T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

EMRULLAH AYKAN ALAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2018

TEZ ONAY

Emrullah Aykan ALAN tarafından hazırlanan "**SİMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 21.09.2018 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Erhan SET Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Üye Doç. Dr. Selahattin MADEN Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Üye Doç. Dr. İmdat İŞCAN Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....

06 / 11 / 2018 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 08 / 11 / 2018 tarih ve 2018.... / 5.25.. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

A-An

EMRULLAH AYKAN ALAN

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1809 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

SİMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

EMRULAH AYKAN ALAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ 41 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Doç.Dr. ERHAN SET)

Bu tez 4 bölümden oluşmakta olup tezin ilk bölümünde tez konusunun içeriği ile ilgili kavramların tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde bazı konveks fonksiyon sınıfları, Riemann- Liouville ve genelleştirilmiş kesirli integraller ve simetrik konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili temel tanımlar, teoremler ve sonuçlar sunulmuştur. Tezin ana bölümü olan üçüncü bölümde ilk olarak genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla bazı yeni özdeşlikler verilmiş ve bu özdeşlikler yardımıyla simetrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise genelleştirilmiş kesirli integraller içeren iki özdeşlik yardımıyla simetrik konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlarda λ,σ,w'nın özel seçimleri için Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren sonuçlara yer verilmiştir. Son bölümde ise teze ait bazı sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş kesirli integraller, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Konveks fonksiyon, Simetrik konveks fonksiyon, Riemann- Liouville kesirli integraller.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES FOR SYMMETRIZED CONVEX FUNCTIONS

EMRULLAH AYKAN ALAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESİS, 41

PAGES

(SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. ERHAN SET)

This thesis consist of four chapters and the first chapter of the thesis includes informations about the historical development of concepts related to thesis topic. In the second chapter, fundamental definitons, theorems and results related to some convex function classes, Riemann-Liouville and generalized fractional integrals and symmetrized convex function classes are presented. In the third chapter that is main chapter of the thesis, firstly some new identities is given with the help of generalized fractional integrals and Hermite-Hadamard type inequalities for symmetrized convex functions via these identities are obtained. Inte second part of this chapter, Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for symmetrized convex functions with help of two identities containing generalized fractional integrals are given. Moreover, the results containing Riemann-Liouville fractional intefrals for the special selections of the λ,σ,w in results obtained here. It is given some conclusions and recommendations of the thesis in the last chapter.

Keywords: Generalized fractional integrals, Convex function, Symmetrized convex function, Hermite-Hadamard inequality, Hermite-Hadamard-Fejer inequality, Riemann-Liouville fractional integrals.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında başta danışman hocam Sayın Doç.Dr. Erhan SET'e ve tez yazım aşamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğrenci arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim babam, annem ve eşim Merve SÖNMEZ ALAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$B(a,b)$	:	Beta fonksiyonu
Γ	:	Gamma fonksiyonu
$\breve{f}$	:	f fonksiyonunun simetrik dönüşümü
$\tilde{f}$	:	f fonksiyonunun anti-simetrik dönüşümü
f'	:	f fonksiyonun birinci mertebeden türevi
I	:	Reel sayılar kümesinde bir aralık
I°	:	I' nın içi
J_{a+}^{α}	:	α. dereceden sağ Riemann-Liouville kesirli integral
J_{b-}^{α}	:	α. dereceden sol Riemann-Liouville kesirli integral
$L[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$(\mathcal{J}_{\rho,\lambda.a+;w}^{\sigma}\varphi)(x)$	:	Sol taraflı genelleştirilmiş integral operatörü
$(\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b-;w}^{\sigma}\varphi)(x)$	:	Sağ taraflı genelleştirilmiş integral operatörü
f''	:	f fonksiyonun ikinci mertebeden türevi
$Q(I)$	:	Quasi konveks fonksiyonlar sınıfı
$SX(h,I)$	:	h-konveks fonksiyonlar sınıfı
$SV(h,I)$	:	h-konkav fonksiyonlar sınıfı
$B_x(a,b)$	:	Tamamlanmamış beta fonksiyonu

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar matematiğin tüm alanlarında önemli bir rol oynaması ve aktif bir araştırma alanı olmasından dolayı, özellikle son yıllarda araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir. Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm alanlarında önemli bir rol oynar. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934 yılında Pólya, Littlewood ve Hardy tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. R. Bellman ve E.F. Beckenbach (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı ikinci kitap yazılmıştır. Mitrinoviċin 1970'te yayınlanan "Analytic Inequalities" adlı kitabı yukarıda bahsedilen iki kitapta da yer almayan yeni konular içerir. Bu üç temel kaynağın yanı sıra Mitrinoviċ et al. (1993) tarafından "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte (2005) tarafından "Mathematical Inequalities" ve son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır. Eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve uygulamalı matematiğin çeşitli dallarının gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlarıdaki uygulamalara literatürde yerini almış temel eşitsizlikler büyük bir katkı sağlamaktadır. Bu eşitsizliklerin başında gelenlerden biri de konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Konveks fonksiyonların tarihi M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü pi değerini hesaplamasına kadar dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. Konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. 1906 yılında Fejer (1880-1959) trigonometrik polinomları çalışırken Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmesi olan

$$\frac{a+b}{2}\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx$$

eşitsizliklerini elde etmiştir. $g(x) = 1$ ve $x \in (a, b)$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin elde edildiği açıkça görülmektedir. Fejer'in bu sonucu ile ilgili özellikle son yıllarda olmak üzere birçok çalışma literatürde mevcuttur. Beckenbach and Bellman (1961) ve Mitrinovic (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Funtions: Inequalities) 1987 yılında Pecaric tarafından yazılmıştır. Ayrıca

Roberts and Varberg (1973), Pecaric (1992), Niculescu and Persson (2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgili çok sayıda çalışma yapmışlardır. Matematiksel analiz, uygulamalı matematik, olasılık teorisi ve matematiğin diğer çeşitli alanlarında doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların birçok uygulaması vardır. Ayrıca farklı araştırmacılar tarafından konveks fonksiyonların birçok farklı türü tanımlanmış ve bu yeni konvekslikler yardımıyla eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu konveksliklerden biri de simetrik konveks fonksiyonlardır. 2012'de, simetrik konveks fonksiyonlar sınıfını tanıtan kişilerin başında Abdallah El Farissi ve arkadaşları gelmektedir. Son yıllarda da S.S. Dragomir tarafından bu konvekslik üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Eşitsizlik teorisinin gelişmesinde önemli bir yere sahip olan kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından duyuruldu. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıkmış ve 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları hakkında ilk kaynak kitap S.G. Samko ile A.A. Kilbas ve O.I. Marichev tarafından yazılmış olup bu kavramlar üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Son yıllarda kesirli integraller yardımıyla simetrik konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler S.S. Dragomir tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Bu tezde, ilk olarak bazı konveks fonksiyon sınıfları, Riemann-Liouville kesirli integralleri ve genelleştirilmiş kesirli integraller hakkında bilgilere yer verilecektir. Daha sonra simetrik konveks fonksiyonlar sınıfı üzerine ve bu konvekslik sınıfı yardımıyla elde edilen eşitsizlikler üzerine gerekli ve yeterli literatür çalışması yapıldıktan sonra elde edilen sonuçlar sunulacaktır. Son olarak da elde edilen sonuçlardan ve yöntemlerden faydalanarak farklı türden yeni integral eşitsizlikleri elde edilmeye çalışılacak ve elde edilen sonuçların litreratürdeki çalışmalarla olan bağlantıları, karşılaştırmaları tartışılacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Konveks Fonksiyon Sınıfları İçin Literatür Araştırması

Tanım 2.1.1 (**Lineer Uzay**): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.
$+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay(vektör uzayı) denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. Her $x \in L$ için $x + \Theta = \Theta + x = x$ olacak şekilde $\Theta \in L$ vardır,

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \Theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1. $\alpha.x \in L$ dir,

L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir,

L3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir,

L4. $(\alpha\beta).x = \alpha(\beta.x)$ dir,

L5. $1.x = x$ dir(Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay adı verilir [2].

Tanım 2.1.2 F bir cisim ve V ile W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T : V \to W$ dönüsümü,

i. $T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii. $T(cu) = cT(u)$

şartlarını sağlıyorsa T ye V üzerinde lineer dönüşüm denir [2].

Tanım 2.1.3 (**Konveks Küme**): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu nedenle konveks küme tanımındaki α ve $1 - \alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan reel α, β sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [4].

Tanım 2.1.4 (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte $'' \geq ''$ olması durumunda ise f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1.1) eşitsizliği $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [16].

Aşğıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

i. I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ olmak üzere $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ fonksiyonu I aralığında artan olmasıdır.

ii. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak biçimde bir $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonunun olmasıdır.

iii. f diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

iv. f'' (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $f'' \geq 0$ olmasıdır.

v. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonunun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Yani $\forall x \in (a,b)$ için

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitsizlikte λ değişkeni x_0 a bağlıdır ve eğer f' var ise $\lambda = f'(x_0)$ yada $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

i. $f, (a,b)$ aralığında süreklidir,

ii. $f, [a,b]$ aralığında sınırlıdır [3].

Önerme 2.1.1 i. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise bu aralığın herhangi bir alt aralığı olan $[x,y]$ üzerinde de aynı şekilde konvekstir.

ii. Herhangi $x, y \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada konveks fonksiyon için verilen tanımda $t = \frac{1}{2}$ seçimi yapıldığı açık bir şekilde görülmektedir.

iii. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks, $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, 1]$ için $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ ve $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ olmak üzere

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + ... + t_nf(x_n)$$

olarak verilen 'Jensen eşitsizliği' geçerlidir.

iv. Özel olarak $t_1 = t_2 = ... = t_n = \frac{1}{n}$ seçimi yapılırsa $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ için

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

Teorem 2.1.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart

$$U = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f(x) \leq y\}$$

kümesinin konveks olmasıdır. Geometrik olarak, fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta eğri üzerinde kalan bölgenin konveks bir küme belirtmesidir [14].

Konveks fonksiyon ile ilgili tanım, teorem ve önermelerin ardından şimdi de çalışmada kullanılan bazı konvekslik çeşitlerinin tanım ve özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.5 (Quasi-Konveks Fonksiyon): I $\mathbb{R}$ üzerinde boş olmayan bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tx + (1 - t)y) \leq max\{f(x), f(y)\} \quad (0 \leq t \leq 1; \; x, y \in I) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliğini sağlarsa I üzerinde f'ye quasi-konveks fonsiyon denir ve $f \in QC(I)$ olarak ifade edilir [6].

Açıkça görülür ki her konveks fonksiyon quasi-konveks foksiyondur. Fakat quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar mevcuttur (Bknz [12]).

Tanım 2.1.6 (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): I $\mathbb{R}$ üzerinde boş olmayan bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\frac{1}{2}\big[f(tx + (1 - t)y) + f((1 - t)x + ty)\big] \leq max\{f(x), f(y)\} \quad (0 \leq t \leq 1; \; x, y \in I) \tag{2.1.3}$$

eşitsizliğini sağlarsa I üzerinde wright-quasi-konveks fonsiyon olarak tanımlanır ve $f \in WQC(I)$ olarak ifade edilir [6].

Tanım 2.1.7 (Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyon): I $\mathbb{R}$ üzerinde boş olmayan bir aralık olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\} \quad (x, y \in I) \tag{2.1.4}$$

eşitsizliğini sağlarsa I üzerinde Jensen-Quasi-konveks fonsiyon olarak tanımlanır ve $f \in JQC(I)$ olarak ifade edilir [6].

Quasi-konveks, Wright-Quasi-konveks ve Jensen-Quasi-konveks fonksiyonlar arasında

$$QC(I) \subsetneq WQC(I) \subsetneq JQC(I). \tag{2.1.5}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 2.1.8 (h-Konveks Fonksiyon): $(0, 1) \subseteq J$ olmak üzere I ve J $\mathbb{R}$ üzerinde aralıklar olsun. Ayrıca $h \not\equiv 0$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}_0^+$ ve $h : J \to \mathbb{R}_0^+$ tanımlı birer fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \quad (0 < t < 1;\ x,\ y \in I). \tag{2.1.6}$$

eşitsizliğini sağlarsa h-konveks fonksiyon olarak tanımlanır.[22]

Teorem 2.1.3 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $a, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada ve devamında, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ ve $\mathbb{N}$ sırasıyla gerçek sayılar kümesi, pozitif gerçek sayılar kümesi ve pozitif tamsayılar kümesi olsun ve $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olarak tanımlansın. (2.1.7) eşitsizliği çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiştir. (2.1.7) eşitsizliğini içeren bazı yeni tanımlar, genelleştirmeler ve sayısız uygulamalar için $[9, 15]$ referanslarına bakılabilir.

Teorem 2.1.4 I $\mathbb{R}$ üzerinde boş olmayan bir aralık ve $a < b$ olmak üzere $a, b \in I$ olsun. Ayrıca $f \in WQC(I)$ $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq max\{f(a), f(b)\}. \tag{2.1.8}$$

Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik geçerlidir.

Fejér tarafından Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir ağırlıklı genellemesi aşağıdaki teoremde verilmiştir..

Teorem 2.1.5 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ bir konveks fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$'ye göre simetrik olsun. Bu durumda:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx. \tag{2.1.9}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Çalışmanın bu kısmında önce Riemann Liouville kesirli integralleri ile ilgili, daha sonra genelleştirilmiş kesirli integraller ile ilgili tanımlar ve özellikler verilecektir. Daha sonra ise simetrik konveks fonksiyon sınıfları ile ilgili tanım, teorem, lemma ve sonuçlar verilecektir.

2.2 Riemann Liouville Kesirli İntegralleri

Tanım 2.2.1 : $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ $\mathbb{R}$'nin reel ekseni üzerinde sınırlı bir aralık ve $f \in L[a,b]$ olsun. α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\left(J_{a+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \quad (x > a;\ \Re(\alpha) > 0) \tag{2.2.1}$$

ve

$$\left(J_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\,dt \quad (x < b;\ \Re(\alpha) > 0). \tag{2.2.2}$$

Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu ([21]) ve

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leq p < \infty)$$

'dir. Sarıkaya ve arkadaşları [18] Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği aşağıdaki şekilde vermişlerdir: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[\left(J_{a+}^{\alpha} f\right)(b) + \left(J_{b-}^{\alpha} f\right)(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.2.3}$$

'dir.

(2.2.3)'nın farklı bir versiyonu Sarıkaya ve Yıldırım tarafından aşağıdaki gibi sunulmuştur ([19]): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\left(J_{\frac{a+b}{2}+}^{\alpha} f\right)(b) + \left(J_{\frac{a+b}{2}-}^{\alpha} f\right)(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.2.4}$$

'dir.

İşcan [13] (2.2.1) ve (2.2.2) Riemann-Liouville integrallerini içeren Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizlikleri aşağıdaki gibi elde etmiştir.

Teorem 2.2.1 $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ bir konveks fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$'ye göre simetrik olsun. Bu durumda:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(J_{a+}^{\alpha}g\right)(b)+\left(J_{b-}^{\alpha}g\right)(a)\right] &\leq \left[\left(J_{a+}^{\alpha}fg\right)(b)+\left(J_{b-}^{\alpha}fg\right)(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\left(J_{a+}^{\alpha}g\right)(b)+\left(J_{b-}^{\alpha}g\right)(a)\right]. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.3 Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integralinin bir genelleştirmesi olan ve ilk olarak Raina [17] tarafından, daha sonra Agarwal ve arkadaşları [1] tarafından tanıtılan sol taraflı ve sağ taraflı kesirli integraller olarak verilen genelleştirilmiş kesirli integraller hakkında bilgiler verilecektir.

$\sigma(k)\,(k \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}(x) = \mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma(0),\sigma(1),\dots}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k+\lambda)} x^k \quad (\rho,\lambda > 0;\ \ x \in \mathbb{R}) \tag{2.3.1}$$

şeklinde verilen fonksiyonların yeni bir sınıfı için;
$\lambda, \rho > 0$, $w \in \mathbb{R}$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonu integrallenebilir olmak üzere, sol taraflı ve sağ taraflı kesirli integralleri

$$\left(\mathrm{J}_{\rho,\lambda,a+;w}^{\sigma}\varphi\right)(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x > a), \tag{2.3.2}$$

$$\left(\mathrm{J}_{\rho,\lambda,b-;w}^{\sigma}\varphi\right)(x) = \int_x^b (t-x)^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}[w(t-x)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x < b) \tag{2.3.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$\mathfrak{M} := \mathcal{F}_{\rho,\lambda+1}^{\sigma}[w(b-a)^{\rho}] < \infty \tag{2.3.4}$$

ise $\mathrm{J}_{\rho,\lambda,a+;w}^{\sigma}\varphi(x)$ ve $\mathrm{J}_{\rho,\lambda,b-;w}^{\sigma}\varphi(x)$ operatörleri $L(a,b)$ üzerinde sınırlı integral operatörlerdir. Gerçekten,

$$||\varphi||_p := \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere $\varphi \in L(a,b)$ için

$$||\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda}||\varphi||_1 \tag{2.3.5}$$

ve

$$||\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}\varphi(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda}||\varphi||_1 \tag{2.3.6}$$

dir. Genelleştirilmiş kesirli integrallerinde, $\sigma(k)$ nın özel seçimleriyle bazı kesirli integral operatörleri elde edilir. Örneğin (2.3.2) ve (2.3.3) eşitliklerinde $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçimi yapılırsa α mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir.
Yaldız ve Sarıkaya konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğini ve Yaldız Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 2.3.1 $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ve $a < b$ olsun. Bu takdirde genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]}\left[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}\varphi\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}\varphi\right)(b)\right] \\
&\leq \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [23].

Teorem 2.3.2 $\rho,\ \lambda \in \mathbb{R}^+$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ bir konveks fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$'ye göre simetrik olsun. Bu durumda:

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}g\right)(b) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}g\right)(a)\right] \\
&\leq \left[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(b) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a)\right] \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}g\right)(b) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}g\right)(a)\right].
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

eşitsizliği geçerlidir [24].

2.4 Simetrik Konveks Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.4.1 (Simetrik Dönüşüm):[7, 10] $a < b$ olmak üzere $[a,b]$ $\mathbb{R}$ üzerinde kapalı bir aralık ve $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Böylece $\check{f}$ olarak gösterilen f'nin simetrik dönüşümü

$$\check{f}(t) := \frac{1}{2}\left[f(t) + f(a+b-t)\right] \quad (t \in [a,b]). \tag{2.4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

$\tilde{f}$ olarak gösterilen f'nin $[a,b]$ üzerinde anti-simetrik dönüsüm̧ü ise

$$\tilde{f}(t) := \frac{1}{2}\left[f(t) - f(a+b-t)\right] \quad (t \in [a,b]). \tag{2.4.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıkça görülür ki herhangi f fonksiyonu için $\check{f} + \tilde{f} = f$'tir.

Tanım 2.4.2 (Simetrik Konveks Fonksiyon):[7, 10] $\check{f}$ simetrik dönüşümü $[a,b]$ aralığı üzerinde konveks(konkav) ise $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik konveks(konkav) fonksiyon denir.

Teorem 2.4.1 ($\check{f}$'nin özellikleri)[10] Kabul edelim ki $\check{f}$ konveks fonksiyon olsun, bu durumda aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

1. Eğer f fonksiyonu konveks ise $\check{f}$ de konveks fonksiyondur. Tersi doğru olmayabilir.

2. $\check{f}$ fonksiyonu I üzerindeki her x için $\frac{a+b}{2}$'ye göre simetrik ise,

$$her\ x \in [a,b], \ \ \check{f}(a+b-x) = \check{f}(x)$$

sonucu sağlanır.

3. Her $x \in [a,b]$ için $\check{f}(\frac{a+b}{2}) \leq \check{f}(x) \leq \check{f}(a) = \check{f}(b) = f(a) + f(b)$'dir.

4.$\check{f}$ fonksiyonu $[\frac{a+b}{2}, b]$ aralığında artan ve $[a, \frac{a+b}{2}]$ aralığında azalandır.

Teorem 2.4.2 [7] Kabul edelim ki $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında simetrik konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde herhangi $x \in [a,b]$ için;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \check{f}(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.4.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 2.4.1 [7] Kabul edelim ki $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında simetrik konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.4.4}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.4.1 [8] $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \geq 0$ olsun, bu durumda her $a < x \leq b$ için

$$\frac{1}{2}\left[J^{\alpha}_{a^+} f(x) + J^{\alpha}_{b^-} f(a+b-x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \check{f}(t)dt \qquad (2.4.5)$$

ve her $a \leq x < b$ için

$$\frac{1}{2}\left[J^{\alpha}_{a^+} f(a+b-x) + J^{\alpha}_{b^-} f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \check{f}(t)dt \qquad (2.4.6)$$

olur.

Sonuç 2.4.2 [8] Lemma 2.4.1'deki şartlar altında

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[J^{\alpha}_{a^+} f(b) + J^{\alpha}_{b^-} f(a)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \check{f}(t)dt \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} \check{f}(t)dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{(b-t)^{\alpha-1} + (t-a)^{\alpha-1}}{2} \check{f}(t)dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[J^{\alpha}_{a^+} f(\frac{a+b}{2}) + J^{\alpha}_{b^-} f(\frac{a+b}{2})\right] \\ = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (\frac{a+b}{2} - t)^{\alpha-1} \check{f}(t)dt \\ = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (t - \frac{a+b}{2})^{\alpha-1} \check{f}(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.3 [8] Kabul edelim ki $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ simetrik fonksiyon ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda her $a < x \leq b$ için;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(x-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+} f(x) + J^{\alpha}_{b^-} f(a+b-x)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.4.7)$$

ve her $a \leq x < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+} f(a+b-x) + J^{\alpha}_{b^-} f(x)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.4.8)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 2.4.3 [8] Teorem 2.4.3'ün varsayımları altında her $a < x < b$ için

$$\begin{aligned} &\frac{a+b}{2}\left[(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}\right] \\ \leq &\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[(J_{a^+} f)\check{}(x) + (J_{b^-} f)\check{}(a+b-x)\right] \\ = &\frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\frac{(x-a)^{\alpha} + (b-x)^{\alpha}}{2}\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 2.4.4 [8] Teorem 2.4.3'ün varsayımları altında

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+1}} \int_a^b \frac{J_{a^+}f(x) + J_{b^-}f(x)}{2} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+1}} \int_a^b \frac{(J_{a^+}f)\check{}(x) + (J_{b^-}f)\check{}(x)}{2} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sonuçları elde edilir. Burada $(J_{a^+}f)\check{}$ ve $(J_{b^-}f)\check{}$, sırasıyla $J_{a^+}f$ ve $J_{b^-}f$'nin simetrik dönüşümleridir.

Lemma 2.4.2 [8] $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \geq 0$ olsun, Bu durumda her $a < x \leq b$ için;

$$\frac{1}{2}\left[J^{\alpha}_{x^-}f(a) + J^{\alpha}_{a+b-x^+}f(b)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-a)^{\alpha-1}\check{f}(t)dt \qquad (2.4.9)$$

ve her $a \leq x < b$ için

$$\frac{1}{2}\left[J^{\alpha}_{a+b-x^-}f(a) + J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (b-t)^{\alpha-1}\check{f}(t)dt \qquad (2.4.10)$$

dir.

Sonuç 2.4.5 [8] Lemma 2.4.2'nin varsayımları altında

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^-}f(a) + J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}^+}f(b)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha-1}\check{f}(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)^{\alpha-1}\check{f}(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b K(t)\check{f}(t)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$K(t) := \frac{1}{2}\begin{cases} (t-a)^{\lambda-1} if & , a < t < \frac{a+b}{2} \\ (b-t)^{\lambda-1} if & , \frac{a+b}{2} \leq t \leq b \end{cases}$$

'dır.

Teorem 2.4.4 [8] $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ simetrik bir fonksiyon ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda her $a < x \leq b$ için;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(x-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{x^-}f(a) + J^{\alpha}_{a+b-x^+}f(b)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.4.11)$$

ve her $a \leq x < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-x)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a+b-x^-}f(a) + J^{\alpha}_{x^+}f(b)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.4.12)$$

dir.

Sonuç 2.4.6 [8] Teorem 2.4.4'ün varsayımları altında

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(b)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.4.13}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.5 [8] $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Wright-Quasi-Konveks fonksiyon ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda her $a < x \leq b$ için;

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(x-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(x) + J_{b^-}^{\alpha} f(a+b-x)\right] \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{2.4.14}$$

Ayrıca

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{2.4.15}$$

ve

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(\frac{a+b}{2}) + J_{b^-}^{\alpha} f(\frac{a+b}{2})\right] \leq max\{f(a), f(b)\}. \tag{2.4.16}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sonuç 2.4.7 [8] Teorem 2.4.5'in varsayımları altında

$$\frac{\Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b \frac{J_{a^+}^{\alpha} f(x) + J_{b^-}^{\alpha} f(x)}{2} dx \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{2.4.17}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.6 [8] $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Wright-Quasi-Konveks fonksiyon ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda her $a < x \leq b$ için;

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(x-a)^{\alpha}}\left[J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{a+b-x^+}^{\alpha} f(b)\right] \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{2.4.18}$$

Ayrıca

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{\frac{a+b}{2}^+}^{\alpha} f(b) + J_{\frac{a+b}{2}^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq max\{f(a), f(b)\}. \tag{2.4.19}$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.8 [8] Teorem 2.4.6'nın varsayımları altında

$$\frac{\Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b \frac{J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(b)}{2} dx \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{2.4.20}$$

elde edilir.

Tanım 2.4.3 (h-Simetrik Konveks Fonksiyon): $(0,1) \subseteq J$ olmak üzere J, $\mathbb{R}$ üzerinde aralık olsun. $\check{f}$ simetrik dönüşümü $[a,b]$ aralıgı üzerinde h-konveks(konkav) ise $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonuna h-simetrik konveks(konkav) fonksiyon denir [7].

Teorem 2.4.7 Kabul edelim ki h Tanım 2.4.3'deki gibi bir fonksiyon olsun. Eğer $f : [a,b] \to [0,\infty)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında h-simetrik konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} \\ &\leq \left[h\left(\frac{b-x}{b-a}\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]\frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Teorem 2.4.8 Kabul edelim ki $f : [a,b] \to [0,\infty)$ $[a,b]$ aralığında h-simetrik konveks fonksiyon, h $[0,1]$ aralığında integrallenebilir ve f $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(x-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(x) + J_{b^-}^\alpha f(a+b-x)\right] \\ &\leq \alpha\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_0^1 \left[h\left(1-\frac{x-a}{b-a}s\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}s\right)\right]. \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

Teorem 2.4.9 Kabul edelim ki $f : [a,b] \to [0,\infty)$ $[a,b]$ aralığında h-simetrik konveks fonksiyon, h $[0,1]$ aralığında integrallenebilir ve f $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun, bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h(\frac{1}{2})}(x-a)^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{a+b-x^+}^\alpha f(b)\right] \\ &\leq \alpha\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)^\alpha \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} \left[h\left(1-s\right)+h\left(s\right)\right]s^{\alpha-1}dt. \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller Yardımıyla Simetrik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla üç farklı yeni lemma ispatlanmıştır. Daha sonra bu lemmalar yardımıyla simetrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak verilen lemmalar yardımıyla quasi-konveks fonksiyonlar ve h-simetrik-konveks fonksiyonlar için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen eşitlik ve eşitsizliklerin λ, σ, w gibi bazı parametrelerin özel seçimleriyle hangi eşitlik ve eşitsizliklere indirgendiği ise ispatlarından sonra sonuç olarak verilmiştir.

Lemma 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda genelleştirilmiş kesirli integraller her $a < x \leq b$ için

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w} f(x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w} f(a+b-x)\right]\\ =\ & \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-t)^{\rho}\right] \check{f}(t)dt \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

ve her $a \leq x < b$ için

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w} f(a+b-x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w} f(x)\right]\\ =\ & \int_x^b (t-x)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-x)^{\rho}\right] \check{f}(t)dt \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada, σ reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $\lambda, \rho, w \geq 0$'dır.

İspat. (2.3.3) kullanılarak her $a \leq x \leq b$ için

$$\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w} f(a+b-x) = \int_{a+b-x}^{b} (u-a-b+x)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(u-a-b+x)^{\rho}\right] f(u)du.$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte $t = a+b-u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w} f(a+b-x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-t)^{\rho}\right] f(a+b-t)dt \tag{3.1.3}$$

elde edilir.

Ayrıca (2.3.2) kullanılarak

$$\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w} f(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[(x-t)^{\rho}\right] f(t)dt. \tag{3.1.4}$$

eşitliği yazılır.

(3.1.3) ve (3.1.4) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)\Big]=\int_a^x(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\frac{f(t)+f(a+b-t)}{2}dt$$

elde edilir ki böylece (3.1.1)'in ispatı tamamlanır.

(3.1.1)'de x yerine $a+b-x$ yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(a+b-x)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(x)\Big]=\int_a^{a+b-x}(a+b-x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(a+b-x-t)^{\rho}\big]\check{f}(t)dt$$

olur. Daha sonra eşitliğin sağ tarafında $u=a+b-t$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}&\int_a^{a+b-x}(a+b-x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(a+b-x-t)^{\rho}\big]\check{f}(t)dt\\=&\int_x^b(u-x)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(u-x)^{\rho}\big]\check{f}(a+b-u)du\\=&\int_x^b(u-x)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(u-x)^{\rho}\big]\check{f}(u)du\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\check{f}(u)=\check{f}(a+b-u)$ eşitliği kullanılır. Böylece (3.1.2)'in ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.1 Lemma 3.1.1'de $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ seçilirse Lemma 2.4.1 elde edilir.

Sonuç 3.1.2 (3.1.1)'de $x=b$ ve (3.1.2)'de $x=a$ seçilirse sırasıyla

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(b)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a)\Big]\\=&\int_a^b(b-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(b-t)^{\rho}\big]\check{f}(t)dt\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(b)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a)\Big]\\=&\int_a^b(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big]\check{f}(t)dt\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}&\Big[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(b)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a)\Big]\\=&\int_a^b(b-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(b-t)^{\rho}\big]\check{f}(t)dt+\int_a^b(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big]\check{f}(t)dt\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

yazılır. Burada $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ seçilmesiyle elde edilen sonuçlar Sonuç 2.4.2 ile aynıdır.

Ek olarak (3.1.1) ve (3.1.2)'de $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f(\frac{a+b}{2}) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f(\frac{a+b}{2})\right] \qquad (3.1.8)\\
= &\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} (\frac{a+b}{2} - t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(\frac{a+b}{2} - t)^{\rho}\big]\check{f}(t)dt\\
= &\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (t - \frac{a+b}{2})^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t - \frac{a+b}{2})^{\rho}\big]\check{f}(t)dt.
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilmesiyle bulunan sonuçlar Sonuç 2.4.2 ile aynıdır.

Teorem 3.1.1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ simetrik konveks fonksiyon ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f(x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f(a+b-x)\right]}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big]} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3.1.9)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f(a+b-x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f(x)\right]}{2(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(b-x)^{\rho}\big]} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3.1.10)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada, σ reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $\lambda, \rho, w \geq 0$'dır.

İspat. f simetrik konveks bir fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \check{f}(t) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin her tarafı $(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]$ ile çarpılıp, $[a, x]$ üzerinde integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_{a}^{x}(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]dt\\
\leq &\int_{a}^{x}(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\check{f}dt\\
\leq &\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_{a}^{x}(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]dt \qquad (a < x \leq b).
\end{aligned}$$

elde edilir.

Basit bir hesaplama ile,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^{+};w}f(x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^{-};w}f(a+b-x)\right]}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big]} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

yazılır. Böylece (3.1.9) eşitsizliği ispatlanmış olur. Benzer şekilde, aynı yöntem ile (3.1.10) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.1.1'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse Teorem 2.4.3 ile aynı sonuçların elde edildiği görülür.

Lemma 3.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $a < x \leq b$ için;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w} f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w} f(b) \right] \\ = &\int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho} \right] \check{f}(t)dt \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

ve her $a \leq x < b$ için

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^-;w} f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^+;w} f(b) \right] \\ = &\int_x^b (b-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-t)^{\rho} \right] \check{f}(t)dt \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, σ reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $\lambda, \rho, w \geq 0$'dır.

İspat. (2.3.2) eşitliği kullanılarak $a < x \leq b$ için

$$\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w} f(b) = \int_{a+b-x}^{b} (b-u)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-u)^{\rho} \right] f(u)du$$

eşitliği yazılır. $t = a + b - u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w} f(b) = \int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho} \right] f(a+b-t)dt \tag{3.1.13}$$

elde edilir.

Ayrıca (2.3.3) eşitliği kullanılırsa $a < x \leq b$ için

$$\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w} f(a) = \int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[(t-a)^{\rho} \right] f(t)dt \tag{3.1.14}$$

yazılır.

(3.1.13) ve (3.1.14) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w} f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w} f(b) \right] = \int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho} \right] \frac{f(t)+f(a+b-t)}{2}dt,$$

elde edilir. Böylece (3.1.11)'in ispatı tamamlanmış olur.

3.1.11'de x yerine $a + b - x$ yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^-;w} f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^+;w} f(b) \right] = \int_a^{a+b-x} (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho} \right] \check{f}(t)dt.$$

yazılır. $u = a + b - t$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\int_x^b (b-u)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-u)^{\rho} \right] \check{f}(a+b-u)du = \int_x^b (b-u)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(b-u)^{\rho} \right] \check{f}(u)du$$

elde edilir ve (3.1.12) kanıtlanır, ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.1.4 Lemma 3.1.2'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse eşitlik Lemma 2.4.2 eşitliğine indirgenir.

Sonuç 3.1.5 (3.1.11) ve (3.1.12)'de $x = \frac{a+b}{2}$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\frac{a+b}{2}^-;w} f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\frac{a+b}{2}^+;w} f(b) &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big] \check{f}(t)dt \\ &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(b-t)^{\rho}\big] \check{f}(t)dt \\ &= \int_a^b K(t)\check{f}(t)dt, \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

elde edilir. Burada

$$K(t) = \begin{cases} (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big] & , a < t < \frac{a+b}{2} \\ (b-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(b-t)^{\rho}\big] & , \frac{a+b}{2} \le t \le b \end{cases}$$

dir.

Sonuç 3.1.6 Sonuç 3.1.5'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilmesiyle Sonuç 2.4.5 ile aynı sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksion olsun. Bu durumda genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w} f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w} f(b)}{2(x-a)^{\lambda} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big]} \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.16}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^-;w} f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^+;w} f(b)}{2(b-x)^{\lambda} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(b-x)^{\rho}\big]} \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.17}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada σ reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $\lambda, \rho, w \ge 0$'dır.

İspat. f simetrik konveks fonksiyon olduğundan;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \check{f} \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

yazılır.

Eşitsizliğin her tarafı $(t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big]$ ile çarpılıp $[a,x]$ üzerinde integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big] dt \\ \le & \int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big] \check{f}(t)dt \\ \le & \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big] dt \qquad (a < x \le b) \end{aligned}$$

elde edilir.

Basit bir hesaplama ile;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)\right]}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

yazılır. Böylece (3.1.16)'nin ispatı tamamlanır. Benzer şekilde, aynı metod uygulanırsa, (3.1.17) elde edilir.

Sonuç 3.1.7 Teorem 3.1.2'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse Theorem 2.4.4 ile aynı sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $Wright-quasi$-konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]} \leq max\{f(a), f(b)\}, \tag{3.1.18}$$

eşitsizliği geçerlidir.

(3.1.18)'de $x = b$ seçilirse;

$$\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(b) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a)}{2(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(b-a)^{\rho}\right]} \leq max\{f(a), f(b)\}, \tag{3.1.19}$$

ve $x = \frac{a+b}{2}$ seçilirse;

$$\frac{2^{\lambda-1}\left[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(\frac{a+b}{2}) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(\frac{a+b}{2})\right]}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}\right]} \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{3.1.20}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada, σ reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $\lambda, \rho, w \geq 0$'dır.

İspat. $x = a$, $y = b$ ve $t = \frac{s-a}{b-a} \in [0,1]$ için $s \in [a,b]$ seçilirse;

$$\check{f}(s) = \frac{1}{2}\left[f(a+b-s) + f(s)\right] \leq max\{f(a), f(b)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $(x-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-s)^{\rho}\right]$ ile çarpılıp , $[a,x]$ üzerinde s'ye göre integral alınıp ve (3.1.1) eşitliği kullanılarak;

$$\int_a^x (x-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-s)^{\rho}\right]\check{f}(s)ds \leq max\{f(a), f(b)\}\int_a^x (x-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-s)^{\rho}\right]ds.$$

elde edilir.

Sonuç olarak ,

$$\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]} \leq max\{f(a), f(b)\}$$

yazılır.

Böylece, ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.8 Teorem 3.1.3'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse Theorem 2.4.5 elde edilir.

Teorem 3.1.4 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $Wright - quasi$-konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda genelleştirilmiş kesirli integraller için;

$$\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big]} \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği geçerlidir.
(3.1.21)'de $x = \frac{a+b}{2}$ olarak seçilirse;

$$\frac{2^{\lambda-1}\big[\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\frac{a+b}{2}^+;w}f(b) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\frac{a+b}{2}^-;w}f(a)\big]}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}\big]} \leq max\{f(a), f(b)\} \tag{3.1.22}$$

olur. Burada σ reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $\lambda, \rho, w \geq 0$'dır.

İspat. (2.1.6)'de $x = a$, $y = b$ ve $t = \frac{s-a}{b-a} \in [0, 1]$ için $s \in [a, b]$ seçilirse;

$$\check{f}(s) = \frac{1}{2}\big[f(a+b-s) + f(s)\big] \leq max\{f(a), f(b)\}$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafı $(s-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(s-a)^{\rho}\big]$ ile çarpılıp, $[a, x]$ üzerinde s'ye göre integral alınıp ve (3.1.12) eşitliği kullanılarak,

$$\int_a^x (s-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(s-a)^{\rho}\big]\check{f}(s)ds \leq max\{f(a), f(b)\}\int_a^x (s-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(s-a)^{\rho}\big]ds$$

yazılır.
Sonuç olarak,

$$\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big]} \leq max\{f(a), f(b)\}$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.9 Teorem 3.1.4'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse Theorem 2.4.6 elde edilir.

Teorem 3.1.5 $f : [a, b] \to [0, \infty)$ $[a, b]$ aralığında h-simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, h $[0, 1]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big]}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \leq\ & \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}} \\ \leq\ & \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_0^1 (1-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(1-s)(x-a)^{\rho}\big]\left[h\left(1-\frac{x-a}{b-a}s\right) + h\left(\frac{x-a}{b-a}s\right)\right]ds \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. h-simetrik konveks fonksiyon olduğundan;

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \breve{f}(t) \leq \left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right]\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.24}$$

yazılır. Eşitsizliğin sol tarafının ispatı için, (3.1.24) eşitsizliğinin sol ve orta kısımları $(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]$ ile çarpılıp, $[a,x]$ üzerinde t'ye göre integralini alınırsa

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]dt \leq \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2}$$

yazılır.

Basit bir hesaplama ile

$$\frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big]}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}} \tag{3.1.25}$$

elde edilir, böylece birinci kısmın ispatı tamamlanır.

Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı için, (3.1.24) eşitsizliğinin sağ ve orta kısımları $(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]$ ile çarpılıp, $[a,x]$ üzerinde t'ye göre integralini alınırsa her $a<x\leq b$. için

$$\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right]dt$$

yazılır. Daha sonra $t=(1-s)a+sx$ değişken değiştirmesi uygulanırsa $s\in[0,1]$, $dt=(x-a)ds$, $\frac{b-t}{b-a}=1-\frac{x-a}{b-a}s$, $\frac{t-a}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}s$ ve $x-t=(1-s)(x-a)$ ifadeleri yazılırsa;

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2}\\ \leq\ &\int_0^1\left\{\big[(1-s)(x-a)\big]^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w\big[(1-s)(x-a)\big]^{\rho}\big]\left[h\left(1-\frac{x-a}{b-a}s\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}s\right)\right](x-a)d\right.\\ \times\ &\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a^+;w}f(x)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;w}f(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}}\\ \leq\ &\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_0^1(1-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w[(1-s)(x-a)]^{\rho}\big]\left[h\left(1-\frac{x-a}{b-a}s\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}s\right)\right]ds.\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.10 Teorem 3.1.5'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilirse Teorem 2.4.8 ile aynı sonuç oluşur.

Teorem 3.1.6 $f : [a,b] \to [0,\infty)$ $[a,b]$ aralığında h-simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, h $[0,1]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu durumda genelleştirilmiş kesirli integraller için;

$$\begin{aligned} &\frac{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \leq\ & \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2} \\ \leq\ & (b-a)^{\lambda}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(s(b-a))^{\rho}\right]\left[h\left(1-s\right)+h\left(s\right)\right]ds\frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. h-simetrik konveks olduğundan;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \check{f}(t) \\ &\leq \left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right]\frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

yazılır. Eşitsizliğin sol tarafının ispatı için, (3.1.28) eşitsizliğinin sol ve orta kısımları $(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]$ ile çarpılıp, $[a,x]$ üzerinde t'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^x(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-t)^{\rho}\right]dt \\ \leq\ & \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2}. \end{aligned}$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} &\frac{(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \leq\ & \frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2}. \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

yazılır.

Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı için, (3.1.28) eşitsizliğinin sağ ve orta kısımları $(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]$ ile çarpılıp, $[a,x]$ üzerinde t'ye göre integral alınırsa her $a < x \leq b$ için

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a)+\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2} \\ \leq\ & \int_a^x(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]\left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right]dt\frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

yazılır. Daha sonra $t = (1-s)a + sb$ değişken değiştirmesini uygulanıp, $s \in [0,1]$, *i.e.* $dt = (b-a)ds$, $\frac{b-t}{b-a} = 1-s$, $\frac{t-a}{b-a} = s$ ve $t-a = s(b-a)$ ifadeleri yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2} \\
\leq\ & \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} \big[s(b-a)\big]^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w\big[s(b-a)\big]^{\rho}\big] \Big[h\,(1-s) + h\,(s)\Big](b-a)ds \\
\times\ & \frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

yazılır. Basit bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x^-;w}f(a) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+b-x^+;w}f(b)}{2} \\
\leq\ & (b-a)^{\lambda} \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} s^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w[s(b-a)]^{\rho}\big] \Big[h\,(1-s) + h\,(s)\Big] ds \frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.11 Teorem 3.1.6'da $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse Teorem 2.4.9 elde edilir.

3.2 Kesirli İntegraller Yardımıyla Simetrik Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard-Fejer Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla iki yeni özdeşlik verilmiş ve bu özdeşliklere bağlı olarak, simetrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlarda $\lambda = 0, \sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ şeklinde seçilerek Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren eşitlikler ve eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 3.2.1 λ, ρ, $w \in \mathbb{C}$ ile $\Re(\rho) > 0$, ve $\sigma(k) \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olsun. Ayrıca $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun , $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)\Big] \\
&\quad = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\check{f}(t)\,g(t)\,dt \quad (a < x \leq b)
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(a+b-x) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(x)\Big] \\
&\quad = \int_x^b (t-x)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-x)^{\rho}\big]\check{f}(t)\,g(t)\,dt \quad (a \leq x < b).
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (3.2.1)'i ispatlayalım. (2.3.3)'den, $a < x \leq b$ için,

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w} fg\right)(a+b-x)\\ &\quad= \int_{a+b-x}^{b} (u-a-b+x)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(u-a-b+x)^{\rho}\right] f(u)\, g(u)\, du.\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

yazılır.(3.2.3)'in sağ kısmında $t = a+b-u$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w} fg\right)(a+b-x)\\ &\quad= \int_{a}^{x} (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-t)^{\rho}\right] f(a+b-t)\, g(a+b-t)\, dt.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

elde edilir. $g(t)$ $[a,b]$ aralığında $t = (a+b)/2$'ye göre simetrik olduğundan ve (3.2.4)'den,

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w} fg\right)(a+b-x)\\ &\quad= \int_{a}^{x} (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(x-t)^{\rho}\right] f(a+b-t)\, g(t)\, dt.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

yazılır.

Ayrıca (2.3.2)'den,

$$\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w} fg\right)(x) = \int_{a}^{x} (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[(x-t)^{\rho}\right] f(t) g(t)\, dt. \tag{3.2.6}$$

elde edilir.

(3.2.5) ve (3.2.6) taraf tarafa toplanıp (2.4.1) kullanılırsa, istenilen (3.2.1) eşitlik elde edilir.

(3.2.1)'e benzer bir yöntem ile (3.2.2) eşitliği de elde edilir.

Lemma 3.2.1'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ yazılırsa Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla bulunan eşitlikleri içeren aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1 $\alpha \in \mathbb{C}$ ile $\Re(\alpha) > 0$ ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun . Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left(J^{\alpha}_{a+} fg\right)(x) + \left(J^{\alpha}_{b-} fg\right)(a+b-x)\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \check{f}(t)\, g(t)\, dt\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$(a < x \leq b)$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big[\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(a+b-x)+\left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(x)\Big] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}\check{f}(t)\,g(t)\,dt \qquad (3.2.8)
\end{aligned}$$

$$(a \leq x < b)\,.$$

eşitlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.2 Lemma 3.2.1 ve Sonuç 3.2.1'de $g(t) = 1$ yazılırsa sırasıyla, Lemma 3.1.1 ve Lemma 2.4.1'deki bilinen eşitlikler elde edilir.

Teorem 3.2.1 λ, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}_0^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi, ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]\|g\|_{\min}} \qquad (3.2.9)$$

ve

$$\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3.2.10)$$

$$(a < x \leq b)\,;$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(a+b-x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(x)}{2(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(b-x)^{\rho}\right]\|g\|_{\min}} \qquad (3.2.11)$$

ve

$$\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(a+b-x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(x)}{2(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(b-x)^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3.2.12)$$

$$(a \leq x < b)\,.$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. f $[a,b]$ aralığında simetrik konveks fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \check{f}(t) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (t \in [a,b]) \tag{3.2.13}$$

yazılır. (3.2.13)'in iki tarafı da $(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]g(t)$ ile çarpılıp, t'ye göre a'dan x'e $a < x \leq b$ integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]g(t)dt \\ & \leq \int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\check{f}(t)\,g(t)\,dt \\ & \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]g(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

elde edilir.
(3.2.1) (3.2.14)'in ikinci kısmında kullanılırsa ve (3.2.14)'in birinci ve üçüncü kısımları için de

$$\int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\,dt = (x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\big[w(x-a)^{\rho}\big], \tag{3.2.15}$$

integrali kullanılırsa istenen (3.2.9) ve (3.2.10) eşitsizlikleri elde edilir.

Benzer şekilde (3.2.9) ve (3.2.10) ispatlarındaki gibi, (3.2.11) ve (3.2.12) eşitsizlikleri ispatlanabilir.

Teorem 3.2.1'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilen eşitsizlikleri içeren aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $[a,b]$ $(a<b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+_0$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Big[\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(x) + \left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(a+b-x)\Big]}{2(x-a)^{\alpha}\|g\|_{\min}} \tag{3.2.16}$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Big[\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(x) + \left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(a+b-x)\Big]}{2(x-a)^{\alpha}\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.17}$$

$$(a < x \leq b)\,;$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\Big[\left(J_{a+}^{\alpha} fg\right)(a+b-x)+\left(J_{b-}^{\alpha} fg\right)(x)\Big]}{2(b-x)^{\alpha}\|g\|_{\min}} \tag{3.2.18}$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Big[\left(J_{a+}^{\alpha} fg\right)(a+b-x)+\left(J_{b-}^{\alpha} fg\right)(x)\Big]}{2(b-x)^{\alpha}\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.19}$$

$$(a \leq x < b)\,.$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.4 Teorem 3.2.1 ve Sonuç 3.2.3'de $g(t) \equiv 1$ seçilirse sırasıyla, Teorem 3.1.1 ve Teorem 2.4.3'deki bilinen eşitsizlikler elde edilir.

Lemma 3.2.2 λ, ρ, $w \in \mathbb{C}$ ile $\Re(\rho) > 0$, ve $\sigma(k) \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi olsun. Ayrıca $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun , $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $t = (a+b)/2$'ye göre simetrik integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)\Big]\\&=\int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big]\check{f}(t)\,g(t)\,dt \quad (a < x \leq b)\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)-;w} fg\right)(a)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x+;w} fg\right)(b)\Big]\\&=\int_x^b (b-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(b-t)^{\rho}\big]\check{f}(t)\,g(t)\,dt \quad (a \leq x < b).\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (2.3.2) kullanılırsa,

$$\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)=\int_{a+b-x}^{b}(b-u)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(b-u)^{\rho}\big]f(u)\,g(u)\,du \tag{3.2.22}$$

yazılır. (3.2.22)'de $u = a+b-t$ yazılırsa,

$$\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)=\int_{a}^{x}(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big]f(a+b-t)\,g(a+b-t)\,dt$$

elde edilir. $g(t)$ $[a,b]$ üzerinde $t = (a+b)/2$'ye göre simetrik olduğundan,

$$\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)=\int_{a}^{x}(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big]f(a+b-t)\,g(t)\,dt \tag{3.2.23}$$

yazılır. (2.3.3) kullanılırsa;

$$\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) = \int_a^x (t-a)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right] f(t)\, g(t)\, dt \tag{3.2.24}$$

elde edilir. Son olarak, (3.2.23) ve (3.2.24) taraf tarafa toplanıp, simetrik dönüşüm tanımı kullanıldığında istenilen (3.2.20) eşitliği elde edilir.

(3.2.21) eşitliği (3.2.20) eşitliğinin ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

Lemma 3.2.2'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilirse, aşağıdaki sonuçta Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren eşitlikler elde edilir.

Sonuç 3.2.5 $\alpha \in \mathbb{C}$ ile $\Re(\alpha) > 0$ ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[\left(J^{\alpha}_{x-} fg\right)(a) + \left(J^{\alpha}_{(a+b-x)+} fg\right)(b)\right] \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-a)^{\alpha-1} \check{f}(t)\, g(t)\, dt \\ & (a < x \leq b) \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[\left(J^{\alpha}_{(a+b-x)-} fg\right)(a) + \left(J^{\alpha}_{x+} fg\right)(b)\right] \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} \check{f}(t)\, g(t)\, dt \\ & (a \leq x < b). \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.6 Lemma 3.2.2 ve Sonuç 3.2.5'de $g(t) \equiv 1$ seçilirse sırasıyla, Lemma 3.1.2 ve Lemma 2.4.2'deki bilinen eşitlikler elde edilir.

Teorem 3.2.2 λ, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}_0^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi, ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)}{2(x-a)^{\lambda} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right] \|g\|_{\min}} \tag{3.2.27}$$

ve

$$\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.28}$$

$$(a < x \leq b);$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x+;w} fg\right)(b)}{2(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(b-x)^{\rho}\right]\|g\|_{\min}} \tag{3.2.29}$$

ve

$$\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x+;w} fg\right)(b)}{2(b-x)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(b-x)^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.30}$$

$$(a \leq x < b).$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. f $[a,b]$ aralığında simetrik konveks fonksiyon olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \check{f}(t) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (t \in [a,b]) \tag{3.2.31}$$

yazılır. (3.2.31)'in iki tarafı da $(t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]g(t)$ ile çarpılıp, t'ye göre a'dan x'e $a < x \leq b$ integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) & \int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]g(t)dt \\ & \leq \int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]\check{f}(t)\,g(t)\,dt \\ & \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]g(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

elde edilir.

(3.2.2) (3.2.32)'in ikinci kısmında kullanılırsa ve (3.2.32)'in birinci ve üçüncü kısımları için de

$$\int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]dt = (x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right], \tag{3.2.33}$$

integrali kullanılırsa istenen (3.2.27) ve (3.2.28) eşitsizlikleri ispatlanır.

Benzer şekilde (3.2.27) ve (3.2.28) ispatlarındaki gibi, (3.2.29) ve (3.2.30) elde edilir.

Teorem 3.2.2'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ yazılırsa, Riemmann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 3.2.7 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $[a,b]$ $(a<b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ simetrik konveks bir fonksiyon ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\left[\left(J^{\alpha}_{x-}fg\right)(a)+\left(J^{\alpha}_{(a+b-x)+}fg\right)(b)\right]}{2(x-a)^{\alpha}\|g\|_{\min}} \tag{3.2.34}$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\left[\left(J^{\alpha}_{x-}fg\right)(a)+\left(J^{\alpha}_{(a+b-x)+}fg\right)(b)\right]}{2(x-a)^{\alpha}\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.35}$$

$$(a<x\leq b);$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)\left[\left(J^{\alpha}_{(a+b-x)-}fg\right)(a)+\left(J^{\alpha}_{x+}fg\right)(b)\right]}{2(b-x)^{\alpha}\|g\|_{\min}} \tag{3.2.36}$$

ve

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\left[\left(J^{\alpha}_{(a+b-x)-}fg\right)(a)+\left(J^{\alpha}_{x+}fg\right)(b)\right]}{2(b-x)^{\alpha}\|g\|_{\infty}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.37}$$

$$(a\leq x<b).$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.8 Teorem 3.2.2 ve Sonuç 3.2.7'de $g(t)\equiv 1$ seçilirse sırasıyla, Teorem 3.1.2 ve Teorem 2.4.4'deki bilinen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 3.2.3 λ, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k)\in\mathbb{R}_0^+$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve $[a,b]$ $(a<b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Wright-quasi-konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(a<x\leq b)$ için;

$$\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a),f(b)\} \tag{3.2.38}$$

$$\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(b)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a)}{2(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(b-a)^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a),f(b)\}; \tag{3.2.39}$$

$$\frac{2^{\lambda-1}\left[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}f\right)(\frac{a+b}{2})+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}f\right)(\frac{a+b}{2})\right]}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a),f(b)\}. \tag{3.2.40}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $[a,b]$ aralığında Wright-quasi-konveks olduğundan, (2.1.6)'de $x = a$, $y = b$ ve $s \in [a,b]$ için $t = \frac{s-a}{b-a} \in [0,1]$ seçilirse,

$$\check{f}(s) = \frac{1}{2}\big[f(a+b-s) + f(s)\big] \leq \max\{f(a), f(b)\}. \tag{3.2.41}$$

yazılır. (3.2.41)'in iki tarafı da $(x-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-s)^{\rho}\big]g(s)$ ile çarpılıp s'ye göre a'dan x'e integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}&\int_a^x (x-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-s)^{\rho}\big]\check{f}(s)\,g(s)\,ds\\ &\quad\leq \max\{f(a), f(b)\}\int_a^x (x-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-s)^{\rho}\big]g(s)\,ds.\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

elde edilir. (3.2.42)'nin sol tarafına (3.2.1) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big\{\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg(x) + \mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg(a+b-x)\Big\}\\ &\quad\leq \max\{f(a), f(b)\}\,\|g\|_{\infty}\int_a^x (x-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-s)^{\rho}\big]\,ds,\end{aligned}$$

yazılır. (3.2.15) kullanıldığından ötürü, istenen (3.2.38) eşitsizliği ispat edilir.

(3.2.38)'de $x = b$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ yazılırsa, sırasıyla, (3.2.39) ve (3.2.40) eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 3.2.3'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ yazılırsa , aşağıdaki sonuçta Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 3.2.9 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be Wright-quasi-konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+_0$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(a < x \leq b)$ için;

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Big[\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(x) + \left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(a+b-x)\Big]}{2(x-a)^{\lambda}\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a), f(b)\} \tag{3.2.43}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Big[\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(b) + \left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(a)\Big]}{2(b-a)^{\lambda}\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a), f(b)\}; \tag{3.2.44}$$

$$\frac{2^{\lambda-1}\Gamma(\alpha+1)\Big[\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(\frac{a+b}{2}) + \left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(\frac{a+b}{2})\Big]}{(b-a)^{\lambda}\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a), f(b)\}. \tag{3.2.45}$$

eşitsizlikler geçerlidir.

Sonuç 3.2.10 Teorem 3.2.3 ve Sonuç 3.2.9'de $g(t) \equiv 1$ seçilirse, sırasıyla, Teorem 3.1.3 ve Teorem 2.4.5'deki bilinen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 3.2.4 $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}_0^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Wright-quasi-konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $a < x \leq b$ için;

$$\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)}{2(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a), f(b)\} \tag{3.2.46}$$

ve

$$\frac{2^{\lambda-1}\left[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\frac{a+b}{2}+;w} fg\right)(b) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,\frac{a+b}{2}-;w} fg\right)(a)\right]}{(b-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(\frac{b-a}{2})^{\rho}\right]\|g\|_{\infty}} \leq \max\{f(a), f(b)\}. \tag{3.2.47}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $[a,b]$ aralığında Wright-quasi-konveks olduğundan, (2.1.6)'de $x = a$, $y = b$ ve $s \in [a,b]$ için $t = \frac{s-a}{b-a} \in [0,1]$ seçilirse,

$$\check{f}(s) = \frac{1}{2}\left[f(a+b-s) + f(s)\right] \leq \max\{f(a), f(b)\}. \tag{3.2.48}$$

yazılır. (3.2.41)'in iki tarafı $(s-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(s-a)^{\rho}\right]g(s)$ ile çarpılıp s'ye göre a'dan x'e integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}&\int_a^x (s-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(s-a)^{\rho}\right]\check{f}(s)\,g(s)\,ds \\ &\quad\leq \max\{f(a), f(b)\}\int_a^x (s-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(s-a)^{\rho}\right]g(s)\,ds.\end{aligned} \tag{3.2.49}$$

elde edilir. (3.2.49)'nin sol tarafına (3.2.2) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)\right\} \qquad arc \\ &\quad\leq \max\{f(a), f(b)\}\,\|g\|_{\infty}\int_a^x (s-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(s-a)^{\rho}\right]ds,\end{aligned}$$

yazılır. (3.2.33) kullanıldığından ötürü, istenen (3.2.46) eşitsizliği ispat edilir.

(3.2.46)'de $x = \frac{a+b}{2}$ yazılırsa, (3.2.47) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.4'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilirse, aşağıdaki sonuçta Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 3.2.11 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $[a,b]$ $(a<b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun . Ayrıca $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Wright-quasi-konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $a<x\le b$ için;

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)\Big[\big(J^{\alpha}_{x-}fg\big)(a)+\big(J^{\alpha}_{(a+b-x)+}fg\big)(b)\Big]}{2(x-a)^{\lambda}\|g\|_{\infty}}\le \max\{f(a),f(b)\} \tag{3.2.50}$$

ve

$$\frac{2^{\lambda-1}\Gamma(\alpha+1)\Big[\Big(J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}+}fg\Big)(b)+\Big(J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}-}fg\Big)(a)\Big]}{(b-a)^{\lambda}\|g\|_{\infty}}\le \max\{f(a),f(b)\}. \tag{3.2.51}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.12 Teorem 3.2.4 ve Sonuç 3.2.11'de $g(t)\equiv 1$ seçilirse sırasıyla, Teorem 3.1.4 ve Teorem 2.4.6'deki bilinen eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 3.2.5 $\lambda,\ \rho\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k)\in\mathbb{R}_0^+$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve $[a,b]$ $(a<b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ be h-simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, h $[0,1]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon, $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $a<x\le b$ için;

$$\begin{aligned}&\frac{\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &\le \frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\|g\|_{\min}}\end{aligned} \tag{3.2.52}$$

ve

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\|g\|_{\infty}}\\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_0^1(1-s)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(1-s)(x-a)^{\rho}\right]\\ &\times\left[h\left(1-\frac{x-a}{b-a}s\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}s\right)\right]ds.\end{aligned} \tag{3.2.53}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. f $[a,b]$ aralığında h-simetrik konveks olduğundan $t\in[a,b]$ için,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le \check{f}(t)\\ &\le\left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right]\frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned} \tag{3.2.54}$$

yazılır. (3.2.54) eşitsizliğinin ilk tarafı $(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]g(t)$ ile çarpılıp, t'ye göre a'dan x'e integrali alınıp, (3.2.1) kullanılırsa $a<x\leq b$ için,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\|g\|_{\min}\int_a^x(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\,dt\\&\leq\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)\Big],\end{aligned}\tag{3.2.55}$$

elde edilir. (3.2.15) kullanılarak, istenen (3.2.52) eşitsizliği elde edilir.

(3.2.54) eşitsizliğinin ikinci tarafı $(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]g(t)$ ile çarpılıp, t'ye göre a'dan x'e integrali alınıp, (3.2.1) kullanılırsa her $a<x\leq b$ için;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)\Big]\\&\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^x(x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(x-t)^{\rho}\big]\left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right]g(t)\,dt.\end{aligned}\tag{3.2.56}$$

yazılır.(3.2.56)'in sağ tarafında $t=(1-s)a+sx$ değişken değiştirmesi uygulanırsa;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}fg\right)(x)+\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}fg\right)(a+b-x)\Big]\\&\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_0^1\big[(1-s)(x-a)\big]^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\Big[w\big[(1-s)(x-a)\big]^{\rho}\Big]\\&\times\left[h\left(1-\frac{x-a}{b-a}s\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}s\right)\right]g\left((1-s)a+sx\right)(x-a)\,ds.\end{aligned}\tag{3.2.57}$$

elde edilir.(3.2.57)'den, (3.2.53) eşitsizliğinni ispatı kolayca elde edilir.

Teorem 3.2.5'de $\lambda=\alpha$, $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ seçilirse, aşağıdaki sonuçta Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 3.2.13 $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ ve $[a,b]$ $(a<b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}_{0}$ h-simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, h $[0,1]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon, $g:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}_{0}$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $a<x\leq b$ için;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&\leq\frac{\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(x)+\left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\|g\|_{\min}}\end{aligned}\tag{3.2.58}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\left(J^{\alpha}_{a+}fg\right)(x)+\left(J^{\alpha}_{b-}fg\right)(a+b-x)}{2(x-a)^{\lambda}\|g\|_{\infty}}&\leq\frac{f(a)+f(b)}{2\,\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\lambda-1}\\&\times\left[h\left(1-\frac{x-a}{b-a}s\right)+h\left(\frac{x-a}{b-a}s\right)\right]ds\end{aligned}\tag{3.2.59}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.14 Teorem 3.2.5 ve Sonuç 3.2.13'de $g(t) \equiv 1$ seçilirse sırasıyla, Teorem 3.1.5 ve Teorem 2.4.8'deki eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 3.2.6 λ, $\rho \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma(k) \in \mathbb{R}_0^+$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ sınırlı bir dizi ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ h-simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, h $[0,1]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $a < x \leq b$ için;

$$\begin{aligned} &\frac{(x-a)^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right]}{h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\qquad \leq \frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)}{\|g\|_{\min}} \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)}{(b-a)^{\lambda}\,\|g\|_{\infty}} \\ &\leq \left[f(a)+f(b)\right] \int_0^{\frac{x-a}{b-a}} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(s(b-a))^{\rho}\right] \left\{h\left(s\right) + h\left(1-s\right)\right\} ds \end{aligned} \tag{3.2.61}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. (3.2.54) eşitsizliğinin ilk tarafı

$$(t-a)^{\lambda-1}\,\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]g(t) \tag{3.2.62}$$

ile çarpılıp, t'ye göre a'dan x'e integrali alınırsa ve (3.2.20) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \|g\|_{\min} \int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right] dt \\ &\leq \frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)\Big] \quad (a < x \leq b). \end{aligned} \tag{3.2.63}$$

elde edilir.

$$\int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right] dt = (x-a)^{\lambda}\,\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}\left[w(x-a)^{\rho}\right] \quad (a < x \leq b) \tag{3.2.64}$$

integral formülü (3.2.63)'in sol kısmında kullanılırsa, istenen (3.2.60) eşitsizliği elde edilir.

(3.2.54) eşitsizliğinin ikinci tarafı (3.2.62) ile çarpılıp, t'ye göre a'dan x'e integrali alınırsave (3.2.20) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Big[\left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,x-;w} fg\right)(a) + \left(\mathrm{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,(a+b-x)+;w} fg\right)(b)\Big] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\|g\|_{\infty} \\ &\times \int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\left[w(t-a)^{\rho}\right]\left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right) + h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right] dt. \end{aligned} \tag{3.2.65}$$

elde edilir. (3.2.65) eşitsizliğinin sağ tarafında $t = (1-s)a + sb$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\int_a^x (t-a)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w(t-a)^{\rho}\big]\left[h\left(\frac{b-t}{b-a}\right)+h\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right]dt \\ &= (b-a)^{\lambda}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}} s^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}\big[w[s(b-a)]^{\rho}\big]\big\{h(s)+h(1-s)\big\}\,ds. \end{aligned} \tag{3.2.66}$$

yazılır. (3.2.65)'de (3.2.66) uygulanırsa istenen (3.2.61) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.6'de $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilirse, aşağıdaki sonuçta Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren eşitsizlikler elde edilir.

Sonuç 3.2.15 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $[a,b]$ $(a < b)$ $\mathbb{R}$'de bir aralık olsun. Ayrıca $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ h-simetrik konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon, h $[0,1]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon, $g : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ $(a+b)/2$'ye göre simetrik ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(a < x \leq b)$ için;

$$\frac{(x-a)^{\alpha}}{h\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma(\alpha+1)}\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\big(J^{\alpha}_{x-}fg\big)(a)+\big(J^{\alpha}_{(a+b-x)+}fg\big)(b)}{\|g\|_{\min}} \tag{3.2.67}$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{\big(J^{\alpha}_{x-}fg\big)(a)+\big(J^{\alpha}_{(a+b-x)+}fg\big)(b)}{(b-a)^{\lambda}\,\|g\|_{\infty}} \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{b-a}} \big\{h(s)+h(1-s)\big\}\,ds \end{aligned} \tag{3.2.68}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Sonuç 3.2.16 Teorem 3.2.6 ve Sonuç 3.2.15'de $g(t) \equiv 1$ seçilirse, sırasıyla Teorem 3.1.6 ve Teorem 2.4.9'daki eşitsizlikler elde edilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmanın ana bölümünü oluşturan üçüncü bölümde, ilk olarak simetrik konveks fonksiyon sınıfları için genelleştirilmiş kesirli integraller içeren yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra simetrik konveks fonksiyon sınıfları için genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerini ve Riemann-Liouville kesirli integral operatörlerini içeren Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Bulunan sonuçların bazı özel halleri literatürde mevcut önceki çalışmaları kapsamaktadır. Elde edilen bu sonuçlar iki farklı makale olarak hazırlanmıştır. Bu makalelerden birincisi "Generalized fractional integral inequalities for some classes of symmetrized convex functions" başlıklı çalışma altında "International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2018)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup "AIP Conference Proceedings" isimli dergide basılmıştır. İkincisi "Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities involving generalized fractional integral operators" başlıklı çalışma altında "International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2018)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup uluslararası indeksli bir dergiye gönderilmiştir. İlgili araştırmacılar bu tezde verilen yöntemlerden, özdeşliklerden ve sonuçlardan faydalanarak simetrik konveks sınıfları yardımıyla bu tezde kullanılmayan kesirli integral operatörleri için yeni Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Agarwal. R.P., Luo, M.-J., & Raina, R.K. (2016). On Ostrowski type inequalities. *Fasciculi Mathematici*, 204, 5-27.

[2] Anton, H., & Rorres, C. (2005). Elementary Linear Algebra. *Jhon Wiley and Sonsi Inc.*

[3] Azpeitia, A.G. (1994). Convex functions and the Hadamard inequality. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 28(1), 7-12.

[4] Bayraktar, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, *ISBN* 975–442-035-1.

[5] Budak, H., Usta, F., Sarıkaya, M.Z., & Özdemir, M.E. (2017). On generalization of midpoint type inequalities with generalized fractional integral operators. https://www.researchgate.net/publication/312596723.

[6] Dragomir, S. S., & Pearce, C. E. M., (1998). Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. *Bull. Australian Math. Soc.*, **57**(3), 377-385.

[7] Dragomir, S.S., (2016). Symmetrized convexity and Hermite-Hadamard type inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, 10 No:4, 901-918.

[8] Dragomir, S.S., (2017). Some inequalities of Hermite-Hadamard type for symmetrized convex functions and Riemann-Liouville fractional integrals. *RGMIA Res. Rep. Coll.* 20, Art. 46, 15 pp.

[9] Dragomir, S.S., & Pearce, C.E.M., (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. *RGMIA Monographs, Victoria University.*

[10] El Farissi, A., Benbachir, M., & Dahmane, M., (2012). An extension of the Hermite-Hadamard inequality for convex symmetrized functions. *Real Analysis Exchange*, 38(2), 467-474.

[11] Fejér, L., (1906). Uberdie Fourierreihen. *Math. Naturwise. Anz Ungar. Akad., Wiss* **24**, 369–390, (in Hungarian).

[12] Ion, D.A., (2007). Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.

[13] İşcan, İ., (2014). Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for convex functions via fractional integrals. arXiv preprint arXiv: 1404.7722.

[14] Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., & Delgado, R. V., (2009). Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach. *Springer Science and Business Media.*

[15] Mitrinović, D. S., & Lacković, I. B., (1985). Hermite and convexity. *Aequat. Math.* **28**, 229-232.

[16] Pečarić, J.E., Proschan, F., & Tong, Y.L., (1992). Convex functions. *Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc.*

[17] Raina, R.K., (2005). On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators. *East Asian Math*, J., 21(2), 191-203.

[18] Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H., & Başak, N., (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Math.Comput. Model.* **57**(9), 2403–2407.

[19] Sarıkaya, M. Z., & Yıldırım, H., (2016). On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals. *Miskolc Math. Notes* **17**(2), 1049–1059.

[20] Set, E., Gözpınar, A., & Alan, E. A., (2018). Generalized fractional integral inequalities for some classes of symmetrized convex functions. *AIP Conference Proceedings. Vol. 1991. No. 1. AIP Publishing.*

[21] Srivastava, H. M., & Choi, J., (2012). Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. *Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.*

[22] Varošanec, S., (2007). On h-convexiety. *J. Math. Anal. Appl.* **326**(1), 301–311.

[23] Yaldız, H., & Sarıkaya, M.Z., On the Hermite-Hadamard type inequalities for fractional integral operator. ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/309824197.

[24] Yaldız, H., On the Hermite-Hadamard-Fejr type inequalities for fractional integral operator, ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/321874987.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Emrullah Aykan ALAN
Doğum Yeri	Ordu
Doğum Tarihi	12.12.1989
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	05053232605
E-Posta Adresi	aykanalan@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	On Dokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölümü	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	06.07.2012

Yayınlar

Set, E., Özdemir, M.E., and Alan, E.A., "On New Fractional Hermite-Hadamard Type Inequalities for n-time Differentiable Quasi-convex Functions and p-functions ", AIP Conference Proceedings., Vol. 1833. No. 1. AIP Publishing, (2017).

Set, E., Gözpınar, A., and Alan, E.A., "Generalized Fractional Integral Inequalities for Some Classes of Symmetrized Convex Functions", AIP Conference Proceedings., Vol. 1991. No. 1. AIP Publishing, (2018).