T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTROSOPHIC TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

GÜLŞAH KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Gülşah KAYA tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında yürütülen "Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Süreklilik " adlı bu tez, jürimiz tarafından 14 / 07 / 2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT	
Başkan	:	Yrd. Doç. Dr. Kerim BEKAR Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

31./07./2017.. tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 03/08/2017.. tarih ve 2017./342 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1923

Enstitü Müdürü V.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Gülşah KAYA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

NEUTROSOPHIC TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

Gülşah KAYA

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 47s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki çalışmalar bölümünde genel bilgilere, bulanık kümelere ve sezgisel bulanık kümelere yer verildi. Materyal ve yöntem bölümünde neutrosophic küme kavramı ve bu küme üzerinde kurulan neutrosophic topolojik yapı incelendi.

Bulgular bölümünde neutrosophic fonksiyon ve neutrosophic bileşke fonksiyon tanımlanarak bunlara ait teoremler verildi. Daha sonra neutrosophic topolojik uzaylarda süreklilik, neutrosophic açık fonksiyon, neutrosophic kapalı fonksiyon ve neutrosophic homeomorfizm tanıtıldı. Konuyla ilgili örnekler bulunup, açıklamaları yapıldı.

Anahtar kelimeler: Neutrosophic küme, neutrosophic topolojik uzay, neutrosophic fonksiyon, neutrosophic bileşke fonksiyon, neutrosophic topolojik süreklilik, neutrosophic açık fonksiyon, neutrosophic kapalı fonksiyon, neutrosophic homeomorfizm.

ABSTRACT

CONTINUITY IN NEUTROSOPHIC TOPOGICAL SPACES

Gülşah KAYA

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2017
MSc. Thesis, 47p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

This study consists of six parts. In the introduction, we were discussed purpose of studying and reason for handling. In the previous works section, we have included the general information, fuzzy sets, intuitionistic sets. In the Materials and Methods section, we examined the neutrosophic concept and neutrosophic topological structure.

In the Finding Unit, we introduced the neutrosophic function and neutrosophic component function and their theorems. Then, we introduced the continuity in neutrosophic topological spaces, neutrosophic open function, neutrosophic closed function and neutrosophic homeomorphism. We found examples about the subject and we explain with solutions.

Keywords: Neutrosophic sets, neutrosophic topological spaces, neutrosophic function, neutrosophic function, neutrosophic resultant function, neutrosophic continuity, neutrosophic open function, neutrosophic closed function, neutrorophic homeomorphism.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT'a en samimi duygularımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölümü'nün tüm akademik personeline en içten şükranlarımı sunuyorum.

Öğrenim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ BİLDİRİMİ I

ÖZET II

ABSTRACT III

TEŞEKKÜR IV

İÇİNDEKİLER V

SİMGELER ve KISALTMALAR VI

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 2

2.1. Genel Bilgiler 3

2.2. Bulanık Küme 4

2.3. Sezgisel Bulanık Küme 4

3. MATERYAL ve YÖNTEM 6

3.1. Neutrosophic Kümeler 6

3.2. Neutrosophic Topolojik Uzay 8

3.3. Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Bir Kümenin İçi, Kapanışı, Dışı ve Sınırı 9

4. BULGULAR 12

4.1. Neutrosophic Fonksiyon 12

4.2. Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Süreklilik 28

4.3. Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Açık ve Kapalı Fonksiyonlar 36

4.4. Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Homeomorfizm 42

5. SONUÇ ve ÖNERİLER 45

6. KAYNAKLAR 46

ÖZGEÇMİŞ 47

SİMGELER ve KISALTMALAR

μ_A	:	A neutrosophic kümesinin üyelik fonksiyonu
σ_A	:	A neutrosophic kümesinin üye olamama fonksiyonu
ν_A	:	A neutrosophic kümesinin belirsizlik fonksiyonu
$\mathscr{N}(X)$	:	X kümesi üzerinde tanımlı tüm neutrosophic kümerlerin kümesi
$\leq$	:	Küçük eşit
$\geq$	:	Büyük eşit
$\bigvee$	:	Supremum
$\bigwedge$	:	İnfimum
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
$\Leftrightarrow$	:	Gerek ve yeter şart
$\tilde{\emptyset}$	:	Neutrosophic boş küme
$\tilde{X}$	:	Neutrosophic evrensel küme
$A \sqcap B$	:	A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic kesişimi
$A \sqcup B$	:	A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic birleşimi
$A \sqsubseteq B$	:	B neutrosophic kümesi, A neutrosophic kümesini neutrosophic kapsar
A^c	:	A neutrosophic kümesinin tümleyeni
τ	:	Neutrosophic topoloji
$\mathrm{int}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic içi
$\mathrm{cl}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic kapanışı
$\mathrm{ext}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic dışı
$\mathrm{fr}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic sınırı

1. GİRİŞ

Doğadaki kuşlar ya da kütüphanedeki matematik kitapları kümesini klasik küme kavramıyla tanımlayabiliriz. Fakat güzel kadınların topluluğu ya da 1'den çok büyük reel sayıların kümesi gibi belirsizlik veya kesin olmayan ifadeleri açıklarken klasik matematik yöntemlerinin yetersiz kaldığını düşünen Zadeh, 1965 yılında bulanık küme kavramını ortaya çıkarmıştır. Bulanık küme, evrensel kümedeki elemanlara $[0,1]$ aralığında üyelik derecesi atayan bir fonksiyondur. Eğer bir eleman kümeye tam olarak ait ise $'1'$ üyelik derecesine, hiç ait değil ise $'0'$ üyelik derecesine ya da kısmi üyelik söz konusu ise $(0,1)$ aralığında bir üyelik derecesi alabilen elemanlardır.

1986 yılında Atanassov bulanık küme kavramındaki bir elemanın üyelik derecesinin yanında üye olmama derecesini de incelemis ve sezgisel bulanık küme kavramını tanımlamıştır. Aynı şekilde üye olmama derecesini de $[0,1]$ aralığında belirlemiştir.

Samarandache, 2008 yılında sezgisel bulanık kümeye ek olarak belirsizlik durumunu araştırmıştır. Böylece bir elemanın üye olma, belirsizlik ve üye olmama derecelerini birleştirip neutrosophic küme kavramını tanımlamıştır. Samarandache bu çalışmasında neutrosophic kümeler üzerine bazı temel işlemleri tanımlamıştır.

Karataş ve Kuru, 2016'daki çalışmalarında neutrosophic küme işlemlerini (alt küme, eşitlik, kesişim, birleşim, tümleyen, neutrosophic boş küme ve neutrosophic evrensel küme) yeniden tanımlamışlardır. Neutrosophic kümeler için De Morgan kuralı, tanımlanan tümleyen kavramı sayesinde anlamlandırılmıştır.

Bu tezde ilk olarak bulanık küme, sezgisel bulank küme ve neutrosophic bulanık kümeler arasındaki farklar incelendi. İkinci olarak Neutrosophic topolojik yapılar ele alınıp neutrosophic bileşke fonksiyon, neutrosophic açık fonksiyon ve neutrosophic homeomorfizm tanımlanarak bunlara ait yeni teoriler verildi.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tez konusunu oluşturan Neutrosophic topolojik uzaylar üzerine yapılmış çeşitli çalışmalar mevcuttur:

Zadeh, (1965), Bulanık küme kavramının tanımını vermiştir. Daha sonra bulanık kümelerin altküme, birleşim ve kesişim işleminin çeşitli özelliklerini ispatlamıştır.

Chang, (1968), Bulanık topolojik uzaylarda açık küme, kapalı küme, komşuluk, bir kümeni içi, süreklilik ve kompaktlık tanımları verilerek konu ile ilgili teoremlere yer vermiştir.

Atanassov, (1986), Sezgisel bulanık küme kavramının tanımını vermiştir. Daha sonra topoloji operatörlerini (bir kümenin içi, bir kümenin kapanışı) tanımlamıştır.

Çoker, (1997), Sezgisel bulanık topolojik uzayın tanımını vermiştir. Daha sonra temel tanım ve gerekli örneklerle sezgisel bulanık süreklilik, sezgisel bulanık kompaktlık, sezgisel bulanık bağlantılılık ve sezgisel bulanık Hausdorff uzaylarından vermiştir.

Smarandache, (2005), Sezgisel bulanık küme kavramından yola çıkarak neutrosophic küme kavramları vermiştir. Sezgisel bulanık küme ve neutrosophic küme ararsındaki farkların altını çizmiştir.

Lupi*áñ*ez, (2008), Sezgisel bulanık topoloji ve neutrosophic topoloji arasındaki ilişkiden bahsetmiştir.

Lupi*áñ*ez, (2009), Aralıklı neutrosophic kümeyi tanımlamış ve topoloji arasındaki ilişkiyi açıklamıştır.

Bromi ve Smarandache, (2013), Sezgisel neutrosophic soft küme tanımını verip bazı özelliklerini yayınlamışlardır.

Salama ve ark., (2014), Neutrosophic kapalı küme ve neutrosophic sürekli fonksiyonlar tanımlarını vermişlerdir.

Karataş ve Kuru, (2016), Neutrosophic küme özelliklerini tanımlanmış ve bunları kullanarak bir kümenin neutrosophic kapanışını, neutrosophic içini, neutrosophic dışını, neutrosophic sınırını ve neutrosophic altuzayı tanımlamışlardır.

2.1 Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1 Belli kurala göre verilmiş nesneler topluluğuna veya listesine bir küme denir. Bu nesnelere kümenin elemanları veya üyeleri denir (Akkaş ve ark., 1998).

Tanım 2.1.2 X ve Y iki küme olsun. X kümesine ait her bir x elemanını, Y kümesine ait bir tek y elemanına eşleyen kurala, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon denir ve $f : X \longrightarrow Y$ şeklinde gösterilir. X kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, Y kümesine de f fonksiyonunun değer kümesi denir. f fonksiyonu $x \in X$ elemanını, $y \in Y$ elemanına eşliyorsa, y elemanına x elemanının f fonksiyonu altındaki görüntüsü denir ve kısaca $y = f(x)$ veya $f : x \to y$ şeklinde gösterilir (Akkaş ve ark., 1998).

Tanım 2.1.3 $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Her $y \in f(x)$ noktası için $f^{-1}(\{y\})$ kümesinin tek bir elemanı varsa; yani her $a, b \in X$ ve $a \neq b$ noktaları için, $f(a) \neq f(b)$ ise f fonksiyonuna bire-bir (injektif) fonksiyon denir (Akkaş ve ark., 1998).

Tanım 2.1.4 $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Her $y \in Y$ noktası için $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ ise; yani $f(X) = Y$ ise, f fonksiyonuna örten (sürjektif) fonksiyon denir (Akkaşve ark., 1998).

Tanım 2.1.5 X boştan farklı bir küme ve τ da X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir (Mucuk, 2010):

1. $\emptyset, X \in \tau$,

2. Her $U, V \in \tau$ için $U \cap V \in \tau$,

3. Her $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$ için $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Tanım 2.1.6 (X, τ) ve (Y, σ) birei topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ foksiyonu verilsin. Eğer X'deki her G açık kümesi için $f^{-1}(G) \in \tau$ oluyorsa f fonskiyonuna süreklidir denir (Mucuk, 2010).

Tanım 2.1.7 (X, τ) ve (Y, σ) birer topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ foksiyonu verilsin. Eğer $G \subseteq X$ açık kümesi için $f(G) \subseteq Y$ görüntü kümesi açık ise f'ye bir açık fonksiyon denir (Mucuk, 2010).

Tanım 2.1.8 (X, τ) ve (Y, σ) birer topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ foksiyonu verilsin. Eğer $K \subseteq X$ kapalı kümesi için $f(K) \subseteq Y$ görüntü kümesi kapalı ise f'ye bir kapalı fonksiyon denir (Mucuk, 2010).

Tanım 2.1.9 (X,τ) ve (Y,σ) birer topolojik uzay ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ foksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa f fonksiyonuna homeomorfizm denir (Mucuk, 2010):

1. f fonksiyonu birebir ve örten,

2. f fonksiyonu sürekli,

3. f'nin ters fonksiyonu $f^{-1}:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$ süreklidir.

2.2 Bulanık Küme

Tanım 2.2.1 X boştan farklı bir küme olsun. $\mu : X \to I$, $0 \le \mu(x) \le 1$ olmak üzere

$$A=\Big\{\big\langle x,\mu(x)\big\rangle : x\in X\Big\}$$

şeklinde tanımlı kümeye bulanık küme denir. Burada μ üye olma foksiyonu veya üyelik derecesidir. Bütün bulanık kümelerinin kümesi $\mathscr{F}(X)$ ile gösterilir (Zadeh,1965).

Örnek 2.2.1 $X=\{x,y,z\}$ olsun. $A\in\mathscr{F}(X)$ kümesi için

$$A=\big\{\langle x,0.7\rangle,\langle y,0.5\rangle,\langle z,1.0\rangle\big\}$$

bir bulanık kümedir.

2.3 Sezgisel Bulanık Küme

Tanım 2.3.1 Boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir A sezgisel bulanık kümesi

$$A=\Big\{\big\langle x,\mu_A(x),\sigma_A(x)\big\rangle : x\in X\Big\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_A : X\to I$ ve $\sigma_A : X\to I$ şeklinde birer fonksiyon ve her $x\in X$ için

$$0\le \mu_A(x)+\sigma_A(x)\le 1$$

şartını sağlanır. Burada μ_A ve σ_A fonksiyonları sırasıyla üye olma ve üye olmama fonksiyonlarıdır. X üzerinde tanımlı tüm sezgisel bulanık kümelerinin kümesi $\mathscr{I}\mathscr{F}\mathscr{S}(X)$ ile gösterilir (Atanassov, 1986).

Örnek 2.3.1 $X=\{x,y,z\}$ olsun.

$$A=\big\{\langle x,0.7,0.8\rangle,\langle y,0.5,0,1\rangle,\langle z,1.0,0.4\rangle\big\}$$

şeklinde A kümesi bir sezgisel bulanık kümedir.

Tanım 2.3.2 X ve Y boştan farklı iki küme, $A \in \mathscr{IFS}(X)$, $B \in \mathscr{IFS}(Y)$ birer sezgisel bulanık küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

1. Eğer $A = \{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x)\rangle\}$ ise A nın f altındaki görüntü kümesi

$$f(A) = \{\langle y, f(\mu_A)(y), f(\sigma_A)(y)\rangle\},$$

2. Eğer $B = \{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle\}$ ise B nin f altındaki ters görüntü kümesi

$$f^{-1}(B) = \{\langle x, f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\sigma_B)(x)\rangle\},$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $f(\mu_A)(y)$ ve $f(\sigma_A)(y)$ ifadeleri

$$f(\mu_A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

$$(1 - f(1 - \sigma_A))(y) = \begin{cases} \inf_{x \in f^{-1}(y)} \sigma_A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde birer fonksiyonlardır. Kullanım açısından kolaylık sağladığı için $f(\sigma_A)(y)$ yerine $(1 - f(1 - \sigma_A))(y)$ kullanılmıştır (Atanassov, 1986).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Neutrosophic Kümeler

Tanım 3.1.1 Boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir A neutrosophic kümesi

$$A = \left\{ \left\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x) \right\rangle : x \in X \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada μ_A, σ_A ve ν_A fonksiyonları X' den $[0,1]$ aralığına tanımlı ve her $x \in X$ için

$$0 \leq \mu_A(x) + \sigma_A(x) + \nu_A(x) \leq 3^+$$

şartını sağlayan sırasıyla üye olma, belirsizlik ve üye olmama fonksiyonlarıdır. X kümesi üzerinde tanımlı tüm neutrosophic kümelerin kümesi $\mathcal{N}(X)$ ile gösterilir (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.2 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\sigma_A(x) \geq \sigma_B(x)$ ve $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ oluyorsa A'ya, B'nin neutrosophic alt kümesi denir ve $A \sqsubseteq B$ şeklinde gösterilir (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.3 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. $A \sqsubseteq B$ ve $B \sqsubseteq A$ ise A ve B kümelerine neutrosophic eşit kümeler denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.4 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic birleşimi $A \sqcup B$ ile gösterilir ve bu küme

$$A \sqcup B = \left\{ \left\langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) \right\rangle : x \in X \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.5 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic kesişimi $A \sqcap B$ ile gösterilir ve bu küme

$$A \sqcap B = \left\{ \left\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \sigma_A(x) \vee \sigma_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x) \right\rangle : x \in X \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.6 $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{N}(X)$ neutrosophic küme ailesi verilsin. Genelleştirilmiş neutrosophic birleşim ve genelleştirilmiş kesişim kümeleri

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_{i\in I} A_i &= \Big\{\Big\langle x, \bigvee_{i,j\in I}(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_j}(x)), \bigwedge_{i,j\in I}(\sigma_{A_i}(x), \sigma_{A_j}(x)), \\
&\quad \bigwedge_{i,j\in I}(\nu_{A_i}(x), \nu_{A_j}(x))\Big\rangle : x \in X\Big\} \\
\bigsqcap_{i\in I} A_i &= \Big\{\Big\langle x, \bigwedge_{i,j\in I}(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_j}(x)), \bigvee_{i,j\in I}(\sigma_{A_i}(x), \sigma_{A_j}(x)), \\
&\quad \bigvee_{i,j\in I}(\nu_{A_i}(x), \nu_{A_j}(x))\Big\rangle : x \in X\Big\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.7 $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic tümleyeni A^c ile gösterilir ve

$$A^c = \big\{\langle x, \nu_A(x), 1-\sigma_A(x), \mu_A(x)\rangle :\ x \in X\big\}$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.8 $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = 0$ ve $\sigma_A(x) = \nu_A(x) = 1$ ise A'ya neutrosophic boş küme denir ve $\tilde{\emptyset}$ ile gösterilir (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.1.9 $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ ve $\sigma_A(x) = \nu_A(x) = 0$ ise A'ya neutrosophic evrensel küme denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir (Karataş ve Kuru, 2016).

Teorem 3.1.1 $A, B \in \mathscr{N}(X)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur (Karataş ve Kuru, 2016).

1. $A \sqcap A = A$ ve $A \sqcup A = A$

2. $A \sqcap B = B \sqcap A$ ve $A \sqcup B = B \sqcup A$

3. $A \sqcap \tilde{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$ ve $A \sqcap \tilde{X} = A$

4. $A \sqcup \tilde{\emptyset} = A$ ve $A \sqcup \tilde{X} = \tilde{X}$

5. $A \sqcap (B \sqcap C) = (A \sqcap B) \sqcap C$ ve $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$

6. $(A^c)^c = A$

Teorem 3.1.2 $\{A_i : i \in I\}$ neutrosophic küme ailesi olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur (Karataş ve Kuru, 2016).

1. $\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigsqcap_{i\in I} A_i^c$

2. $\left(\bigsqcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigsqcup_{i\in I} A_i^c$

Teorem 3.1.3 $B \in \mathcal{N}(X)$ ve $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur (Karataş ve Kuru, 2016).

1. $B \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i\in I} (B \sqcap A_i)$

2. $B \sqcup \left(\bigsqcap_{i\in i} A_i\right) = \bigsqcap_{i\in I} (B \sqcup A_i)$

3.2 Neutrosophic Topolojik Uzay

Tanım 3.2.1 $\tau \subseteq \mathcal{N}(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu aileye X üzerinde neutrosophic topoloji denir (Karataş ve Kuru, 2016):

1. $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$,

2. Her $A, B \in \tau$ için $A \sqcap B \in \tau$,

3. Her $\{A_i : i \in I\} \subseteq \tau$ için $\bigsqcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

Eğer τ ailesi X kümesi üzerinde bir neutrosophic topoloji ise (X, τ) ikilisine bir neutrosophic topolojik uzay denir.

Örnek 3.2.1 X, boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}\}$$

ve

$$\sigma = \mathcal{N}(X)$$

neutrosophic küme aileleri X üzerinde birer neutrosophic topolojidir (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.2.2 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ise, τ ailesine ait kümelere neutrosophic açık kümeler denir (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.2.3 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \sqsubseteq X$ olsun. Eğer $A^c \in \tau$ ise A kümesine bu uzayda neutrosophic kapalıdır denir. (X,τ) uzayındaki tüm neutrosophic kapalı kümeler $\kappa(\tau)$ ile gösterilir (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.2.4 (X,τ) neutrosophic topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda Y üzerindeki $\tau_Y = \{A \sqcap \tilde{Y} : A \in \tau\}$ neutrosophic topolojisine neutrosophic alt uzay topolojisi denir. Burada,

$$\tilde{Y}(x) = \begin{cases} \langle 1,0,0\rangle, & x \in Y \\ \langle 0,1,1\rangle, & x \notin Y, \end{cases}$$

olur. (Y,τ_Y) neutrosophic uzayına da (X,τ) neutrosophic uzayının bir neutrosophic alt uzayı denir (Karataş ve Kuru, 2016).

3.3 Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Bir Kümenin İçi, Kapanışı, Dışı ve Sınırı

Tanım 3.3.1 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic içi;

$$\mathrm{int}(A) = \bigsqcup_{\substack{G\in\tau \\ G\sqsubseteq A}} G$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Kuru,2016).

Teorem 3.3.1 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\mathrm{int}(A) \sqsubseteq A$

2. $\mathrm{int}(A)$ kümesi, neutrosophic açık bir kümedir.

3. $\mathrm{int}(A)$ kümesi, A kümesinin neutrosophic kapsadığı en büyük neutrosophic açık kümedir.

4. A kümesinin bir neutrosophic açık küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = \mathrm{int}(A)$ olmasıdır (Karataş ve Kuru, 2016).

Teorem 3.3.2 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A,B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır (Karataş ve Kuru,2016).

1. $\mathrm{int}(\tilde{X}) = \tilde{X}$ ve $\mathrm{int}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$

2. $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$

3. $A \sqsubseteq B$ ise $\mathrm{int}(A) \sqsubseteq \mathrm{int}(B)$

4. $\mathrm{int}(A) \sqcup \mathrm{int}(B) \sqsubseteq \mathrm{int}(A \sqcup B)$

5. $\mathrm{int}(A) \sqcap \mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(A \sqcap B)$

Tanım 3.3.2 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic kapanışı;

$$\mathrm{cl}(A) = \bigsqcap_{\substack{K^c \in \tau \\ A \sqsubseteq K}} K$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

Teorem 3.3.3 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

1. $A \sqsubseteq \mathrm{cl}(A)$

2. $\mathrm{cl}(A)$ kümesi, neutrosophic kapalı bir kümedir.

3. $\mathrm{cl}(A)$ kümesi, A kümesinin neutrosophic kapsayan en küçük neutrosophic kapalı kümedir.

4. A kümesinin bir neutrosophic kapalı kümedir $\Leftrightarrow A = \mathrm{cl}(A)$'dır.

Teorem 3.3.4 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler vardır (Karataş ve Kuru,2016).

1. $(\mathrm{cl}(A))^c = \mathrm{int}(A^c)$

2. $(\mathrm{int}(A))^c = \mathrm{cl}(A^c)$

Teorem 3.3.5 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A,B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

1. $\mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}$ ve $\mathrm{cl}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$

2. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$

3. $A \sqsubseteq B$ ise $\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$

4. $\mathrm{cl}(A \sqcup B) = \mathrm{cl}(A) \sqcup \mathrm{cl}(B)$

5. $\mathrm{cl}(A \sqcap B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A) \sqcap \mathrm{cl}(B)$

Tanım 3.3.3 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic dışı;

$$\mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(A^c)$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

Tanım 3.3.4 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic sınırı;

$$\mathrm{fr}(A) = \mathrm{cl}(A) \sqcap (\mathrm{int}(A))^c$$

şeklinde tanımlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

Teorem 3.3.6 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır (Karataş ve Kuru, 2016).

1. $\mathrm{fr}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$

2. $\mathrm{fr}(A^c) = \mathrm{fr}(A)$

3. $\mathrm{fr}(A) = \mathrm{cl}(A) \sqcap \mathrm{cl}(A^c)$

4. $\mathrm{fr}(\mathrm{fr}(A)) \sqsubseteq \mathrm{fr}(A)$

Teorem 3.3.7 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. Bu takdirde A kümesinin neutrosophic kapalı olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{fr}(A) \sqsubseteq A$ olmasıdır (Karataş ve Kuru, 2016).

4. BULGULAR

Çalışmamızın bu bölümünde neutrosophic fonksiyon, neutrosophic topolojik uzaylarda süreklilik, neutrosophic topolojik uzaylarda açık ve kapalı fonksiyonlar ve neutrosophic topolojik uzaylarda homeomorfizimlerin bazı karakteristik özellikleri incelendi.

4.1 Neutrosophic Fonksiyon

Tanım 4.1.1 $A \in \mathscr{N}(X)$, $B \in \mathscr{N}(Y)$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

a. Eğer $A = \{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x) \rangle\}$ ise A nın f altındaki görüntü kümesi

$$f(A) = \{\langle y, f(\mu_A)(y), f(\sigma_A)(y), f(\nu_A)(y) \rangle\}$$

b. Eğer $B = \{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y) \rangle\}$ ise B nin f altındaki ters görüntü kümesi

$$f^{-1}(B) = \{\langle x, f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\sigma_B)(x), f^{-1}(\nu_B)(x) \rangle\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(\mu_A)(y)$, $f(\sigma_A)(y)$ ve $f(\nu_A)(y)$ ifadeleri

$$f(\mu_A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

$$(1 - f(1 - \sigma_A))(y) = \begin{cases} \inf_{x \in f^{-1}(y)} \sigma_A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1, & f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

$$(1 - f(1 - \nu_A))(y) = \begin{cases} \inf_{x \in f^{-1}(y)} \nu_A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde birer foksiyonlardır. Bu şekilde tanımlı f fonksiyonuna neutrosophic fonksiyon denir (Salama ve ark., 2014).

Örnek 4.1.1 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ olmak üzere $A \in \mathscr{N}(X)$ ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için,

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x_1, 0.1, 0.2, 0.3 \rangle, \langle x_2, 0.7, 0.6, 0.5 \rangle, \langle x_3, 0.3, 0.4, 0.7 \rangle\}, \\ B &= \{\langle y_1, 0.2, 0.5, 0.7 \rangle, \langle y_2, 0.3, 0.8, 0.6 \rangle, \langle y_3, 0.1, 0.7, 0.9 \rangle\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $f : X \to Y$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_2, \\ f(x_2) &= y_1, \\ f(x_3) &= y_1 \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f(\mu_A)(y_1) &= \sup\{\mu_A(x_2), \mu_A(x_3)\} \\ &= \sup\{0.7, 0.3\} \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - f(1 - \sigma_A))(y_1) &= \inf\{\sigma_A(x_2), \sigma_A(x_3)\} \\ &= \inf\{0.6, 0.4\} \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - f(1 - \nu_A))(y_1) &= \inf\{\nu_A(x_2), \nu_A(x_3)\} \\ &= \inf\{0.5, 0.7\} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mu_A)(y_2) &= \sup\{\mu_A(x_1)\} \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - f(1 - \sigma_A))(y_2) &= \inf\{\sigma_A(x_1)\} \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - f(1 - \nu_A))(y_2) &= \inf\{\nu_A(x_1)\} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\mu_A)(y_3) &= 0, \\
(1-f(1-\sigma_A))(y_3) &= 1, \\
(1-f(1-\nu_A))(y_3) &= 1
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir ve $f(A)$ kümesi

$$f(A) = \{\langle y_1, 0.7, 0.4, 0.5\rangle, \langle y_2, 0.1, 0.2, 0.2\rangle, \langle y_3, 0, 1, 1\rangle\}$$

şeklinde bulunur. Ters fonksiyon tanımından,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y_2) &= x_1, \\
f^{-1}(y_1) &= x_2, \\
f^{-1}(y_1) &= x_3
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\mu_B)(x_1) &= \sup\{\mu_B(y_2)\} \\
&= 0.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\sigma_B)(x_1) &= \inf\{\sigma_B(y_2)\} \\
&= 0.8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\nu_B)(x_1) &= \inf\{\nu_B(y_2)\} \\
&= 0.6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\mu_B)(x_2) &= \sup\{\mu_B(y_1)\} \\
&= 0.2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\sigma_B)(x_2) &= \inf\{\sigma_B(y_1)\} \\
&= 0.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\nu_B)(x_2) &= \inf\{\nu_B(y_1)\} \\
&= 0.7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mu_B)(x_3) &= \sup\big\{\mu_B(y_1)\big\} \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sigma_B)(x_3) &= \inf\big\{\sigma_B(y_1)\big\} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\nu_B)(x_3) &= \inf\big\{\nu_B(y_1)\big\} \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve $f^{-1}(B)$ kümesi

$$f^{-1}(B) = \big\{\langle x_1, 0.3, 0.8, 0.6\rangle, \langle x_2, 0.2, 0.5, 0.7\rangle, \langle x_3, 0.2, 0.5, 0.7\rangle\big\}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.1.1 $A \in \mathscr{N}(X)$ ve $B \in \mathscr{N}(Y)$, $f : X \to Y$ neutrosophic fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur (Alblowi ve ark., 2014).

1. $A_1 \sqsubseteq A_2$ ise $f(A_1) \sqsubseteq f(A_2)$

2. $B_1 \sqsubseteq B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \sqsubseteq f^{-1}(B_2)$

3. $A \sqsubseteq f^{-1}(f(A))$ (f, bire-bir ise eşitlik sağlanır.)

4. $f(f^{-1}(B)) \sqsubseteq B$ (f, örten ise eşitlik sağlanır.)

5. $f^{-1}\Big(\bigsqcup_{j\in\Lambda} B_j\Big) = \bigsqcup_{j\in\Lambda} f^{-1}(B_j)$

6. $f^{-1}\Big(\bigsqcap_{j\in\Lambda} B_j\Big) = \bigsqcap_{j\in\Lambda} f^{-1}(B_j)$

7. $f\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigsqcup_{i\in I} f(A_i)$

İspat. $A \in \mathscr{N}(X)$, $B \in \mathscr{N}(Y)$, $i \in I$ ve $j \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} A &= \big\{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\big\}, \\ B &= \big\{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle : y \in Y\big\}, \\ A_i &= \big\{\langle x, \mu_{A_i}(x), \sigma_{A_i}(x), \nu_{A_i}(x)\rangle : x \in X\big\}, \\ B_j &= \big\{\langle y, \mu_{B_j}(y), \sigma_{B_j}(y), \nu_{B_j}(y)\rangle : y \in Y\big\} \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

1.

$A_1 \sqsubseteq A_2$ ise

$$\mu_{A_1}(x) \leq \mu_{A_2}(x),\ \sigma_{A_1}(x) \geq \sigma_{A_2}(x),\ \nu_{A_1}(x) \geq \nu_{A_2}(x)$$

olur. Buradan

$$f(\mu_{A_1})(x) \leq f(\mu_{A_2})(x),$$
$$(1-f(1-\sigma_{A_1}))(x) \geq (1-f(1-\sigma_{A_2}))(x),$$
$$(1-f(1-\nu_{A_1}))(x) \geq (1-f(1-\nu_{A_2}))(x)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla

$$f(A_1) \sqsubseteq f(A_2)$$

elde edilir.

2.

$B_1 \sqsubseteq B_2$ ise

$$\mu_{B_1}(y) \leq \mu_{B_2}(y),\ \sigma_{B_1}(y) \geq \sigma_{B_2}(y),\ \nu_{B_1}(y) \geq \nu_{B_2}(y)$$

olur. Buradan

$$f^{-1}(\mu_{B_1})(y) \leq f^{-1}(\mu_{B_2})(y),$$
$$f^{-1}(\sigma_{B_1})(y) \geq f^{-1}(\sigma_{B_2})(y),$$
$$f^{-1}(\nu_{B_1})(y) \geq f^{-1}(\nu_{B_2})(y)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$f^{-1}(B_1) \sqsubseteq f^{-1}(B_2)$$

elde edilir.

3.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(A)) &= f^{-1}\big(f\big(\big\{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\big\}\big)\big) \\
&= f^{-1}\big(\big\{\langle y, f(\mu_A)(y), 1 - f(1-\sigma_A)(y), 1 - f(1-\nu_A)(y)\rangle : y \in Y\big\}\big) \\
&= \big\{\langle x, f^{-1}(f(\mu_A))(x), f^{-1}(1 - f(1-\sigma_A))(x), f^{-1}(1 - f(1-\nu_A))(x)\rangle : x \in X\big\} \\
&\sqsupseteq \big\{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\big\} \\
&= A.
\end{aligned}$$

Burada f bire-bir ise,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(\mu_A))(x) &\geq \mu_A(x) \\
f^{-1}(1 - f(1-\sigma_A))(x) &= 1 - f^{-1}(f(1-\sigma_A))(x) \\
&\leq 1 - (1 - \sigma_A(x)) \\
&= \sigma_A(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f^{-1}(1 - f(1-\nu_A))(x) &= 1 - f^{-1}(f(1-\nu_A))(x) \\
&\leq 1 - (1 - \nu_A(x)) \\
&= \nu_A(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.

$$\begin{aligned}
f(f^{-1}(B)) &= f\big(f^{-1}\big(\big\{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle : y \in Y\big\}\big)\big) \\
&= f\big(\big\{\langle x, f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\sigma_B)(x), f^{-1}(\nu_B)(x)\rangle : x \in X\big\}\big) \\
&= \big\{\langle y, f(f^{-1}(\mu_B))(y), (1-f^{-1}(1-f(\sigma_B)))(y), \\
&\quad (1-f^{-1}(f(1-\nu_B)))(y)\rangle : y \in Y\big\} \\
&\sqsubseteq \big\{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle : y \in Y\big\} \\
&= B.
\end{aligned}$$

Burada f örten ise,

$$\begin{aligned}
f(f^{-1}(\mu_B)) &\leq \mu_B \\
1-f(1-f^{-1}(\sigma_B))(y) &= 1-f(f^{-1}(1-\sigma_B))(y) \\
&\geq 1-(1-\sigma_B(y)) \\
&= \sigma_B(y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
1-f(1-f^{-1}(\nu_B))(y) &= 1-f(f^{-1}(1-\nu_B))(y) \\
&\geq 1-(1-\nu_B(y)) \\
&= \nu_B(y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.

$$\begin{aligned}
f^{-1}\Big(\bigsqcup_{j\in\Lambda} B_j\Big) &= f^{-1}\Big(\langle y, \bigvee_{j\in\Lambda}\mu_{B_j}(y), \bigwedge_{j\in\Lambda}\sigma_{B_j}(y), \bigwedge_{j\in\Lambda}\nu_{B_j}(y)\rangle : y\in Y\Big)\\
&= \Big\{\Big\langle x, f^{-1}\Big(\bigvee_{j\in\Lambda}\mu_{B_j}\Big)(x), f^{-1}\Big(\bigwedge_{j\in\Lambda}\sigma_{B_j}\Big)(x), f^{-1}\Big(\bigwedge_{j\in\Lambda}\nu_{B_j}\Big)(x)\Big\rangle : x\in X\Big\}\\
&= \Big\{\Big\langle x, \bigvee_{j\in\Lambda} f^{-1}\Big(\mu_{B_j}\Big)(x), \bigwedge_{j\in\Lambda} f^{-1}\Big(\sigma_{B_j}\Big)(x), \bigwedge_{j\in\Lambda} f^{-1}\Big(\nu_{B_j}\Big)(x)\Big\rangle : x\in X\Big\}\\
&= \bigsqcup_{j\in\Lambda} f^{-1}(B_j)
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
f^{-1}\Big(\bigsqcap_{j\in\Lambda} B_j\Big) &= f^{-1}\Big(\langle y, \bigwedge_{j\in\Lambda}\mu_{B_j}(y), \bigvee_{j\in\Lambda}\sigma_{B_j}(y), \bigvee_{j\in\Lambda}\nu_{B_j}(y)\rangle : y\in Y\Big)\\
&= \Big\{\Big\langle x, f^{-1}\Big(\bigwedge_{j\in\Lambda}\mu_{B_j}\Big)(x), f^{-1}\Big(\bigvee_{j\in\Lambda}\sigma_{B_j}\Big)(x), f^{-1}\Big(\bigvee_{j\in\Lambda}\nu_{B_j}\Big)(x)\Big\rangle : x\in X\Big\}\\
&= \Big\{\Big\langle x, \bigwedge_{j\in\Lambda} f^{-1}(\mu_{B_j})(x), \bigvee_{j\in\Lambda} f^{-1}(\sigma_{B_j})(x), \bigvee_{j\in\Lambda} f^{-1}(\nu_{B_j})(x)\Big\rangle : x\in X\Big\}\\
&= \bigsqcap_{j\in\Lambda} f^{-1}(B_j)
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
f\Big(\bigsqcup_{i\in I} A_i)\Big) &= f\Big(\Big\{\langle x, \bigvee_{i\in I}\mu_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}\sigma_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}\nu_{A_i}(x)\rangle : x\in X\Big\}\Big)\\
&= \Big\{\langle y, f\big(\bigvee_{i\in I}\mu_{A_i}\big)(y), \big(1-f\big(1-\bigwedge_{i\in I}\sigma_{A_i}\big)\big)(y), \big(1-f\big(1-\bigwedge_{i\in I}\nu_{A_i}\big)\big)(y)\rangle : y\in Y\Big\}\\
&= \Big\{\langle y, \bigvee_{i\in I} f(\mu_{A_i})(y), \bigwedge_{i\in I}(1-f(1-\sigma_{A_i}))(y), \bigwedge_{i\in I}(1-f(1-\nu_{A_i}))(y)\rangle : y\in Y\Big\}\\
&= \bigsqcup_{i\in I} f(A_i)
\end{aligned}$$

Teorem 4.1.2 $A \in \mathscr{N}(X)$ ve $B \in \mathscr{N}(Y)$, $f : X \to Y$ neutrosophic fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. $f\Big(\bigsqcap_{i\in I} A_i\Big) \sqsubseteq \bigsqcap_{i\in I} f(A_i)$ (f, bire-bir ise eşitlik sağlanır.)

2. $f^{-1}(\tilde{Y}) = \tilde{X}$

3. $f^{-1}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$

4. f, örten ise $f(\tilde{X}) = \tilde{Y}$

5. $f(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$

6. f, örten ise $(f(A))^c \sqsubseteq f(A^c)$

7. $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

İspat. $A \in \mathscr{N}(X)$, $B \in \mathscr{N}(Y)$, $i \in I$ ve $j \in \Lambda$ için

$$\begin{aligned} A &= \big\{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\big\}, \\ B &= \big\{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle : y \in Y\big\}, \\ A_i &= \big\{\langle x, \mu_{A_i}(x), \sigma_{A_i}(x), \nu_{A_i}(x)\rangle : x \in X\big\}, \\ B_j &= \big\{\langle y, \mu_{B_j}(y), \sigma_{B_j}(y), \nu_{B_j}(y)\rangle : y \in Y\big\} \end{aligned}$$

şeklinde verilsin.

1.

$$\begin{aligned} f\Big(\bigsqcap_{i\in I} A_i\Big) &= f\Big(\Big\{\Big\langle x, \bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x), \bigvee_{i\in I}\sigma_{A_i}(x), \bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}(x)\Big\rangle : x \in X\Big\}\Big) \\ &= \Big\{\Big\langle y, f\big(\bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}\big)(y), \big(1 - f\big(1 - \bigvee_{i\in I}\sigma_{A_i}\big)\big)(y), \big(1 - f\big(1 - \bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}\big)\big)(y)\Big\rangle : y \in Y\Big\} \\ &\sqsubseteq \Big\{\Big\langle y, \bigwedge_{i\in I} f(\mu_{A_i})(y), \bigvee_{i\in I}(1 - f(1-\sigma_{A_i}))(y), \bigvee_{i\in I}(1 - f(1-\nu_{A_i}))(y)\Big\rangle : y \in Y\Big\} \\ &= \bigsqcap_{i\in I} f(A_i) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\tilde{Y}) &= f^{-1}(\langle y,1,0,0\rangle : y\in Y) \\
&= \left\{\langle x, f^{-1}(1), f^{-1}(0), f^{-1}(0)\rangle : x\in X\right\} \\
&= \left\{\langle x,1,0,0\rangle : x\in X\right\} \\
&= \tilde{X}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\tilde{\emptyset}) &= f^{-1}(\langle y,0,1,1\rangle : y\in Y) \\
&= \left\{\langle x, f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(1)\rangle : x\in X\right\} \\
&= \left\{\langle x,0,1,1\rangle : x\in X\right\} \\
&= \tilde{\emptyset}
\end{aligned}$$

4.

f örten olsun.

$$\begin{aligned}
f(\tilde{X}) &= \{f(\langle x,1,0,0\rangle) : x\in X\} \\
&= \left\{\langle y, f(1), f(0), f(0)\rangle : y\in Y\right\} \\
&= \left\{\langle y,1,0,0\rangle : y\in Y\right\} \\
&= \tilde{Y}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
f(\tilde{\emptyset}) &= \{f(\langle x,0,1,1\rangle) : x\in X\} \\
&= \left\{\langle y, f(0), f(1), f(1)\rangle : y\in Y\right\} \\
&= \left\{\langle y,0,1,1\rangle : y\in Y\right\} \\
&= \tilde{\emptyset}
\end{aligned}$$

6.

$$
\begin{aligned}
(f(A))^c &= \Big(f\big(\{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\}\big)\Big)^c \\
&= \{\langle y, f(\mu_A)(y), (1-f(1-\sigma_A))(y), (1-f(1-\nu_A))(y)\rangle : y \in Y\}^c \\
&= \{\langle y, (1-f(1-\nu_A))(y), (1-(1-f(1-\sigma_A)))(y), f(\mu_A)(y)\rangle : y \in Y\} \\
&= \{\langle y, (1-f(1-\nu_A))(y), f(1-\sigma_A)(y), f(\mu_A)(y)\rangle : y \in Y\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f(A^c) &= f\big(\{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\}^c\big) \\
&= f\big(\{\langle x, \nu_A(x), 1-\sigma_A(x), \mu_A(x)\rangle : x \in X\}\big) \\
&= \{\langle y, f(\nu_A)(y), (1-f(1-(1-\sigma_A)))(y), (1-f(1-\mu_A))(y)\rangle : y \in Y\} \\
&= \{\langle y, f(\nu_A)(y), (1-f(\sigma_A))(y), (1-f(1-\mu_A))(y)\rangle : y \in Y\}
\end{aligned}
$$

olur. f örten olduğundan

$$
(f(A))^c \sqsubseteq (f(A))^c
$$

elde edilir.

7.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(B^c) &= f^{-1}\big(\{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle : y \in Y\}^c\big) \\
&= f^{-1}\big(\{\langle y, \nu_B(y), 1-\sigma_B(y), \mu_B(y)\rangle : y \in Y\}\big) \\
&= \{\langle x, f^{-1}(\nu_B)(y), f^{-1}(1-\sigma_B)(y), f^{-1}(\mu_B)(y)\rangle : x \in X\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(f^{-1}(B))^c &= \big(f^{-1}\big(\{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle : y \in Y\}\big)\big)^c \\
&= \big(\{\langle x, f^{-1}(\mu_B)(y), f^{-1}(\sigma_B)(y), f^{-1}(\nu_B)(y)\rangle : x \in X\}\big)^c \\
&= \{\langle x, f^{-1}(\nu_B)(y), 1-f^{-1}(\sigma_B)(y), f^{-1}(\mu_B)(y)\rangle : x \in X\}.
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da

$$
f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c
$$

şeklinde bulunur.

Uyarı 4.1.1 Teorem 4.1.1'in *3.* özelliğine göre $A = f^{-1}(f(A))$ olması gerekmez.

Örnek 4.1.2 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ olmak üzere $A \in \mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümesi

$$A = \{\langle x_1, 0.3, 0.8, 0.7\rangle, \langle x_2, 0.2, 0.6, 0.8\rangle, \langle x_3, 0.4, 0.5, 0.9\rangle\}$$

şeklinde tanımlansın. $f : X \to Y$ neutrosophic fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1, \\ f(x_2) &= y_1, \\ f(x_3) &= y_2 \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$f(A) = \{\langle y_1, 0.3, 0.6, 0.7\rangle, \langle y_2, 0.4, 0.5, 0.9\rangle, \langle y_3, 0, 1, 1\rangle\}$$

ve

$$f^{-1}(f(A)) = \{\langle x_1, 0.3, 0.6, 0.7\rangle, \langle x_2, 0.3, 0.6, 0.7\rangle, \langle x_3, 0.4, 0.5, 0.9\rangle\}$$

elde edilir. Buna göre

$$A \sqsubseteq f^{-1}(f(A))$$

olur.

Uyarı 4.1.2 $A = f^{-1}(f(A))$ eşitliğinin sağlanabilmesi için f neutrosophic fonksiyonunun bire-bir olması gerekir.

Örnek 4.1.3 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathcal{N}(X)$ ve $B \in \mathcal{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için,

$$A = \{\langle x_1, 0.1, 0.2, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.6, 0.5\rangle\}$$

şeklinde tanımlansın. $f : X \to Y$ neutrosophic fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_2, \\ f(x_2) &= y_1, \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$f(A) = \{\langle y_1, 0.7, 0.6, 0.5\rangle, \langle y_2, 0.1, 0.2, 0.3\rangle\}$$

ve

$$f^{-1}(f(A)) = \{\langle x_1, 0.1, 0.2, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.6, 0.5\rangle\}$$

şeklinde elde edilir ve böylece f neutrosophic fonksiyonunun bire-bir olması durumunda $A = f^{-1}(f(A))$ olduğu görülür.

Uyarı 4.1.3 Teorem 4.1.1'in *4.* özelliğine göre $B = f(f^{-1}(B))$ olması gerekmez.

Örnek 4.1.4 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathcal{N}(X)$ ve $B \in \mathcal{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için,

$$B = \{\langle y_1, 0.4, 0.5, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.1, 0.2, 0.3\rangle\}$$

şeklinde tanımlansın. $f : X \to Y$ neutrosophic fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1, \\ f(x_2) &= y_1, \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) &= x_1, \\ f^{-1}(y_1) &= x_2 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$f^{-1}(B) = \left\{\langle x_1, 0.4, 0.5, 0.6\rangle, \langle x_2, 0.4, 0.5, 0.6\rangle\right\}$$

ve

$$f(f^{-1}(B)) = \left\{\langle y_1, 0.4, 0.5, 0.6\rangle, \langle y_2, 0, 1, 1\rangle\right\}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre

$$f(f^{-1}(B)) \sqsubseteq B$$

olur.

Uyarı 4.1.4 $B = f(f^{-1}(B))$ eşitliğinin sağlanabilmesi için f neutrosophic fonksiyonunun örten olması gerekir.

Örnek 4.1.5 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathcal{N}(X)$ ve $B \in \mathcal{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için,

$$B = \{\langle y_1, 0.2, 0.5, 0.7\rangle, \langle y_2, 0.3, 0.8, 0.6\rangle\}$$

şeklinde olsun. $f : X \to Y$ neutrosophic fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_2, \\ f(x_2) &= y_1 \end{aligned}$$

verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) &= x_2, \\ f^{-1}(y_2) &= x_1 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(B) = \{\langle x_1, 0.3, 0.8, 0.6\rangle, \langle x_2, 0.2, 0.5, 0.7\rangle\}$$

ve

$$f(f^{-1}(B)) = \{\langle y_1, 0.2, 0.5, 0.7\rangle, \langle y_2, 0.3, 0.8, 0.6\rangle\}$$

şeklinde elde edilir. Böylece f neutrosophic fonksiyonunun örten olması durumunda $B = f(f^{-1}(B))$ olduğu görülür.

Tanım 4.1.2 $A \in \mathcal{N}(X)$, $B \in \mathcal{N}(Y)$ ve $C \in \mathcal{N}(Z)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\rangle\}, \\ B &= \{\langle y, \mu_B(y), \sigma_B(y), \nu_B(y)\rangle\}, \\ C &= \{\langle z, \mu_C(z), \sigma_C(z), \nu_C(z)\rangle\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı neutrosophic kümeler için $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyonlarından elde edilen $g \circ f : X \to Z$ neutrosophic bileşke fonksiyonu

$$(g \circ f)(A) = \{\langle z, (g \circ f)(\mu_A)(z), (1 - (g \circ f)(1 - \sigma_A))(z), (1 - (g \circ f)(1 - \nu_A))(z)\rangle\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.6 $A \in \mathcal{N}(X)$, $B \in \mathcal{N}(Y)$ ve $C \in \mathcal{N}(Z)$ için,

$$\begin{aligned}
A &= \{\langle x_1, 0.1, 0.2, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.6, 0.5\rangle, \langle x_3, 0.3, 0.4, 0.7\rangle\},\\
B &= \{\langle y_1, 0.2, 0.5, 0.7\rangle, \langle y_2, 0.3, 0.8, 0.6\rangle, \langle y_3, 0.1, 0.7, 0.9\rangle\},\\
C &= \{\langle z_1, 0.5, 0.5, 0.3\rangle, \langle z_2, 0.9, 0.1, 0.7\rangle, \langle z_3, 0.5, 0.1, 0.2\rangle\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı neutrosphic kümeler, $f : X \to Y$ ile $g : Y \to Z$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= y_2,\\
f(x_2) &= y_1,\\
f(x_3) &= y_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g(y_1) &= z_3,\\
g(y_2) &= z_2,\\
g(y_3) &= z_2
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $g \circ f : X \to Z$ neutrosophic bileşke fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
g(f(x_1)) &= z_2,\\
g(f(x_2)) &= z_3,\\
g(f(x_3)) &= z_3
\end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan,

$$(g \circ f)(\mu_A)(z_1) = 0$$

$$(1 - (g \circ f)(1 - \sigma_A))(\sigma_A)(z_1) = 1$$

$$(1 - (g \circ f)(1 - \nu_A))(z_1) = 1$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\mu_A)(z_2) &= \sup\left\{\mu_A(x_1)\right\}\\ &= 0.1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-(g\circ f)(1-\sigma_A))(z_2) &= \inf\left\{\sigma_A(x_1)\right\}\\ &= 0.2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-(g\circ f)(1-\nu_A))(z_2) &= \inf\left\{\nu_A(x_1)\right\}\\ &= 0.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\mu_A)(z_3) &= \sup\left\{\mu_A(x_2),\mu_A(x_3)\right\}\\ &= \sup\left\{0.7,0.3\right\}\\ &= 0.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-(g\circ f)(1-\sigma_A)))(z_3) &= \inf\left\{\sigma_A(x_2),\sigma_A(x_3)\right\}\\ &= \inf\left\{0.6,0.4\right\}\\ &= 0.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-(g\circ f)(1-\nu_A))(z_3) &= \inf\left\{\nu_A(x_2),\nu_A(x_3)\right\}\\ &= \inf\left\{0.5,0.7)\right\}\\ &= 0.5\end{aligned}$$

şeklinde elde edlilir. O halde bileşke fonksiyon

$$(g\circ f)(A)=\left\{\langle z_1,0,1,1\rangle,\langle z_2,0.1,0.2,0.3\rangle,\langle z_3,0.7,0.4,0.5\rangle\right\}$$

olur.

4.2 Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Süreklilik

Tanım 4.2.1 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $G \in \sigma$ için $f^{-1}(G) \in \tau$ oluyorsa f fonksiyonuna neutrosophic sürekli fonksiyon denir (Salama ve ark., 2014).

Örnek 4.2.1 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathcal{N}(X)$ ve $B \in \mathcal{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\}, \\ B &= \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\} \end{aligned}$$

ve bunlar üzerindeki neutrosophic topolojiler de sırasıyla

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A\} \\ \sigma &= \{\tilde{Y}, \tilde{\emptyset}, B\} \end{aligned}$$

olsun. $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ neutrosophic fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $f(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri

$$\begin{aligned} f(A) &= \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\} \\ f^{-1}(B) &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\tilde{Y}) &= \tilde{X} \in \tau, \\ f^{-1}(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \tau, \\ f^{-1}(B) &= A \in \tau \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu neoutrosophic sürekli bir fonksiyondur.

Örnek 4.2.2 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathscr{N}(X)$ ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x_1, 0.4, 0.2, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.5, 0.4, 0.6\rangle\}, \\ B &= \{\langle y_1, 0.2, 0.4, 0.8\rangle, \langle y_2, 0.5, 0.7, 0.1\rangle\} \end{aligned}$$

ve bunlar üzerindeki neutrosophic topolojiler sırasıyla

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A\}, \\ \sigma &= \{\tilde{Y}, \tilde{\emptyset}, B\} \end{aligned}$$

olsun. $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ neutrosophic fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_2, \\ f(x_2) &= y_1 \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $f(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümeleri

$$f(A) = \{\langle y_1, 0.5, 0.4, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.4, 0.2, 0.2\rangle\}$$

ve

$$f^{-1}(B) = \{\langle x_1, 0.5, 0.7, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.2, 0.4, 0.8\rangle\}$$

şeklinde olur. Neutrosophic süreklilik tanımı ve neutrosophic fonksiyon özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\tilde{Y}) &= \tilde{X} \in \tau, \\ f^{-1}(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \tau, \\ f^{-1}(B) &= \{\langle x_1, 0.5, 0.7, 0.1\rangle, \langle x_2, 0.2, 0.4, 0.8\rangle\} \notin \tau \end{aligned}$$

olacağından $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu neutrosophic sürekli değildir.

Örnek 4.2.3 $c \in Y$ olmak üzere $f(x) = c$ şeklinde tanımlı $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ sabit bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $U \in \sigma$ için

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \tilde{X}, & c \in U \\ \tilde{\emptyset}, & c \notin U \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her iki durumda da $f^{-1}(U) \in \tau$ olduğundan f fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.1 (X,τ), (Y,σ) ve (Z,ρ) neutrosophic topolojik uzay olsunlar. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(Z,\rho)$ fonksiyonları neoutrosophic sürekli ise $g\circ f:(X,\tau)\rightarrow(Z,\rho)$ bileşke fonksiyonu da neoutrosophic süreklidir.

İspat. $G\in\rho$ olsun. Bu durumda g sürekli olduğundan $g^{-1}(G)\in\sigma$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(G))\in\tau$ olur. Diğer yandan,

$$f^{-1}(g^{-1}(G))=(g\circ f)^{-1}(G)$$

olduğundan $(g\circ f)^{-1}(G)\in\tau$ bulunur. Boylece $g\circ f$ neutrosophic bileşke fonksiyonu süreklidir.

Teorem 4.2.2 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ neutrosophic fonksiyon sürekli olması için gerek ve yeter şart Y deki her neutrosophic kapalı kümenin ters görüntüsünün X de neutrosophic kapalı olmasıdır.

İspat. $f:X\rightarrow Y$ neutrosophic kapalı bir fonksiyon ve $K\sqsubseteq Y$ de neutrosophic kapalı bir küme olsun. Teorem 4.1.2'de 7. gereğince $f^{-1}(K^c)=(f^{-1}(K))^c$ ve K^c neutrosophic açık olduğundan neutrosophic süreklilik tanımı gereğince $(f^{-1}(K))^c$ kümesi X de açıktır. O halde $f^{-1}(K)\sqsubseteq X$ neutrosophic kapalıdır.

Tersine olarak Y deki her neutrosophic kapalı alt kümenin ters görüntüsü X de neutrosophic kapalı olsun. $V\sqsubseteq Y$ neutrosophic açık alt kümesi verilsin. Burada

$$f^{-1}(V^c)=(f^{-1}(V))^c$$

olduğundan ve $f^{-1}(V^c)$ kümesi X de neutrosophic kapalı olduğundan

$$f^{-1}(V)\sqsubseteq X$$

neutrosophic açıktır. O halde neutrosophic süreklilik tanımı gereğince f neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.3 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay, $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ neutrosophic sürekli fonksiyon ve $E\in\mathscr{N}(X)$ olsun. $f_E:(E,\tau_E)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

İspat. Herhangi bir $V \in \sigma$ neutrosophic açık kümesi verilsin. Bu durumda $f_E^{-1}(V) = f^{-1}(V) \sqcap \tilde{E}$ dır. f neutrosophic sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(V) \in \tau$ olur. Buradan f_E neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.4 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay ve $E_1, E_2 \subseteq X$ olsun. $f : (E_1, \tau_{E_1}) \to (Y,\sigma)$ ve $g : (E_2, \tau_{E_2}) \to (Y,\sigma)$ iki neutrosophic sürekli fonksiyon, $\tilde{X} = \tilde{E_1} \sqcup \tilde{E_2}$ ve $\tilde{E_1}, \tilde{E_2} \in \kappa(\tau)$ ise

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_1 \\ g(x), & x \in E_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $h : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

İspat. Herhangi bir $F \in \kappa(\sigma)$ verilsin. Buradan

$$\begin{aligned} h^{-1}(F) &= h^{-1}\Big(\{\langle y, \mu_F(y), \sigma_F(y), \nu_F(y)\rangle : y \in Y\}\Big) \\ &= \{\langle x, h^{-1}(\mu_F)(x), h^{-1}(\sigma_F)(x), h^{-1}(\nu_F)(x)\rangle : x \in X\} \\ &= \{\langle x, f^{-1}(\mu_F)(x), f^{-1}(\sigma_F)(x), f^{-1}(\nu_F)(x)\rangle : x \in E_1\} \\ &\sqcup \{\langle x, g^{-1}(\mu_F)(x), g^{-1}(\sigma_F)(x), g^{-1}(\nu_F)(x)\rangle : x \in E_2\} \\ &= f^{-1}(F) \sqcup g^{-1}(F) \end{aligned}$$

olur. $\tilde{E_1}, \tilde{E_2} \in \kappa(\tau)$ olduğundan $f^{-1}(F) \in \kappa(\tau_{E_1})$ ve $g^{-1}(F) \in \kappa(\tau_{E_2})$ olur. Böylece

$$h^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \sqcup g^{-1}(F)) \in \kappa(\tau)$$

bulunur. Teorem 4.2.2'den h fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.5 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunun neutrosophic sürekli olması için gerek ve yeter şart her $A \in \mathscr{N}(X)$ için $f(\mathrm{cl}(A)) \sqsubseteq \mathrm{cl}(f(A))$ olmasıdır.

İspat. $f : X \to Y$ fonksiyonu neutrosophic sürekli ve $A \in \mathscr{N}(x)$ olsun. Teorem 3.3.3 *a.* gereğince $f(A) \sqsubseteq \mathrm{cl}(f(A))$ olduğundan

$$A \sqsubseteq f^{-1}(f(A)) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$$

olur. Buradan

$$\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq \mathrm{cl}(f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A))))$$

bulunur. Burada f fonksiyonu neutrosohic sürekli ve $\mathrm{cl}(f(A))$ neutrosophic kapalı olduğundan $f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$ neutrosophic kapalı olup

$$\mathrm{cl}(f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))) = f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$$

olur. O halde $\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$ olup $f(\mathrm{cl}(A)) \sqsubseteq \mathrm{cl}(f(A))$ olduğu görülür.

Tersine, her $A \in \mathscr{N}(X)$ için $f(\mathrm{cl}(A)) \sqsubseteq \mathrm{cl} f(A)$ olsun. Bir $K \sqsubseteq Y$ neutrosophic kapalı alt kümesi verilsin. $A = f^{-1}(K)$ nın neutrosophic kapalı olduğunu gösterelim. Kabulden dolayı

$$\begin{aligned} f(\mathrm{cl}A) &\sqsubseteq \mathrm{cl}(f(A)) \\ &= \mathrm{cl}(f(f^{-1}(K))) \\ &\sqsubseteq \mathrm{cl}(K) \\ &= K \end{aligned}$$

olur. Buradan $\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq f^{-1}(K)$ olur ki bu da $\mathrm{cl}(A) = A$ olduğunu gösterir. O halde $A = f^{-1}(K)$ neutrosophic kapalıdır. Teorem 4.2.2 gereğince f neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.6 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonunun neutrosophic sürekli olması için gerek ve yeter şart her $B \in \mathscr{N}(Y)$ için $\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$ olmasıdır.

İspat. $f : X \to Y$ fonksiyonu neutrosophic sürekli ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ olsun. Teorem 3.3.3 *a.* gereğince $B \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$ olduğundan

$$f^{-1}(B) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$$

olur. Buradan

$$\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \sqsubseteq \mathrm{cl}(f^{-1}(\mathrm{cl}(B)))$$

bulunur. Burada f fonksiyonu neutrosohic sürekli ve $\mathrm{cl}(B)$ neutrosophic kapalı olduğundan Teorem 4.2.2 gereğince $f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$ neutrosophic kapaldır. Buradan

$$\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \sqsubseteq \mathrm{cl}(f^{-1}(\mathrm{cl}(B))) = f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$$

elde edilir. Tersine olarak her $B \in \mathscr{N}(Y)$ için $\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$ olsun. Bir $K \sqsubseteq Y$ neutrosophic kapalı alt kümesi verilsin. K neutrosophic kapalı olduğundan

$\mathrm{cl}(f^{-1}(K)) \sqsubseteq f^{-1}(K)$ olur. Bu da $f^{-1}(K)$ nın neutrosophic kapalı olduğunu gösterir. Teorem 4.2.2 gereğince f neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.7 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu neutrosophic süreklidir ancak ve ancak $B \in \mathscr{N}(Y)$ için $f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \sqsubseteq \mathrm{int}(f^{-1}(B))$.

İspat. $f : X \to Y$ sürekli ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ olsun. Bu durumda Teorem 3.3.1 *a.* gereğince $\mathrm{int}(B) \sqsubseteq B$ olup $f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \sqsubseteq f^{-1}(B)$ olduğundan

$$\mathrm{int}(f^{-1}(\mathrm{int}(B))) \sqsubseteq \mathrm{int}(f^{-1}(B))$$

olur. Diğer yandan f neutrosophic sürekli ve $\mathrm{int}(B)$ neutrosophic açık olduğundan $f^{-1}(\mathrm{int}(B))$ neutrosophic açıktır. Bu durumda

$$\mathrm{int}(f^{-1}(\mathrm{int}(B))) = f^{-1}(\mathrm{int}(B))$$

olur. Buradan,

$$f^{-1}(\mathrm{int}(B)) = \mathrm{int}(f^{-1}(\mathrm{int}(B)))$$

elde dilir.

Tersine her $B \in \mathscr{N}(Y)$ için $f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \sqsubseteq \mathrm{int}(f^{-1}(B))$ ise neutrosophic açık bir $V \sqsubseteq Y$ alt kümesi için $f^{-1}(V) \sqsubseteq \mathrm{int}(f^{-1}(V))$ olur. Buradan $f^{-1}(V) \sqsubseteq \mathrm{int}(f^{-1}(V))$ olup $f^{-1}(V) \sqsubseteq X$ neutrosophic açıktır. O halde f fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.8 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. Birebir ve örten bir $f : X \to Y$ fonksiyonu neutrosophic süreklidir ancak ve ancak her $A \in \mathscr{N}(X)$ için

$$\mathrm{int}(f(A)) \sqsubseteq f(\mathrm{int}(A)).$$

İspat. f, neutrosophic sürekli fonksiyonu birebir-örten ve $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. $f(A) = B$ diyelim. Teorem 3.3.1 *a.* gereğince $\mathrm{int}(B) \sqsubseteq B$ olup $f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \sqsubseteq f^{-1}(B)$ bulunur. f fonksiyonunun birebirliğinden $f^{-1}(B) = A$ olup $f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \sqsubseteq A$ olur. O halde $\mathrm{int}(f^{-1}(\mathrm{int}(B))) \sqsubseteq \mathrm{int}(A)$ olur. Burada $f^{-1}(\mathrm{int}(B))$ neutrosophic açık olduğundan ve

$$f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \sqsubseteq \mathrm{int}(A)$$

kapsamasından $f(f^{-1}(\mathrm{int}(B))) \sqsubseteq f(\mathrm{int}(A))$ elde edilir. f nin örtenliğinden

$$f(f^{-1}(\mathrm{int}(B))) = \mathrm{int}(B)$$

olup $\text{int}(f(A)) = f(\text{int}(A))$ olur.

Tersine olarak her $A \in \mathscr{N}(X)$ için $\text{int}(f(A)) = f(\text{int}(A))$ olsun. f nin örten olmasından bir $V \sqsubseteq Y$ neutrosophic açık alt kümesi için

$$\begin{aligned} V &= \text{int}(V) \\ &= \text{int}(f(f^{-1}(V))) \\ &\sqsubseteq f(\text{int}(f^{-1}(V))) \end{aligned}$$

olur. Buradan f nin birebirliğinden $f^{-1}(V) \sqsubseteq \text{int}(f^{-1}(V))$ olup $f^{-1}(V)$ neutrosophic açıktır. O halde f fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.9 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. Birebir ve örten bir $f : X \to Y$ fonksiyonu neutrosophic süreklidir ancak ve ancak her $A \in \mathscr{N}(X)$ için $f(\text{fr}(A)) \sqsubseteq \text{fr}(f(A))$.

İspat. Birebir ve örten bir f fonksiyonu neutrosophic sürekli ve $A \in \mathscr{N}(X)$ olsun. Teorem 3.3.6 *d.* gereğince $\text{fr}(A) = \text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c$ dır. f neutrosophic sürekli olduğundan Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.8'den

$$\text{int}(f(A)) \sqsubseteq f(\text{int}(A)) \text{ ve } f(\text{cl}(A)) \sqsubseteq \text{cl}(f(A))$$

olur ve f'nin birebir ve örten olmasından

$$f(\text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c) = f(\text{cl}(A)) \sqcap (f(\text{int}(A)))^c$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} f(\text{fr}(A)) &= f(\text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c) \\ &= f(\text{cl}(A)) \sqcap f(\text{int}(A)^c) \\ &\sqsubseteq \text{cl}(f(A)) \sqcap (\text{int}(f(A)))^c \\ &= \text{fr}(f(A)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine, her $A \in \mathscr{N}(X)$ için $f(\text{fr}(A)) \sqsubseteq \text{fr}(f(A))$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f(\mathrm{cl}(A) &= f(A \sqcup \mathrm{fr}(A)) \\ &= f(A) \sqcup f(\mathrm{fr}(A)) \\ &\sqsubseteq f(A) \sqcup \mathrm{fr}(f(A)) \\ &= \mathrm{cl}(f(A)) \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.2.7 gereğince f fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

Teorem 4.2.10 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. Birebir ve örten bir $f : X \to Y$ fonksiyonu neutrosophic süreklidir ancak ve ancak her $B \in \mathscr{N}(Y)$ için

$$\mathrm{fr}(f^{-1}(B)) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{fr}(B)).$$

İspat. f fonksiyonu neutrosophic sürekli ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ olsun. f neutrosophic sürekli olduğundan Teorem 4.2.6 ve Teorem 4.2.7 gereğince

$$\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) \text{ ve } f^{-1}(\mathrm{int}(B)) \sqsubseteq \mathrm{int}(f^{-1}(B))$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathrm{fr}(B)) &= f^{-1}(\mathrm{cl}(B) \sqcup (\mathrm{int}(B))^c) \\ &= f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) \sqcup f^{-1}((\mathrm{int}(B))^c) \\ &= f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) \sqcap (f^{-1}(\mathrm{int}(B)))^c \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $f^{-1}(B) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{fr}(B))$ elde edilir. Diğer yandan her $B \in \mathscr{N}(Y)$ için $\mathrm{fr}(f^{-1}(B)) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{fr}(B))$ ise

$$\mathrm{fr}(f^{-1}(B)) \sqcup f^{-1}(B) \sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{fr}(B)) \sqcup f^{-1}(B)$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(f^{-1}(B)) &\sqsubseteq f^{-1}(\mathrm{fr}(B) \sqcup B) \\ &= f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.2.6 gereğince f fonksiyonu neutrosophic süreklidir.

4.3 Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Açık ve Kapalı Fonksiyonlar

Tanım 4.3.1 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X'in neutrosohic açık her U neutrosophic alt kümesinin f altındaki görüntüsü olan $f(U)$ kümesi Y'nin neutrosophic açık bir alt kümesi ise f'ye neutrosophic açık fonksiyon denir. Bir diğer ifadeyle her $U \in \tau$ için $f(U) \in \sigma$ oluyorsa f'ye neutrosophic açık fonksiyon denir.

Tanım 4.3.2 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X in neutrosohic kapalı her F neutrosophic alt kümesinin f altındaki görüntüsü olan $f(F)$ kümesi Y nin neutrosophic kapalı bir alt kümesi ise f ye neutrosophic kapalı fonksiyon denir (Salama ve ark., 2014).

Uyarı 4.3.1 f fonksiyonu neutrosophic sürekli olması halinde neutrosophic açık (neutrosophic kapalı) kümelerin ters görüntüleri de neutrosophic açık (neutrosophic kapalı) kümelerdir.

Uyarı 4.3.2 Neutrosophic açık fonksiyon ile neutrosophic kapalı fonksiyon kavramları birbirinden bağımsızdır. Yani bir fonksiyon neutrosophic açık fonksiyon olduğu halde neutrosophic kapalı fonksiyon olmayabilir. Ya da neutrosophic kapalı fonksiyon olduğu halde neutrosophic açık fonksiyon olmayabilir.

Örnek 4.3.1 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathscr{N}(X)$ ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\}, \\ B &= \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A\}, \\ \sigma &= \{\tilde{Y}, \tilde{\emptyset}, B\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor. $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ neutrosophic fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1, \\ f(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$f(A) = \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(\tilde{X}) &= \tilde{Y} \in \sigma, \\ f(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \sigma, \\ f(A) &= B \in \sigma \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu neoutrosophic açık bir fonksiyondur. (X, τ) neutrosophic uzayının neutrosophic kapalı kümeleri

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) &= \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, A^c\} \\ &= \left\{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, \{\langle x_1, 0.3, 0.6, 0.5\rangle, \langle x_2, 0.2, 0.2, 0.7\rangle\}\right\} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (Y, σ) neutrosophic uzayının neutrosophic kapalı kümeleri

$$\begin{aligned} \kappa(\sigma) &= \{\tilde{\emptyset}, \tilde{Y}, B^c\} \\ &= \left\{\tilde{\emptyset}, \tilde{Y}, \{\langle y_1, 0.6, 0.3, 0.1\rangle, \langle y_2, 0.5, 0.1, 0.8\rangle\}\right\} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$f(A^c) \notin \kappa(\sigma)$$

olduğundan f fonksiyonu neoutrosophic kapalı bir fonksiyon değildir.

Örnek 4.3.2 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathscr{N}(X)$ ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\}, \\ B &= \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A^c\}, \\ \sigma &= \{\tilde{Y}, \tilde{\emptyset}, B^c\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ neutrosophic fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_2, \\ f(x_2) &= y_1 \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$f(A^c) = \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(\tilde{X}) &= \tilde{Y} \in \sigma, \\ f(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \sigma, \\ f(A^c) &= B \notin \sigma \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu neoutrosophic açık bir fonksiyon değidir. (X,τ) neutrosophic uzayının neutrosophic kapalı kümeleri

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) &= \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, (A^c)^c\} \\ &= \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, A\} \\ &= \left\{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\}\right\} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (Y,σ) neutrosophic uzayının neutrosophic kapalı kümeleri

$$\begin{aligned} \kappa(\sigma) &= \{\tilde{\emptyset}, \tilde{Y}, (B^c)^c\} \\ &= \{\tilde{\emptyset}, \tilde{Y}, B\} \\ &= \left\{\tilde{\emptyset}, \tilde{Y}, \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\}\right\} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \sigma, \\ f(\tilde{X}) &= \tilde{Y} \in \sigma, \\ f((A^c)^c) &= B \in \sigma \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu neoutrosophic kapalı bir fonksiyondur.

Uyarı 4.3.3 Neutrosophic sürekli bir fonksiyon neutrosophic açık ya da neutrosophic kapalı olmak zorunda değildir. Neutrosophic açık ya da neutrosophic kapalı olan her fonksiyon da neutrosophic sürekli olmak zorunda değildir.

Örnek 4.3.3 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathcal{N}(X)$ ve $B \in \mathcal{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\}, \\ B &= \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}\}, \\ \sigma &= \{\tilde{Y}, \tilde{\emptyset}, B\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor. $f : X \to Y$ foksiyon ve

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1, \\ f(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(\tilde{X}) &= \tilde{Y} \in \sigma, \\ f(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \sigma \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu neoutrosophic açık bir fonksiyondur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\tilde{Y}) &= \tilde{X} \in \tau, \\ f^{-1}(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset}\} \in \tau, \\ f^{-1}(B) &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\} \notin \tau \end{aligned}$$

olup, f fonksiyonu neutrosophic sürekli değildir.

Teorem 4.3.1 $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ ve $g : (Y, \sigma) \to (Z, \rho)$ iki neutrosophic açık fonksiyon olsunlar. Bu durumda $g \circ f$ fonksiyonu da neutrosophic açıktır.

İspat. G, (X,τ) uzayında neutrosophic açık olsun. Bu durumda f neutrosophic açık olduğundan $f(G)$ kümesi de (Y,σ) uzayında neutrosophic açıktır. Böylece g neutrosophic açık fonksiyon olduğundan $(g\circ f)(G)$ kümesi (Z,ρ) uzayında neutrosophic açıktır. O halde $g\circ f$ fonksiyonu neutrosophic açıktır.

Teorem 4.3.2 $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$, $g:(Y,\sigma)\to(Z,\rho)$ iki neutrosophic kapalı fonksiyon olsunlar. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının her ikisi de neutrosophic kapalı ise $g\circ f$ neutrosophic bileşke fonksiyonu da neutrosophic kapalıdır.

İspat. A, (X,τ) uzayında neutrosophic kapalı olsun. Bu durumda f neutrosophic kapalı olduğundan $f(A)$ kümesi de (Y,σ) uzayında neutrosophic kapalıdır. Böylece g neutrosophic kapalı fonksiyon olduğundan $(g\circ f)(A)$ kümesi (Z,ρ) uzayında neutrosophic kapalıdır. O halde $g\circ f$ fonksiyonu neutrosophic kapalıdır.

Teorem 4.3.3 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic kapalıdır ancak ve ancak her $A\in\mathscr{N}(X)$ için $\mathrm{cl}(f(A))\sqsubseteq f(\mathrm{cl}(A))$.

İspat. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic kapalı ve $A\in\mathscr{N}(X)$ olsun. $A\sqsubseteq\mathrm{cl}(A)$ ve $f(A)\sqsubseteq f(\mathrm{cl}(A))$ olduğundan $\mathrm{cl}(f(A))\sqsubseteq\mathrm{cl}(f(\mathrm{cl}(A)))$ olur. Burada $\mathrm{cl}(A)$ neutrosophic kapalı bir küme ve f neutrosophic kapalı fonksiyon olduğundan $f(\mathrm{cl}(A))$ neutrosophic kapalıdır. O halde $\mathrm{cl}(f(A))\sqsubseteq f(\mathrm{cl}(A))$ olur.
Tersine olarak her $A\in\mathscr{N}(X)$ için $\mathrm{cl}(f(A))\sqsubseteq f(\mathrm{cl}(A))$ ise neutrosophic kapalı bir $K\sqsubseteq X$ alt kümesi için

$$\mathrm{cl}(f(K))\sqsubseteq\mathrm{cl}(f(\mathrm{cl}(K)))=f(K)$$

olur. Bu durumda $f(K)$ neutrosophic kapalı ve buradan f fonksiyonu neutrosophic kapalıdır.

Uyarı 4.3.4 Teorem 4.2.5 gereğince $(f\mathrm{cl}(A))\sqsubseteq\mathrm{cl}(f(A))$ ve Teorem 4.3.3'den $\mathrm{cl}(f(A))\sqsubseteq f(\mathrm{cl}(A))$ olduğundan $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic sürekli ve neutrosophic kapalıdır ancak ve ancak her $A\in\mathscr{N}(X)$ için $\mathrm{cl}(f(A))=f(\mathrm{cl}(A))$ dır.

Teorem 4.3.4 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic kapalıdır ancak ve ancak her $A\in\mathscr{N}(X)$ için $f(\mathrm{int}(A))\sqsubseteq\mathrm{int}(f(A))$ dir.

İspat. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic açık ve $A\in\mathscr{N}(X)$ olsun. $\mathrm{int}(A)\sqsubseteq A$ olduğundan $f(\mathrm{int}(A))\sqsubseteq f(A)$ olur. Buradan $\mathrm{int}(f(\mathrm{int}(A)))\sqsubseteq\mathrm{int}(f(A))$ olup $f(\mathrm{int}(A))$ neutrosophic açık olduğundan $f(\mathrm{int}(A))\sqsubseteq\mathrm{int}(f(A))$ elde edilir.

Tersine olarak her $A \in \mathcal{N}(X)$ için $f(\text{int}(A)) \sqsubseteq \text{int}(f(A))$ ise neutrosophic açık bir $G \sqsubseteq X$ alt kümesi için

$$f(G) \sqsubseteq \text{int}(f(G))$$

olacağından $f(G)$ neutrosophic açıktır.

Uyarı 4.3.5 Teorem 4.3.1'den $\text{int}(f(A)) \sqsubseteq f(\text{int}(A))$ ve Teorem 4.2.8'den $f(\text{int}(A)) \sqsubseteq \text{int}(f(A))$ olduğundan $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu neutrosophic sürekli ve neutrosophic açıktır ancak ve ancak her $A \in \mathcal{N}(X)$ için $\text{int}(f(A)) = f(\text{int}(A))$.

Teorem 4.3.5 (X, τ) ve (Y, σ) iki neutrosophic topolojik uzay olsun. Birebir ve örten olan bir $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu neutrosophic kapalıdır ancak ve ancak her $A \in \mathcal{N}(X)$ için $\text{fr}(f(A)) \sqsubseteq f(\text{fr}(A))$ dir.

İspat. $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu neutrosophic kapalı ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Teorem 4.3.5'den $\text{cl}(f(A)) \sqsubseteq f(\text{cl}(A))$ ve Teorem 4.3.4'den $f(\text{int}(A)) \sqsubseteq \text{int}(f(A))$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\text{fr}(f(A)) &= \text{cl}(f(A)) \sqcap \text{int}(f(A))^c \\
&= f(\text{cl}(A)) \sqcap (f(\text{int}(A)))^c \\
&= f(\text{cl}(A)) \sqcap f((\text{int}(A))^c) \\
&= f(\text{cl}(A)) \sqcap (\text{int}(A))^c) \\
&= f(\text{fr}(A))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine olarak her $A \in \mathcal{N}(X)$ için $f(\text{int}(A)) \sqsubseteq \text{int}(f(A))$ olsun. Neutrosophic kapalı bir $K \sqsubseteq X$ alt kümesi için $\text{fr}(K) \sqsubseteq K$ olduğundan

$$\text{fr}(f(K)) \sqsubseteq f(\text{fr}(K)) \sqsubseteq f(K)$$

olup $f(K)$ neutrosophic kapalıdır. O halde f fonksiyonu neutrosophic kapalıdır.

Teorem 4.3.6 (X, τ) ve (Y, σ) iki neutrosophic topolojik uzay, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ bire-bir örten neutrosophic sürekli fonksiyon ve f^{-1} de f'nin neutrosophic ters fonksiyonu olsun. f fonksiyonu neutrosophic süreklidir ancak ve ancak f^{-1} fonksiyonu neutrosophic açıktır.

İspat. $G \in \sigma$ olsun. $f^{-1}(G) = g(G)$ dur. f neutrosophic sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(G)$ kümesi neutrosophic açık kümedir. Yani $g(G)$ kümesi, neutrosophic açık kümedir. O halde $g = f^{-1}$ fonksiyonu neutrosophic açıktır.
Tersine olarak $U \in \sigma$ olsun. $f^{-1}(G) = g(G)$ dur. g neutrosophic açık bir fonksiyon olduğundan $g(G)$ kümesi neutrosophic açıktır. Yani $f^{-1}(G)$ kümesi, neutrosophic açık kümedir. O halde f neutrosophic sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 4.3.7 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay ve $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ bire-bir örten bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f neutrosophic süreklidir ancak ve ancak f^{-1} neutrosophic kapalı bir fonksiyondur.

İspat. $A \in \kappa(\sigma)$ olsun. $f^{-1}(A) \in \kappa_(\tau)$ olur. f neutrosophic sürekli bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A)$ kümesi neutrosophic kapalı kümedir. Yani $f^{-1}(A)$ kümesi, neutrosophic kapalı bir kümedir. O halde f^{-1} fonksiyonu neutrosophic kapalıdır.
Tersine olarak $A \in \kappa(\sigma)$ olsun. $f^{-1}(A) \in \kappa(\tau)$ olur. f^{-1} neutrosophic kapalı bir fonksiyon olduğundan $f^{-1}(A)$ kümesi neutrosophic kapalıdır. Yani $f^{-1}(A)$ kümesi, neutrosophic kapalı bir kümedir. O halde f neutrosophic sürekli bir fonksiyondur.

4.4 Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Homeomorfizmler

Tanım 4.4.1 (X,τ) ve (Y,σ) iki neutrosophic topolojik uzay ve $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, f fonksiyonuna neutrosophic homeomorfizm denir.

1. f fonksiyonu bire-bir ve örten,

2. f ve f^{-1} fonksiyonları neutrosophic süreklidir.

Tanım 4.4.2 $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu neutrosophic homeomorfizm ise (X,τ) ve (Y,σ)neutrosophic topolojik uzaylarına neutrosophic homeomorfturlar denir. Eğer X ve Y neutrosophic kümeleri üzerinde τ ve σ topolojik yapılarından başka topoljik yapılar düşünülemiyorsa, X ve Y neutrosophic kümeleri homeomorftur denir.

Örnek 4.4.1 $X = \{x_1, x_2\}$ ve $Y = \{y_1, y_2\}$ olmak üzere $A \in \mathscr{N}(X)$ ve $B \in \mathscr{N}(Y)$ neutrosophic kümeleri için

$$\begin{aligned} A &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\}, \\ B &= \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau &= \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A\}, \\ \sigma &= \{\tilde{Y}, \tilde{\emptyset}, B\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor. $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ neutrosophic fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1, \\ f(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

olsun. f fonksiyonunun neutrosophic homeomorfizm olduğunu gösterelim.

O halde,

$$\begin{aligned} f(A) &= \{\langle y_1, 0.1, 0.7, 0.6\rangle, \langle y_2, 0.8, 0.9, 0.5\rangle\}, \\ f^{-1}(B) &= \{\langle x_1, 0.5, 0.4, 0.3\rangle, \langle yx_, 0.7, 0.8, 0.2\rangle\} \end{aligned}$$

olur.

1.f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.
2.f ve f^{-1} fonksiyonları neutrosophic sürekli olduklarını gösterelim.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\tilde{Y}) &= \tilde{X} \in \tau, \\ f^{-1}(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \tau, \\ f^{-1}(B) &= A \in \tau \end{aligned}$$

olduğundan f neutrosophic süreklidir.

$$\begin{aligned} (f^{-1})^{-1}(\tilde{X}) &= \tilde{Y} \in \sigma, \\ (f^{-1})^{-1}(\tilde{\emptyset}) &= \tilde{\emptyset} \in \sigma, \\ (f^{-1})^{-1}(A) &= B \in \sigma \end{aligned}$$

olduğundan f^{-1} neutrosophic süreklidir. Şu halde $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ neutrosophic fonksiyonu neutrosophic homeomorfizmdir.

Teorem 4.4.1 $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ve $g : (Y,\sigma) \to (Z,\rho)$ iki neutrosophic homeomorfizm olsunlar. Bu durumda $g \circ f : (X,\tau) \to (Z,\rho)$ neutrosophic bileşke fonksiyonu da neutrosophic homeomorfizmdir.

İspat. f ve g birebir ve örten fonksiyonlar olduğundan $g \circ f$ fonksiyonu da birebir ve örtendir. f ve g neutrosophic sürekli olduğundan Teorem 4.2.1'den $g \circ f$ fonksiyonu da neutrosophic süreklidir. f^{-1} ve g^{-1} neutrosophic sürekli olduğundan

$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

fonksiyonu da neutrosophic süreklidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.2 $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ bire-bir ve örten neutrosophic bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu neutrosophic homeomorfizmdir ancak ve ancak f fonksiyonu neutrosophic sürekli ve neutrosophic açık bir fonksiyondur.

İspat. f fonksiyonu neutrosophic homeomorfizm olsun. Neutrosophic homeomorfizm tanımı gereğince f fonksiyonunun neutrosophic süreklidir. Teorem 4.3.6'den f neutrosophic sürekli olduğundan f^{-1} kümesi neutrosophic açıktır. O halde f^{-1} neutrosophic açık ise $(f^{-1})^{-1} = f$ kümesi neutrosophic açık olur.

Teorem 4.4.3 $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu neutrosophic homeomorfizmdir ancak ve ancak f fonksiyonu neutrosophic sürekli ve neutrosophic kapalı bir fonksiyondur.

İspat. f fonksiyonu neutrosophic homeomorfizm olsun. Neutrosophic homeomorfizm tanımı gereğince f fonksiyonunun neutrosophic süreklidir. Teorem 4.3.6 gereğince f neutrosophic sürekli olduğundan f^{-1} kümesi neutrosophic kapalıdır. f^{-1} neutrosophic kapalı olduğundan $(f^{-1})^{-1} = f$ kümesi neutrosophic kapalı olur.

Tanım 4.4.3 Neutrosophic homeomorfizmler altında korunan özelliklere neutrosophic topolojiksel özellikler denir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada fonksiyon kavramından yola çıkılarak neutrosophic fonksiyon tanımlanmıştır. Ayrıca klasik topolojik uzaylardaki sürekli fonksiyonlar, açık fonksiyonlar, kapalı fonksiyonlar ve homeomorfizmler gözönünde bulundurularak neutrosophic topolojik uzaylarda sürekli fonksiyonlar, neutrosophic açık fonksiyon, neutrosophic kapalı fonksiyon ve neutrosophic homeomorfizm kavramları ele alınarak incelenmiştir. İleriki çalışmalarda neutrosophic topolojik uzaylarda yakınsaklık, neutrosophic topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları, neutrosophic topolojik uzaylarda kompaktlık, neutrosophic topolojik uzaylarda bağlantılılık gibi konular hakkında çalışmalar yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H.H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A. 1998. Soyut Matematik. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No.43, Ankara.

Atanassov, K. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 20:87-96.

Broumi, S., Smarandache, F. 2013. Intuitionistic neutrosophic soft set. Journal of Information and Computing Science, 8(2):130-140.

Chang, C.L. 1968. Fuzzy topological spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24:182-190.

Çoker, D. 1997. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. Fuzzy Sets and Systems, 88(1):81-89.

Karataş, S., Kuru, C. 2016. Neutrosophic topology. Neutrosophic Sets and Systems, 13:90-96.

Koçak, M. 2015. Genel Topoloji. Nisan Kitapevi Yayınları.

Lupi*áñ*ez, F.G. 2008. On neutrosophic topology. The International Journal of Systems and Cybernetics, 37(6):797-800.

Lupi*áñ*ez, F.G. 2009. Interval neutrosophic set and topology. The International Journal of Systems and Cybernetics, 38(3/4):621-624.

Lupi*áñ*ez, F.G. 2010. On neutrosophic paraconsistent topology. The International Journal of Systems and Cybernetics, 39(4):598-601.

Mucuk, O. 2010. Topoloji ve Kategori. Nobel Yayın Dağıtım.

Salama, A.A., Smarandache, F., Valeri, K. 2014. Neutrosophic closed set and neutrosophic continuous functions. Neutrosophic Sets and Systems, 4:4-8.

Smarandache, F. 2005. Neutrosophic set-a generalization of the intuitionistic fuzzy set. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 24(3):287-297.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy set. Informatin and Control, 8:338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Gülşah KAYA
Doğum Yeri	**:**	Eskişehir
Doğum Tarihi	**:**	17.09.1989
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	qulsahqaya@hotmail.com

Öğrenim Durumu: Lisans

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2008-2013