}, \tag{4.2.14}$$

$$\sin \sigma = \left( -\cos \theta \left( \cos \theta \frac{dt}{d\theta} \right)' + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{dt}{d\theta} \right)^2 \right) \frac{dt}{dt^*}$$

bağıntıları vardır.

**İspat:** (4.2.10) ve (4.2.12) ifadelerinden açıktır.

**Teorem 4.2.5:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerinin parametreleri arasında

$$\frac{dt^*}{dt} = \sqrt{(\cos \sigma + A' - zk_1)^2 + (Ak_1 + z' - Bk_2)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + B')^2} \quad (4.2.15)$$

bağıntısı vardır. Burada  $A$  ve  $B$

$$A = p - b \sin \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta,$$

$$B = q - b \cos \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta.$$

**İspat:** (4.2.7) ifadesinde

$$A = p - b \sin \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta,$$

$$B = q - b \cos \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta$$

alınırsa  $\gamma^* = \gamma + AV_1 + zV_2 + BV_3$  şeklinde olur. Buradan türev alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{d\gamma^*}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + A'V_1 + AV_1' + z'V_2 + zV_2' + B'V_3 + BV_3',$$

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = T + A'V_1 + A(k_1V_2) + z'V_2 + z(-k_1V_1 + k_2V_3) + B'V_3 + B(-k_2V_2),$$

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = T + (A' - zk_1)V_1 + (Ak_1 + z' - Bk_2)V_2 + (zk_2 + B')V_3$$

bulunur. Burada  $T$  nin yerine (4.2.12) den karşılığı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = \cos \sigma V_1 + \sin \sigma V_3 + (A' - zk_1)V_1 + (Ak_1 + z' - Bk_2)V_2 + (zk_2 + B')V_3,$$

$$T^* \frac{dt^*}{dt} = (\cos \sigma + A' - zk_1)V_1 + (Ak_1 + z' - Bk_2)V_2 + (\sin \sigma + zk_2 + B')V_3 \quad (4.2.16)$$

elde edilir. Normu alınırsa

$$\left\| T^* \frac{dt^*}{dt} \right\| = \left[ (\cos \sigma + A' - zk_1)^2 + (Ak_1 + z' - Bk_2)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + B')^2 \right]^{1/2},$$

$$\|T^*\| \left\| \frac{dt^*}{dt} \right\| = \left[ (\cos \sigma + A' - zk_1)^2 + (Ak_1 + z' - Bk_2)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + B')^2 \right]^{1/2},$$

$$\frac{dt^*}{dt} = \sqrt{(\cos \sigma + A' - zk_1)^2 + (Ak_1 + z' - Bk_2)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + B')^2}$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.4:**  $d$  – equidistante regle yüzeyler verilsin.  $T^*$  in Frenet vektörlerine bağlı ifadesi

$$T^* = (\cos \sigma + A' - zk_1) \frac{dt^*}{dt} V_1 + (Ak_1 + z' - Bk_2) \frac{dt^*}{dt} V_2 + (\sin \sigma + zk_2 + B') \frac{dt^*}{dt} V_3 \quad (4.2.17)$$

şeklinde olur. Burada  $A$  ve  $B$

$$A = p - b \sin \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta,$$

$$B = q - b \cos \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta.$$

**İspat:** (4.2.16) ifadesinden açıktır.



**Teorem 4.2.6:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerinin striksiyonları sırasıyla  $\sigma$  ve  $\sigma^*$  olsun. Bunlar arasında

$$\begin{aligned}\cos \sigma^* &= \left( \frac{\cos \sigma + \sin \sigma + A' + B' - z(k_1 - k_2)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \right) \frac{dt}{dt^*}, \\ \sin \sigma^* &= \left( \frac{\sin \sigma - \cos \sigma + B' - A' + z(k_1 + k_2)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \right) \frac{dt}{dt^*}\end{aligned}\tag{4.2.18}$$

bağıntısı vardır. Burada  $A$  ve  $B$

$$\begin{aligned}A &= p - b \sin \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta, \\ B &= q - b \cos \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta.\end{aligned}$$

**İspat:** (4.2.13) ifadesinde (4.2.2) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T^* = (\cos \sigma^* \cos \alpha - \sin \sigma^* \sin \alpha) V_1 + (\cos \sigma^* \sin \alpha + \sin \sigma^* \cos \alpha) V_3$$

bulunur. Bu ifade (4.2.17) ifadesi ile karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}\cos \sigma^* \cos \alpha - \sin \sigma^* \sin \alpha &= (\cos \sigma + A' - z k_1) \frac{dt}{dt^*}, \\ (A k_1 + z' - B k_2) \frac{dt}{dt^*} &= 0,\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

$$\cos \sigma^* \sin \alpha + \sin \sigma^* \cos \alpha = (\sin \sigma + z k_2 + B') \frac{dt}{dt^*}$$

olur. Birinci ve üçüncü eşitlikten

$$\cos \sigma^* \cos \alpha + \cos \sigma^* \sin \alpha = (\cos \sigma + A' - zk_1) \frac{dt}{dt^*} + (\sin \sigma + zk_2 + B') \frac{dt}{dt^*},$$

$$\cos \sigma^* (\cos \alpha + \sin \alpha) = (\cos \sigma + A' - zk_1 + \sin \sigma + zk_2 + B') \frac{dt}{dt^*},$$

$$\cos \sigma^* = \left( \frac{\cos \sigma + \sin \sigma + A' + B' - z(k_1 - k_2)}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right) \frac{dt}{dt^*},$$

$$\sin \sigma^* \sin \alpha + \sin \sigma^* \cos \alpha = (\sin \sigma + zk_2 + B') \frac{dt}{dt^*} - (\cos \sigma + A' - zk_1) \frac{dt}{dt^*},$$

$$\sin \sigma^* (\sin \alpha + \cos \alpha) = (\sin \sigma + zk_2 + B' - \cos \sigma - A' + zk_1) \frac{dt}{dt^*},$$

$$\sin \sigma^* = \left( \frac{\sin \sigma - \cos \sigma + B' - A' + z(k_1 + k_2)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \right) \frac{dt}{dt^*}$$

bulunur.

**Sonuç 4.2.5:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerin parametreleri arasında

$$\frac{dt^*}{dt} = \sqrt{(\cos \sigma + A' - zk_1)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + B')^2} \quad (4.2.20)$$

bağıntısı vardır. Burada  $A$  ve  $B$

$$A = p - b \sin \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta,$$

$$B = q - b \cos \theta - \left( (a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta.$$

**İspat:** (4.2.19) ifadesinden  $(Ak_1 + z' - Bk_2) \frac{dt}{dt^*} = 0$  olur. Buradan  $Ak_1 + z' - Bk_2 = 0$  bulunur. (4.2.15) den

$$\frac{dt^*}{dt} = \sqrt{(\cos \sigma + A' - zk_1)^2 + (\sin \sigma + zk_2 + B')^2}$$

elde edilir.

$\varphi_{C^*}(t, v)$  regle yüzeyi kapalı olsun. (2.2.7) ifadesinden  $V_1^*$ ,  $V_2^*$  ve  $V_3^*$  Frenet vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$\lambda_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} k_2^* dt^*, \quad \lambda_{V_2^*} = 0, \quad \lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} k_1^* dt^*, \quad (4.2.21)$$

$$L_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} dt^*, \quad L_{V_2^*} = L_{V_3^*} = 0, \quad (4.2.22)$$

$$P_{V_1^*} = 0, \quad P_{V_2^*} = \frac{k_2^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2}, \quad P_{V_3^*} = \frac{1}{k_2^*} \quad (4.2.23)$$

şeklinde olur.

**Teorem 4.2.7:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrilerine ait Frenet vektörleri tarafından çizilen regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\lambda_{V_1^*} = \cos \alpha \lambda_{V_1} + \sin \alpha \lambda_{V_3} + a_1, \quad \lambda_{V_2^*} = \lambda_{V_2} = 0, \quad (4.2.24)$$

$$\lambda_{V_3^*} = -\sin \alpha \lambda_{V_1} + \cos \alpha \lambda_{V_3} + a_2$$

bağıntıları vardır. Burada  $a_1$  ve  $a_2$

$$a_1 = \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt,$$

$$a_2 = \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt.$$

**İspat:**  $\lambda_{V_1^*}$  in (4.2.21) ifadesinde  $k_2^*$  yerine (4.2.3) deki karşılığı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt$$

bulunur.  $r^*$  yerine (4.2.8) deki ifadesi yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_{V_1^*} = \oint_{(r)} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt + \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt$$

olur.  $a_1 = \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt$  alınır ve gerekli ,

işlemler yapılırsa  $\lambda_{V_1^*} = \oint_{(r)} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt + a_1$  şeklinde bulunur. Buradan

$$\lambda_{V_1^*} = \sin \alpha \oint_{(r)} k_1 dt + \cos \alpha \oint_{(r)} k_2 dt + a_1 \text{ yazılır. (2.2.7) ifadesinden}$$

$$\lambda_{V_1^*} = \cos \alpha \lambda_{V_1} + \sin \alpha \lambda_{V_3} + a_1$$

bulunur. Benzer hesaplamalar  $\lambda_{V_3^*}$  ifadesi için de yapılırsa

$$\lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} k_1^* dt^*$$

$$\lambda_{V_3^*} = \oint_{(r^*)} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt,$$

$$\lambda_{V_3^*} = \oint_{(r)} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt + \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt$$

olur.  $a_2 = \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt$  denilir ve gerekli

düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_{V_3^*} = \oint_{(r)} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt + a_2 \Rightarrow \lambda_{V_3^*} = \cos \alpha \oint_{(r)} k_1 dt - \sin \alpha \oint_{(r)} k_2 dt + a_2,$$

$$\Rightarrow \lambda_{V_3^*} = -\sin \alpha \lambda_{V_1} + \cos \alpha \lambda_{V_3} + a_2$$

bulunur. (4.2.21) ve (2.2.7) ifadelerinden  $\lambda_{V_2^*} = \lambda_{V_2} = 0$  olur.

**Teorem 4.2.8:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri eğilim çizgisi alınırsa Frenet vektörleri tarafından çizilen regle yüzeylerin açılım uzunlukları arasında

$$L_{V_1^*} k_1^* = (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1 \text{ veya}$$

$$L_{V_1^*} k_2^* = (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1, \quad (4.2.25)$$

$$L_{V_2^*} = L_{V_2} = L_{V_3^*} = L_{V_3} = 0$$

bağıntıları vardır. Burada  $b_1 = \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} dt^*$ .

**İspat:**  $L_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} dt^*$  ifadesinde  $r^*$  in yerine (4.2.8) den karşılığı yazılır ve gerekli

düzenlemeler yapılırsa

$$L_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} dt^* = \oint_{(r)} dt^* + \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} dt^*$$

olur. Burada  $b_1 = \oint_{(((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3)} dt^*$  denilirse  $L_{V_1^*} = \oint_{(r^*)} dt^* = \oint_{(r)} dt^* + b_2$  elde

edilir. (4.2.3) ifadesinden  $dt^* = \frac{(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha)}{k_1^*} dt$  veya

$dt^* = \frac{(k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha)}{k_2^*} dt$  yazılır.  $dt^* = \frac{(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha)}{k_1^*} dt$  alınırsa  $L_{V_1^*}$  açılım

uzunluğu  $L_{V_1^*} = \oint_{(r)} \frac{(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha)}{k_1^*} dt + b_1$  olur.  $r$  eğrisi eğilim çizgisi alındığında

$$L_{V_1^*} = \frac{(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha)}{k_1^*} \oint_{(r)} dt + b_1 \text{ bulunur. Eşitlik (4.2.22) ifadesi ile birlikte}$$

düşünülürse  $L_{V_1^*} = \frac{(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha)}{k_1^*} L_{V_1} + b_1$  olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L_{V_1^*} k_1^* = (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1 \text{ bulunur. } dt^* = \frac{(k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha)}{k_2^*} dt \text{ alınır ve}$$

benzer işlemler yapılırsa  $L_{V_1^*} k_2^* = (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1$  elde edilir. (2.2.7) ve

(4.2.22) ifadelerinden  $L_{V_2^*} = L_{V_2} = L_{V_3^*} = L_{V_3} = 0$  olur ve istenilen elde edilmiş olunur.

**Teorem 4.2.9:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerin dayanak eğrilerine ait Frenet vektörleri tarafından çizilen regle yüzeylerin dağılma parametreleri arasında

$$P_{V_1^*} = P_{V_1} = 0, \quad P_{V_2^*} = \left( P_{V_2} \cos \alpha + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \sin \alpha \right) \frac{dt^*}{dt}, \quad P_{V_3^*} = \left( \frac{P_{V_3}}{P_{V_3} k_1 \sin \alpha + \cos \alpha} \right) \frac{dt^*}{dt}$$

(4.2.26)

bağıntısı vardır.

**İspat:**  $P_{V_2^*}$  ın (4.2.23) ifadesinde  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  eğriliklerinin yerine (4.2.3) de ki ifadeleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
P_{V_2^*} &= \frac{k_2^*}{(k_1^*)^2 + (k_2^*)^2} \Rightarrow P_{V_2^*} = \frac{(k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) \frac{dt}{dt^*}}{(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha)^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 + (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha)^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2} \\
&\Rightarrow P_{V_2^*} = \frac{(k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha)}{(k_1^2 + k_2^2) \frac{dt}{dt^*}} \\
&\Rightarrow P_{V_2^*} = \frac{(k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha)}{(k_1^2 + k_2^2)} \cdot \frac{dt^*}{dt} \\
&\Rightarrow P_{V_2^*} = \left( \frac{k_1}{(k_1^2 + k_2^2)} \sin \alpha + \frac{k_2}{(k_1^2 + k_2^2)} \cos \alpha \right) \frac{dt^*}{dt} \\
&\Rightarrow P_{V_2^*} = \left( P_{V_2} \cos \alpha + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \sin \alpha \right) \frac{dt^*}{dt}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $P_{V_3^*}$  m (4.2.23) ifadesinde  $k_2^*$  m yerine (4.2.3) bağıntısından karşılığı yazılırsa

$$\frac{1}{P_{V_3^*}} = (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) \frac{dt}{dt^*} \text{ olur. } k_2 = \frac{1}{P_{V_3}} \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_{V_3^*}} &= \left( k_1 \sin \alpha + \frac{1}{P_{V_3}} \cos \alpha \right) \frac{dt}{dt^*} \Rightarrow \frac{1}{P_{V_3^*}} = \left( \frac{P_{V_3} k_1 \sin \alpha + \cos \alpha}{P_{V_3}} \right) \frac{dt}{dt^*}, \\
&\Rightarrow P_{V_3^*} = \left( \frac{P_{V_3}}{P_{V_3} k_1 \sin \alpha + \cos \alpha} \right) \frac{dt^*}{dt}
\end{aligned}$$

bulunur. (2.2.7) ve (4.2.23) ifadeleri dikkate alındığında  $P_{V_1^*} = P_{V_1} = 0$  olur.

$\varphi_C(t, v)$  kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrisine ait  $C$  birim Darboux vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı ve açılım uzunluğu sırasıyla  $\lambda_C$  ve  $L_C$  olsun. (2.1.7), (2.2.6) ve (2.2.8) ifadelerinden açılım açısı ve açılım uzunlukları arasında

$$\begin{aligned}\lambda_C = \langle D, C \rangle &\Rightarrow \lambda_C = \langle \lambda_{V_1} V_1 + \lambda_{V_3} V_3, \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3 \rangle \\ &\Rightarrow \lambda_C = \lambda_{V_1} \sin \theta + \lambda_{V_3} \cos \theta\end{aligned}\quad (4.2.27)$$

ve

$$\begin{aligned}L_C = \langle V, C \rangle &\Rightarrow L_C = \langle L_{V_1} V_1, \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3 \rangle \\ &\Rightarrow L_C = L_{V_1} \sin \theta\end{aligned}\quad (4.2.28)$$

bağıntıları vardır.  $C$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin dralı  $P_C$  ile gösterilirse (2.2.5) ifadesinden

$$\begin{aligned}P_C = \frac{\det(r', C, C')}{\|C'\|^2} &\Rightarrow P_C = \frac{\det\left(V_1, \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3, \cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3\right)}{\left\|\cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3\right\|^2} \\ &\Rightarrow P_C = 0\end{aligned}\quad (4.2.29)$$

bulunur. Aynı işlemler  $\varphi_{C^*}(t, v)$  kapalı regle yüzeyi için de yapılırsa  $C^*$  birim Darboux vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı sırasıyla

$$\lambda_{C^*} = \lambda_{V_1^*} \sin \theta^* + \lambda_{V_3^*} \cos \theta^*, \quad (4.2.30)$$

$$L_{C^*} = L_{V_1^*} \sin \theta^*, \quad (4.2.31)$$

$$P_{C^*} = 0 \quad (4.2.32)$$

şeklinde bulunur.



**Teorem 4.2.10:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzeyler,  $r^*$  dayanak eğrisine ait birim Darboux vektörü tarafından çizilen regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dağılma parametresi sırasıyla

$$\lambda_{C^*} = \lambda_C + a_3, \quad P_{C^*} = P_C = 0,$$

$$L_{C^*} k_1^* = \sin(\theta + \alpha)(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1 \quad \text{veya} \quad (4.2.33)$$

$$L_{C^*} k_2^* = \sin(\theta + \alpha)(k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1$$

bağıntılarıyla verilir. Burada  $a_3$  ve  $b_1$  değerleri

$$a_3 = a_1 \sin(\alpha + \theta) + a_2 \cos(\alpha + \theta), \quad b_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} dt^*$$

şeklindedir.

**İspat:** (4.2.30) ifadesinde (4.2.24) ve  $\theta^* = \theta + \alpha$  yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\lambda_{C^*} = \sin(\theta + \alpha) \lambda_{V_1^*} + \cos(\theta + \alpha) \lambda_{V_3^*},$$

$$\lambda_{C^*} = \sin(\theta + \alpha)(\cos \alpha \lambda_{V_1} + \sin \alpha \lambda_{V_3} + a_1) + \cos(\theta + \alpha)(-\sin \alpha \lambda_{V_1} + \cos \alpha \lambda_{V_3} + a_2),$$

$$\begin{aligned} \lambda_{C^*} &= (\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta)(\cos \alpha \lambda_{V_1} + \sin \alpha \lambda_{V_3} + a_1) \\ &+ (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha)(-\sin \alpha \lambda_{V_1} + \cos \alpha \lambda_{V_3} + a_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{C^*} &= \sin \theta \cos \alpha \cos \alpha \lambda_{V_1} - \sin \theta \cos \alpha \sin \alpha \lambda_{V_3} + \sin \theta \cos \alpha a_1 \\ &+ \sin \alpha \cos \theta \cos \alpha \lambda_{V_1} + \sin \alpha \cos \theta \sin \alpha \lambda_{V_3} + \sin \alpha \cos \theta a_1 \\ &- \cos \theta \cos \alpha \sin \alpha \lambda_{V_1} + \cos \theta \cos \alpha \cos \alpha \lambda_{V_3} + \cos \theta \cos \alpha a_2 \\ &+ \sin \theta \sin \alpha \sin \alpha \lambda_{V_1} - \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha \lambda_{V_3} - \sin \theta \sin \alpha a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{C^*} &= \sin \theta \cos^2 \alpha \lambda_{V_1} + \cos \theta \sin^2 \alpha \lambda_{V_3} + \cos \theta \cos^2 \alpha \lambda_{V_3} + \sin \theta \sin^2 \alpha \lambda_{V_1} \\ &+ \sin \theta \cos \alpha a_1 + \sin \alpha \cos \theta a_1 + \cos \theta \cos \alpha a_2 - \sin \theta \sin \alpha a_2, \end{aligned}$$

$$\lambda_{C^*} = \sin \theta \lambda_{V_1} + \cos \theta \lambda_{V_3} + a_1 \sin \theta \cos \alpha + a_1 \sin \alpha \cos \theta + a_2 \cos \theta \cos \alpha - a_2 \sin \theta \sin \alpha,$$

$$\lambda_{C^*} = \sin \theta \lambda_{V_1} + \cos \theta \lambda_{V_3} + a_1 (\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta) + a_2 (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha),$$

$$\lambda_{C^*} = \sin \theta \lambda_{V_1} + \cos \theta \lambda_{V_3} + a_1 \sin(\alpha + \theta) + a_2 \cos(\alpha + \theta)$$

olur. Burada  $a_3 = a_1 \sin(\alpha + \theta) + a_2 \cos(\alpha + \theta)$  alınır ve (4.2.27) ifadesinden

$$\lambda_{C^*} = \lambda_C + a_3$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.31) ifadesinde (4.2.25) ve  $\theta^* = \theta + \alpha$  yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$L_{C^*} k_1^* = \sin(\theta + \alpha)(k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1$$

veya

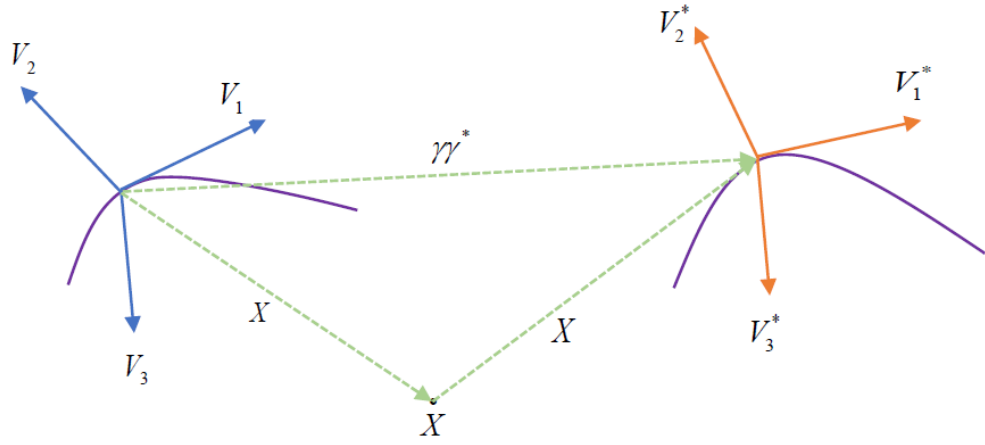
$$L_{C^*} k_2^* = \sin(\theta + \alpha)(k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1$$

şeklinde bulunur. (4.2.29) ve (4.2.32) ifadelerinden  $P_{C^*} = P_C = 0$  olur.

**Teorem 4.2.11:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerinin dayanak eğrisinin Frenet çatılarına bağlı hareket eden birim vektörler  $X = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$  ve  $X^* = x_1^* V_1^* + x_2^* V_2^* + x_3^* V_3^*$  olsun. Bu durumda  $X^*$  vektörü

$$X^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) V_1^* + (x_2 - z) V_2^* + (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha) V_3^*. \quad (4.2.34)$$

**İspat:**



**Şekil 4.2.5**  $X, X^*$  vektörü

(4.2.4) ifadesi ve Şekil 4.2.5 den  $X^*$  vektörü

$$\begin{aligned} X^* &= X - \gamma^* \Rightarrow X^* = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 - (pV_1 + zV_2 + qV_3) \\ &\Rightarrow X^* = (x_1 - p)V_1 + (x_2 - z)V_2 + (x_3 - q)V_3 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (4.2.2) bağıntısı burada yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X^* = (x_1 - p)(\cos \alpha V_1^* - \sin \alpha V_3^*) + (x_2 - z)V_2^* + (x_3 - q)(\sin \alpha V_1^* + \cos \alpha V_3^*),$$

$$X^* = ((x_1 - p)\cos \alpha + (x_3 - q)\sin \alpha)V_1^* + (x_2 - z)V_2^* + (-(x_1 - p)\sin \alpha + (x_3 - q)\cos \alpha)V_3^*$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.12:**  $\varphi_c(t, v)$  kapalı regle yüzeyinin dayanak eğrilerinin Frenet çatısına bağlı hareket eden  $X$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı, açılım uzunluğu ve dralı

$$\lambda_X = x_1\lambda_{V_1} + x_3\lambda_{V_3}, \quad L_X = x_1L_{V_1}, \quad (4.2.35)$$

$$P_X = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_1^2 + x_2^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:** (2.2.6) ve (2.2.8) ifadelerinden  $\lambda_X = x_1\lambda_{V_1} + x_3\lambda_{V_3}$  ve  $L_X = x_1L_{V_1}$  yazılır. (2.2.5) ifadesinden  $P_X$  dralı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} X &= x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 \Rightarrow X' = x_1V_1' + x_2V_2' + x_3V_3' \\ &\Rightarrow X' = x_1k_1V_2 + x_2(-k_1V_1 + k_2V_3) + x_3(-k_1V_2) \\ &\Rightarrow X' = -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X'\|^2 &= (-x_2k_1)^2 + (x_1k_1 - x_3k_2)^2 + (x_2k_2)^2 \Rightarrow \|X'\|^2 = x_2^2k_1^2 + x_1^2k_1^2 + x_3^2k_2^2 - 2x_1k_1x_3k_2 + x_2^2k_2^2 \\ &\Rightarrow \|X'\|^2 = k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2 \end{aligned}$$

olur. Bu değerler dral tanımında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} P_X &= \frac{\det(r', X, X')}{\|X'\|^2} \Rightarrow P_X = \frac{\det(V_1, x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3, -x_2k_1V_1 + (x_1k_1 - x_3k_2)V_2 + x_2k_2V_3)}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2} \\ &\Rightarrow P_X = \frac{x_2^2k_2 - x_3x_1k_1 + x_3^2k_2}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2} \\ &\Rightarrow P_X = \frac{k_2(x_2^2 + x_3^2) - x_1x_3k_1}{k_1^2(x_2^2 + x_1^2) + k_2^2(x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_3k_1k_2} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.13:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $\varphi_{C^*}(t, v)$  yüzeyine ait dayanak eğrisinin Frenet çatısına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım açısı

$$\begin{aligned} \lambda_{X^*} = & (x_1 - p)\lambda_{V_1} + (x_3 - q)\lambda_{V_3} + (x_1 - p)(a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha) \\ & + (x_3 - q)(a_1 \sin \alpha - a_2 \cos \alpha) \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $a_1$  ve  $a_2$  eşitlikleri

$$a_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt,$$

$$a_2 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt.$$

**İspat:** (2.2.6) ifadesinde (2.2.8) ve (4.2.34) yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lambda_{X^*} = \langle D^*, X^* \rangle,$$

$$\lambda_{X^*} = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) \lambda_{V_1^*} + (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha) \lambda_{V_3^*}$$

olur. Burada (4.2.24) yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\lambda_{X^*} &= ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (\cos \alpha \lambda_{V_1} + \sin \alpha \lambda_{V_3} + a_1) \\ &\quad + (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha) (-\sin \alpha \lambda_{V_1} + \cos \alpha \lambda_{V_3} + a_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{X^*} &= (x_1 - p) \cos^2 \alpha \lambda_{V_1} + (x_1 - p) \cos \alpha \sin \alpha \lambda_{V_3} + (x_1 - p) \cos \alpha a_1 \\ &\quad + (x_3 - q) \sin \alpha \cos \alpha \lambda_{V_1} + (x_3 - q) \sin^2 \alpha \lambda_{V_3} + (x_3 - q) \sin \alpha a_1 \\ &\quad + (x_1 - p) \sin^2 \alpha \lambda_{V_1} - (x_1 - p) \sin \alpha \cos \alpha \lambda_{V_3} - (x_1 - p) \sin \alpha a_2 \\ &\quad - (x_3 - q) \cos \alpha \sin \alpha \lambda_{V_1} + (x_3 - q) \cos^2 \alpha \lambda_{V_3} - (x_3 - q) \cos \alpha a_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{X^*} &= (x_1 - p) \lambda_{V_1} + (x_3 - q) \lambda_{V_3} + (x_1 - p) (a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha) \\ &\quad + (x_3 - q) (a_1 \sin \alpha - a_2 \cos \alpha).\end{aligned}$$

**Teorem 4.2.14:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $\varphi_{C^*}(t, v)$  yüzeyine ait dayanak eğrisinin Frenet çatısına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$L_{X^*} k_1^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1$$

veya (4.2.37)

$$L_{X^*} k_2^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $b_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} dt^*$ .

**İspat:** (2.2.6) ifadesinde (2.2.8) ve (4.2.34) yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$L_{X^*} = \langle V^*, X^* \rangle,$$

$$L_{X^*} = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) L_{V_1}^*$$

bulunur. Burada  $L_{V_1}^*$  yerine (4.2.25) deki değeri yazılırsa

$$L_{X^*} k_1^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1$$

veya

$$L_{X^*} k_2^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.15:**  $d$  – equidistante regle yüzey olsun.  $\varphi_{C^*}(t, v)$  yüzeyine ait dayanak eğrisinin Frenet çatısına bağlı hareket eden  $X^*$  vektörünün çizdiği regle yüzeyin dağılma parametresi

$$P_{X^*} = \frac{C_d (x_2 - z) - B_d (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha)}{A_d^2 + B_d^2 + C_d^2} \quad (4.2.38)$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $A_d$ ,  $B_d$  ve  $C_d$

$$A_d = \sin \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( (x_3 - q) - p' - k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_d = z' + (x_1 - p) k_1 \frac{dt}{dt^*} - (x_3 - q) k_2 \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_d = \sin \alpha \left( -(x_3 - q) + p' + k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right).$$

**İspat:** (4.2.34) ifadesinin türevi alınır ve  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  in yerine (4.2.3) de ki karşılıkları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (X^*)' &= ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha)' V_1^* + ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (V_1^*)' \\ &\quad + (x_2 - z)' V_2^* + (x_2 - z) (V_2^*)' \\ &\quad + (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha)' V_3^* + (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha) (V_3^*)', \\ (X^*)' &= \left[ ((x_1 - p) \cos \alpha)' + ((x_3 - q) \sin \alpha)' \right] V_1^* + \left[ (x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha \right] (k_1^* V_2^*) \\ &\quad + (x_2 - z)' V_2^* + (x_2 - z) (-k_1^* V_1^* + k_2^* V_3^*) \\ &\quad + \left[ -((x_1 - p) \sin \alpha)' + ((x_3 - q) \cos \alpha)' \right] V_3^* + \left[ -(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha \right] (-k_2^* V_2^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X^*)' &= \left[ -p' \cos \alpha - (x_1 - p) \sin \alpha - q' \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha - (x_2 - z) k_1^* \right] V_1^* \\
&+ \left[ (x_1 - p) \cos \alpha k_1^* + (x_3 - q) \sin \alpha k_1^* + (x_1 - p) \sin \alpha k_2^* - (x_3 - q) \cos \alpha k_2^* - z' \right] V_2^* \\
&+ \left[ p' \sin \alpha - (x_1 - p) \cos \alpha - q' \cos \alpha - (x_3 - q) \sin \alpha + (x_2 - z) k_2^* \right] V_3^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X^*)' &= \left[ -(x_1 - p) - q' \right] \sin \alpha + \left[ (x_3 - q) - p' \right] \cos \alpha - (x_2 - z) k_1^* \Big] V_1^* \\
&+ \left[ (x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha \right] k_1^* + \left[ (x_1 - p) \sin \alpha - (x_3 - q) \cos \alpha \right] k_2^* - z' \Big] V_2^* \\
&+ \left[ -(x_3 - q) + p' \right] \sin \alpha + \left[ -(x_1 - p) - q' \right] \cos \alpha + (x_2 - z) k_2^* \Big] V_3^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X^*)' &= \left[ \sin \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( (x_3 - q) - p' - k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) \right] V_1^* \\
&+ \left[ z' + (x_1 - p) k_1 \frac{dt}{dt^*} - (x_3 - q) k_2 \frac{dt}{dt^*} \right] V_2^* \\
&+ \left[ \sin \alpha \left( -(x_3 - q) + p' + k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) \right] V_3^*
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yazma kolaylığından

$$A_d = \sin \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( (x_3 - q) - p' - k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_d = z' + (x_1 - p) k_1 \frac{dt}{dt^*} - (x_3 - q) k_2 \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_d = \sin \alpha \left( -(x_3 - q) + p' + k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right)$$

alınırsa  $(X^*)' = A_d V_1^* + B_d V_2^* + C_d V_3^*$  ve  $\left\| (X^*)' \right\|^2 = A_d^2 + B_d^2 + C_d^2$  olur. Bulunan bu ifadeler (2.2.5) de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa  $P_{X^*}$  dralı



$$P_{X^*} = \frac{\det\left(\left(r^*\right)', X^*, \left(X^*\right)'\right)}{\left\|\left(X^*\right)'\right\|^2} \Rightarrow P_{X^*} = \frac{\det\left(V_1^*, X^*, \left(X^*\right)'\right)}{\left\|\left(X^*\right)'\right\|^2}$$

$$\Rightarrow P_{X^*} = \frac{C_d(x_2 - z) - B_d\left(-\left(x_1 - p\right)\sin\alpha + \left(x_3 - q\right)\cos\alpha\right)}{A_d^2 + B_d^2 + C_d^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Teorem 4.2.16:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü oskültör düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörleri ve çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_1V_1 + x_2V_2, \quad \lambda_X = x_1\lambda_{V_1}, \quad L_X = x_1L_{V_1}, \quad P_X = \frac{k_2x_2^2}{k_1^2(x_1^2 + x_2^2) + k_2^2x_2^2},$$

$$X^* = \left((x_1 - p)\cos\alpha - q\sin\alpha\right)V_1^* + (x_2 - z)V_2^* + \left(-\left(x_1 - p\right)\sin\alpha - q\cos\alpha\right)V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = (x_1 - p)\lambda_{V_1} - q\lambda_{V_3} + (x_1 - p)(a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha) - q(a_1\sin\alpha - a_2\cos\alpha),$$

$$L_{X^*}k_1^* = \left((x_1 - p)\cos\alpha - q\sin\alpha\right)(k_1\cos\alpha - k_2\sin\alpha)L_{V_1} + k_1^*b_1 \quad \text{veya}$$

$$L_{X^*}k_2^* = \left((x_1 - p)\cos\alpha - q\sin\alpha\right)(k_1\sin\alpha + k_2\cos\alpha)L_{V_1} + k_2^*b_1,$$

$$P_{X^*} = \frac{C_d(x_2 - z) - B_d\left(-\left(x_1 - p\right)\sin\alpha - q\cos\alpha\right)}{A_d^2 + B_d^2 + C_d^2} \quad (4.2.39)$$

Burada;

$$a_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt,$$

$$a_2 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt, \quad b_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} dt^*,$$

$$A_d = \sin \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( -q - p' - k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_d = z' + (x_1 - p) k_1 \frac{dt}{dt^*} + q k_2 \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_d = \sin \alpha \left( q + p' + k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right).$$

**İspat:**  $X$  oskülätör düzleminde olduğundan ve (4.2.34), (4.2.35), (4.2.36), (4.2.37), (4.2.38) bağıntılarından istenilen bulunur.

**Teorem 4.2.17:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü normal düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörleri ve çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_2 V_2 + x_3 V_3, \quad \lambda_X = x_3 \lambda_{V_3}, \quad L_X = 0, \quad P_X = \frac{k_2 (x_2^2 + x_3^2)}{k_1^2 x_2^2 + k_2^2 (x_2^2 + x_3^2)},$$

$$X^* = (-p \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) V_1^* + (x_2 - z) V_2^* + (p \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha) V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = -p \lambda_{V_1} + (x_3 - q) \lambda_{V_3} - p (a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha) + (x_3 - q) (a_1 \sin \alpha - a_2 \cos \alpha),$$

$$L_{X^*} k_1^* = (-p \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1 \quad \text{veya}$$

$$L_{X^*} k_2^* = (-p \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1,$$

$$P_{X^*} = \frac{C_d (x_2 - z) - B_d (p \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha)}{A_d^2 + B_d^2 + C_d^2}, \quad (4.2.40)$$

Burada;

$$a_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt,$$

$$a_2 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt, \quad b_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} dt^*,$$

$$A_d = \sin \alpha \left( p - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( (x_3 - q) - p' - k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_d = z' - pk_1 \frac{dt}{dt^*} - (x_3 - q) k_2 \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_d = \sin \alpha \left( -(x_3 - q) + p' + k_1 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( p - q' + k_2 (x_2 - z) \frac{dt}{dt^*} \right).$$

**İspat:**  $X$  normal düzleminde olduğundan ve (4.2.34), (4.2.35), (4.2.36), (4.2.37), (4.2.38) bağıntılarından istenilen bulunur.

**Teorem 4.2.18:**  $d$  – equidistante kapalı regle yüzey olsun.  $X$  vektörü rektifyan düzleminde ise  $X$  ve  $X^*$  vektörleri ve çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları, açılım uzunlukları ve dağılma parametreleri sırasıyla

$$X = x_1 V_1 + x_3 V_3, \quad \lambda_X = x_1 \lambda_{V_1} + x_3 \lambda_{V_3}, \quad L_X = x_1 L_{V_1}, \quad P_X = \frac{k_2 x_3^2 - x_1 x_3 k_1}{(k_1 x_1 - k_2 x_2)^2},$$

$$X^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) V_1^* - z V_2^* + (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha) V_3^*,$$

$$\lambda_{X^*} = (x_1 - p) \lambda_{V_1} + (x_3 - q) \lambda_{V_3} + (x_1 - p)(a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha) + (x_3 - q)(a_1 \sin \alpha - a_2 \cos \alpha),$$

$$L_{X^*} k_1^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) L_{V_1} + k_1^* b_1 \quad \text{veya}$$

$$L_{X^*} k_2^* = ((x_1 - p) \cos \alpha + (x_3 - q) \sin \alpha) (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) L_{V_1} + k_2^* b_1,$$

$$P_{X^*} = \frac{-C_d z - B_d (-(x_1 - p) \sin \alpha + (x_3 - q) \cos \alpha)}{A_d^2 + B_d^2 + C_d^2}, \quad (4.2.41)$$

Burada;

$$a_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) dt,$$

$$a_2 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) dt, \quad b_1 = \oint_{((a-b)\sin\theta+p)V_1+zV_2+((a-b)\cos\theta+q)V_3} dt^*,$$

$$A_d = \sin \alpha \left( -(x_1 - p) - q' - k_2 z \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( (x_3 - q) - p' + k_1 z \frac{dt}{dt^*} \right),$$

$$B_d = z' + (x_1 - p) k_1 \frac{dt}{dt^*} - (x_3 - q) k_2 \frac{dt}{dt^*},$$

$$C_d = \sin \alpha \left( -(x_3 - q) + p' - k_1 z \frac{dt}{dt^*} \right) + \cos \alpha \left( -(x_1 - p) - q' + k_2 z \frac{dt}{dt^*} \right).$$

**İspat:**  $X$  rektifyan düzleminde olduğundan ve (4.2.34), (4.2.35), (4.2.36), (4.2.37), (4.2.38) bağıntılarından istenilen bulunur.

### 4.3 $p, z, q$ ve $d$ – Equidistante Regle Yüzeylerinin Weingarten Dönüşümünün Matrisi, Gauss (Total) ve Ortalama Eğriliği

Bu bölümde  $p, z, q$  ve  $d$  – equidistante regle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisleri ve herhangi bir  $P$  noktasında Gauss (Total) ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır.

**Teorem 4.3.1:**  $p$  – equidistante regle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisi ve yüzeyin herhangi bir  $P$  noktasında Gauss (Total) ve ortalama eğriliği arasında

$$S_{V_1} = \begin{bmatrix} \frac{v^2 k_1^2 k_2}{(1+v^2 k_1^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{V_1^*} = \begin{bmatrix} \frac{v k_1^2 k_2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3}{\left(1+v k_1^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{V_1}(P) = 0, \quad K_{V_1^*}(P) = 0, \quad (4.3.1)$$

$$H_{V_1}(P) = \frac{v^2 k_1^2 k_2}{(1+v^2 k_1^2)^{3/2}}, \quad H_{V_1^*}(P) = \frac{v^2 k_1^2 k_2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3}{\left(1+v^2 k_1^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^{3/2}}$$

bağıntıları mevcuttur.

**İspat:**  $\varphi_{V_1}(t, v) = r(t) + vV_1(t)$ ,  $\varphi_{V_1^*}(t, v) = r^*(t) + vV_1^*(t)$  yüzeylerinin  $t$  ve  $v$  ye göre türevleri alınırsa

$$\varphi_{V_1}(t, v)_t = V_1 + vk_1 V_2, \quad \varphi_{V_1}(t, v)_v = V_1,$$

$$\varphi_{V_1}(t, v)_{tt} = (-vk_1^2)V_1 + (v + vk_1)V_2 + (vk_1 k_2)V_3,$$

$$\varphi_{V_1}(t, v)_{vt} = \varphi_{V_2}(t, v)_{tv} = k_1 V_2, \quad \varphi_{V_1}(t, v)_{vv} = 0,$$

$$\|\varphi_{V_1}(t, v)_t\| = (1+v^2 k_1^2)^{1/2}, \quad \|\varphi_{V_1}(t, v)_v\| = 1$$

olur ve

$$\det(\varphi_{V_1}(t, v)_{tt}, \varphi_{V_1}(t, v)_t, \varphi_{V_1}(t, v)_v) = -v^2 k_1^2 k_2,$$

$$\det(\varphi_{V_1}(t, v)_{tv}, \varphi_{V_1}(t, v)_t, \varphi_{V_1}(t, v)_v) = 0,$$

$$\det(\varphi_{V_1}(t, v)_{vv}, \varphi_{V_1}(t, v)_t, \varphi_{V_1}(t, v)_v) = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler (2.2.1) ifadesinde yerine yazılırsa weingarten dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$S_{V_1} = \begin{bmatrix} \frac{v^2 k_1^2 k_2}{(1 + v^2 k_1^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. (2.2.2) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilik

$$K_{V_1}(P) = 0, \quad H_{V_1}(P) = \frac{v^2 k_1^2 k_2}{(1 + v^2 k_1^2)^{3/2}}$$

şeklinde bulunur. Benzer yöntemle  $\varphi_{V_1^*}(t, v)$  regle yüzeyinin weingarten dönüşümünün matrisi

$$S_{V_1^*} = \begin{bmatrix} \frac{v^2 (k_1^*)^2 k_2^*}{(1 + v^2 (k_1^*)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  yerine (3.1.3) ifadeleri yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa matris

$$S_{V_1^*} = \begin{bmatrix} \frac{vk_1^2 k_2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3}{\left(1 + vk_1^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. (2.2.2) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilik

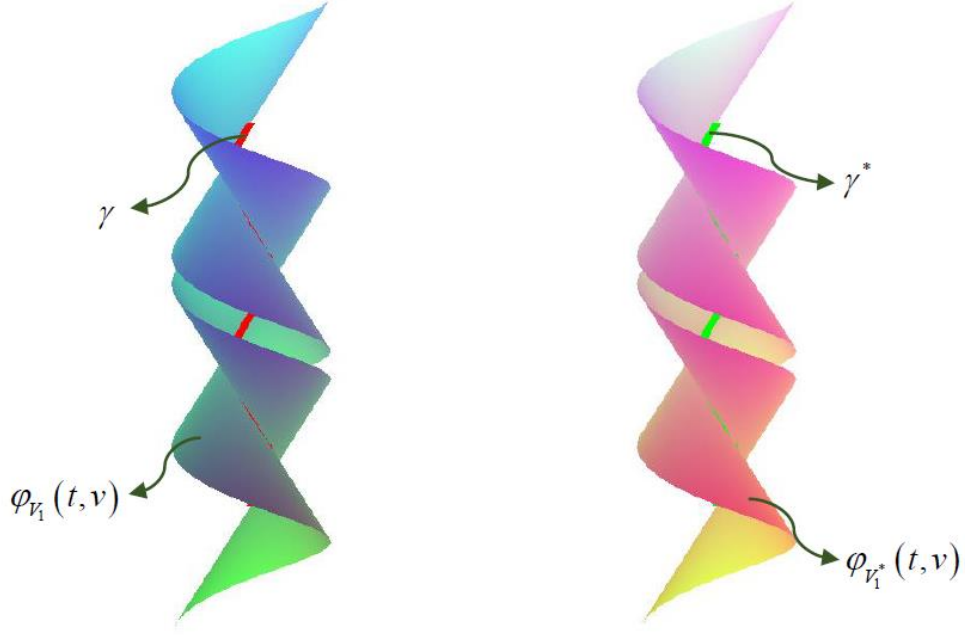
$$K_{V_1^*}(P) = 0, \quad H_{V_1^*}(P) = \frac{v^2 k_1^2 k_2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3}{\left(1 + v^2 k_1^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^{3/2}}$$

bulunur.

**Örnek 4.3.1:**  $\varphi_{V_1}(t, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + v \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  ve

$$\varphi_{V_1^*}(t, v) = \left(12\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + v \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

regle yüzeyleri  $p$ -equidistante regle yüzeyleridir (Şekil 4.3.1). Örnek 4.1.1 de ki yöntem izlenerek gösterilebilir.



Şekil 4.3.1  $p$ -equidistante regle yüzeyler

**Teorem 4.3.2:**  $z$ -equidistante regle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisi ve yüzeyin herhangi bir  $P$  noktasında Gauss (Total) ve ortalama eğriliği arasında

$$S_{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k_2}{(1-vk_1)^2 + (vk_2)^2} \\ \frac{-k_2}{(1-vk_1)^2 + (vk_2)^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{V_2}(P) = \frac{-k_2^2}{\left((1-vk_1)^2 + (vk_2)^2\right)^2}, \quad H_{V_2}(P) = 0,$$

$$S_{V_2^*} = \frac{-(k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}}{\left(1 - v(k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2 + \left(v(k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{V_2^*}(P) = \frac{-\left((k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2}{\left(\left(1 - v(k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2 + \left(v(k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^2}, \quad H_{V_2^*}(P) = 0$$

(4.3.2)



bağıntıları mevcuttur.

**İspat:**  $\varphi_{V_2}(t, v) = r(t) + vV_2(t)$ ,  $\varphi_{V_2^*}(t, v) = r^*(t) + vV_2^*(t)$  yüzeylerinin  $t$  ve  $v$  ye göre türevleri alınırsa

$$\varphi_{V_2}(t, v)_t = (1 - vk_1)V_1 + vk_2V_3, \quad \varphi_{V_2}(t, v)_v = V_2,$$

$$\varphi_{V_2}(t, v)_{tt} = (k_1 - v(k_1^2 + k_2^2))V_2,$$

$$\varphi_{V_2}(t, v)_{tv} = \varphi_{V_2}(t, v)_{vt} = -k_1V_1 + k_2V_3, \quad \varphi_{V_2}(t, v)_{vv} = 0,$$

$$\|\varphi_{V_2}(t, v)_t\| = \left( (1 - vk_1)^2 + (vk_2)^2 \right)^{1/2}, \quad \|\varphi_{V_2}(t, v)_v\| = 1$$

olur ve

$$\det(\varphi_{V_2}(t, v)_{tt}, \varphi_{V_2}(t, v)_t, \varphi_{V_2}(t, v)_v) = 0,$$

$$\det(\varphi_{V_2}(t, v)_{tv}, \varphi_{V_2}(t, v)_t, \varphi_{V_2}(t, v)_v) = k_2,$$

$$\det(\varphi_{V_2}(t, v)_{vv}, \varphi_{V_2}(t, v)_t, \varphi_{V_2}(t, v)_v) = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler (2.2.1) ifadesinde yerine yazılırsa weingarten dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$S_{V_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k_2}{(1 - vk_1)^2 + (vk_2)^2} \\ \frac{-k_2}{(1 - vk_1)^2 + (vk_2)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. (2.2.2) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilik

$$K_{V_2}(P) = \frac{-k_2^2}{\left( (1 - vk_1)^2 + (vk_2)^2 \right)^2}, \quad H_{V_2}(P) = 0$$

şeklinde bulunur. Benzer yöntemle  $\varphi_{V_2^*}(t, v)$  regle yüzeyinin weingarten dönüşümünün matrisi

$$S_{V_2^*} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k_2^*}{(1-vk_1^*)^2 + (vk_2^*)^2} \\ \frac{-k_2^*}{(1-vk_1^*)^2 + (vk_2^*)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  yerine (3.2.3) ifadeleri yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa matris

$$S_{V_2^*} = \frac{-(k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}}{\left(1 - v(k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2 + \left(v(k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

olur. (2.2.2) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilik

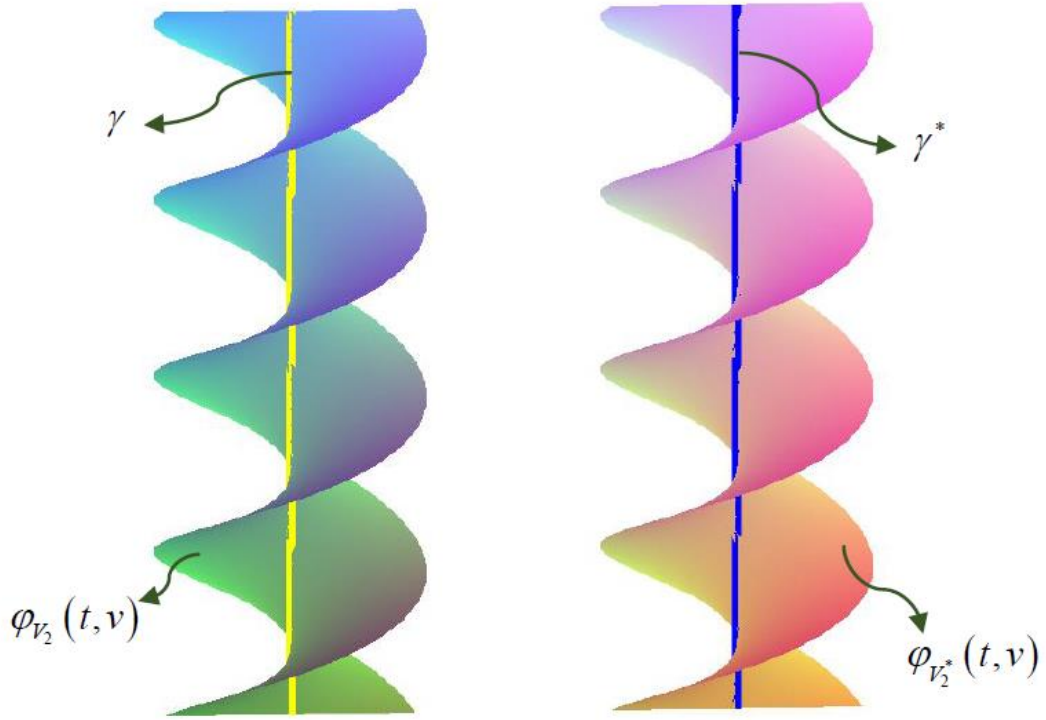
$$K_{V_2^*}(P) = \frac{-\left((k_1 \cdot \sin \phi + k_2 \cdot \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2}{\left(\left(1 - v(k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2 + \left(v(k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^2}, \quad H_{V_2^*}(P) = 0$$

bulunur.

**Örnek 4.3.2:**  $\varphi_{V_2}(t, v) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + v(\cos t, \sin t, 0)$  ve

$$\varphi_{V_2^*}(t, v) = \left(10\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + v(-\cos t, -\sin t, 0)$$

regle yüzeyleri  $z$  – equidistante regle yüzeyleridir (Şekil 4.3.2). Böyle Örnek 4.1.1 de ki yöntem izlenerek gösterilebilir.



**Şekil 4.3.2**  $z$ -equidistante regle yüzeyler

**Teorem 4.3.3:**  $q$ -equidistante regle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisi ve yüzeyin herhangi bir  $P$  noktasında Gauss (Total) ve ortalama eğriliği arasında

$$S_{V_3} = \begin{bmatrix} \frac{k_1(1+v^2k_2^2)}{(1+v^2k_2^2)^{3/2}} & -\frac{k_2}{(1+v^2k_2^2)} \\ -\frac{k_2}{(1+v^2k_2^2)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{V_3}(P) = \frac{k_2^2}{(1+v^2k_2^2)^2}, \quad H_{V_3}(P) = \frac{k_1(1+v^2k_2^2)}{(1+v^2k_2^2)^{3/2}},$$

$$S_{V_3^*} = \begin{bmatrix} \frac{(k_1-1)\frac{dt}{dt^*} + (k_1-1)k_2^2v^2 \cos\phi \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3}{\left(1+v^2\left(k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^{3/2}} & -\frac{k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}}{\left(1+v^2\left(k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)} \\ -\frac{k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}}{\left(1+v^2\left(k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)} & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{V_3^*}(P) = -\left(\frac{k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}}{\left(1+v^2\left(k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)}\right)^2,$$

$$H_{V_3^*}(P) = \frac{(k_1-1)\frac{dt}{dt^*} + (k_1-1)k_2^2v^2 \cos\phi \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3}{\left(1+v^2\left(k_2 \cos\phi \frac{dt}{dt^*}\right)^2\right)^{3/2}}$$

(4.3.3)

bağıntıları mevcuttur.

**İspat:**  $\varphi_{V_3}(t, v) = r(t) + vV_3(t)$ ,  $\varphi_{V_3^*}(t, v) = r^*(t) + vV_3^*(t)$  yüzeylerinin  $t$  ve  $v$  ye göre türevleri alınırsa

$$\varphi_{V_3}(t, v)_t = V_1 - vk_2V_2, \quad \varphi_{V_3}(t, v)_v = V_3,$$

$$\varphi_{V_3}(t, v)_{tt} = (vk_1k_2)V_1 + (k_1 - vk_2')V_2 + (-vk_2^2)V_3,$$

$$\varphi_{V_3}(t, v)_{vt} = \varphi_{V_3}(t, v)_{tv} = -k_2V_2, \quad \varphi_{V_3}(t, v)_{vv} = 0,$$

$$\|\varphi_{V_3}(t, v)_t\| = (1+v^2k_2^2)^{1/2}, \quad \|\varphi_{V_3}(t, v)_v\| = 1$$

olur ve

$$\det(\varphi_{V_3}(t, v)_{tt}, \varphi_{V_3}(t, v)_t, \varphi_{V_3}(t, v)_v) = -k_1(1 + v^2 k_2^2),$$

$$\det(\varphi_{V_3}(t, v)_{tv}, \varphi_{V_3}(t, v)_t, \varphi_{V_3}(t, v)_v) = k_2,$$

$$\det(\varphi_{V_3}(t, v)_{vv}, \varphi_{V_3}(t, v)_t, \varphi_{V_3}(t, v)_v) = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler (2.2.1) ifadesinde yerine yazılırsa weingarten dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$S_{V_3} = \begin{bmatrix} \frac{k_1(1 + v^2 k_2^2)}{(1 + v^2 k_2^2)^{3/2}} & -\frac{k_2}{(1 + v^2 k_2^2)} \\ -\frac{k_2}{(1 + v^2 k_2^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. (2.2.2) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilik

$$K_{V_3}(P) = \frac{k_2^2}{(1 + v^2 k_2^2)^2}, \quad H_{V_3}(P) = \frac{k_1(1 + v^2 k_2^2)}{(1 + v^2 k_2^2)^{3/2}}$$

şeklinde bulunur. Benzer yöntemle  $\varphi_{V_3^*}(t, v)$  regle yüzeyinin weingarten dönüşümünün matrisi

$$S_{V_3^*} = \begin{bmatrix} \frac{k_1^*(1 + v^2 (k_2^*)^2)}{(1 + v^2 (k_2^*)^2)^{3/2}} & -\frac{k_2^*}{(1 + v^2 (k_2^*)^2)} \\ -\frac{k_2^*}{(1 + v^2 (k_2^*)^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada  $k_1^*$  ve  $k_2^*$  yerine (4.1.3) ifadeleri yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa matris

$$S_{V_3^*} = \begin{bmatrix} \frac{(k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*} + (k_1 - 1) k_2^2 v^2 \cos \phi \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^3}{\left( 1 + v^2 \left( k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \right)^{3/2}} & - \frac{k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}}{\left( 1 + v^2 \left( k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \right)} \\ - \frac{k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}}{\left( 1 + v^2 \left( k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \right)} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve Gauss ve ortalama eğrilikleri (2.2.2) ifadesinden

$$K_{V_3^*}(P) = - \left( \frac{k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}}{\left( 1 + v^2 \left( k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \right)} \right)^2, \quad H_{V_3^*}(P) = \frac{(k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*} + (k_1 - 1) k_2^2 v^2 \cos \phi \left( \frac{dt}{dt^*} \right)^3}{\left( 1 + v^2 \left( k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*} \right)^2 \right)^{3/2}}$$

bulunur.

**Teorem 4.3.4:**  $d$  – equidistante regle yüzeylerin weingarten dönüşümünün matrisi ve yüzeyin herhangi bir  $P$  noktasında Gauss (Total) ve ortalama eğriliği arasında

$$S_C = \begin{bmatrix} \frac{\left( k_1 + k_1 v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - k_2 v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \left( \sin \theta - \cos \theta + v \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + v \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)}{\left( 1 + v^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_C(P) = 0,$$

$$H_C(P) = \frac{\left( k_1 + k_1 v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - k_2 v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \left( \sin \theta - \cos \theta + v \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + v \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)}{\left( 1 + v^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^{3/2}},$$

$$S_{C^*} = \begin{bmatrix} \frac{A.B \frac{d(\theta+\alpha)}{dt^*} \cdot dt}{\left(1+v^2 \left(\frac{d(\theta+\alpha)}{dt^*}\right)^2 + 2v \cos(\theta+\alpha) \frac{d(\theta+\alpha)}{dt^*}\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{C^*}(P) = 0,$$

$$H_{C^*}(P) = \frac{A.B \frac{d(\theta+\alpha)}{dt^*} \cdot dt}{\left(1+v^2 \left(\frac{d(\theta+\alpha)}{dt^*}\right)^2 + 2v \cos(\theta+\alpha) \frac{d(\theta+\alpha)}{dt^*}\right)^{3/2}}$$

(4.3.4)

bağıntısı mevcuttur. Burada

$$A = \left( (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha)(1 + v \cos(\theta + \alpha)) - (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha)v \sin(\theta + \alpha) \right),$$

$$B = \left( \sin(\theta + \alpha) - \cos(\theta + \alpha) + (v \cos(\theta + \alpha) + v \sin(\theta + \alpha)) \cos(\theta + \alpha) \cdot \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \right).$$

**İspat:**  $\varphi_C(t, v) = r(t) + vC(t)$ ,  $\varphi_{C^*}(t, v) = r^*(t) + vC^*(t)$  yüzeylerinin  $t$  ve  $v$  ye göre türevleri alınırsa

$$\varphi_C(t, v)_t = \left(1 + v \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\right) V_1 + \left(-v \sin \theta \frac{d\theta}{dt}\right) V_3,$$

$$\begin{aligned} \varphi_C(t, v)_u &= \left(-v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + v \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) V_1 + \left(k_1 + k_1 v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - k_2 v \sin \theta \frac{d\theta}{dt}\right) V_2 \\ &\quad + \left(-v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - v \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}\right) V_3, \end{aligned}$$

$$\varphi_C(t, v)_{v_t} = \varphi_C(t, v)_{v_r} = \cos \theta \frac{d\theta}{dt} V_1 - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} V_3,$$

$$\varphi_C(t, v)_v = \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3, \quad \varphi_C(t, v)_{v_v} = 0,$$

$$\|\varphi_C(t, v)_t\| = \left(1 + v^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2v \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\right)^{1/2}, \quad \|\varphi_C(t, v)_v\| = 1$$

olur ve

$$\det(\varphi_C(t, v)_u, \varphi_C(t, v)_t, \varphi_C(t, v)_v) = \begin{pmatrix} k_1 + k_1 v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \\ -k_2 v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta - \cos \theta \\ +v \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + v \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix},$$

$$\det(\varphi_C(t, v)_{v_t}, \varphi_C(t, v)_t, \varphi_C(t, v)_v) = 0,$$

$$\det(\varphi_C(t, v)_{v_v}, \varphi_C(t, v)_t, \varphi_C(t, v)_v) = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler (2.2.1) ifadesinde yerine yazılırsa weingarten dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$S_C = \begin{bmatrix} \frac{\left(k_1 + k_1 v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - k_2 v \sin \theta \frac{d\theta}{dt}\right) \left(\sin \theta - \cos \theta + v \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + v \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\right)}{\left(1 + v^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2v \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. (2.2.2) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilik



$$K_C(P) = 0,$$

$$H_C(P) = \frac{\left( k_1 + k_1 v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - k_2 v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \left( \sin \theta - \cos \theta + v \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + v \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)}{\left( 1 + v^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^{3/2}}$$

şeklinde bulunur. Benzer yöntemle  $\varphi_{C^*}(t, v)$  regle yüzeyinin weingarten dönüşümünün matrisi

$$S_{C^*} = \begin{bmatrix} \frac{\left( k_1^* + k_1^* v \cos \theta^* \frac{d\theta^*}{dt^*} - k_2^* v \sin \theta^* \frac{d\theta^*}{dt^*} \right) \left( \sin \theta^* - \cos \theta^* + v \cos^2 \theta^* \frac{d\theta^*}{dt^*} + v \sin \theta^* \cos \theta^* \frac{d\theta^*}{dt^*} \right)}{\left( 1 + v^2 \left( \frac{d\theta^*}{dt^*} \right)^2 + 2v \cos \theta^* \frac{d\theta^*}{dt^*} \right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Burada  $\theta^* = \theta + \alpha$  ve  $k_1^*$ ,  $k_2^*$  yerine (4.2.3) ifadeleri yazılır, gerekli düzenlemeler yapılır ve

$$A = \left( (k_1 \cos \alpha - k_2 \sin \alpha) (1 + v \cos(\theta + \alpha)) - (k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha) v \sin(\theta + \alpha) \right),$$

$$B = \left( \sin(\theta + \alpha) - \cos(\theta + \alpha) + (v \cos(\theta + \alpha) + v \sin(\theta + \alpha)) \cos(\theta + \alpha) \cdot \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \right)$$

alınırsa matris

$$S_{C^*} = \begin{bmatrix} \frac{A \cdot B \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \cdot \frac{dt}{dt^*}}{\left( 1 + v^2 \left( \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \right)^2 + 2v \cos(\theta + \alpha) \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

şeklinde olup Gauss ve ortalama eğrilikleri (2.2.2) ifadesinden

$$K_{c^*}(P) = 0,$$

$$H_{c^*}(P) = \frac{A.B \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \cdot \frac{dt}{dt^*}}{\left( 1 + v^2 \left( \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \right)^2 + 2v \cos(\theta + \alpha) \frac{d(\theta + \alpha)}{dt^*} \right)^{3/2}}$$

elde edilir.

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada dayanak eğrisi olarak binormal ve birim Darboux vektörleri kullanılarak equidistante (eş uzaklıklı) regle yüzeyler üretilip regle yüzeylerle ilgili karakteristik özellikler incelenip bazı integral invariantları hesaplandı. Daha sonra teğet, asli normal, binormal ve birim Darboux vektörlerinin ürettiği equidistante regle yüzeylerin ayrı ayrı weingarden dönüşümünün matrisleri, Gauss (total) ve ortalama eğrilikleri hesaplandı. Çalışmadaki Şekil 4.1.2, Şekil 4.1.3, Şekil 4.1.4, Şekil 4.1.5, Şekil 4.1.6, Şekil 4.1.7, Şekil 4.2.4, Şekil 4.3.1 ve Şekil 4.3.2 Maple 17 yazılımı yardımıyla çizildi.  $E^3$  de yapmış olduğum bu çalışmadan yola çıkarak burada yapılan işlemler  $E^n$  de yapılabilir. Ayrıca yapılan bu işlemler Dual ve Lorentz uzayında incelenebilir.

## 6. KAYNAKLAR

- Blaschke, W. (1949). Diferensiyel Geometri Dersleri. İstanbul Üniversitesi Yayınları, No:433, İstanbul, 399.
- Gür, S. (2015). Dual Uzayda Paralel Equidistante Regle Yüzeyle. Doktora Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ordu.
- Hacısalıoğlu, H. H. (1983). Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Yayınları, No:7, Malatya, 269.
- Hacısalıoğlu, H. H. (1983). Diferensiyel Geometri. Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları, İstanbul, 324.
- Hacısalıoğlu, H. H. (1994). Diferensiyel Geometri. II.Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 340.
- Kruppa, E., (1957). Analytische und Konstruktive Differential Geometrie, Wien, 187.
- Masal, M. (1994). P-Äquidistante Regle Yüzeylelerin Bazı Yeni Karakteristik Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Samsun.
- Masal, M., & Kuruoğlu, N. (1999). Some Characteristic Properties of The Parallel P-Equidistant Ruled Surfaces In The Euclidean Space. *Pure Applied Mathematic Sciences*, India, L1: 35-42.
- Masal, M., & Kuruoğlu, N. (2000). a. Some Characteristic Properties of the Shape Operators of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces. *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 19E (2): 361-364.
- Masal, M., & Kuruoğlu, N. (2000). b. Some characteristic properties of the Spherical Indicatrix Leading Curves of Parallel p-Equidistant Ruled Surfaces. *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 19E (2): 405-410.
- Masal, M., & Kuruoğlu, N. (2013). Generalized paralel pi-equidistant ruled surfaces. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, Vol.171, 18 pages.
- Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 440.
- Şenatalar, M. (1978). Diferansiyel Geometri (Eğriler ve Yüzeyle Teorisi). İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Yayınları, Sayı 151, İstanbul, 349.
- Şenyurt, S. (2012). Integral Invariants of Parallel P-Equidistant Ruled Surfaces Which are Generated by Instantaneous Pfaff Vector. *Ordu Üniversitesi, Bilim Teknik Dergisi*, 2 (1): 13-22.
- Şenyurt, S., & As, E. (2013). Some Characteristic Properties Of Parallel z-Equidistant Ruled Surfaces. *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 587289, 7 pages.
- Valenontis, I. (1986). Parallel P-Äquidistante Regelflachen. *Manuscripta Math*, 54, 391-404.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı Ahmet ÖZDURAN  
Doğum Yeri ORDU  
Doğum Tarihi 10.07.1991  
Uyruğu  T.C.  Diğer:  
Telefon 0 539 634 4427  
E-Posta Adresi ahmet.ozduran@outlook.com

### Eğitim Bilgileri

#### Lisans

Üniversite Ondokuz Mayıs Üniversitesi  
Fakülte Fen Edebiyat Fakültesi  
Bölümü Matematik  
Mezuniyet Yılı 09.06.2013