T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİK POİSSON DAĞILIMININ BAZI ÖZELLİKLERİ

EMRAH GÜNBEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Emrah GÜNBEY tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında hazırlanan "Geometrik Poisson Dağılımının Bazı Özellikleri" adlı bu tez, jürimiz tarafından 25 / 05 / 2016 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

ONAY:

Başkan : Doç. Dr. İmdat İŞCAN İmza :
Matematik, Giresun Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Selahattin MADEN İmza :
Matematik, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ İmza :
Matematik, Ordu Üniversitesi

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 26./.05./2016 tarih ve 2016/261.sayılı kararı ile onaylanmıştır.

21/06/2016

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza

Emrah GÜNBEY

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GEOMETRİK POİSSON DAĞILIMININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Emrah GÜNBEY

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 42s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Geometrik Poisson dağılımının tarihsel gelişimi ile ilgili kısa bir giriş verilmiştir. İkinci Bölümde bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise tezde ele alınan Geometrik Poisson dağılımı Bileşik Poisson dağılımının özel bir durumu olarak detaylı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir. Daha sonra ise tezde kullanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonsuz bölünebilme, log-konkavlık, tek modluluk, yaşam fonksiyonu, negatif moment, tekrarlama bağıntısı.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF GEOMETRIC POISSON DISRIBUTON

Emrah GÜNBEY

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology,
Department of Mathematics, 2016
Msc. Thesis, 42p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis consists of four main chapters. It is given an introduction associated with the historical development on Geomtric Poisson Distribution. In Chapter two, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. In Chapter three, it is considered with detailed the Geomtric Poisson Distribution is a particular case of compound Poisson distribution. In the fourth Chapter, it is given some result and propositions. It is listed some references that used in the thesis.

Key Words: Infinite divisibility, Log-concavity. Unimodality, Survival function, Negative moment, Recursive relation.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN ’e teşekkür ederim.

Aynı zamanda, hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen babam Erol GÜNBEY, annem Fatma GÜNBEY ve abim Erdem GÜNBEY’ e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\bar{A}$	: A olayının bütünleyeni
$C(n,k)$	: n’ nin k’ lı kombinasyonu
$E(X)$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
GPD	: Geometrik Poisson dağılımı
$g_X(s)$	: X rastgele değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu
$M_X(t)$	: X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu
$P(A)$	: A olayının olasılığı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$V(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
σ_x	: X rastgele değişkeninin standart sapması
$(\Omega, \mathcal{U})$	: Ölçülebilir bir uzay
$(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$	: Ölçü uzayı
$(\Omega, \mathcal{U}, P)$	: Olasılık uzayı

1. GİRİŞ

Geometrik Poisson dağılımı (GPD), klasik bileşik Poisson dağılımına ait her bir terimin katsayısının geometrik dağılıma göre gerçekleştiği özel bir durumdur.

Geometrik Poisson dağılımı gerçek hayat durumlarında literatürde birçok uygulama alanına sahiptir. Randolf ve Şahinoğlu (1995) yazılımlardaki kusurlu ve hatalı durumların kontrolü için Geometrik Poisson dağılımının uygulanmasını önermiş ve Chen (2005) üretim kontrolü hususunda Geometrik Poisson numune kontrol şemalarını geliştirmiştir. Robin (2002) bu şemayı bilgilerin çakışması durumlarının dağılımlarını modellemek için kullanmıştır. Rosycuk (2006) ise bu şemayı DNA değişkenlerini modellemek için kullanmıştır.

Bu modele göre değişim durumları zaman bakımından Poisson dağılımı ile yapılmış ve her olayla ilişkilendirilmiş değişkenlerin sayısının geometrik dağılım şeklinde dağıtıldığı varsayılmıştır.

Özel ve İnal (2010) bu modelin trafik kazalarına ait veriler üzerinde uygulanmasını önermiştir.

Johnson (1992) geometrik Poisson dağılımında basite indirgenebilen, bileşik Poisson dağılımına ait olasılıkların işlenmesi için doğrusal bir formül türetmiştir.

Nuel (2008), Kramer'in bileşik geometrik dağılım fonksiyonunu kullanarak GPD için bir tekrarlama bağıntısı elde etmiştir.

Bazı koşullar sıfıra indirgendiği için veya alan dışında olabileceği için GPD için birikimli dağılımın fonksiyonunun logaritmik fonksiyonu düzenleyen bir algoritma yaratıldı. Ancak GPD'nin olasılık fonksiyonu için direkt bir formül ya da algoritma henüz elde edilememiştir.

Özel ve İnal (2010) GPD'nin açık olasılık fonksiyonunu geliştirmiş ve olasılıkların işlenmesi için bir algoritma üretmişlerdir.

Ata ve Özel (2012) geometrik Poisson işlemleri ve diğer bileşik Poisson işlemleri için hayati derecede önem arz eden bazı fonksiyonlar türetmişlerdir.

Özel (2013), özel olarak Polly-Aeppli Process'i içeren tek değişkenli birleşik Poisson sürecinin momentlerini, kümülantlarını, sivriliğini ve çarpıklığını ve kovaryansını elde etmişlerdir.

GPD'nin kullanımı hakkında birçok araştırma yapılmasına rağmen hala GPD'nin sonsuz bölünebilirliği, iç bükey logaritması ve tek modlu yapısı hakkında birçok soru ele alınmamıştır.

Medgyessy (1977) ve Steutel, Van Harn'ın (1979) çok bilinen kitaplarında da bahsedildiği gibi tek modluluk özelliği birçok olasılık ve istatistik probleminin çözümlenmesi için gerekli olan çok önemli bir özelliktir. Tam sayılar kümesinde bulunan farklı dağılımlar dikkat çekici olmasıyla birlikte karşılaştırılabilir sonuçları tek modlu olarak belirtir. Tek modluluk aynı zamanda optimizasyon ve matematiksel programlama ile dikkat çeker. Tek modluluğun kanıtlanması istatistiksel verilere dayanmaktadır. Parametrelerin belirlenmesi için üst düzey olasılığın yöntemine başvurulduğunda tek modlu olasılık fonksiyonu gerekli hesaplamayı kolaylaştırır. Genellikle olasılık fonksiyonlarının çoğu parametreleri içermesine rağmen tek modlu özelliği belirtebilmelidir. Gaus eşitsizliği, Vysochanskii-Petunin eşitsizliği gibi bazı kavramlar tek modluluğa dayanmaktadır. Simetrik dağılımın hareketi tekrarlaması tek modluluğun belirtilerini ve zayıf yönlerinin karşılaştırılmasını içerir.

Keilson ve Gerber (1971) kesikli dağılımların yüksek tek modlulukları üzerinde bir grup sonuçlar ortaya koymuşlardır. p_x sıralı diziliminin kuvvetli tek modlu olduğu gerekli ve yeterli durum, p_x 'in logaritmik iç bükey olduğu durumdur, yani x in tüm değerleri için $(p_x)^2 \geq p_{x+1}p_{x-1}$ dir. Ancak Steutel ve Van Harn (1977) tarafından bulunan Lemma kullanılarak GPD'nin tek modlu olduğu kanıtlanabilirken Hansen'in (1988) tezinde öne sürdüğü Teorem-1 kullanılarak da GPD'nin logaritmik iç bükey olmadığı kanıtlanabilir. Consul ve Famoye (1986) de GPD'nin tek modlu olduğunu kanıtlamak için aynı lemmayı kullanmışlardır.

Bu çalışmada GPD'nin olasılık hesaplamaları için tekrar eden bir formül elde edilmiş, GPD'nin sonsuz bölünebilirliği, logaritmik iç bükey olmadığı, tek modlu olduğu kanıtlanmış ve çok önemli fonksiyonlar elde edilmiştir. Dahası GPD'nin birinci dereceden negatif momentinin doğruluğu hesaplanmış ve sonuç olarak faktöriyel momentlerin tekrar eden bağıntılar yoluyla karakterize edildiği görülmüştür. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanımlar ve dağılımlar yer almaktadır. Üçüncü bölümde Geometrik poisson dağılımına ait bazı temel tanım ve önemli lemmalar verilerek, Geometrik poisson dağılımının sonsuz bölünebilirliğinden, güçlü tek modlu olmadığından, tek modluluğundan, sürdürülebilirlik fonksiyonundan, birinci dereceden negatif moment kavramından bahsedilmiş ve faktöriyel momentler için tekrarlama bağıntılarına dayanan bir tanımlama teoremi verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Olasılık Uzayı ve Rastgele Değişkenler

Bu bölümde, olasılık uzayı ve rastgele değişkenlerle ilgili temel kavramları ve sonraki bölümlerde kullanılacak bazı önemli teoremleri vereceğiz.

2.1.1. Olasılık Uzayı

Bir rastgele deneyin muhtemel sonuçlarının her birini bir, iki veya daha yüksek boyutlu uzayda bir nokta olarak düşünebiliriz. Bu durum bizi olasılık uzayı kavramına götürür.

Tanım 2.1.1.1. (Maden 2013) Bir E kümesi üzerinde bir $\mathfrak{R}$ sınıfı verildiğinde, eğer

i) $E \in \mathfrak{R}$

ii) $A \in \mathfrak{R}$ ise $\bar{A} \in \mathfrak{R}$

iii) $A, B \in \mathfrak{R}$ ise $A \cup B \in \mathfrak{R}$

koşulları sağlanıyorsa $\mathfrak{R}$ sınıfına E üzerinde bir cebir adı verilir.

Tanım 2.1.1.2. (Maden 2013) Bir E kümesi üzerindeki bir $\mathfrak{R}$ sınıfı Tanım 2.1.1.1. deki i. ve ii.'nın yanında iii. yerine

iii)' $A_n \in \mathfrak{R}$ olan bir (A_n) dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$

koşulunu sağlıyorsa $\mathfrak{R}$ sınıfına E üzerinde bir $\sigma -$ cebir adı verilir.

Örnek 2.1.1.1. (Maden 2013) $\mathfrak{R}_1 = \{A: A \subset \mathbb{R}\}, \mathfrak{R}_2 = \{\emptyset, Q, \bar{Q}, \mathbb{R}\}, \mathfrak{R} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ sınıflarının her biri $\mathbb{R}$ de birer σ - cebirdir.

Tanım 2.1.1.3. (Maden 2013) Ω bir küme ve $\mathcal{U}, \Omega$ üzerinde bir $\sigma -$ cebir olmak üzere, $(\Omega, \mathcal{U})$ ikilisine ölçülebilir uzay denir.

Tanım 2.1.1.4. (Maden 2013) $(\Omega, \mathcal{U})$ ölçülebilir bir uzay olmak üzere,

$$\mu: \mathcal{U} \to R \cup \{\infty\}$$

$$A \to \mu(A)$$

fonksiyonu için,

i) $\mu(A) \geq 0$

ii) $\mu(\emptyset) = 0$

iii) $(A_n), \mathcal{U}$ da ayrık kümelerin dizisi, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özellikleri sağlandığında, μ fonksiyonuna ölçü denir. $\mu(A)$ sayınına A'nın ölçüsü denir.

Tanım 2.1.1.5. (Maden 2013) $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ üçlüsüne ölçü uzayı denir.

Tanım 2.1.1.6. (Maden 2013) $\mathcal{U}, \Omega$'da bir $\sigma -$ cebir ve $P, \mathcal{U}$'da bir olasılık ölçüsü olmak üzere $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Tanım 2.1.1.7. (Maden 2013) Bir rastgele deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine örnek uzay, örnek uzaydaki her bir noktaya örnek nokta, örnek uzayın herhangi bir alt kümesine ise olay adı verilir.

Her küme kendisinin altkümesi ve boş küme her kümenin altkümesi olacağından örnek uzayın kendisi ve boş küme de birer olay olacaktır. Örnek uzaya kesin olay ve boş kümeye ise imkansız olay da denir. Örnek noktalar ile bir deneyin mümkün sonuçları temsil edildiğine göre bir olayı, bir deneyin mümkün sonuçlarından biri ya da bu sonuçların herhangi bir birleşimi olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.1.1.8. (Maden 2013) Bir E deneyi verilsin. S bu deney ile ilgili bir örnek uzay olsun. Her bir A olayı ile A olayının olasılığı diyeceğimiz ve $P(A)$ ile göstereceğimiz bir gerçek sayı eşleştirelim. $P(A)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) $P(S) = 1$.

(3) Eğer A ve B ayrık iki olay ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

(4) Eğer $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ ikişer ikişer ayrık olaylar ise bu takdirde

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

olur. (4) den her hangi sonlu sayıdaki n için

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

elde edileceği açıktır. Olasılığın yukarıdaki dört özelliği nispi frekans için verilen karakteristiklerle açık bir uyum içindedir. Bir an için, eğer f_A çok sayıda tekrar üzerine kurulmuş ise $P(A)$ ve f_A sayılarının birbirine yakın (belli bir anlamda) olduğu gösterilecektir. Şimdi $P(A)$ olasılığının nasıl hesaplanacağını bilmeksizin onun bazı genel özelliklerini listeleyelim. Bu özellikler $P(A)$ olasılığının gerçekte nasıl hesaplanacağına bağlı olmaksızın yukarıdaki şartlardan elde edilir.

i. Eğer $\emptyset$ mümkün olmayan olay ise bu takdirde $P(\emptyset) = 0$ dır.
ii. $\bar{A}$ olayı A olayının bütünleyeni ise $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ dir.
iii. A ve B her hangi iki olay olmak üzere
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ bağıntısı geçerlidir.
iv. A , B ve C her hangi üç olay olmak üzere

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

bağıntısı geçerlidir.
v. A ve B olayları için $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir.

2.1.2. Rastgele Değişken

Tanım 2.1.2.1. (Maden 2013) Bir örnek uzay üzerinde tanımlanmış gerçek değerli bir fonksiyona bir rastgele değişken adı verilir.

Bu tanıma göre rastgele değişken, tanım kümesi örnek uzayı ve değer kümesi ise gerçek sayılar kümesinin uygun bir alt kümesi olan bir fonksiyondur. Rastgele değişkenleri genel olarak $X, Y, Z, \ldots$ gibi harflerle göstereceğiz. O halde bir rastgele değişkeni $X: S \to \mathbb{R}$ olarak yazarız. Böylece E bir deney ve S de bu deneyle ilgili bir örnek uzay olmak üzere her $s \in S$ elemanına bir $X(s) = x$ gerçek sayısı karşılık getiren bir X fonksiyonuna bir rastgele değişken denir.

Tanım 2.1.2.2. (Maden 2013) X bir rastgele değişken olmak üzere X 'in alabileceği değerlerin kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir küme ise X 'e bir kesikli rastgele değişken denir. X rastgele değişkeninin alabileceği değerlerin kümesi bir aralık ya da aralıkların birleşimi şeklinde ise X 'e sürekli rastgele değişken adı verilir.

2.1.3. Beklenen Değer

Tanım 2.1.3.1. (Maden 2013) X rastgele değişkeni $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ mümkün değerlerini $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1,2, \dots, n, \dots$ olasılıklarıyla alan kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde X rastgele değişkeninin $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri (veya matematiksel beklentisi)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i . p(x_i)$$

olarak tanımlanır. Burada $\sum_{i=1}^{\infty} x_i . p(x_i)$ serisi mutlak yakınsak yani $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| . p(x_i) < \infty$ olmalıdır. Bu sayıya X 'in ortalama değeri olarak da müracaat edilir.

Tanım 2.1.3.2. (Maden 2013) X rastgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir sürekli rastgele değişken olsun. Bu durumda X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Yine bu genelleştirilmiş integral yakınsak olmayabilir. Bu nedenle $E(X)$ 'in mevcut olması için gerek yeter koşul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$$

integralinin sonlu olmasıdır.

2.1.4. Varyans

Tanım 2.1.4.1. (Maden 2013) Bir X rastgele değişkeninin $V(X)$ veya σ_X^2 ile gösterilen varyansı

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2$$

şeklinde tanımlanır.

Bu şekilde tanımlanan $V(X)$ sayısının pozitif kareköküne ise X rastgele değişkeninin standart sapması denir ve σ_X ile gösterilir.

Teorem 2.1.4.1. (Maden 2013) $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ dir.

İspat: $E[X - E(X)]^2$ ifadesini açarak ve beklenen değerin özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= E\{X^2 - 2.X.E(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X).E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.4.2. (Maden 2013) X rastgele değişkeni $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1,2, \ldots$ olasılık dağılımına sahip kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde X'in moment çıkaran fonksiyonu M_X ,

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i}.p(x_i)$$

ile tanımlanır.

Eğer X rastgele değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken ise bu durumda moment çıkaran fonksiyon

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

ile verilir.

Not 2.1.4.1. Bu tanıma göre ister kesikli ister sürekli durum göz önüne alınsın $M_X(t)$ fonksiyonu basit olarak e^{tX} rastgele değişkeninin beklenen değeridir. Bu nedenle yukarıdaki ifadeler birleştirilerek

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

yazılabilir.

2.2. Bazı Önemli Kesikli Dağılımlar

2.2.1. Binom Dağılımı

Tanım 2.2.1.1. (Maden 2013) Bir E deneyini göz önüne alalım ve A da bu deneye ilişkin bir olay olsun. $P(A) = p$ olduğunu varsayalım ve dolayısıyla $P(\bar{A}\,) = 1 - p$ olacaktır. E deneyinin n bağımsız tekrarını göz önüne alalım. Bu nedenle örnek uzayımız tüm mümkün $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dizilerinden ibarettir, burada her bir a_i E deneyinin i -yinci tekrarında A ya da $\bar{A}$ olayının gerçekleşmesine bağlı olarak ya A ya da $\bar{A}$ dır. Burada bu şekilde 2^n tane dizi vardır. Ayrıca $P(A) = p$ olasılığının her deneme için aynı kaldığını varsayalım. X rastgele değişkeni $\{X = A\}$ olayının gerçekleşmelerinin sayısı olarak tanımlansın. Bu takdirde X rastgele değişkenine n ve p parametreli bir binom rastgele değişkeni adı verilir. Açık olarak X 'in mümkün değerleri $0,1,2, \dots, n$ olacaktır. Bu durumda X rastgele değişkeni binom dağılımına sahiptir denir. E deneyinin bireysel tekrarlarına ise Bernoulli denemeleri adı verilir.

Teorem 2.2.1.1. (Maden 2013) X , n tekrar üzerine kurulan bir binom rastgele değişkeni olsun. Bu takdirde

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2, \dots, n$$

dir.

İspat: E deneyinin örnek uzayının $X = k$ şartını sağlayan özel bir elemanını göz önüne alalım. Örneğin eğer E deneyinin ilk k tekrarı A olayının gerçekleşmesiyle sonuçlanıyor ve geri kalan $n - k$ tekrarı da $\bar{A}$ olayının gerçekleşmesiyle sonuçlanıyorsa böyle bir sonuç ortaya çıkacaktır, yani

$$\underbrace{AAA \dots A}_{k\ tane}, \underbrace{\bar{A}\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-k\ tane}$$

dir. Tüm tekrarlamalar bağımsız olduğundan, bu özel dizinin olasılığının $p^k(1 - p)^{n-k}$ olacağı açıktır. Fakat aynı olasılık $X = k$ koşulunu sağlayan başka bir neticeyle ilgili de olacaktır. Böyle neticelerin toplam sayısı $C(n, k)$ ya eşittir. Çünkü A ‘lar için tamı tamına k pozisyon seçmiştik. Bu $C(n, k)$ tane neticenin tümü karşılıklı olarak ayrık olduğundan yukarıdaki sonuç elde edilmiş olur. Hesaplamamızı doğrulamak için binom teoremini kullanarak

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)p^k(1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1^n = 1$$

olduğu görülür. $C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$ olasılıkları $[p+(1-p)]^n$ ‘nın binom açılımından elde edildiği için bu dağılıma binom dağılımı adı verilmiştir.

Teorem 2.2.1.2. (Maden 2013) Eğer X rastgele değişkeni bir binom dağılımına sahip ise X rastgele değişkeninin beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyonu sırasıyla

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$M_X(t) = [e^t p + (1-p)]^n$$

şeklindedir.

İspat:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\ &= np[p+(1-p)]^{n-1} \\ &= np, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-x)!} p^2 p^{x-2}(1-p)^{n-x} \\ &\qquad + \sum_{x=0}^{n} x f(x) \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2}(1-p)^{n-x} + np \\ &= np^2(n-1) + np, \end{aligned}$$

ve buradan da

$$V(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np(1-p)$$

bulunur. Moment çıkaran fonksiyonu için ise

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x}$$

yazılabilir. Burada binom teoremine göre

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

olduğundan $a = e^t p$ ve $b = (1-p)$ alınarak

$$M_x(t) = [e^t p + (1-p)]^n$$

bulunur.

Binom dağılımında p ve $(1-p)$ değerleri birbirine yaklaştıkça simetri artar, $p = (1-p) = 1/2$ ise simetriktir.

Binom dağılımından olasılıkların elde edilmesinde n değeri büyüdükçe hesaplama zorlukları ortaya çıkar.

Simetrik binom dağılımı (p değerinin çok büyük ya da çok küçük olmadığı durumlar) $n \to \infty$ için normal dağılıma yakınsar.

Asimetrik binom dağılımı (p değerinin çok büyük ya da küçük olduğu durumlar) $n \to \infty$ için Poisson dağılımına yakınsar.

2.2.2. Geometrik Dağılım

Bir E deneyinin yapıldığını ve sadece bir A olayının gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi durumuyla ilgilenildiğini varsayalım. Binom dağılımın incelenmesinde tartışıldığı gibi E deneyinin tekrarlı olarak yapıldığını, tekrarlamaların bağımsız olduğunu ve her bir tekrarda aynı $P(A) = p$ ve $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ olasılıklarının verildiğini varsayalım. A olayının ilk kez gerçekleşmesi anına kadar E deneyinin tekrarlandığını kabul edelim. (Burada binom dağılımına yol açan varsayımlardan ayrılmaktayız. Çünkü Binom dağılımında tekrarlanmaların sayısı önceden belirli idi, oysa burada bu sayı bir rastgele değişken olmaktadır.)

X rastgele değişkenini A olayının ilk kez gerçekleşmesi anına kadar gereken tekrarlamaların sayısı olarak tanımlayalım. Böylece X rastgele değişkeni 1,2,… değerlerini alacaktır. $X = k$ olması için gerek yeter şart E deneyinin ilk $k-1$ tekrarında $\bar{A}$ olayının gerçekleşmesi ve k –yıncı tekrarda ise A olayının gerçekleşmesi olduğundan

$$P(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1,2,\ldots \tag{2.1}$$

olduğu kolayca görülebilir. (2.1) olasılık dağılımına sahip bir rastgele değişkene geometrik dağılıma sahiptir denir. Bu durumda (2.1) bağıntısının olasılık dağılımı şartlarını sağladığı açıktır. Yani $P(X = k) \geq 0$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p(1 + q + q^2 + \cdots) = p\left[\frac{1}{1-q}\right] = 1$$

olacaktır.

Teorem 2.2.2.1. (Maden 2013) Eğer X rastgele değişkeni (2.1) ile verilen bir geometrik dağılıma sahip ise bu takdirde X rastgele değişkeninin beklenen değeri, varyansı, moment çıkaran fonksiyonu sırasıyla

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$M_X(t) = pe^t \frac{1}{1 - [e^t(1-p)]}$$

biçimindedir.

İspat: X rastgele değişkeninin beklenen değeri için

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dq}q^k$$
$$=p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k=p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right]=\frac{1}{p}$$

bulunur. (burada $|q|<1$ için verilen seri yakınsak olduğundan toplam ile türev alma operasyonlarının yerleri değiştirilmiştir.) Benzer hesaplamayla $k^2=k(k-1)+k$ eşitliği de dikkate alınarak

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}[k(k-1)+k]q^{k-1}p$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-1}p+\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p$$
$$=pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2}+\frac{1}{p}$$
$$=pq\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d^2}{dq^2}q^k+\frac{1}{p}$$
$$=pq\frac{d^2}{dq^2}\left[\frac{q^2}{1-q}\right]+\frac{1}{p}$$
$$=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{p}$$

bulunur. Buradan da varyansın

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$$
$$=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}$$
$$=\frac{q}{p^2}$$

olacağı görülür.

Geometrik dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t)=E[e^{xt}]$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt} p(1-p)^{x-1}$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt} (1-p)^{x}$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} [e^{t}(1-p)]^{x}$$

$$= \frac{p}{1-p} \left[e^{t}(1-p)[1 + e^{t}(1-p) + \cdots]\right]$$

$$= pe^{t} \frac{1}{1 - [e^{t}(1-p)]}$$

şeklinde bulunur.

2.2.3. Poisson Dağılımı

Tanım 2.2.3.1. X rastgele değişkeni $0,1,2,\dots,n,\dots$ değerlerini alan kesikli bir rastgele değişken olsun. Eğer

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}.\alpha^{k}}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots,n,\dots$$

ise X rastgele değişkenine $\alpha > 0$ parametreli Poisson dağılımına sahiptir denir. Yukarıdaki gösterimin bir olasılık dağılımı olduğunu göstermek için kısaca

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}.\alpha^{k}}{k!} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k}}{k!} = e^{-\alpha}.e^{\alpha} = 1 \qquad (2.2)$$

olduğunu belirtelim.

Herhangi bir S örnek uzayına ihtiyaç duyulmaksızın bir rastgele değişkeni onun ranj uzayı ve olasılık dağılımı cinsinden tanımlayabileceğimizden dolayı S örnek uzayı R_X ve $X(s) = x$ ile belirlidir. Yani, deneyin neticeleri basit olarak $0,1,2,\dots,n,\dots$ sayıları ve bunların her birine karşılık gelen olasılıklar ise (2.2) bağıntısıyla verilmiştir.

X rastgele değişkeninin aldığı değerler ve bu değerlere karşılık gelen olasılıklar göz önüne alınırsa Poisson dağılımına sahip bir rastgele değişken ile ilgili olarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

i. Deney, belirli bir zaman, alan ya da hacimde bir olayın oluşmalarının sayılarının sayılmasından ibarettir.
ii. Ayrık iki zaman, alan ya da hacimdeki başarı sayısı birbirinden bağımsız olacaktır.
iii. Bir birim zaman, alan ya da hacimdeki başarı sayısı her bir birim zaman, alan ya da hacim için aynıdır.
iv. Küçük bir zaman, alan ya da hacimde iki veya daha fazla başarının elde edilmesi önemsizdir.
v. Bir birim zaman, alan ya da hacimde başarının elde edilmelerinin ortalama sayısı α dır.

Teorem 2.2.3.1. (Maden 2013) X rastgele değişkeni α parametreli bir Poisson dağılımına sahip ise beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyonu sırasıyla

$$E(X) = \alpha$$

$$V(X) = \alpha$$

$$M_X(t) = e^{\alpha\left(e^t - 1\right)}$$

olacaktır.

İspat: Beklenen değer tanımına göre

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\alpha}.\alpha^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}.\alpha^k}{(k-1)!}$$

yazılabilir. $s = k - 1$ alınarak bu eşitlikten

$$E(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}.\alpha^{s+1}}{s!} = \alpha.\sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}.\alpha^s}{s!} = \alpha$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2.P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\alpha}.\alpha^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\alpha}.\alpha^k}{(k-1)!}$$

yazılabilir. Burada yine $s = k - 1$ alınarak bu eşitlikten

$$E(X^2) = \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\frac{e^{-\alpha}.\alpha^{s+1}}{s!} = \alpha.\sum_{s=0}^{\infty} s\frac{e^{-\alpha}.\alpha^{s}}{s!} + \alpha.\sum_{s=0}^{\infty} s\frac{e^{-\alpha}.\alpha^{s}}{s!}$$
$$= \alpha^2 + \alpha$$

olduğu görülür. Çünkü buradaki birinci toplam $E(X)$ değerini göstermektedir ve ikinci toplam ise 1 ‘e eşittir. Bu nedenle

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha$$

elde edilir. Moment çıkaran fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\alpha}.\alpha^{x}}{x!} \\ &= e^{-\alpha}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\alpha)^x}{x!} \\ &= e^{-\alpha}.e^{\alpha e^t} \\ &= e^{\alpha(e^t-1)} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.2.3.2. (Maden 2013) X rastgele değişkeni bir deneyin n tekrarı üzerine kurulmuş p parametreli bir binom dağılımına sahip olsun. Yani;

$$P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$$

olsun. $n \to \infty$ iken $np = \alpha$ (sabit) veya buna denk olarak $n \to \infty$ ve $p \to 0$ iken $np \to \alpha$ olduğunu varsayalım. Bu koşullar altında

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = e^{-\alpha}\alpha^k/k!$$

α parametreli Poisson dağılımıdır.

Not 2.2.3.1. (Maden 2013)

a) Yukarıdaki teorem n ‘nin büyük ve p ‘nin küçük olması durumunda binom olasılıklarına Poisson dağılımının olasılıkları ile yaklaşabileceğimizi ifade etmektedir.

b) Daha önceden, eğer X rastgele değişkeni bir binom dağılımına sahip ise $E(X) = np$ olduğunu ve X rastgele değişkeni α parametreli bir Poisson dağılımına sahip ise $E(X) = \alpha$ olduğunu ifade etmiştik.

c) Binom dağılımı n ve p gibi iki parametre ile karakterize edilirken, Poisson dağılımı bir tek, $\alpha = np$, parametresi ile karakterize edilmektedir ki bu, birim zamandaki veya birim uzaydaki başarıların beklenen sayısını göstermektedir. Bu parametre, dağılımın yoğunluğu olarak da kabul edilebilir. Birim zamandaki oluşmaların beklenen sayısı arasındaki ayrım önemlidir.

d) α parametreli Poisson dağılımına sahip bir X rastgele değişkeninin varyansının hesaplanmasında aşağıdaki tartışmayı göz önüne alabiliriz: X rastgele değişkeni, n ve p parametreli binom dağılımına sahip bir Y rastgele değişkeninin $np \to \alpha$ olmak üzere $n \to \infty$ ve $p \to \infty$ için bir limit durumu olarak düşünülebilir. $E(X) = np$ ve $V(X) \to \alpha$ olduğu görülür.

3. GEOMETRİK POİSSON DAĞILIMI

3.1. Bazı Tanım ve Lemmalar

Tanım 3.1.1. (Anwar ve Ahmad 2014) $N,\ \lambda > 0$ parametreli bir Poisson rastgele değişkeni olsun. $Y_i,\ i = 1,2,3,\ldots$ rastgele değişkenleri ise N den bağımsız olmak üzere bağımsız ve özdeş dağılmış rastgele değişkenler olsun. Bu takdirde

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan X rastgele değişkeni bir birleşik Poisson dağılımına sahip olur. Eğer $E(Y_i) = \eta$ ve $V(Y_i) = \sigma^2, i = 1,2,3,\ldots$ ise, X rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla $E(X) = \lambda\eta, V(X) = \lambda(\sigma^2 + \eta^2)$ şeklinde olacaktır.

Lemma 3.1.1. (Anwar ve Ahmad 2014) X rastgele değişkeni (3.1) deki şekilde olmak üzere, X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} p_X(k) &= P(X = k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\big(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = k \,\big|\, N = n\big)P(N = n), \qquad (3.2) \\ &\qquad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

şeklindedir.

GPD, Johnson ve arkadaşları (1992) tarafından Lemma 3.1.2. deki gibi ifade edilmiştir.

Lemma 3.1.2. (Johnson ve arkadaşları 1992) Eğer $N, \lambda > 0$ parametreli Poisson dağılımına sahip bir rasgele değişken ve $Y_i\,, i = 1,2,3,\ldots$ rasgele değişkenleri de θ parametreli geometrik dağılıma sahip ise, bu takdirde X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\lambda > 0,\ 0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$p_X(k) = P(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{k-1}{n-1}\theta^n(1-\theta)^{k-n},\ k = 1,2,3,\ldots \tag{3.3}$$

$$p_X(0) = e^{-\lambda}$$

ile verilir. Bu durumda $E(X) = \frac{\lambda}{\theta}$ ve $V(X) = \frac{\lambda(2-\theta)}{\theta^2}$ olduğunu belirtelim.

İspat: $\forall k \in N^*$ için

$$P(N = k) = \sum_{m=1}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (1-\theta)^{k-n} \theta^n \underbrace{\sum_{n_1,\dots,n_m \in N^*} I_{\{n_1+\dots+n_m=k\}}}_{A(k,n)}$$

dir. Böylece sadece $A(k,n)$'yi hesaplamamız gerekmektedir. Burada $A(k,n)$ toplamları k olacak şekildeki negatif olmayan n tamsayılarının elde edilme yollarının sayısıdır(burada sıralama önemlidir). Şimdi $1,2,\dots,k$ listesini gözönüne alalım. Bu listede $k-1$ virgül bulunmaktadır ve bu virgüllerin $n-1$ tanesinin bir seçimi şüphesiz ki, $A(k,n)$' de yer alan k' nın bir ayrışımını verecektir. Bu nedenle $A(k,n) = \binom{k-1}{n-1}$ olduğu açıktır ve lemma ispatlanmıştır.

Lemma 3.1.3. (Anwar ve Ahmad 2014) Eğer $Y_i,\ i = 1,2,3,\dots$ rastgele değişkenleri geometrik dağılmış ise; başka bir deyişle $P(Y_i = j) = p_j = \theta(1-\theta)^{j-1},\ j = 1,2,3,\dots$ ise bu durumda $Y_i,\ i = 1,2,3,\dots$ rasgele değişkenlerinin ortak olasılık çıkaran fonksiyonu

$$g_Y(s) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \big(s(1-\theta)\big)^j = \frac{\theta s}{1-(1-\theta)s} \tag{3.4}$$

olur.

Lemma 3.1.4. (Anwar ve Ahmad 2014) Eğer X rastgele değişkeni GPD'ye sahip ise, bu durumda X rastgele değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} [g_Y(s)]^n = exp\left(\frac{\lambda(s-1)}{1-(1-\theta)s}\right), \tag{3.5}$$

$$\lambda > 0, 0 < \theta < 1$$

şeklindedir.

Lemma 3.1.5. (Anwar ve Ahmad 2014) Eğer X rastgele değişkeni GPD'ye sahip ise bu takdirde X rastgele değişkeninin faktöriyel moment çıkaran fonksiyonu

$$g_X(1+t) = exp\left(\frac{\lambda t}{1-(1-\theta)(1+t)}\right), \quad \lambda > 0, 0 < \theta < 1 \tag{3.6}$$

şeklindedir.

Lemma 3.1.6. (Steutel 1970) $(p_n)_0^\infty$, $p_0 > 0$ olmak üzere negatif olmayan tamsayılar üzerinde tanımlı bir olasılık dağılımı olsun. Bu takdirde $(p_n)_0^\infty$ nin sonsuz bölünebilir olması için gerek ve yeter koşul r_k 'lar negatif olmayan sayılar ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{k+1} < \infty$$

olmak üzere

$$(n+1)p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} r_k p_{n-k} \;, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{3.7}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (p_n)'nin sonsuz bölünebilir olduğu, $\lambda > 0$ ve $\{r_n\}$'ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere $R(z)$ olasılık çıkaran fonksiyonun bazı dağılımlarında $P(z)$ olasılık çıkaran fonksiyonunun

$$P(z) = exp\{-\lambda(1-R(z))\} \;, \qquad (|z| \le 1)$$

biçiminden kolayca görülebilir. Buna eşdeğer olarak $Q(z) = \lambda R'(z)$ olmak üzere logaritmik türev aldığımızda

$$P'(z) = P(z)Q(z) \;, \qquad (|z| < 1)$$

bulunur. Burada $q_n = \lambda(n+1)r_{n+1}$ ile $\sum_1^\infty (n+1)^{-1} q_n = \lambda(1-r_0)$ alınırsa

$$(n+1)p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} r_k p_{n-k}$$

bulunur.

Lemma 3.1.7. (Hansen 1988) $r_k > 0$ ve $p_0 > 0$ olmak üzere (p_n) ve (r_n) (3.7) denklemiyle verilmiş olsun ve (r_n) log-konkav olsun. Bu durumda (p_n) nin log-konkav olması için gerek ve yeter koşul ${r_0}^2 - r_1 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Varsayalım ki (r_n) tam anlamıyla log-konkav ve ${r_0}^2 - r_1 > 0$ olsun. Burada (r_n) pozitiftir ve (p_n) bundan dolayı pozitif olur. Buradan

$$2({p_1}^2 - p_0p_2) = {p_0}^2({r_0}^2 - r_1) \tag{3.8}$$

olduğu görülür. (3.8) denklemi

i. $n = 1,2,\dots$ için (p_n) tam anlamıyla log-konkav ise $r_0p_m - p_{m+1} > 0$ ve

ii. $p_{-1} = 0$ için $m(m+2)({p_{m+1}}^2 - p_mp_{m+2}) = p_{m+1}(r_0p_m - p_{m+1}) + \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}(p_{m-1}p_{m-k-1} - p_{m-k}p_{m-l-1})(r_{k+1}r_l - r_{l+1}r_k)$

bağıntılarında kullanarak (p_n)'nin log-konkav olduğu görülür. Bazı log-konkav dizi belirtilerek tam anlamıyla log-konkav dizileri için bir limit yazılarak, bu ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1. (Steutel ve Van Harn 1979) $(p_n)_0^\infty$ ve $(r_n)_0^\infty$ dizileri gerçek sayılar üzerinde tanımlı, $p_n \geq 0$, $p_0 > 0$ ve r_n artmayan olsun. Ayrıca p_n ve r_n ile ilgili

$$(n+1)p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} p_k r_{n-k} \quad , \quad n \in N_0 \tag{3.9}$$

bağıntısı verilsin. $p_n - p_{n-1}$ değişiklerinin işaretleri $(p_{-1} = 0)$ için p_n artmayan ve $r_0 \leq 0$ olduğunda $(p_n)_0^\infty$ tek modludur.

İspat: $d_n = p_n - p_{n-1}$ ve $\lambda_n = r_n - r_{n+1}$ ifadelerini (3.9)' da yerine koyarak

$$(n+1)d_{n+1} = (r_0 - 1)p_n - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j p_{n-j-1} \quad , \quad n \in N_0 \tag{3.10}$$

elde edilir. Şüphesiz $d_n \leq 0$ için $n \in N$ ise $r_0 \leq 1$ olacaktır. Şimdi $r_0 > 1$ olsun ve

$$d_1 > 0,\ d_2 \geq 0, \dots\dots, d_{n_1} \geq 0,\ d_{n_1+1} < 0, \dots,\ d_{n_1+m} =: d_{n_2} \leq 0,$$

$$d_{n_2+1} > 0 \tag{3.11}$$

olduğunu varsayalım. Sonra $j > n$ için $p_{n-j} = 0$ 'yi yerine yazarsak,

$$p_{n_1-j} \leq p_{n_2-j} \quad j = m+1, m+2, \dots$$

$$p_{n_1-j} \le p_{n_1} \qquad j = 1,2,\dots,m \tag{3.12}$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) den

$$(n_1+1)d_{n_1+1} = (r_0-1)p_{n_1} - \sum_{j=0}^{n_1-1} \lambda_j p_{n_1-j-1} < 0 \tag{3.13}$$

$$(n_2+1)d_{n_2+1} = (r_0-1)p_{n_2} - \sum_{j=0}^{n_2-1} \lambda_j p_{n_2-j-1} < 0 \tag{3.14}$$

yazılabilir. (3.14) eşitliğinden $\left(r_0 = r_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j\right)$ için

$$\sum_{0}^{m-1} \lambda_j p_{n_2} \le \sum_{0}^{m-1} \lambda_j p_{n_2-j-1}$$

alınarak

$$(r_m-1)p_{n_2} > \sum_{j=m}^{n_1-1} \lambda_j p_{n_2-j-1} \tag{3.15}$$

bulunur. Fakat (3.12) ve (3.15) den

$$\sum_{j=0}^{n_1-1} \lambda_j p_{n_1-j-1} \le \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j p_{n_1} + \sum_{j=m}^{n_1-1} \lambda_j p_{n_2-j-1} < p_{n_1}(r_0-r_m) + p_{n_2}(r_m-1)$$
$$< p_{n_1}(r_0-1)$$

elde edilir ki bu (3.13) ile çelişmektedir. Bu da bizi (3.11) in imkansız olduğu sonucuna ulaştırır.

Bu teoremin sonucu olarak lemma 3.1.8. verilebilir

Lemma 3.1.8. (Steutel ve Van Harn 1979) $(p_x)_0^\infty$ negatif olmayan tamsayılar üzerinde tanımlanmış $g_x(s)$ olasılık çıkaran fonksiyonuna sahip bir dağılım ve (r_k) lar non-negatif olmak üzere

$$\frac{d}{ds}\ln g_X(s) = R(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k s^k \tag{3.16}$$

koşulu sağlansın. Bu takdirde $(p_x)_0^\infty$ in tek modlu olması için gerek koşul $(r_k)_0^\infty$ nın artmayan olmasıdır. Ayrıca $(p_x)_0^\infty$ in artmayan olması için gerek ve yeter koşul $(r_k)_0^\infty$ nın artmayan olmasına ek olarak $r_0 \leq 1$ olmasıdır.

Lemma 3.1.9. (Park 1972) X rastgele değişkeni p_x olasılık fonksiyonuna sahip kesikli rastgele değişkenli olsun. Bu takdirde $0 \leq s \leq 1$ olmak üzere

$$E(X+A)^{-k} = \int_0^1 g_k(s)ds \tag{3.17}$$

dir. Burada $(x+A) > 0$, k negatif olmayan bir tamsayı ve $g_k(s)$ ise $(X+A)^k - 1$ rasgele değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonudur.

3.2. Sonsuz Bölünebilme

Bu kısımda, Steutel (1970) tarafından verilen Lemma 3.1.6. kullanılarak GPD'nin sonsuz bölünebilme özelliği incelenecektir.

Teorem 3.2.1. (Anwar ve Ahmad 2014) (3.3) de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip GPD sonsuz bölünebilirdir.

İspat: GPD'nin sonsuz bölünebilirliğini kanıtlamak için (3.3) denkleminin (3.7) denklemini sağladığını göstermemiz gerekir. Bu durumda

$$\eta(s) = (s-1)\big(1 - z(s-1)\big)^{-1}, \qquad z = \frac{(1-\theta)}{\theta}$$

olmak üzere (3.5) denkleminde verilen GPD'nin olasılık çıkaran fonksiyonu

$$g_X(s) = exp\left(\frac{\lambda}{\theta}\eta(s)\right), \qquad \lambda > 0, 0 < \theta < 1 \tag{3.18}$$

dir. Eğer D diferansiyel operatörünü yani d/ds yi gösterirse, bu durumda (3.18) denkleminden ardışık türevler alındığında

$$D^{n+1}\big(g_X(s)\big) = \frac{\lambda}{\theta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^{n-k}\big(g_X(s)\big)D^{k+1}\big(\eta(s)\big), \tag{3.19}$$

$$n \geq 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \theta < 1 .$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$D^{k+1}\big(\eta(s)\big) = (k+1)!\, z^k\big(1 - z(s-1)\big)^{-(k+2)}, \qquad z = (1-\theta)/\theta$$

dır. $s = 0$ alarak (3.19) den $D^{k+1}(\eta(0)) = (k+1)!\, \theta^2(1-\theta)^k$ olmak üzere

$$D^{n+1}\big(g_X(0)\big) = \frac{\lambda}{\theta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^{n-k}\big(g_X(0)\big) D^{k+1}\big(\eta(0)\big)\ , \ \ n = 0,1,2,\ldots \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\big[D^{n+1}\big(g_X(s)\big)\big]_{s=0} = (n+1)!\, p_{n+1} \quad (3.21)$$

eşitliği yazılabilir. (3.21) ifadesi (3.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$(n+1)!\, p_{n+1} = \lambda\theta \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)!\, p_{n-k}(k+1)!\,(1-\theta)^k$$

bulunur. Bunu daha da basitleştirirsek

$$(n+1)p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} r_k p_{n-k}\ , \ \ n = 0,1,2,\ldots \quad (3.22)$$

yazılabilir. Burada $r_k = \lambda\theta(k+1)(1-\theta)^k$ negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{(k+1)} = \lambda < \infty$$

dır. Bunun sonucu olarak ispatımız tamamlanmış olur.

3.3. Güçlü Olmayan Tek Modluluk

GPD'nin güçlü tek modlu olmadığını ispatlamak için Hansen (1988) tarafından verilen Lemma 3.1.7. kullanılacaktır.

Teorem 3.3.1. (Anwar ve Ahmad 2014) θ ve λ 'nın bütün değerleri için (3.3) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip GPD log-konkav değildir.

İspat: Teorem 3.2.1 de $p_0 = e^{-\lambda} > 0$ olmak üzere (p_n) ve (r_n) arasında (3.22) ilişkisinin varlığı gösterilmişti. (r_n) log-konkav olsun. Bu durumda GPD'nin log-konkav olduğunu ispatlamak için

$$\frac{{r_0}^2}{r_1} \geq 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu nedenle

$$\frac{{r_0}^2}{r_1} = \frac{\lambda}{2(\theta^{-1} - 1)}\ , \qquad 0 < \theta < 1, \lambda > 0$$

dır. Burada λ ve θ nın değerlerine bağlı olarak bu ifade $\leq$ veya ≥ 1 olabilir. Yani λ ve θ ‘nın bütün değerleri için GPD log-konkav değildir.

3.4. Tek Modluluk

Bu kısımda, GPD’nin tek modluluğunu kanıtlamak için Steutel ve Van Harn (1979) tarafından verilen Lemma 3.1.8. kullanılacaktır.

Teorem 3.4.1. (Anwar ve Ahmad 2014) (3.3) de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip GPD , λ ve θ nın bütün değerleri için tek modludur.

İspat: GPD’nin olasılık çıkaran fonksiyonu için $r_k = \lambda\theta(k+1)(1-\theta)^k$ lar non-negatif olmak üzere

$$\frac{d}{ds}\ln g_X(s) = R(s) = \frac{\lambda\theta}{(1-(1-\theta)s)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\theta(k+1)(1-\theta)^k s^k$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle, $0 < \theta < 1$ ve $\lim_{k\to\infty}(1+k^{-1}) \to 1$ olduğundan

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} = (1+k^{-1})(1-\theta) \leq 1$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan $(r_k)_0^\infty$ lar artmayan olup, θ ve λ ‘nın bütün değerleri için GPD tek modludur. Öte yandan $r_0 = \lambda\theta \leq 1$ olduğunda $(P_x)_0^\infty$ artmayan olur. Bu nedenle, eğer $\lambda\theta = 1$ ise mod $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında ve $\lambda\theta < 1$ ise mod $x = 0$ noktasında olacaktır.

3.5. Yaşam Fonksiyonu

Negatif olmayan kesikli bir X rastgele değişkeninin yaşam fonksiyonu

$$S(x) = 1 - P(X \leq x)$$

olasılığı olarak tanımlanır. Tanım gereği

$$P(X \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P\big(X \leq x \,\big|\, N = n\big)P(N = n)\,, \ \ x = 0,1,2,\ldots$$

dır. $P\big(X \leq x \,\big|\, N = n\big)$ negatif binom dağılımı olacağından $\lambda > 0$ $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$P(X \leq x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{j=0}^{x} \binom{x-j-1}{n-1} \theta^n (1-\theta)^{x-j-n}, \;\; x \geq 1$$

$$P(X \leq 0) = e^{-\lambda}$$

dır. Buradan

$$S(0) = 1 - e^{-\lambda}\,, \;\; S(x) = 1 - e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{x-j-1}{n-1} \theta^n (1-\theta)^{x-j-n}\;,$$

$$x \geq 1\,,\;\; \lambda > 0\,,\;\; 0 < \theta < 1$$

olduğu görülür.

3.6. Negatif Momentler

Bu kısımda Park (1972) tarafından verilen Lemma 3.1.9. kullanılarak GPD'nin birinci dereceden negatif momentini elde edeceğiz.

Teorem 3.6.1. (Anwar ve Ahmad 2014) X, (3.3) de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip negatif olmayan tamsayı değerli bir rastgele değişken olsun. Bu takdirde $A > 0$, $(j)_0 = 1$, $k = 1,2,\ldots$ için $(j)_k = j(j+1)\ldots\ldots(j+k-1)$ olmak üzere

$$E(X+A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!} \frac{(j)_k}{k!} (1-\theta)^k B(k+A, j+1)$$

dir.

İspat: Lemma 3.1.9. 'a göre

$$E(X+A)^{-k} = \int_0^1 g_k(s)ds$$

yazılabilir, burada $A > 0$ ve $g_k(s) = E\left(s^{(X+A)^k - 1}\right)$, $0 \leq s \leq 1$ dir. Eğer $k = 1$ alınırsa $g_1(s) = E\big(s^{(X+A)-1}\big)$, $0 \leq s \leq 1$ olmak üzere

$$E(X+A)^{-1} = \int_0^1 g_1(s)ds$$

olur. Buradan da $(j)_0 = 1$, $k = 1,2,\ldots$ için $(j)_k = j(j+1)\ldots..(j+k-1)$ olmak üzere

$$E(X+A)^{-1} = \int_0^1 s^{A-1} exp\left(-\lambda\left(1+\frac{\theta s}{1-s}\right)^{-1}\right)ds\,,$$

$$= \int_0^1 s^{A-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(-\lambda\left(1+\frac{\theta s}{1-s}\right)^{-1}\right)^j}{j!} ds\,,$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!} \int_0^1 s^{A-1}\left(1+\frac{\theta s}{1-s}\right)^{-j} ds\,,$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!} \int_0^1 s^{A-1}(1-s)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j)_k}{k!}\left(s(1-\theta)\right)^k ds\,,$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j)_k}{k!}(1-\theta)^k \int_0^1 s^{k+A-1}(1-s)^j ds\,,$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^j}{j!}\frac{(j)_k}{k!}(1-\theta)^k B(k+A, j+1)\ , A > 0 \text{ için,}$$

elde edilir.

3.7. Karakterizasyon Teoremi

Bu kısımda GPD, faktöriyel momentlerin tekrarlama bağıntısına göre karakterize edilmiştir.

Teorem 3.7.1. (Anwar ve Ahmad 2014) $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X=k)$ λ, $\lambda > 0$, $\theta, 0 < \theta < 1$ parametrelerine sahip bir dağılımın olasılık çıkaran fonksiyonu olsun. Bu takdirde $\mu'_{[0]} = 1$ olmak üzere $-r \geq 1$ için

$$\mu'_{[r]} = \frac{\lambda}{\theta}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(j+1)!\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^j \mu'_{[r-1-j]} \tag{3.23}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul X rastgele değişkeninin (3.3) de verilen GPD‘ye sahip olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki X rasgele değişkeni aşağıdaki GPD ‘ye sahip olsun. Bu takdirde X rastgele değişkeninin (3.6) ile verilen faktöriyel moment çıkaran fonksiyonu $\eta(t) = t(1 - zt)^{-1}$, $z = \frac{(1-\theta)}{\theta}$ olmak üzere

$$g_X(1+t) = exp\left(\frac{\lambda}{\theta}\eta(t)\right), \ \lambda > 0, \ 0 < \theta < 1 \tag{3.24}$$

şeklindedir.

Eğer D, $\frac{d}{dt}$ diferansiyel operatörünü temsil ederse, bu takdirde (3.24) denkleminden ard arda türevler alınarak faktöriyel momentler arasında aşağıdaki gibi bir tekrarlama bağıntısını elde edebiliriz.

$$D^r\big(g_X(1+t)\big) = \frac{\lambda}{\theta}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j} D^{r-1-j}\big(g_X(1+t)\big)D^{j+1}\big(\eta(t)\big), \tag{3.25}$$

$$r \geq 1, \lambda > 0, 0 < \theta < 1,$$

burada

$$D^{j+1}\big(\eta(t)\big) = (j+1)!\, z^j (1 - zt)^{-(j+z)}$$

ve

$$D^{j+1}\big(\eta(0)\big) = z^j (j+1)!$$

dir. Buradan da

$$\big[D^r\big(g_X(1+t)\big)\big]_{t=0} = \mu'_{[r]}, \qquad [g_X(1+t)]_{t=0} = \mu'_{[0]} = 1$$

elde edilir. (3.25) denkleminde $t = 0$ alınırsa (3.23) denklemi elde edilir. Farz edelim ki (3.23) eşitliği sağlansın ve $r = 1,2,3,...$ alalım. Bu durumda

$$\mu'_{[1]} = \frac{\lambda}{\theta}, \lambda > 0, 0 < \theta < 1,$$

$$\mu'_{[2]} = \frac{\lambda}{\theta}\left[\frac{\lambda}{\theta} + 2!\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)\right],$$

$$\mu'_{[3]} = \frac{\lambda}{\theta}\left[\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2 + (3)2!\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) + (3)3!\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^2\right],$$

$$\mu'_{[4]} = \frac{\lambda}{\theta}\left[\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^3 + (6)2!\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) + (6)3!\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^2 + 4!\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^3\right],$$

$$\mu'_{[5]} = \frac{\lambda}{\theta}\left[\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^4 + (10)2!\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^3\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) + (20)3!\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^2 \right.$$
$$\left. + (10)4!\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^3 + 5!\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^4\right], \ldots$$

ifadeleri bulunur. Faktöriyel moment çıkaran fonksiyonu

$$g_X(1+t) = \sum_{r=0}^{\infty}\mu'_{[r]}\frac{t^r}{r!} \tag{3.26}$$

ile verilir. $\mu'_{[0]}$, $\mu'_{[1]}$, $\mu'_{[2]}$, $\mu'_{[3]}$, $\mu'_{[4]}$, $\mu'_{[5]}$, ... değerlerini (3.26) denklemde yerine yazarsak $z = \frac{1-\theta}{\theta}$ ve $\alpha = \frac{\lambda}{\theta}$ olmak üzere

$$g_X(1+t) = 1 + \alpha\frac{t}{1!} + \alpha[\alpha + 2!\,z]\frac{t^2}{2!} + \alpha[\alpha^2 + (3)2!\,\alpha z + (3)3!\,z^2]\frac{t^3}{3!}$$
$$+ \alpha[\alpha^3 + (6)2!\,\alpha^2 z + (6)3!\,\alpha z^2 + 4!\,z^3]\frac{t^4}{4!}$$
$$+ \alpha[\alpha^4 + (10)2!\,\alpha^3 z + (20)3!\,\alpha^2 z^2$$
$$+(10)4!\,\alpha z^3 + 5!\,z^4]\frac{t^5}{5!}\ldots,$$

bulunur. Buradan da

$$g_X(1+t) = 1 + \alpha t(1 + zt + (zt)^2 + (zt)^3 + \cdots)$$
$$+ \frac{(\alpha t)^2}{2!}\left(1 + 2zt + \frac{2.3}{2!}(zt)^2 + \frac{2.3.4}{3!}(zt)^3 + \cdots\right)$$
$$+ \frac{(\alpha t)^3}{3!}\left(1 + 3zt + \frac{3.4}{2!}(zt)^2 + \cdots\right) + \cdots,$$

$$g_X(1+t) = 1 + [\alpha t(1-zt)^{-1}] + \frac{[\alpha t(1-zt)^{-1}]^2}{2!}$$
$$+ \frac{[\alpha t(1-zt)^{-1}]^3}{3!} + \cdots,$$

$$g_X(1+t) = exp[\alpha t(1-zt)^{-1}],$$

ifadesi elde edilir ki gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$g_X(1+t) = exp\left(\frac{\lambda t}{1-(1-\theta)(1+t)}\right) ,\lambda > 0 ,0 < \theta < 1$$

veya buna denk olarak

$$g_X(s) = exp\left(\frac{\lambda(s-1)}{1-(1-\theta)s}\right) ,\lambda > 0 ,0 < \theta < 1$$

bulunur. Öte yandan

$$P(X=0) = g_X(0) = e^{-\lambda} ,$$

$$P(X=k) = \frac{\left|\partial^k/\partial s^k\big(g_X(s)\big)\right|_{s=0}}{k!} ,k = 1,2,3, \ldots$$

olduğundan $g_X(s)$ fonksiyonunun $s = 0$ da k -yıncı türevi alınırsa (3.3) denklemi bulunur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, sonsuz bölünebilirlik, tek modluluk, iç bükey ya da güçlü tek modluluk, yaşam fonksiyonu ve birinci dereceden negatif moment içeren GPD'nin bazı istatistiksel özellikleri anlatılmıştır. Aynı zamanda bir tanımlama teoremi, tekrarlayan faktöriyel momentlerin ilişkisine dayandırılarak verilmiştir.

Tek modluluk özelliği birçok olasılık ve istatistiksel problemlerin ayrıştırılması için çok önemlidir. Bu aynı zamanda optimizasyon ve matematiksel programlama bağıntısı ile ilgilidir. Tek modluluk içeren kanıtlar istatistiksel çıkarımlarda oldukça sık kullanılmıştır. Parametrelerin tahmin edilmesi için maksimum olasılık yoluna başvurularak, olasılık fonksiyonunun tek modluluğu gerekli hesaplamayı zaman zaman kolaylaştırmaktadır. Bazı eşitsizlikler tek modluluğa dayanmaktadır. Simetrik dağılımın rastgele tekrarlaması tek modluluk kavramlarını ve zayıf ya da güçlü kıyaslamaları içeren karakterleri ifade eder. Birçok araştırmacı negatif momentlerin temelinde bulunan somut kenarların bitkinliğini, sürünmesini, kırılganlığını, büzülmesini, çatlamasını ve bozulmasını tartışmaktadır. Bu özelliklerin uygulanabilir problemlerin çözümünde kullanışlı olmasını ve olasılık teorisinde önemli bir rol oynadığını umuyoruz. Ayrıca, tehlikeli oran fonksiyon şeklini, istatistiklerini, ortalama ve medyan sapmalarını, maksimum olasılık tahminin parametreler için asemptomatik güven aralıkları içeren bazı özellikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

Anwar, M. ve Ahmad, M. 2014. On some properties of geometric Poisson distribution. Pak. J. Statist., 30(2), 233-244.

Ata, N. ve Özel, G. 2012. Survival functions for the frailty models bsed on the discrete compound Poisson process. J.Statist. Comput. Simul.,82, 2105-2116.

Chen, C.W., Randolph, P. ve Tian-Shy, L. 2005. Using CUSUM control schemes for monitoring quality levels in compound Poisson Production enviroment: The geometric Poisson Process. Quality Engineering, 17, 207-217.

Consul, P.C. ve Famoye, F. 1986. On the unimodality of generalized Poisson distribution. Statistica Neerlandica, 40, 117-122.

Hansen, B.G. 1988. On log-concave and log-convex infinitely divisible sequences and densities. Ann. Prob.,16, 1832-1839.

Johnson, N.L., Kotz, S. ve Kemp, A.W. 1992. Univariate Discrete Distributions. Wiley, New York.

Kielson, J. ve Geber, H. 1971. Some results for discrete unimodality. J. Amer. Statist. Assoc., 66, 386-389.

Maden, S. 2013. Olasılığa Giriş. OMÜ, Ordu Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Birinci Baskı, Samsun, 342.

Medgyessy, P. 1977. Decomposition of superpositions of density functions and discrete distributions. Wiley, New York.

Nuel, G. 2008. Cumulative distribution function of a geometric Poisson distribution. J. Statist. Comput. Simul., 78, 385-394.

Özel, G. ve İnal, C. 2010. The probability funtionof a geometric Poisson distribution. J. Statist. Comput. Simul., 80, 479-487.

Özel, G. 2013. On the moments characteristics for the univariate compound Poisson and bivariate compound Poisson processes with applications. Revista Colombiana de Estadistica, 36(1), 59-77.

Park, H.S. 1972. On negative moments of positive random variables. J. Korea Soc. Math. Edu., 11, 25-26.

Randolph, P. ve Sahinoglu, M. 1995. A stopping rule for a compound Poisson random variable. Applied Stochastic Models and Data Analysis, 11, 135-143.

Robin, S. 2002. A compound Poisson model for word occurrences in DNA sequences. Appl. Stat., 51, 437-451.

Robin, S., Schbath, S. ve Vandewalle, V. 2007. Statistical test to compare motif count exceptionalities. Bioinformatics, 8, 1-20.

Rosychuk, R.J., Huston, C. ve Prasad, N.G.N. 2006. Spatial events cluster detection using a compound Poisson distribution. Biometrics, 61, 465-470.

Steutel, F.W. ve Van Harn, K. 1979. Discrete analogues of self-decomposability and stability. Ann. Prob., 7, 893-899.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Emrah GÜNBEY
Doğum Yeri	**:**	Giresun
Doğum Tarihi	**:**	05.02.1988
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	emrahgunbey@hotmail.com
İletişim Bilgileri	**:**	Dereli Anadolu İmam Hatip Lisesi / GİRESUN

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans-Tezsiz Yüksek Lisans	Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü/Matematik Öğretmenliği	Marmara üniversitesi	2007-2012

İş Deneyimi:

Görev	**Görev Yeri**	**Yıl**
Öğretmen	Giresun/Dereli	2013-...