T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ EŞİTSİZLİKLER

SÜLEYMAN SAMİ KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Süleyman Sami KARATAŞ tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Erhan SET danışmanlığında yürütülen "RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ EŞİTSİZLİKLER" adlı bu tez, jürimiz tarafından 02/12/2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	Doç. Dr. Erhan SET	
Başkan	:	Prof. Dr. Nesip AKTAN Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Necmettin Erbakan Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 08/12/2016 tarih ve 2016.539 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/12/2016

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Süleyman Sami KARATAŞ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN YENİ EŞİTSİLİKLER

Süleyman Sami KARATAŞ

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 46s.

Danışman: Doç. Dr. Erhan SET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş niteliğinde olup bu bölümde eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar ve kesirli integrallerin tarihsel gelişimi hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konveks fonksiyon, m- konveks fonksiyon, (α,m)- konveks fonksiyon, s- konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve teoremlere, literatürde iyi bilinen integral eşitsizliklerine ve reel sayıların bazı özel ortalamalarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde mutlak değerlerinin türevleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ve kesirli analiz yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında m- konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. İkinci kısmında (α,m)- konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. Yine bu bölümün üçüncü kısmında ise m- konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Konveks fonksiyon, m- konveks fonksiyon, (α,m)- konveks fonksiyon, Riemann-Liouville kesirli integralleri, s- konveks fonksiyon

ABSTRACT

NEW INEQUALITIES FOR DIFFERENT TYPES OF CONVEX FUNCTIONS VIA RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRALS

Süleyman Sami KARATAŞ

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 46p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erhan SET

This thesis consist of four chapters. First chapter is the introduction chapter that includes informations about the historical development of convex function, inequalities and fractional integrals. In the second chapter, fundamental definitions and theorems related to convex function, m- convex function, (α,m)- convex function and s- convex function are mentioned. Moreover, integral inequalities which were in the literature and some special means of real numbers are given. In the third chapter, inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose derivatives in absolute value are convex and Hermite-Hadamard type inequalities obtained via fractional calculus are given.

In the fourth chapter, firstly, Hermite-Hadamard type inequalities obtained via fractional integrals for m- convex function are given. Secondly, Hermite-Hadamard type inequalities obtained via fractional integrals for (α,m)-convex function are given. Also in the third part of the chapter, Hermite-Hadamard type inequalities for s- convex functions have been established.

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, Convex function, m- convex function, (α,m) convex function, Riemann-Liouville fractional integrals, s- convex function

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Erhan SET' e en samimi duygularımla teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine en içten dileklerle şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babama, anneme, kardeşime müteşekkirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ BİLDİRİMİ I

ÖZET II

ABSTRACT III

TEŞEKKÜR IV

İÇİNDEKİLER V

ŞEKİLLER LİSTESİ VI

SİMGELER ve KISALTMALAR VII

1. GİRİŞ 1

2. KURAMSAL TEMELLER 3

2.1. Genel Kavramlar 3

3. MATERYAL ve YÖNTEM 12

3.1. Mutlak Değerlerinin Türevleri Konveks Olan Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları 12

3.2. Özel Ortalamalara Uygulamalar 19

3.3. Midpoint ve Trapeziodal Formülleri ve Uygulamaları 20

3.4. Riemann-Liouville Kesirli Analiz Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 23

4. ARAŞTIRMA BULGULARI 28

4.1. Diferensiyellenebilen m- Konveks Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 28

4.2. Diferensiyellenebilen (α,m)- Konveks Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 33

4.3. Diferensiyellenebilen s- Konveks Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler 38

5. TARTIŞMA ve SONUÇ 42

6. KAYNAKLAR 43

ÖZGEÇMİŞ 46

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil No		**Sayfa**
Şekil 2.1.	Konveks Küme …………………...………………………………………..	3
Şekil 2.2.	Konveks Fonksiyon…………………………………………..……….	4

SİMGELER ve KISALTMALAR

f'	:	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
I	:	ℝ' de Bir Aralık
I^0	:	I' nın İçi
$J_{a^+}^{\alpha}$	:	Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$J_{b^-}^{\alpha}$	:	Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$K_m(b)$	:	m-konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	:	(α,m)-konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	:	m-konveks Fonksiyonların Sınıfı
L [a,b]	:	[a,b] Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
ℕ	:	Doğal Sayılar Kümesi
ℝ	:	Reel Sayılar Kümesi
ℤ	:	Tam Sayılar Kümesi

1. GİRİŞ

Eşitsizlik teorisi 19. yüzyıldan beri matematiğin hemen hemen bütün alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. Bu alanda yapılan ilk temel çalışma Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır [12]. Bu kitapta yeni eşitisizlikler ve uygulamaları ile ilgili konulara yer verilmiştir. Eşitsizlik teorisinin; fizik, mühendislik gibi çeşitli bilim dallarında uygulamaları olduğu için özellikle son yıllarda birçok araştırmacı tarafından yoğun bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu alanda Beckenbach ve Bellman [4], Mitrinović [20], Pachpatte [24], Pecaric ve arkadaşları [27], Dragomir ve Pearce [9] gibi araştırmacılar tarafından yıllar içerisinde yeni kitaplar yazılmış olup günümüzde de çeşitli araştırmacılar tarafından yeni kitaplar yazılmaktadır.

Eşitsizlik teorisinin gelişmesinde önemli bir role sahip olan kavramlardan biri de konvekslik kavramıdır. Konvekslik kavramının temeli, Archimedes'in ünlü Π(pi) değerinin hesaplanmasına kadar uzanır. Aslında konveksliği günlük yaşamımızda farklı şekillerde görmekteyiz. Örneğin ayakta duruş pozisyonumuzda ayaklarımızın teşkil ettiği konveks alanın içine ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi sağlamaktayız. Endüstri, tıp, sanat gibi bilim dallarının nümerik uygulamalarında da konvekslik kavramı kullanılmaktadır.

Konvekslik konusunun önemli parçası bir konveks kümenin epigrafisi olan konveks fonksiyon kavramıdır. 1893'te Hadamard'ın çalışmasında konveks fonksiyonların temelleri atılmıştır. Konveks fonksiyonların tanınması J.L.W.V., Jensen tarafından olmuştur. Hermite, Hölder ve Stolz'da bu fonksiyonla ilgili araştırma yapan ilk kişilerdir.

Konveks fonksiyonlar teorisi, matematiğin bütün dalları ile ilişkili olmakla birlikte eşitsizlik teorisinin gelişmesinde çok önemli bir yere sahiptir. Birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonlar yardımıyla elde edilmiş olup birçok uygulamaya ve üzerine yüzlerce çalışma yapılmış olan ünlü Hermite-Hadamard eşizliği bunlardan bir tanesidir. Bu eşitsizlik üzerine yapılan çalışmaların bir kısmı S.S., Drogamir ve C.E.M., Pearce tarafından "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı monografide bir araya getirilmiştir.

Konveks fonksiyonlar yardımıyla oldukça hızlı gelişme gösteren ve geniş çaplı bir araştırmacı kitlesine sahip olan eşitsizlik teorisine son yıllarda bir ivme de kesirli türev ve kesirli integral kavramı katmıştır. Bu kavramlar, "türev ve integraller yalnızca tam-sayılar için mi vardır? " sorusundan ortaya çıkmış. Bu kavramlar 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır. Bu alanda yazılan ilk geniş kapsamlı monografi S.G., Samko, A.A., Kilbas ve O.I., Marichev tarafından yazılan "Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications" adlı eserdir [28].

Bu tezin temel amacı, birinci mertebeden türevleri konveks olan fonksiyonlar için elde edilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri ve bu eşitsizliklerin Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla genelleştirmelerini sistematik olarak okuyucuya sunmak daha sonra da $m-$konveks, $(\alpha, m)-$konveks ve $s-$konveks gibi konveks fonksiyonların farklı sınıfları için elde edilen ve Riemann-Liouville kesirli integralleri içeren yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri vermektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

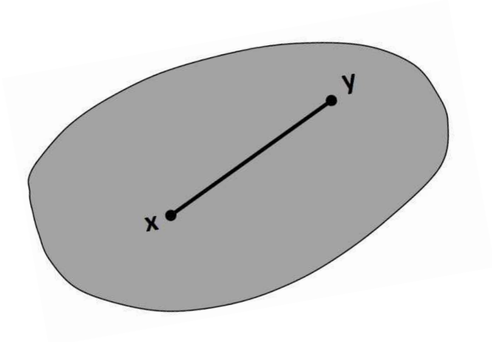
2.1 Genel Kavramlar

Bu çalışmada kullanılacak bazı önemli tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (**Konveks Küme**)L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımında $\alpha, (1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [3].



Şekil 2.1: Konveks Küme

Tanım 2.1.2 (**J- Konveks Fonksiyon**): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya $J-$ konveks fonksiyon denir [20].

Tanım 2.1.3 (**Kesin J- Konveks Fonksiyon**): I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin $J-$ konveks fonksiyon denir [20].

Tanım 2.1.4 (**Konveks Fonksiyon**): $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

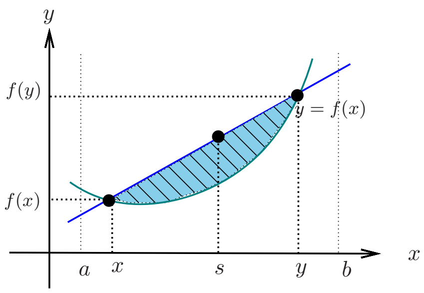
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan , f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [27].

Eğer $t \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak o zaman konveks fonksiyon şartındaki $\leq$ yerine $<$ gelir yani

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir. $-f$ konveks (kesin konveks) ise o zaman f ye konkav (kesin konkav) denir. Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f afin dönüşümüdür. Bu afin dönüşüm uygun m ve n sabitleri için $mx + n$ şeklindedir. Geometrik olarak $tx_1 + (1-t)x_2$ noktasında f'nin eğri üzerinde aldığı değer $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerlerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[x, y]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.
Gerçekten, $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;



Şekil 2.2: Konveks Fonksiyon

$$L(s) = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(s - x)$$

dir. Burada $s = ty + (1-t)x$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L(ty + (1-t)x) &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(t(y - x)) \\ &= f(x) + t(f(y) - f(x)) \\ &= tf(y) + (1-t)f(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece 2.1.1 eşitsizliği

$$f(ty + (1-t)x) \leq L(ty + (1-t)x) = tf(y) + (1-t)f(x)$$

elde edilir. Literatürde konveks fonksiyonlar için birçok eşitsizlik elde edilmiştir. Fakat ünlü Hermite-Hadamard eşitsizliği bu eşitsizlikler içerisinde geometrik önemi ve uygulamalarıyla oldukça ön plana çıkmıştır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.
$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu takdirde

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.2}$$

olur. f konkav fonksiyon ise bu eşitsizlik yön değiştirir. Yani

$$f(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.3}$$

olur. Hermite-Hadamard eşitsizliği 1883 yılında keşfedildiğinden beri matematiksel analizdeki en faydalı eşitsizliklerden biri olarak kabul edilmektedir. Bu eşitsizlik üzerine yeni ispatların, kayda değer genişlemelerin, genelleştirmelerin ve çok sayıda uygulamaların sunulduğu birçok makale yazılmıştır (bknz. ([6], [7], [9], [11], [13], [14], [16], [20], [24], [26], [27])).

Tanım 2.1.5 (**Starshaped Fonksiyon**): $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyonu denir [9].

Tanım 2.1.6 (**Artan ve Azalan Fonksiyonlar**) f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I'da iki nokta olsun. Bu durumda:

- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır denir [1].

Tanım 2.1.7 $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [0, b]$ ve $m, t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \quad \leq \quad tf(x) + m(1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $m-$ konvekstir denir [29]. $-f$ fonksiyonu $m-$ konveks ise f fonksiyonu $m-$ konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı $m-$ konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Açıkçası Tanım 2.1.7'de $m = 1$ için standart konveks fonksiyon kavramı ve $m = 0$ için de starshaped fonksiyon kavramı elde edilir.

Lemma 2.1.1 Eğer f fonksiyonu $K_m(b)$ sınıfında ise o zaman f starshaped fonksiyonudur [30].

İspat. Herhangi bir $x \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için $f \in K_m(b)$ olduğundan

$$f(tx) = f(tx + m(1-t)0) \leq tf(x) + m(1-t)f(0) \leq tf(x)$$

elde edilir.

Lemma 2.1.2 Eğer f, $m-$ konveks ve $0 < n < m \leq 1$ ise bu takdirde f, $n-$ konvekstir [30].

İspat. Keyfi $x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned} f(tx + n(1-t)y) &= f\big(tx + m(1-t)\big(\frac{n}{m}\big)y\big) \\ &\leq tf(x) + m(1-t)f\big(\frac{n}{m}y\big) \\ &\leq tf(x) + m(1-t)\frac{n}{m}f(y) \\ &= tf(x) + n(1-t)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 2.1.1 ve Lemma 2.1.2 'den $m \in (0, 1)$ olduğunda

$$K_1(b) \subset K_m(b) \subset K_0(b)$$

yazırlır.$K_1(b)$ sınıfında, $f(0) \leq 0$ olmak üzere, sadece $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar vardır. Yani, $K_1(b)$, $[0, b]$ üzerinde tanımlı konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır [2].

Tanım 2.1.8 $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.Her $x, y \in [0, b]$, $m, t \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $(\alpha, m)-$konveks fonksiyon denir [29]. $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm $(\alpha, m)-$konveks fonsiyonların sınıfı $K_m^\alpha(b)$ ile gösterilir. Ayrıca, $(\alpha, m) \in (0, 0), (1, 0), (1, m), (1, 1)$ için sırayla artan, stashaped, $m-$konveks ve konveks fonksiyon sınıfları elde edilir. $f(0) \leq 0$ olmak üzere $K_1^1(b)$ sınıfında sadece $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar yer alır, yani $K_1^1(b)$, $[0, b]$ üzerinde tanımlı tüm konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır.

Tanım 2.1.9 (**Birinci Anlamda** s**- Konveks Fonksiyon**) $0 < s \leq 1$ olsun. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, her $x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha^s + \beta^s = 1$ için,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

şartını sağlıyorsa birinci anlamda s- konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^1 ile gösterilir [23].

Teorem 2.1.1 $0 < s < 1$ olsun. $f \in K_s^1$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında azalmayandır ve $\lim\limits_{u \to 0^+} f(u) \leq f(0)$ dır [23].

Örnek 2.1.1 $0 < s < 1$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $u \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(u) = \begin{cases} a & ,u = 0 \\ bu^s + c & ,u > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki durumları sağlar:

- $b \geq 0$ ve $c \leq a$ ise $f \in K_s^1$,
- $b \geq 0$ ve $c < a$ ise f, $(0, \infty)$ aralığı üzerinde azalmayandır, fakat $[0, \infty)$ aralığı üzerinde değildir [13].

Tanım 2.1.10 (**İkinci Anlamda** s**- Konveks Fonksiyon**) Her $x, y \in [0, \infty), t \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{2.1.4}$$

şartını sağlayan $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyon denir ve ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar sınıfı genellikle K_s^2 ile gösterilir. Burada $s = 1$ için $[0, \infty)$ aralığında $s-$konvekslik kavramından bilinen kolaylıkla elde edildiği kolaylıkla görülebilir [5].

Şimdi ikinci anlamda s- konveks fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki bazı sonuçları verelim.

Önerme 2.1.1 $f \in K_s^2$ ise $f, [0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur [13].

İspat. $u \in \mathbb{R}_+$ için,

$$f(u) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2}\right) \leq \frac{f(u)}{2^s} + \frac{f(u)}{2^s} = 2^{1-s} f(u)$$

alalım. Buradan $(2^{1-s} - 1) f(u) \geq 0$ olur ve böylece $f(u) \geq 0$ elde edilir.

Örnek 2.1.2 $0 < s < 1$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $u \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(u) = \begin{cases} a & ,u = 0 \\ bu^s + c & ,u > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonda:

- $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ için $f \in K_s^2$
- $b \geq 0$ ve $c < 0$ ise f, $(0, \infty)$ durumları vardır.

İkinci anlamda s- konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir [8].

Teorem 2.1.2 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ikinci anlamda s- konveks bir fonksiyon, $s \in (0, 1)$ ve $a, b \in \mathbb{R}_+$ ile $a < b$ olsun. $f \in L_1[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$2^{s-1} f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}. \tag{2.1.5}$$

Teorem 2.1.3 (Jensen Eşitsizliği): f fonksiyonu (a, b) aralığında konveks ve $x_i \in (a, b)$, $i = 1, 2, ..., n$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir [25].

Teorem 2.1.4 (İntegraller için Jensen Eşitsizliği): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $h : [a, b] \to (0, \infty)$ ve $u : [a, b] \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right) \leq \frac{\int_a^b h(t)f(u(t))dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

eşitsizliği geçerlidir [25].

Teorem 2.1.5 (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, ..., b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [20].

Teorem 2.1.6 (**İntegraller için Hölder Eşitsizliği**):$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b |g(x)|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [21].

Sonuç 2.1.1 (**Power Mean Eşitsizliği**):$q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)dx| \leq \Big(\int_a^b |f(x)|dx \Big)^{1-\frac{1}{q}} \Big(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.1.7 (**Üçgen Eşitsizliği**): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|,$$

$$\Big||x| - |y| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + ... + x_n| \leq |x_1| + ... + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [21].

Teorem 2.1.8 (**Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu**): f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir [21].

Tanım 2.1.11 (**Gamma Fonksiyonu**):$\alpha > 0$ için

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}x^{\alpha-1}dx$$

ile tanımlanır [15].

Tanım 2.1.12 (**Beta Fonksiyonu**): $x > 0, y > 0$ için

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

biçiminde tanımlanan B fonksiyonuna Beta fonksiyonu denir. Burada Gamma ve Beta fonksiyonları arasındaki ilişki ise

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

şeklindedir [15].

Tanım 2.1.13 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) $f(x) \in L[a, b]$, $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ olsun. Sağ ve sol Riemann-Liouville integralleri sırasıyla $J_{a^+}^{\alpha} f(x)$ ve $J_{b^-}^{\alpha} f(x)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\ x > a$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\ x < b$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α. mertebeden kesirli integral denir. Burada $J_{a^+}^{0} f(x) = J_{b^-}^{0} f(x) = f(x)$ dir.

Riemann-Liouville kesirli integralleri ile ilgili daha fazla bilgiyi [10]'da bulabiliriz.

Tanım 2.1.14 a, b, c reel ya da kompleks sabitler olmak üzere, $|z| < 1$ ve $c > b > 0$ için,

$${}_2F_1[a, b, c : z] = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + ... = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\frac{z^m}{m!}$$

ifadesine hipergeometrik seri denir. Hipergeometrik seri,

$${}_2F_1[a, b, c : z] = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir [17].

Tanım 2.1.15 İki Pozitif Sayı İçin Bazı Ortalamalar

a, b pozitif iki reel sayı olmak üzere;

1. Aritmetik Ortalama:
$$A = A(a,b) := \frac{a+b}{2},$$
2. Harmonik Ortalama:
$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b},$$
3. Logaritmik Ortalama:
$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & ,a = b \\ \frac{b-a}{\ln b - \ln a} & ,a \neq b \end{cases}$$
4. $p-$logaritmik ortalama:
$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a & ,a = b \\ \left[\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b+a)}\right]^{\frac{1}{p}} & ,a \neq b \end{cases}$$

ortalamaları vardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Mutlak Değerlerin Türevleri Konveks Olan Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları

Bu bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı temel teoremler verilmiştir .

Lemma 3.1.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak üzere her $x \in [a, b]$ için

$$
\begin{aligned}
& f(x) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du \qquad (3.1.1) \\
= & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right)dt - \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right)dt \\
- & \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right)dt - \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right)dt
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir [18].

İspat. Önce kısmi integrasyon, daha sonra $u = \frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a$ değişken değişikliği yapılarak

$$
\begin{aligned}
& \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right)dt \\
= & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\left.\frac{tf'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right)}{x-a}\right|_0^1 - \frac{1}{x-a}\int_0^1 f\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right)dt\right] \\
= & \frac{x-a}{b-a}f(x) - \frac{2}{b-a}\int_{\frac{x+a}{2}}^x f(u)du \qquad (3.1.2)
\end{aligned}
$$

yazılır. Benzer şekilde

$$
-\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right)dt = \frac{x-a}{b-a}f(a) - \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{x+a}{2}} f(u)du, \qquad (3.1.3)
$$

$$
-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right)dt = \frac{b-x}{b-a}f(x) - \frac{2}{b-a}\int_x^{\frac{x+b}{2}} f(u)du \qquad (3.1.4)
$$

ve

$$
-\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2} f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right)dt = \frac{b-x}{b-a}f(b) - \frac{2}{b-a}\int_{\frac{x+b}{2}}^b f(u)du \qquad (3.1.5)
$$

eşitlikleri elde edilir. (3.1.2)-(3.1.5) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa istenen eşitlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} &\left| f(x) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)| + |f'(a)|}{4}\right] + \frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)| + |f'(b)|}{4}\right] \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Lemma 3.1.1 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} &\left| f(x) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left| f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right)\right| dt + \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left| f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right)\right| dt \\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left| f'\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right)\right| dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left| f'\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right)\right| dt \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

yazılır. Buradan, (3.1.7) eşitsizliğinde $|f'|$' nin konveksliği kullanılarak, her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} &\left| f(x) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left[\frac{1+t}{2}|f'(x)| + \frac{1-t}{2}|f'(a)|\right] dt \\ +\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left[\frac{1-t}{2}|f'(x)| + \frac{1+t}{2}|f'(a)|\right] dt \\ +\ & \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left[\frac{1+t}{2}|f'(x)| + \frac{1-t}{2}|f'(b)|\right] dt \\ +\ & \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left[\frac{1-t}{2}|f'(x)| + \frac{1+t}{2}|f'(b)|\right] dt \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

yazılır. Dolayısıyla (3.1.8)' deki eşitsizliğin sağ tarafındaki integraller hesaplandığında (3.1.6)' deki eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.1'de $x = \frac{a+b}{2}$ seçildiğinde ve $|f'|$' nin konveksliğini kullanıldığında

$$\left| f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \leq \Big(\frac{b-a}{8}\Big)[|f'(a)| + |f'(b)|]$$

eşitsizliği elde edilir [18].

Teorem 3.1.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

ve her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \tag{3.1.9}$$
$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}+1}\left\{\frac{(x-a)^2}{b-a}\left[(3|f'(x)|^q+|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f'(x)|^q+3|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[(3|f'(x)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f'(x)|^q+3|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Lemma 3.1.1 ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak, her $x \in [a,b]$ için

$$\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \tag{3.1.10}$$
$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt \leq \int_0^1\left[\frac{1+t}{2}|f'(x)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^q\right]dt = \frac{3|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{4}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|^q dt \leq \frac{|f'(x)|^q+3|f'(a)|^q}{4}$$

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt \leq \frac{3|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{4}$$

ve

$$\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt \leq \frac{|f'(x)|^q+3|f'(b)|^q}{4}$$

eşitsizlikleri yazılır. (3.1.10) eşitsizliğinde son dört eşitsizlik kullanılırsa (3.1.9) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.2 Teorem 3.1.2' de $x = \frac{a+b}{2}$ seçtiğimizde ve $|f'|^q$' nin konveksliğini kullandığımızda

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}+1}\left(\frac{b-a}{4}\right) \\
&\times\left[\left[|f'(a)|^q+3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+3|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+3|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ &\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{q}+1}\left[1+3^{\frac{1}{q}}+5^{\frac{1}{q}}+7^{\frac{1}{q}}\right]\left(\frac{b-a}{4}\right)[|f'(a)|+|f'(b)|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [18]. Burdaki ikinci eşitsizliği elde etmek için aşağıdaki önemli temel eşitsizlik kullanılır.

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n}(u_k)^s+\sum_{k=1}^{n}(v)^s,\ u_k, v_k \geq 0, 0 \leq k \leq n, 0 \leq s < 1$$

Teorem 3.1.3 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \qquad (3.1.11) \\
\leq\ &\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\frac{(x-a)^2}{b-a}\left[(5|f'(x)|^q+|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f'(x)|^q+5|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]\right. \\
&\left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[(5|f'(x)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f'(x)|^q+5|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Lemma 3.1.1 ve power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \qquad (3.1.12) \\
\leq\ &\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. $|f'|^q$ $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x-\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt &\leq \int_0^1 \frac{t}{2}\left[\frac{1+t}{2}|f'(x)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^q\right] \\
&= \frac{5|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{24}
\end{aligned}$$

benzer şekilde

$$\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x-\frac{1+t}{2}a\right)\right|^q dt \leq \frac{|f'(x)|^q+5|f'(a)|^q}{24},$$

$$\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x-\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt \leq \frac{5|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{24},$$

ve

$$\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x-\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt \leq \frac{|f'(x)|^q+5|f'(b)|^q}{24}$$

eşitsizlikleri yazılır. (3.1.12) eşitsizliğinde son dört eşitsizlik kullanılırsa (3.1.11) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.1.3' de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse ve Sonuç 3.1.2' deki gibi benzer argümanlar kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}}\left[1+5^{\frac{1}{q}}+7^{\frac{1}{q}}+11^{\frac{1}{q}}\right]\left(\frac{b-a}{16}\right)\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [18].

Teorem 3.1.4 $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav fonksiyon ise $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \qquad (3.1.13)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left\{\frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\left|f'\left(\frac{3x+a}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+x}{4}\right)\right|\right]\right. \\
&\quad \left.+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\left|f'\left(\frac{3x+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{x+3b}{4}\right)\right|\right]\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Lemma 3.1.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak, $q>1$ ve $p=\frac{q}{q-1}$ için

$$\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \qquad (3.1.14)$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{q}{q-1}}dt\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\Big)\Big|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(x-a)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{q}{q-1}}dt\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\Big)\Big|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{q}{q-1}}dt\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\Big)\Big|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{q}{q-1}}dt\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big(\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\Big)\Big|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav olduğundan Jensen integral eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\Big)\Big|^q dt &= \int_0^1 t^0\Big|f'\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\Big)\Big|^q dt\\ &\leq \Big(\int_0^1 t^0 dt\Big)\Big|f'\Big(\frac{1}{\int_0^1 t^0 dt}\int_0^1 \Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\Big)dt\Big|^q\\ &= \Big|f\Big(\frac{3x+a}{4}\Big)\Big|^q\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\Big)\Big|^q dt \leq \Big|f\Big(\frac{x+3a}{4}\Big)\Big|^q,$$

$$\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\Big)\Big|^q dt \leq \Big|f\Big(\frac{3x+b}{4}\Big)\Big|^q$$

ve

$$\int_0^1 \Big|f'\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\Big)\Big|^q dt \leq \Big|f\Big(\frac{x+3b}{4}\Big)\Big|^q$$

eşitsizlikleri yazılır. (3.1.14) eşitsizliğinde son dört eşitsizlik kullanılırsa (3.1.13) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.4 Teorem 3.1.4'de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse ve $|f'|$' nin lineer bir dönüşüm olduğu kabul edilirse

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\\ \leq\ &\Big(\frac{q-1}{2}\Big)^{\frac{q-1}{q}}\Big(\frac{b-a}{4}\Big)|f'(a+b)|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [18].

Teorem 3.1.5 $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav fonksiyon ise $q\geq 1$ ve her $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{(x-a)^2}{4(b-a)}\left[\left|f'\Big(\frac{5x+a}{6}\Big)\right|+\left|f'\Big(\frac{x+5a}{6}\Big)\right|\right] \\
&+\frac{(b-x)^2}{4(b-a)}\left[\left|f'\Big(\frac{5x+b}{6}\Big)\right|+\left|f'\Big(\frac{x+5b}{6}\Big)\right|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. $|f'|^q$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki konkavlığı ve power-mean eşitsizliği kullanırsa, her $\lambda \in [0,1]$ ve $x, y \in [a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
|f(\lambda x+(1-\lambda)y|^q &\geq \lambda|f(x)|^q+(1-\lambda)|f(y)|^q \\
&\geq (\lambda|f(x)|+(1-\lambda)|f(y)|)^q
\end{aligned}
$$

ve böylece

$$
|f(\lambda x+(1-\lambda)y| \geq \lambda|f(x)|+(1-\lambda)|f(y)|
$$

elde edilir. Dolayısıyla bu da $|f'|$' nin $[a,b]$ aralığında konkav olduğunu gösterir. Tersine Lemma 3.1.1 ve Jensen integral eşitsizliği kullanılarak her $x \in [a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
&\left|f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt+\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|dt \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 \frac{t}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \frac{t}{2}dt\Big)\left|f'\left(\frac{\int_0^1 \frac{t}{2}\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\Big)dt}{\int_0^1 \frac{t}{2}dt}\right)\right| \\
&+\frac{(x-a)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \frac{t}{2}dt\Big)\left|f'\left(\frac{\int_0^1 \frac{t}{2}\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\Big)dt}{\int_0^1 \frac{t}{2}dt}\right)\right| \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \frac{t}{2}dt\Big)\left|f'\left(\frac{\int_0^1 \frac{t}{2}\Big(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\Big)dt}{\int_0^1 \frac{t}{2}dt}\right)\right| \\
&+\frac{(b-x)^2}{b-a}\Big(\int_0^1 \frac{t}{2}dt\Big)\left|f'\left(\frac{\int_0^1 \frac{t}{2}\Big(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\Big)dt}{\int_0^1 \frac{t}{2}dt}\right)\right|
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinin sağ tarafındaki integraller alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.5 Teorem 3.1.5' de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilir ve $|f'|$' nin lineer bir dönüşüm olduğu kabul edilirse

$$
\left|f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{8}|f'(a+b)|
$$

eşitsizliği elde edilir [18].

3.2 Özel Ortalamalara Uygulamalar

Bu başlık altında bir önceki bölümde elde edilen konveks fonksiyonlar için yazılan eşitsizliklerin pozitif reel sayılar için özel ortalamalarına ilişkin sonuçlar verilecektir.

Önerme 3.2.1 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a, b]$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $|n| \geq 2$ için

$$|A^n(a,b) + A(a^n, b^n) - 2L_n^n(a,b)| \leq |n| \left(\frac{b-a}{4}\right) A\left(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.1 de, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$ için $f(x) = x^n$ fonksiyonu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.2 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a, b]$ ve $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$ olsun. Bu takdirde $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & |A^n(a,b) + A(a^n, b^n) - 2L_n^n(a,b)| \\ \leq \; & |n| \Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{3}{q}+1} \Big[1 + 3^{\frac{1}{q}} + 5^{\frac{1}{q}} + 7^{\frac{1}{q}}\Big] \left(\frac{b-a}{2}\right) A\big(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}\big) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.2' de, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$ için $f(x) = x^n$ fonksiyonu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.3 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a, b]$ ve $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$ olsun. Bu takdirde $q \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & |A^n(a,b) + A(a^n, b^n) - 2L_n^n(a,b)| \\ \leq \; & |n| \Big(\frac{1}{3}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{2}{q}} \Big[1 + 5^{\frac{1}{q}} + 7^{\frac{1}{q}} + 11^{\frac{1}{q}}\Big] \left(\frac{b-a}{8}\right) A\big(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}\big) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.3' de, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq 2$ için $f(x) = x^n$ fonksiyonu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.4 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a, b]$ olmak üzere

$$|A^{-1}(a,b) + A(a^{-1}, b^{-1}) - 2L(a,b)| \leq \left(\frac{b-a}{4}\right) A\big(|a|^{-2}, |b|^{-2}\big)$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.1' de, $x \in [a,b]$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.5 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a,b]$ olmak üzere $p > 1$ için

$$\begin{aligned} & |A^{-1}(a,b) + A(a^{-1}, b^{-1}) - 2L(a,b)| \\ \leq & \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{q}+1} \left[1 + 3^{\frac{1}{q}} + 5^{\frac{1}{q}} + 7^{\frac{1}{q}}\right] \left(\frac{b-a}{2}\right) A\big(|a|^{-2}, |b|^{-2}\big) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.2' de, $x \in [a,b]$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.6 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a,b]$ olmak üzere $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & |A^{-1}(a,b) + A(a^{-1}, b^{-1}) - 2L(a,b)| \\ \leq & \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \left[1 + 5^{\frac{1}{q}} + 7^{\frac{1}{q}} + 11^{\frac{1}{q}}\right] \left(\frac{b-a}{8}\right) A\big(|a|^{-2}, |b|^{-2}\big) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.3' de, $x \in [a,b]$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

3.3 Midpoint ve Trapezoidal Formülleri ve Uygulamaları

d, $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü yani $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ ve aşağıdaki gibi sırasıyla midpoint ve trapezoidal formüllerini göz önüne alalım.

$$T(f,d) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

$$T'(f,d) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

yazılır.
$E(f,d)$ ve $E'(f,d)$, $\int_a^b f(x)dx$ integralinin yaklaşık hata tahminleri olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,d) + E(f,d),$$

$$\int_a^b f(x)dx = T'(f,d) + E'(f,d)$$

yazılır [18].

Şimdi midpoint ve trapezoidal formülleri için bazı hata tahminleri verilecektir .

Önerme 3.3.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve d, $[a,b]$ nin bir bölüntüsü olmak üzere

$$|E(f,d) + E'(f,d)| \leq \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2[|f'(x_i) + |f'(x_{i+1})| \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. d, bölüntüsünün $[x_i, x_{i+1}](i = 0, 1, ..., n-1)$ alt aralığı üzerine Sonuç 3.1.1 uygulanırsa

$$\left|\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} - \frac{2}{x_i - x_{i+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right| \leq \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{8}\right)[|f'(x_i)| + |f'(x_{i+1})|] \tag{3.3.2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} & |E(f,d) + E'(f,d)| \qquad (3.3.3) \\ = & \left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) - 2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right| \\ \leq & \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\left|f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{2}{x_{i+1} - x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right| \end{aligned}$$

yazılır. (3.3.3)' de (3.3.2) kullanılırsa, (3.3.1) elde edilir. Böylece önermenin ispatı tamamlanır.

Önerme 3.3.2 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve d, $[a,b]$ nin bir bölüntüsü olmak üzere

$$|E(f,d) + E'(f,d)| \leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{3}{q}+3}\left[1 + 3^{\frac{1}{q}} + 5^{\frac{1}{q}} + 7^{\frac{1}{q}}\right]\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2[|f'(x_i)| + f'(x_{i+1})|] \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.2 kullanılarak Önerme 3.3.1' deki gibi ispatlanır.

Önerme 3.3.3 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ ve d, $[a,b]$ nin bir bölüntüsü olmak üzere

$$|E(f,d) + E'(f,d)| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}+4} \left[1 + 3^{\frac{1}{q}} + 5^{\frac{1}{q}} + 7^{\frac{1}{q}}\right] \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 [|f'(x_i)| + f'(x_{i+1})|] \tag{3.3.5}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.3 kullanılarak, Önerme 3.3.1' nin ispatına benzer şekilde istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.3.4 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav fonksiyon ise $q > 1$ ve d, $[a,b]$ nin bir bölüntüsü olmak üzere

$$|E(f,d) + E'(f,d)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 [|f'(x_i)| + f'(x_{i+1})|] \tag{3.3.6}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.4 kullanılarak, Önerme 3.3.1' nin ispatına benzer şekilde istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.3.5 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav fonksiyon ise $q \geq 1$ ve d, $[a,b]$ nin bir bölüntüsü olmak üzere

$$|E(f,d) + E'(f,d)| \leq \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 [|f'(x_i)| + f'(x_{i+1})|] \tag{3.3.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

İspat. Sonuç 3.1.5 kullanılarak Önerme 3.3.1' nin ispatına benzer şekilde istenen sonuç elde edilir.

3.4 Riemann-Liouville Kesirli Analiz Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu çalışma boyunca, $[a,b]$ aralığını $[0,\infty)$ aralığının bir alt aralığı, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında türevlenebilir ve $f'\in L^1[a,b]$ olduğunu kabul edilecektir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha(x) &:= \frac{((x-a)^\alpha+(b-x)^\alpha)f(x)}{b-a}+\frac{(x-a)^\alpha f(a)+(b-x)^\alpha f(b)}{b-a}\\ &\quad -\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J^\alpha_{x-}f(\frac{x+a}{2})+J^\alpha_{a+}f(\frac{x+a}{2})+J^\alpha_{b-}f(\frac{x+b}{2})+J^\alpha_{x+}f(\frac{x+b}{2})\right]\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda özel olarak $\alpha=1$ alınırsa

$$\mathcal{H}(x) = f(x)+\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

elde edilir. Böylece $x=\frac{a+b}{2}$ için

$$\mathcal{H}(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2})+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

olur.

[18]' de, M.A. Latif tarafından $\mathcal{H}$' nın değeri tahmin edilmiştir. Bu bölümde verilen sonuçlar M.A. Latif' in elde etmiş olduğu sonuçların genelleştirmesidir.

Lemma 3.4.1 Her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)dt-\int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)dt\right)\\ &\quad -\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)dt-\int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)dt\right)\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

eşitliği geçerlidir [19].

İspat. Kısmi integrasyon alınırsa ve $u=\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a$, $v=\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a$ değişken değişiklikleri yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)dt &= \frac{f(x)}{x-a}-\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(x-a)^{\alpha+1}}J^\alpha_{x-}f\left(\frac{x+a}{2}\right),\\ \int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)dt &= -\frac{f(a)}{x-a}+\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(x-a)^{\alpha+1}}J^\alpha_{a+}f\left(\frac{x+a}{2}\right),\\ \int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)dt &= -\frac{f(x)}{b-x}+\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b-x)^{\alpha+1}}J^\alpha_{x+}f\left(\frac{x+b}{2}\right),\\ \int_0^1\frac{t^\alpha}{2}f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)dt &= \frac{f(b)}{b-x}-\frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{(b-x)^{\alpha+1}}J^\alpha_{b-}f\left(\frac{x+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf toplanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (3.4.1) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Yukarıda elde edilen sonuçlar kullanarak aşağıdaki teoremler ispatlanacaktır.

Teorem 3.4.1 $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks olsun. Bu taktirde

$$|\mathcal{H}_\alpha(x)| \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\frac{|f'(x)|+|f'(a)|}{2(\alpha+1)} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\frac{|f'(x)|+|f'(b)|}{2(\alpha+1)}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

İspat. Lemma 3.4.1' de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp $|f'|$' nin konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_\alpha(x)| \leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left[\frac{1+t}{2}|f'(x)| + \frac{1-t}{2}|f'(a)|\right]dt \\ & + \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left[\frac{1-t}{2}|f'(x)| + \frac{1+t}{2}|f'(a)|\right]dt \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left[\frac{1+t}{2}|f'(x)| + \frac{1-t}{2}|f'(b)|\right]dt \\ & + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left[\frac{1-t}{2}|f'(x)| + \frac{1+t}{2}|f'(b)|\right]dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafında gerekli düzenlemeler yapıldığında istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.2 $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olsun. Bu takdirde $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_\alpha(x)| \leq\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{2}{q}}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \times\left\{\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}[(3|f'(x)|^q+|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}) + (|f'(x)|^q+3|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}})]\right. \\ & \left.+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}[(3|f'(x)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} + (|f'(x)|^q+3|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}]\right\} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

dir [19].

İspat. Lemma 3.4.1 ve Hölder eşitsizliğine göre , her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_\alpha(x)| \leq\ & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left((I_1)^{\frac{1}{q}}+(I_2)^{\frac{1}{q}})\right) \\ & +\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left((I_3)^{\frac{1}{q}}+(I_4)^{\frac{1}{q}})\right) \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $|f'|^q$'nun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt \\
&\le \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}|f'(x)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^q\right) dt = \frac{3|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{4} \\
I_2 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|^q dt \le \frac{|f'(x)|^q+3|f'(a)|^q}{4} \\
I_3 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt \le \frac{3|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{4} \\
I_4 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt \le \frac{|f'(x)|^q+3|f'(b)|^q}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir. I_1, I_2, I_3, I_4 eşitsizlikleri (3.4.3)' de yerlerine yazıldığında (3.4.2) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.3 $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olsun. Bu takdirde $q \ge 1$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}_\alpha(x)| &\le \left[\frac{1}{2(\alpha+1)}\right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{1}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.4.4)\\
&\times \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}[((2\alpha+3)|f'(x)|^q+|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f'(x)|^q+(2\alpha+3)|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}] \\
&+ \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}[((2\alpha+3)|f'(x)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(|f'(x)|^q+(2\alpha+3)|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

İspat. Lemma 3.4.1, $|f'|^q$' nin konveksliği ve power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}_\alpha(x)| &\le \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left((J_1)^{\frac{1}{q}}+(J_2)^{\frac{1}{q}}\right) \qquad (3.4.5)\\
&+ \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left((J_3)^{\frac{1}{q}}+(J_4)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt \le \frac{(2\alpha+3)|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}, \\
J_2 &= \int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|^q dt \le \frac{|f'(x)|^q+(2\alpha+3)|f'(a)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}, \\
J_3 &= \int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt \le \frac{(2\alpha+3)|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}
\end{aligned}$$

ve

$$J_4 = \int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt \le \frac{|f'(x)|^q+(2\alpha+3)|f'(b)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

dir. Burada J_1, J_2, J_3, J_4 eşitsizliklerini (3.4.5)' de yerlerine yazılırsa (3.4.4) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremimizin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.4.4 $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav olsun. Bu takdirde $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_\alpha(x)| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left[\left|f'\left(\frac{3x+a}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{x+3a}{4}\right)\right|\right] \\ &+ \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left[\left|f'\left(\frac{3x+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{x+3b}{4}\right)\right|\right] \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

İspat. Lemma 3.4.1 ve Hölder eşitsizliğinden, $q>1$, $p=\frac{q}{q-1}$ ve her $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_\alpha|(x) &\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 (\frac{t^\alpha}{2})^p dt\right)^{\frac{1}{p}}(K_1)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}(K_2)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}(K_3)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}(K_4)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $|f'|^q$' nin $[a,b]$ aralığında konkavlığı ve Jensen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt \\ &\leq \left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a)dt\right)^q\right| = \left|f'\left(\frac{3x+a}{4}\right)\right|^q \\ K_2 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|^q dt \leq \left|f'\left(\frac{x+3a}{4}\right)\right|^q \\ K_3 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt \leq \left|f'\left(\frac{3x+b}{4}\right)\right|^q \\ K_4 &= \int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|^q dt \leq \left|f'\left(\frac{x+3b}{4}\right)\right|^q \end{aligned}$$

dir. Burada K_1, K_2, K_3, K_4 eşitsizliklerini (3.4.7)' de yerlerine yazdılırsa (3.4.6) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.5 $|f'|^q$, $[a,b]$ konkav olsun. Bu takdirde her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}_\alpha|(x) &\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)(b-a)}\left[\left|f'\left(\frac{(2\alpha+3)x+a}{2(\alpha+2)}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{x+(2\alpha+3)a}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right] \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)(b-a)}\left[\left|f'\left(\frac{(2\alpha+3)x+b}{2(\alpha+2)}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{x+(2\alpha+3)b}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

İspat. Lemma 3.4.1 ve $|f'|^q$' nin konkavlığı kullanılarak her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}_\alpha(x)| &\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\right|\frac{t^\alpha}{2}dt \\
&+\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\right|\frac{t^\alpha}{2}dt \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\frac{t^\alpha}{2}dt \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\right|\frac{t^\alpha}{2}dt \\
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}a\right)\frac{t^\alpha}{2}dt}{\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt}\right)\right| \\
&+\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}a\right)\frac{t^\alpha}{2}dt}{\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt}\right)\right| \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\left(\frac{1+t}{2}x+\frac{1-t}{2}b\right)\frac{t^\alpha}{2}dt}{\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt}\right)\right| \\
&+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}x+\frac{1+t}{2}b\right)\frac{t^\alpha}{2}dt}{\int_0^1 \frac{t^\alpha}{2}dt}\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur. Bu (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5) teoremlerinde $\alpha = 1$ alınırsa M.A.Latif' in [18] deki daha önce elde ettiği sonuçlara ulaşılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Diferensiyellenebilen $m-$ Konveks Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak ana sonuçlarımızı ispatlamak için kullanılacak olan lemma verilecektir.

Lemma 4.1.1 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$ ve $k>0$ için

$$\begin{aligned}
&G(k;n;a,x,b)(f)\\
=\;&\frac{n+1}{2}\left[\frac{(x-a)^k+(b-x)^k}{b-a}f(x)+\frac{(x-a)^kf(a)+(b-x)^kf(b)}{b-a}\right]\\
&-\frac{(n+1)^{k+1}\Gamma(k+1)}{2(b-a)}\left\{J^k_{x^-}f\left(\frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}a\right)+J^k_{a^+}f\left(\frac{1}{n+1}x+\frac{n}{n+1}a\right)\right.\\
&\left.+J^k_{x^+}f\left(\frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}b\right)+J^k_{b^-}f\left(\frac{1}{n+1}x+\frac{n}{n+1}a\right)\right\}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&G(k;n;a,x,b(f)\\
=\;&\frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left\{\int_0^1\frac{t^k}{2}f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)dt-\int_0^1\frac{t^k}{2}f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)dt\right\}\\
&-\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left\{\int_0^1\frac{t^k}{2}f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)dt-\int_0^1\frac{t^k}{2}f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)dt\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir [22].

İspat. Bu eşitliği ispatlamak için

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\frac{t^k}{2}f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)dt\\
=\;&\frac{n+1}{2(x-a)}f(x)-\frac{(n+1)\Gamma(k+1)}{2(x-a)}\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^1 t^{k-1}f\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)dt\\
=\;&\frac{n+1}{2(x-a)}f(x)-\frac{(n+1)^{k+1}\Gamma(k+1)}{2(x-a)^{k+1}}\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{\frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}a}^{x}\left(u-\frac{n}{n+1}x-\frac{1}{n+1}a\right)^{k-1}f(u)du\\
=\;&\frac{(n+1)^{k+1}\Gamma(k+1)}{2(x-a)^{k+1}}J^k_{a^+}f\left(\frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}a\right)
\end{aligned}$$

ve benzer biçimde

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{t^k}{2} f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)dt \\
= \quad & -\frac{n+1}{2(x-a)}f(a)+\frac{(n+1)^{k+1}\Gamma(k+1)}{2(x-a)^{k+1}}J_{x^-}^k f\left(\frac{1}{n+1}x+\frac{n}{n+1}a\right) \\
&\int_0^1 \frac{t^k}{2} f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)dt \\
= \quad & -\frac{n+1}{2(b-x)}f(x)+\frac{(n+1)^{k+1}\Gamma(k+1)}{2(b-x)^{k+1}}J_{x^+}^k f\left(\frac{n}{n+1}x+\frac{1}{n+1}b\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{t^k}{2} f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)dt \\
= \quad & \frac{n+1}{2(b-x)}f(b)-\frac{(n+1)^{k+1}\Gamma(k+1)}{2(b-x)^{k+1}}J_{b^-}^k f\left(\frac{1}{n+1}x+\frac{n}{n+1}b\right)
\end{aligned}$$

integralleri hesaplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen eşitlik elde edilir. Şimdi yukarıdaki lemma yardımıyla konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.1.1 $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde I, R de bir açık aralık, $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $n\in\mathbb{N}$, $k>0$ ve $0\le a<b<\infty$ olmak üzere $f'\in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $m-$konveks fonksiyon ise bu takdirde $m\in(0,1]$ ve $x\in[a,b]$ için

$$\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)| \\
\le \quad & \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left[|f'(x)|+m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|\right]+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left[|f'(x)|+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1'de mutlak değer alınarak ve $|f'|$' nin $m-$ konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)| \\
\le \quad & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|dt+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)\right|dt\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right] \\
= \quad & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+m\frac{1-t}{n+1}\frac{a}{m}\right)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+m\frac{n+t}{n+1}\frac{a}{m}\right)\right|dt\right]
\end{aligned}$$

$$+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+m\frac{1-t}{n+1}\frac{b}{m}\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+m\frac{n+t}{n+1}\frac{b}{m}\right)\right|dt\right]$$
$$\leq \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left[|f'(x)|+m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|\right]+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left[|f'(x)|+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1 Teorem 4.1.1' de $m=n=1$ alınırsa, [19]' da Teorem 1 eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.2 $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde I, R de bir açık aralık, $f: I\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $n\in\mathbb{N}$, $k>0$ ve $0\leq a<b<\infty$ olmak üzere $f'\in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $m-$konveks fonksiyon ise bu takdirde $m\in(0,1]$, $x\in[a,b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q>1$ için

$$\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)|\\
\leq\ & \left[\frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)}(\frac{1}{kp+1})^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\times\left[\left(\frac{(2n+1)|f'(x)|^q+m|f'(\frac{a}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(x)|^q+m(2n+1)|f'(\frac{a}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\left[\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)}(\frac{1}{kp+1})^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\times\left[\left(\frac{(2n+1)|f'(x)|^q+m|f'(\frac{b}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(x)|^q+m(2n+1)|f'(\frac{b}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, Hölder eşitsizliğini ve $|f'|^q$' nin $m-$ konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)|\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|dt+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)\right|dt\right]\\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right]\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 (\frac{t^k}{2})^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 (\frac{t^k}{2})^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 (n+t)|f'(x)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1 (1-t)|f'(x)|^q+m(n+t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 (n+t)|f'(x)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1 (1-t)|f'(x)|^q+m(n+t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)}(\frac{1}{kp+1})^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\\
\times\ & \left[\left(\frac{(2n+1)|f'(x)|^q+m|f'(\frac{a}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(x)|^q+m(2n+1)|f'(\frac{a}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\left[\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)}(\frac{1}{kp+1})^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
\times\ & \left.\left[\left(\frac{(2n+1)|f'(x)|^q+m|f'(\frac{b}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(x)|^q+m(2n+1)|f'(\frac{b}{m})|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right.
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2 Teorem 4.1.2' te $m = n = 1$ alınırsa, [19]' da Teorem 2 eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.3 $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde I, R de bir açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$, I° diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$ ve $0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $m-$konveks fonksiyon ise bu takdirde $m \in (0,1]$, $x \in [a,b]$ ve $q > 1$ için

$$
\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)|\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left(\frac{1}{(k+2)(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left((n(k+2)+k+1)|f'(x)|^q+m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(|f'(x)|^q+m(n(k+2)+k+1)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left(\frac{1}{(k+2)(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left((n(k+2)+k+1)|f'(x)|^q+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left(|f'(x)|^q+m(n(k+2)+k+1)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, power-mean eşitsizliğini ve $|f'|^q$' nin $m-$ konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|dt+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)\right|dt\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\times\ & \left\{\left(\int_0^1 t^k\left[(n+t)|f'(x)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 t^k\left[(1-t)|f'(x)|^q+m(n+t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\times\ & \left\{\left(\int_0^1 t^k\left[(n+t)|f'(x)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 t^k\left[(1-t)|f'(x)|^q+m(n+t)|f'(\frac{b}{m})|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left(\frac{1}{(k+2)(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left((n(k+2)+k+1)|f'(x)|^q+m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(|f'(x)|^q+m(n(k+2)+k+1)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left(\frac{1}{(k+2)(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left((n(k+2)+k+1)|f'(x)|^q+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\left(|f'(x)|^q+m(n(k+2)+k+1)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3 Eğer Teorem 4.1.3' te $m=n=1$ alınırsa , [19]' da Teorem 3 eşitsizliği elde edilir.

4.2 Diferensiyellenebilen $(\alpha,m)-$ Konveks Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda Lemma 4.1.1'i kullanarak $(\alpha,m)-$konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipinde integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1 $[0,\infty)\subset I$ olacak şekilde I, R de bir açık aralık, $f:I\to\mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $n\in\mathbb{N}$, $k>0$ ve $0\le a<b<\infty$ olmak üzere $f'\in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $(\alpha,m)-$konveks fonksiyon ise bu takdirde $(\alpha,m)\in(0,1]^2$ ve $x\in[a,b]$ için

$$A=\frac{n^{\alpha}}{k+1}{}_2F_1(-\alpha,k+1,k+2;-\frac{1}{n})+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)} \tag{4.2.1}$$

$$B=\frac{2(n+1)^{\alpha}}{k+1} \tag{4.2.2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&|G(k;n;a,x,b)(f)|\\ \le\ &\frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)(n+1)^{\alpha}}\left[A|f'(x)|+m(B-A)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|\right]\\ &+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)(n+1)^{\alpha}}\left[A|f'(x)|+m(B-A)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, mutlak değerin özellikleri ve $|f'|$' nin (α,m)-konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}&|G(k;n;a,x,b)(f)|\\ \le\ &\frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|dt+\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)\right|dt\right]\\ &+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right]\\ \le\ &\frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg[\left(\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \\
\leq\ &\frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\times\ &\left\{\left(\int_0^1 t^k\left[(n+t)|f'(x)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left.\left(\int_0^1 t^k\left[(1-t)|f'(x)|^q+m(n+t)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
\times\ &\left\{\left(\int_0^1 t^k\left[(n+t)|f'(x)|^q+m(1-t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left.\left(\int_0^1 t^k\left[(1-t)|f'(x)|^q+m(n+t)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\ &\frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left(\frac{1}{(k+2)(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left((n(k+2)+k+1)|f'(x)|^q+m\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left.\left(|f'(x)|^q+m(n(k+2)+k+1)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)(k+1)}\left(\frac{1}{(k+2)(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left((n(k+2)+k+1)|f'(x)|^q+m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left.\left(|f'(x)|^q+m(n(k+2)+k+1)|f'(\frac{b}{m})|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1 Eğer Teorem 4.2.1' de $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 4.1.1 eşitsizliği elde edilir .

Teorem 4.2.2 $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde I, R de bir açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$ ve $0 \leq a < b < \infty$ olmak üzere $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $(\alpha,m)-$konveks fonksiyon ise bu takdirde $(\alpha,m) \in [0,1]^2$, $x \in [a,b]$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $q>1$ için

$$C = \frac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{\alpha+1}$$

$$D = (n+1)^{\alpha}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\Big(\frac{1}{pk+1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{\frac{\alpha}{q}}\left[\left(C|f'(x)|^q+m(D-C)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left((D-C)|f'(x)|^q+mC\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\Big(\frac{1}{pk+1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)^{\frac{\alpha}{q}}\left[\left(C|f'(x)|^q+m(D-C)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left((D-C)|f'(x)|^q+mC\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, Hölder eşitsizliğini ve $|f'|^q$' nin (α,m)-konveksliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
&|G(k;n;a,x,b)(f)| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|dt+\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)\right|dt\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t^k}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left(\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\int_0^1\left(\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1\left(\frac{t^k}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left(\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\int_0^1\left(\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\frac{1}{pk+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\
\times\ & \left\{\left[\int_0^1\left(\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^\alpha|f'(x)|^q+m\left(1-\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^\alpha\right)|f'(\frac{a}{m})|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\int_0^1\left(\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^\alpha|f'(x)|^q+m\left(1-\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^\alpha\right)|f'(\frac{a}{m})|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\frac{1}{pk+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\
\times\ & \left\{\left[\int_0^1\left(\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^\alpha|f'(x)|^q+m\left(1-\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^\alpha\right)|f'(\frac{b}{m})|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left[\int_0^1 \left(\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^{\alpha}|f'(x)|^q + m\left(1-\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^{\alpha}\right)|f'(\frac{b}{m})|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

$$= \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\frac{1}{pk+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left[\left(C|f'(x)|^q + m(D-C)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left((D-C)|f'(x)|^q + mC\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\frac{1}{pk+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left[\left(C|f'(x)|^q + m(D-C)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left((D-C)|f'(x)|^q + mC\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2 Teorem 4.2.2' te $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 4.1.2' deki eşitsizlik elde edilir .

Teorem 4.2.3 $[0,\infty) \subset I$ olacak şekilde I, R de bir açık aralık, $f : I \to \mathbb{R}$, I°'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$ ve $0 \le a < b < \infty$ olmak üzere $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $(\alpha,m)-$konveks fonksiyon ise bu takdirde $(\alpha,m) \in (0,1]^2$, $x \in [a,b]$ ve $q > 1$ için A,(4.2.1) ve B,(4.2.2) olmak üzere

$$|G(k;n;a,x,b)(f)|$$

$$\le \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left\{\left[\left(A-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)|f'(x)|^q\right.\right.$$

$$\left.+m\left(\frac{B}{2}-A+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}|f'(x)|^q\right.$$

$$\left.\left.+m\left(\frac{B}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left\{\left[\left(A-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)|f'(x)|^q\right.\right.$$

$$\left.+m\left(\frac{B}{2}-A+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}|f'(x)|^q\right.$$

$$\left.\left.+m\left(\frac{B}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, power-mean eşitsizliğini ve $|f'|^q$' nin (α,m)-konveksliğini kullanarak

$$|G(k;n;a,x,b)(f)|$$

$$\le \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|dt + \int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)\right|dt\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right]\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\frac{1}{2(k+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left(\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^{\alpha}|f'(x)|^q\right.\right.\right.\\
&\left.\left.+m\left(1-\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^{\alpha}\right)|f'(\frac{a}{m})|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left(\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^{\alpha}|f'(x)|^q+m\left(1-\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^{\alpha}\right)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\\
\leq\ & \frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\frac{1}{2(k+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left(\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^{\alpha}|f'(x)|^q\right.\right.\right.\\
&\left.\left.+m\left(1-\left(\frac{n+t}{n+1}\right)^{\alpha}\right)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\left[\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left(\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^{\alpha}|f'(x)|^q+m\left(1-\left(\frac{1-t}{n+1}\right)^{\alpha}\right)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\\
=\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left\{\left[\left(A-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)|f'(x)|^q\right.\right.\\
&\left.+m\left(\frac{B}{2}-A+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}|f'(x)|^q\right.\\
&\left.\left.+m\left(\frac{B}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{a}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\\
&+\frac{(b-x)^{k+1}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{q}}\left\{\left[\left(A-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)|f'(x)|^q\right.\right.\\
&\left.+m\left(\frac{B}{2}-A+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}|f'(x)|^q\right.\\
&\left.\left.+m\left(\frac{B}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}\right)\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böyelece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3 Teorem 4.2.3' te $\alpha = 1$ alınırsa , Teorem 4.1.3'deki eşitsizlik elde edilir.

4.3 Diferensiyellenebilen $s-$ Konveks Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller Yardımıyla Elde Edilen Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, $s-$konveks fonksiyonlar için Lemma 4.1.1 dikkate alınarak aşağıdaki yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.3.1 $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon , $f' \in L[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k \geq 0$ olsun. Eğer $|f'|$ $s-$ konveks fonksiyon ise $0 \leq s \leq 1$ için

$$E = n^s (k+1) {}_2F_1[-s, k+1, k+2; \frac{-1}{n}] \tag{4.3.1}$$

$$F = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(k+s+2)} \tag{4.3.2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & |G(k;n;a,x,b)(f)| \\ \leq \ & \frac{E+F}{2(b-a)(n+1)^s} \left[(x-a)^{k+1} \left[|f'(x)| + |f'(a)| \right] + (b-x)^{k+1} \left[|f'(x)| + |f'(b)| \right] \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, mutlak değerin özellikleri ve $|f'|$' nin $s-$ konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} & |G(k;n;a,x,b)(f)| \\ \leq \ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a} \left[\int_0^1 \frac{t^k}{2} \left| f'\left(\frac{n+t}{n+1}x + \frac{1-t}{n+1}a \right) \right| dt + \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left| f'\left(\frac{1-t}{n+1}x + \frac{n+t}{n+1}a \right) \right| dt \right] \\ & + \frac{(b-x)^{k+1}}{b-a} \left[\int_0^1 \frac{t^k}{2} \left| f'\left(\frac{n+t}{n+1}x + \frac{1-t}{n+1}b \right) \right| dt + \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left| f'\left(\frac{1-t}{n+1}x + \frac{n+t}{n+1}b \right) \right| dt \right] \\ \leq \ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a} \left\{ \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left[\left(\frac{n+t}{n+1} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{1-t}{n+1} \right)^s |f'(a)| \right] dt \right. \\ & \left. + \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left[\left(\frac{1-t}{n+1} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{n+t}{n+1} \right)^s |f'(a)| \right] dt \right\} \\ & \quad + \frac{(b-x)^{k+1}}{b-a} \left\{ \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left[\left(\frac{n+t}{n+1} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{1-t}{n+1} \right)^s |f'(b)| \right] dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left[\left(\frac{1-t}{n+1} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{n+t}{n+1} \right)^s |f'(b)| \right] dt \right\} \\ = \ & \frac{E+F}{2(b-a)(n+1)^s} \left[(x-a)^{k+1} \left[|f'(x)| + |f'(a)| \right] + (b-x)^{k+1} \left[|f'(x)| + |f'(b)| \right] \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2 $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon , $f' \in L[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k \geq 0$ olsun . $|f'|$ $s-$ konveks fonksiyon ise $0 \leq s \leq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ için

$$\mu_1 = \frac{(n+1)^s - (n)^s}{s+1}$$

ve

$$\mu_2 = \frac{1}{s+1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&|G(k; n; a, x, b)(f)| \\
\leq\ & \frac{(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)} \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\
\times\ & \Bigg\{ \Big[(x-a)^{k+1} \Big[[\mu_1 |f'(x)|^q + \mu_2 |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} + [\mu_2 |f'(x)|^q + \mu_1 |f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}\Big]\Big] \\
& + \Big[(b-x)^{k+1} \Big[[\mu_1 |f'(x)|^q + \mu_2 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} + [\mu_2 |f'(x)|^q + \mu_1 |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}\Big]\Big] \Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^q$' nin $s-$ konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&|G(k; n; a, x, b)(f)| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a} \left[\int_0^1 \frac{t^k}{2} \left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x + \frac{1-t}{n+1}a\right)\right| dt + \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x + \frac{n+t}{n+1}a\right)\right| dt\right] \\
& + \frac{(b-x)^{k+1}}{b-a} \left[\int_0^1 \frac{t^k}{2} \left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x + \frac{1-t}{n+1}b\right)\right| dt + \int_0^1 \frac{t^k}{2} \left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x + \frac{n+t}{n+1}b\right)\right| dt\right] \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{t^k}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x + \frac{1-t}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x + \frac{n+1}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
& + \frac{(b-x)^{k+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{t^k}{2}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x + \frac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x + \frac{n+1}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)} \left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_0^1 (n+t)^s |f'(x)|^q + (1-t)^s |f'(a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\int_0^1 (1-t)^s|f'(x)|^q+(n+t)^s|f'(a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$+\frac{(b-x)^{k+1}(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg[\left(\int_0^1 (n+t)^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 (1-t)^s|f'(x)|^q+(n+t)^s|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$= \frac{(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{(x-a)^{k+1}\left[[\mu_1|f'(x)|+\mu_2|f'(a)|]^{\frac{1}{q}}+[\mu_2|f'(x)|+\mu_1|f'(a)|]^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

$$+\frac{(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{kp+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{(b-x)^{k+1}\left[[\mu_1|f'(x)|+\mu_2|f'(b)|]^{\frac{1}{q}}+[\mu_2|f'(x)|+\mu_1|f'(b)|]^{\frac{1}{q}}\right]\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$ ve $\alpha\geq 0$ olsun. $|f'|^q$ $s-$ konveks fonksiyon ise $0\leq s\leq 1$ ve $q>1$ için E, (4.3.1) ve F, (4.3.2) olmak üzere

$$|G(\alpha;n;a,x,b)(f)|$$

$$\leq \frac{(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \Bigg\{(x-a)^{k+1}\left[(E|f'(x)|^q+F|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}+(F|f'(x)|^q+E|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+(b-x)^{k+1}\left[(E|f'(x)|^q+F|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(F|f'(x)|^q+E|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]\Bigg\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 4.1.1, power-mean eşitsizliği ve $|f'|^{q}$' nin $s-$ konveksliği kullanılarak,

$$|G(k;n;a,x,b)(f)|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|dt+\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}a\right)\right|dt\right]$$

$$+\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left[\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{(x-a)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1\frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1\frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$
\begin{aligned}
& +\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}\left|f'\left(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \\
& +\frac{(b-x)^{k+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}|f'(\frac{n+t}{n+1}x+\frac{1-t}{n+1}b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1 \frac{t^k}{2}|f'(\frac{1-t}{n+1}x+\frac{n+1}{n+1}b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \frac{(x-a)^{k+1}(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^1 t^k\left[(n+t)^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1 t^k\left[(1-t)^s|f'(x)|^q+(n+t)^s|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
& +\frac{(b-x)^{k+1}(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_0^1 t^k\left[(n+t)^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1 t^\alpha\left[(1-t)^s|f'(x)|^q+(n+t)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
=\ & \frac{(n+1)^{\frac{-s}{q}}}{2(b-a)}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
\times\ & \left\{(x-a)^{k+1}\left[\left(E|f'(x)|^q+F|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(F|f'(x)|^q+E|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right. \\
& \left.+(b-x)^{k+1}\left[\left(E|f'(x)|^q+F|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(F|f'(x)|^q+E|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Araştırmanın esasını oluşturan dördüncü bölümde, Lemma 4.1.1' de Noor ve arkadaşlarının vermiş oldukları özdeşlikten yararlanarak $m-$ konveks, $(\alpha, m)-$ konveks ve $s-$ konveks fonksiyonlar için yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler sunulmuştur. Bu sonuçlar dördüncü bölümde verilmiştir. "E.Set ve S.S. Karatas, Hermite-Hadamard type inequalities obtained via fractional integral for differentiable s-convex functions, AIP Conf. Proc. 1726, 020044 (2016)" ve "E.Set, S.S. Karatas ve M.A. Khan, Hermite - Hadamard Type Inequalities Obtained via Fractional Integral for Diferentiable $m-$convex and (α, m)-convex Functions, International Journal of Analysis Volume 2016, Article ID 4765691, 8 pages" şeklinde yayınlanmıştır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar Lemma 4.1.1' den ve quasi-konvekslik, h-konvekslik gibi konveksliğin farklı sınıflarından faydalanarak Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, 934.

[2] Bakula, M.K., Özdemir, M.E. and Pečarić, J., M., 2008. Hadamard type inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 9(4).

[3] Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

[4] Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

[5] Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen, Publ. Inst. Math., 23, 13-20.

[6] Dragomir, S.S., Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. Lett. 11 (5) 91-95.

[7] Dragomir, S.S., Fitzpatrick, S., 1999. Demonstratio Math., **32** (4), 687-696.

[8] Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., 1999. The Hadamard's inequality for $s-$convex functions in the second sense, Demonstratio Math., 32 (4) 687-696.

[9] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topic on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, Melbourne and Adelaide, December.

[10] Gorenflo, R. and Mainardi, F., Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional order, 1997. Springer Verlag, Wien.

[11] Hadamard, J., 1983. Étude sur les propriété s des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann, J. Math. Pures Appl. 58 171-215.

[12] Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities, 2nd Ed., Cambridge University Press.

[13] Hudzik, H., Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions, Aequationes Math. 48 100-111.

[14] Iscan, I., 2013. A new generalization of some integral inequalities and their applications, Int. J. Eng. Appl. Sci. (EAAS) 3 (3) 17-27.

[15] Kannappan, Pl., 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer, 817.

[16] Kirmaci, U.S., Klaričić Bakula, M., Ö zdemir M.E., Pečarić J., 2007. Hadamard-type inequalities for s-convex functions, Appl. Math. Comput. 193 (1) 26-35.

[17] Kilbas A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier B.V., Amsterdam, Netherlands.

[18] Latif, M. A., 2015. inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose derivatives in absolute are convex with applications, Arab J. Math. Sci. 21(1) 84-97.

[19] Mihai M.V., Mitroi F.C., 2014. Hermite-Hadamard type inequalities obtained via Riemann-Liouville fractional calculus, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. 83, 2, pp. 209-215.

[20] Mitrinović, D.S., 1970 Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin/New York.

[21] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[22] Noor M. A., Noor K. I., Mihai M. V., Awan M. U., 2016. Fractional Hermite-Hadamard inequalities for differentiable s-Godunova-Levin Functions, Filomat in press.

[23] Orlicz W. and Matuszewska W., 1968. A note on modular spaces. IX, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 801-808. MR 39:3278

[24] Pachpatte, B.G., 2003. On some inequalities for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6, Supplement, Article 1.

[25] Pachpatte, B. G., 2005. Mathematical Inequalities, Volume 67, Elsevier B.V., 606.

[26] Pearce, C.E.M., Pečarić, J.E., 2000. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formula, Appl. Math. Lett. 13 (2) 51-55.

[27] Pečarić, J.E., Proschan, F., Tong Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press Inc.

[28] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., 1993. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA.

[29] Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim., Cluj-Napoca (Romania), 329-338.

[30] Toader, G., 1988. On a generalization of the convexity, Mathematica, 30 (53), 83-87.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Süleyman Sami KARATAŞ
Doğum Yeri	:	Gölköy / Ordu
Doğum Tarihi	:	17.01.1986
Medeni Hali	:	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	:	İngilizce
İletişim Bilgileri	:	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, sskaratas52@gmail.com
Lise	:	Çok Programlı Gölköy Lisesi, 2003
Lisans	:	Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyet Fakültesi Matematik Bölümü 2003-2007