T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN JENSEN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

TURGAY EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2016

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN JENSEN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

TURGAY EKİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2016

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Turgay EKİCİ tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL danışmanlığında yürütülen "HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN JENSEN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER" adlı bu tez, jürimiz tarafından 17/06/2016 tarihinde oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman	:	YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL	
Başkan	:	DOÇ. DR. İMDAT İŞCAN MATEMATİK, GİRESUN ÜNİVERSİTESİ	İmza :
Üye	:	DOÇ. DR. SELAHATTİN MADEN MATEMATİK, ORDU ÜNİVERSİTESİ	İmza :
Üye	:	YRD. DOÇ. DR. ERDAL ÜNLÜYOL MATEMATİK, ORDU ÜNİVERSİTESİ	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun …/…/2016 tarih ve 2016/ … sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…. /… / 2016

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat KORKMAZ

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Turgay EKİCİ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖRLERİN KONVEKS VE OPERATÖR KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN JENSEN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Turgay EKİCİ

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, 53s.

Danışman:Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

Bu tez çalışması, 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, giriş ve literatür taraması, ikinci bölümde temel kavramlar anlatılmaktadır. Üçüncü bölümde literatürde var olan, Hilbert uzayında özeşlenik operatörlerin konveks ve operatör konveks fonksiyonlar için Jensen tipli eşitsizlikler konusu ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert uzayı,özeşlenikoperatör, konveks ve operatör konveks fonksiyonlar, Jensen tipli eşitsizlikler.

ABSTRACT

JENSEN'S TYPE INEQUALITIES FOR CONVEX AND OPERATOR CONVEX FUNCTIONS OF SELFADJOINT OPERATORSIN HILBERT SPACES

Turgay EKİCİ

University of Ordu
InstituteofSciences
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, 53p.

Supervisor:Assist. Prof. Dr. Erdal ÜNLÜYOL

This thesis is consist of four chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis and previous studies in this area. In these cond chapter, basic definitions and theorems that were used in thesis are given. In the third chapter, it is comprehensive explained of Jensen's type inequalities for convex and operator convex functıons of selfadjoint operators in Hilbert spaces. In the fourth chapter, it is given some results and propositions.

Keywords: Hilbert space,selfadjoint operator,convex and operator convex functions, Jensen's type inequalities.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan, desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL' a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Tezin düzeltilmesi ve kontrolünü yapan sayın Yeter ERDAŞ ve Uğur DEMİRCAN' a da engin sabırlarından dolayı teşekkür ederim.

Her zaman benim yanımda olup, benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

B(H)	:	H 'dan H' ya sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$B(H)^+$	:	H 'dan H' ya sınırlı pozitif lineer operatörlerin kümesi
C	:	Kompleks sayılar kümesi
C(Sp(A)	:	A operatörün spekturumu üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi
H	:	Hilbert uzayı
L(H)	:	H'dan H' ya lineer operatörlerin kümesi
R	:	Reel sayılar kümesi
Sp(A), $\sigma(A)$	:	A operatörün spekturumu
$\rho(A)$	:	A operatörün rezolvent kümesi
<,>	:	İç çarpım fonksiyonu

1. GİRİŞ

Eşitsizlik Teorisi'nin temellerini XVIII. ve XIX. yüzyıllarda K. F. Gauss (1775-1855), A. L. Cauchy (1785-1857) ve P. L. Chebyshev (1821-1894) gibi matematikçiler atmışlardır. Fakat modern anlamda "Eşitsizlik Teorisi" alanında yapılan ilk çalışma 1934 yılında G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. Bu çalışmayı 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman'ın yine aynı ismi taşıyan "Inequalities" kitabı takip eder. Daha sonra 1965 yılında J. Szarski'nin "Differantial Inequalities", 1991 yılında Mitrinovic ve ark."Inequalities Involving Functions and Their Derivatives", 1963 yılında yine Mitrinovic ve ark.'ın "Classicaland New Inequalities in Analysis" isimli kitapları izler. Bunların dışında S. S. Dragomir, R. P. Agarwal, G. V. Milovanovic, C. P. Niculescu, C. E. M. Pearce, J. E. Pecaric, A. M. Fink, M. E. Özdemir, M. Z. Sarıkaya, E. Set, İ. İşcan, A. O. Akdemir, M. Tunç gibi bilim insanlarının da bir çokçalışması literatürde mevcut.

Konvekslik kavramının ortaya çıkışı Arşimet'in, çemberin içine ve etrafına çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla yaptığı 'pi' sayısı hesabına kadar dayanır. Bu çalışmaları sırasında Arşimet, herhangi bir konveks şeklin çevresinin, etrafına çizilen bütün diğer konveks şekillerin çevresinden daha küçük olduğunu fark etmiştir. Böylece konvekslik kavramı konveks şekiller etrafında gelişmiştir. Euler ve Descartes konveks çokgenler ile ilgili formüller üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 1841'de Cauchy, konvekslik hakkında bazı özellikler vermiştir. Konveksliğin modern tanımı eşitsizlik tanımı içerdiğinden konveksliğin eşitsizliklerle birlikte çalışılması da doğal bir sonuç olmuştur.

Konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte XIX. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'de Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen, konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J. L. W. V. Jensen tarafından çalışılmıştır. Jensen'in bu, çalışmalarından itibaren Konveks Fonksiyonlar Teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak 1987 yılında Pecaric tarafından yazılan "Convex Functions:

Inequalities" isimli kitaptır. Ayrıca 1973 yılında A. W. Roberts ve B. E. Vorberg "Convex Functions", 1992 yılında Pecaric ve ark. "Convex Functions, Partial Orderingand Statistical Applications", 2006 yılında C. Niculescu ve L. E. Persson "Convex Functionsand Their Applications, A Contempoarary Approach" gibi eserler konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizlikle ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Niculescu ve Persson'a göre konveksliğin teorik ve uygulamalı matematik alanlarında geniş yer bulmasının iki önemli sebebi vardır:

1) Sınır değerlerinin birinde bir maksimum değeri vardır,
2) Her yerel minimum aynı zamanda global minimumdur. Ayrıca kesin konveks bir fonksiyonunun en fazla bir minumumu vardır.

1978 yılında R. Bellman, Almanya' da düzenlenen "Second International Conference on General Inequalities" isimli konferansta: "Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" diye sorulan soruya şu cevabı vermiştir:

Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1) Pratik Nedenler,

2) Teorik Nedenler,

3) Estetik Nedenlerdir.

Pratik nedenler açısından bakıldığında, bir çok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik nedenler açısından bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik nedenler açısından bakıldığından genelde resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Biz bu çalışmada Eşitsizlik Teorisi'nin önemli bir kolu olan Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizliklerin, Hilbert uzayında sınırlı, öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için elde edilen bazı özel eşitsizliklerini inceleyeceğiz. Bu incelemeler sayesinde

Lineer Operatörler Teorisi ile Matematiksel Eşitsizliklerin çeşitli alanlarında çalışma yapmak ve kendi alanlarında uygulamak isteyen araştırmacılara yardımcı olacaktır.

Bu alanda yapılan önemli çalışmalardan bir tanesi 2011 yılında S. S. Dragomir tarafından yapılmıştır. Ayrıca Bauschke ve Combetles tarafından (2011) yılında "Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces", (2012) yılında Dragomir tarafından "Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type" ve yine (2012) yılında " Operator Inequalities of the Jensen, Cebysev and Grüss Type" adlı kitaplar mevcuttur.

Literatürde Dragomir, Ghazanfari, Unluyol, Salaş , Erdaş ve daha bir çok yazar bu alanda çalışmaktadır.

Hilbert uzayında Lineer Operatör Teorisi'nin matematiğin Kısmi Diferansiyel Denklemler, Yaklaşım Teorisi, Optimizasyon Teorisi, Numerik Analiz, Olasılık Teorisi, İstatistik Teorisi ve daha birçok alanda çok önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada Eşitsizlik Teorisi'nin önemli bir kolu olan Jensen Tipli Eşitsizliklerin, Hilbert uzayında sınırlı öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için elde edilen eşitsizlikler incelenecektir. Bu incelemeler sayesinde Lineer Operatör Teorisi ve Matematiksel Eşitsizliklerin çeşitli alanlarda çalışma yapmak ve kendi alanlarına uygulamak isteyen araştırmacılara yardımcı olacaktır.

Bu çalışmada, birinci bölümde kompleks Hilbert uzayında sınırlı öz-eşlenik operatörlerin temel özellikleri verildi. Pozitif öz-eşlenik operatörlerin temel özellikleri verildi. Pozitif öz-eşlenik operatörler için Genelleştirilmiş Schwarz eşitsizliğinin yanı sıra bu tip operatörlerin spektumu için bazı sonuçlar sunulmuştur. Daha sonra bir lineer operatör, öz-eşlenik operatörün sürekli fonksiyonlarında polinomlar için temel sonuçlarla birlikte öz-eşlenik operatörlerin basamak fonksiyonları için de bu özellikler tanıtılmıştır. Elde edilen bu sonraları kullanarak, bu tezin ana kısmının çıkış noktası olan ve "Spektral Ayrılış Teoremi" olarak bilinen öz-eşlenik operatörlerin spektral ayrılışı incelenmiştir. Bu incelemeden sora öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için yeni eşitsizliklerin elde edilmesine katkı sağlayacaktır. Bununla birlikte sadece öz-eşlenik operatörlerin sürekli fonksiyonları için değil aynı zamanda sınırlı varyasyonlu Lipschitzion, monoton veya mutlak sürekli fonksiyonlar için de yukarıdakiler geçerlidir. İkinci bölümde ise tezde yapılan çalışmalar bulunmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Tanım (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. +:LxL→ L ve .:FxL→ L işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde bir lineer uzay(vektör uzayı) denir.

A) L,’’+’’ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1.Her x,y∈ L için x+y∈ $L\ dir.$

G2.Her x,y,z∈ $L\ için$ x(y+z)=(x+y)+z dir.

G3.Her x∈ L için x+$\theta = \theta + x = 0\ olacak\ şekilde\ \theta \in L$ vardır.

G4.Her x∈ L için x+y=y+x dir.

B)x,y∈ L ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha x \in L$ dir.

L2. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

L3.$(\ \alpha + \beta)\ x = \ \alpha x + \ \beta x\ dir.$

L4.$(\ \alpha\beta)\ x = \alpha(\beta x)$ dir.

L5.1$x = x\ dir.$ (Burada 1,F nin birim elemanıdır.)

$F = \mathbb{R}$ise L ye lineer uzay, $F = ₵$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir.

2.2 Tanım: Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

2.3 Tanım: F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ve$c \in F$ olmak üzere T:V→ W dönüşümü,

$a)T(u+v) = T(u) + T(v)$

$b)T(cu) = cT(u)$şartlarını sağlıyorsa $T\ ye\ V$ üzerinde lineer dönüşüm denir.

2.4 Tanım: L bir lineer uzay $A \subset L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki $x\ ve\ y$ nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki$\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. G eometrik olarak B kümesi uç noktaları $x\ ve\ y$ olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

2.5 Tanım (Konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}\ de$ bir aralık ve f:$I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I\ ve\ \alpha \in$ [0,1] için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f + (1-\alpha)f(y) \quad (1.1)$$

$şartını\ sağlayan$, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

2.6 Teorem: f fonksiyonu [a,b] aralığında konveks ise

a)$f, (a, b)$ aralığında süreklidir ve

b)$f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır.

2.7 Tanım (İç-çarpım uzayı):$F(\mathbb{R}\ veya\ ₵)$ olmak üzere, X bir vektör uzayı olsun. <.,.>:$XxX \to F$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise ‘’<.,.>’’ dönüşümüne X üzerinde bir iç-çarpım, (X, <.,.>) ikilisine de iç-çarpım uzayı denir:

1.$\forall x \in X\ için < x, x > \geq 0\ ve < x, x \geq 0 \Leftrightarrow x = 0_x$;

2.$\forall x, y \in X\ için < x, y >$=<y,x>;

3.$\forall x, y \in X\ ve\ \alpha \in F\ için < \alpha x, y >= \alpha < x, y >$

4. $\forall x, y, z \in X\ için < x + y, z >=< x, y > +< y, z >$.

2.8 Not: $F = \mathbb{R}$ olması halinde 2. Özellik <x,y>=<y,x> olur. İç-çarpım tanımını kullanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu kolayca görebiliriz.

1. $\forall x, y, z \in X\ ve\ \forall \alpha, \beta \in F\ için < \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, y > +\beta < y, z >$,
2. $\forall x, y \in X\ ve\ \alpha \in F\ için < x, \alpha y >= \alpha < x, y >$,
3. $\forall x, y \in X$ve$\forall \alpha, \beta \in F\ için < x, \alpha y + \beta z >= \alpha < x, y > +\beta < y, z. >$.

2.9 Tanım (Norm): (X,<.,.>) bir iç çarpım uzayı olsun. Bir $x \in X\ vektör$ normu

$$\| x \| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

2.10 Tanım (Hilbert uzayı): (X, <.,.>) bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer bu iç-çarpım uzayı yukarıdaki norma göre tam ise, yani (X, <.,.>) bir iç çarpım uzayı içindeki her Cauchydizisibu norma göre yakınsak ise bu iç çarpıma bir ‘’Hilbert Uzayı’’ denir.

2.11 Tanım (Birim Operatör:)$A: X \to X$ operatörü verilsin. Eğer her $x \in X$ için $Ax = x$ ise A operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir. $I,\ E\ ve\ I_x$sembollerinden biriyle gösterilir.

2.12 Tanım (Sınırlı Operatör:)X ve Y iki normlu uzay olsun. A ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$nın X’de sınırlı her kümesine $R(A)nın$ Y de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A’ya ‘’sınırlı operatör’’ denir. Başka bir deyişle

$\|Ax\|_y \leq c\|x\|_x\ ,\ her\ \ x \in D(A)$olacak şekilde bir sabit c>0 sayısı varsa A’ya ‘’sınırlı operatör’’ denir.

2.13 Tanım (Lineer Uzay:) X ve Y aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer D(A), X’in bir alt uzayı ve

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \forall x, y \in D(A) ve\ \forall \alpha, \beta \in F$ise A’ya ‘’Lineer operatör’’ denir.

2.14 Tanım (Eşlenik ve Özeşlenik Operatör:)A, H Hilbert uzayında sınırlı bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için;

$< Af, g >=< f, A^* g >$sağlanıyorsa$A^*\ a\ A'nın$ ‘’eşlenik operatörü’’ denir.

$Eğer\ D(A) = D(A^*)$ve A=A^* ise bu A’ya özeşlenik operatör denir.

2.15 Tanım (Rezolventa:)H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$\rho(A) \coloneqq \{\lambda \in C: (A - \lambda E)^{-1} \in L(H)\}$kümesine Aoperatörünün ‘’regüler değerler kümesi’’ veya ‘’rezolvent kümesi’’ denir.

$\lambda \in \rho(A)$olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün ‘’rezolventası’’ veya ‘’çözücü operatörü’’ adı verilir.

2.16 Tanım (Spektrum:) H bir hilbertızayı olsun.

$Sp(A) = \sigma(A) \coloneqq C \setminus \rho(A)$kümesine A operatörünün ‘’spektrumu’’ denir. A operatörünün spektrum kümesi $''\sigma(A)'''$ ve $''Sp(A)''$ile göstereceğiz.

2.17 Tanım (Operatörlerde Sıralama:) A ve B, H Hilbert uzayı üzerinde iki özeşlenik operatör olsun.

1. $A \leq B \Leftrightarrow < Ax, x > \leq < Bx, x > \ \forall x \in H;$

2. $A \geq 0$ ise A operatörüne pozitiftir denir.

2.18 Not: Eğer A özeşlenik operatör ve f de $Sp(A)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda $t \in Sp(A) için\, f(t) \geq 0$dır. Buradan f(A)≥ $0, yani\ f(A)\ H$ Hilbert uzayı üzerinde pozitif bir operatördür. İlaveten eğer f ve g, $Sp(A)$ üzerinde iki fonksiyon ise aşağıdaki önemli özelliği sağlanır. Her $t \in Sp(A)\ için$

$f(t) \geq g(t)$ dir. Buradan $f(A) \geq g(A)$ sağlanır.

2.19 Teorem: A, HHilbert uzayı üzerinde sınırlı özeşlenik bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

$$m := inf_{\|x\|=1} < Ax, x >= \max\{\alpha \in R: \alpha E \leq A\};$$

$$M := sup_{\|x\|=1} < Ax, x >= \min\{\alpha \in R: A \leq \alpha E\};$$

ve

$$\|A\| = \max\{\|m\|, \|M\|\}.$$

Ayrıca m,M$\in Sp(A) ve\ Sp(A) \subset [m, M]$.

2.20 Tanım: (Operatör Konveks) $A\ ve\ B$, spektrumları $I \subset \mathbb{R}$ da olan

keyfi özeşlenik operatörler ve $\lambda \in [0,1]\ olsun$. Bu durumda,

$$f\big((1-\lambda)A + \lambda B\big) \leq (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B)$$

Eşitsizliğini sağlayan, I aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyona operatör konveks denir.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu tez çalışması, Dragomir' in (2011) yılında yayımladığı "Operator Inequality of the Jensen, Cebysev and Grüss Type" adlı eseri temel kaynak olarak kullanılmış olup, buradaki teoremler, lemmalar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.1 HİLBERT UZAYINDA ÖZEŞLENİK OPERATÖR FONKSİYONLAR

3.1.1 Sınırlı-Özeşlenik Operatörler

3.1.1.1 Operatörlerin Sıralanması

$\big(\mathrm{H}, (.,.)\big)$ $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir Hilbert uzayı olsun.

H hilbert uzayında tanımlı bir A sınırlı lineer operatörüne eğer $A = A^*$ ise özeşlenik denir. Yani

$A = A^* \Leftrightarrow \forall$ $x \in H$ için $(Ax,x) \in \mathbb{R}$.

Eğer A özeşlenik ise, bu takdirde

$$\|A\| = sup_{\|x\|=1}\{\, |< Ax, x >|\, \} = sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\; < Ax, y >| \qquad (1.2)$$

Aksi söylenmedikçe buradaki tüm operatörleri H hilbert uzayının tamamında sınırlı olarak kabul edeceğiz. $B(H)$ile de, H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin Banach cebri olarak göstereceğiz.

3.1.1.1 Tanım: A ve BH Hilbert uzayında iki öz-eşlenik operatör olsun. Bu durumda

$$A \leq B \; veya \; B \geq A \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{H} \; için \; < Ax, x > \leq < Bx, x >$$

Yani, "A operatörü B operatöründen küçüktür veya eşittir." Veya "B operatörü A operatöründen büyüktür veya eşittir" denir. Özel olarak her $x \in H$ için $(Ax,x) \geq 0$, Yani $A \geq 0$ ise bu operatöre "pozitif operatör" denir. Operatör teorisinden biz biliyoruzki; keyfi $A \in \mathrm{B(H)}$ operatörü için $A * A$ ve $AA *$ operatörleri H hilbert uzayında pozitif özeşlenik operatörlerdir. Ancak genelde $A * A$ ve $AA *$ operatörleri birbirleri ile kıyaslanmamalıdır.

3.1.1.2 Teorem:$A, B, C \in$ B(H) özeşlenik operatörler ve $(\varphi+\Psi)(s) := (\varphi)(s) + (\Psi)(s)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

1. $A \leq A$;
2. Eğer $A \leq B$ ve $B \leq C$ ise $A \leq C$;
3. Eğer $A \leq B$ ve $B \leq A$ ise $A = B$;
4. Eğer $A \leq B$ ve $\alpha \geq 0$ ise

   $A + C \leq B + C$

   $\alpha A \leq \alpha B$

   $-A \geq -B$

5. Eğer $\alpha \leq \beta$ ise $\alpha A \leq \beta B$.

Eğer $x, y \in H$ ve A pozitif özeşlenik operatörleri için aşağıdaki Schwar eşitsizliği sağlanır.

$| Ax, y |^2 \leq < Ax, x >< Ay, y >$(1.3)

3.1.1.3 Tanım: A, H hilbert uzayında bir pozitif özeşlenik operatörü olsun. Bu durumda her $x \in H$ için

$\|Ax\|^2 \leq \|A\| < Ax, x >$(1.4)

3.1.1.4 Teorem: n$\in N$ için $An, B \in B(H)$, $A1 \leq A2 \leq \ldots \leq An \leq \ldots . \leq B$ şartlarını sağlayan özeşlenik operatörler olsunlar. Bu durumda,

$A_n \leq A \leq B$ olacak şekilde, H hilbert uzayında tanımlı bir A sınırlı özeşlenik operatörü vardır ve her $x \in H$ için $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$.

Yukarıdaki teoremin benzeri $(A_n)_{n\geq 1}$ azalan ve alttan sınırlı bir dizi için de geçerlidir.

3.1.1.5 Teorem: Her $x \in H$ için

(s) $\lim_{n\to\infty} A_n x = A$ve $\lim_{n\to\infty} A_n x = A\,x$ifadesinde$(A_n)_{n\geq 1} \subset B(H)$dizisi $A \in B(H)$ operatörüne "güçlü yakınsaktır" ve $(A_n)_{n\geq 1} \subset B(H)$dizisinin "güçlü limiti" denir.

Norm anlamında yakınsamaya, yani $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ akınsamaya güçlü yakınsamanın zıttı olarak “düzgün yakınsama” adını vereceğiz ve normda yakınsama için $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ şeklinde göstereceğiz. Her $x \in H$ için

$$\|A_m x - A_n x\| \le \|A_m - A_n\| \, \|x\|$$

eşitsizliğinden $(A_n)_{n\geq 1}$ dizisinin A’ya düzgün yakınsaması, $(A_n)_{n\geq 1}$ dizisinin A’ya güçlü yakınsadığını gösterir. Fakat bu iddianın tersi genelde doğru değildir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi güçlü yakınsamadan bahsedilmişse normal olarak zayıf yakınsamadan da söz edilmesi gerek. Buradan

(w) $\lim_{n\to\infty} A_n x = A$ $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in H$ için $lim_{n\to\infty} < A_n x, y > = < A_x, y >$

şeklinde tanımlanan yakınsamaya $B(H)$’da “zayıf yakınsama” denir.

3.1.1.6 Teorem: A, H hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör olsun. Bu durumda

$\alpha_1 \coloneqq inf_{\|x\|=1} < Ax, x > = \max\{\alpha \in \mathbb{R}: \alpha\, I \le A\}$;

$\alpha_2 \coloneqq sup_{\|x\|=1} < Ax, x > = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : A \le \alpha I\}$; ve

$\| A \| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$ dir.

Ayrıca, eğer $Sp(A)$ ile A operatörünün spektrumunu gösterecek olursak, bu durumda $\alpha_1, \alpha_2 \in Sp(A)$ ve $Sp(A) \subset [\alpha_1, \alpha_2]$.

3.1.1.7 Uyarı: Eğer A, α_1, α_2 yukarıdaki şekilde aşağıdakilerin doğruluğunu görmek hiç de zor değildir.

$\alpha_1 \coloneqq \min\{\lambda : \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\} \eqqcolon \min \mathrm{Sp(A)}$;

$\alpha_2 \coloneqq \max\{\lambda : \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\} \eqqcolon \max \mathrm{Sp(A)}$;

$\| A \| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}$.

Üstelik,

1. Apozitiftir. $\Leftrightarrow \alpha_1 \ge 0$;

2. Apozitif ve tersinirdir. $\Leftrightarrow \alpha_1 > 0$;

3. Eğer $\alpha_1 > 0$ ise, $A - 1$ bir pozitif özeşlenik operatörüdür ve

   $minSp(A-1) = \alpha_2^{-1}$,

   $maxSp(A-1) = \alpha_1^{-1}$

3.1.2. Özeşlenik Operatörlerinin Sürekli Fonksiyonları

3.1.2.1. Sınırlı Bir Operatörde Polinomlar

$(\varphi+\Psi)(s) := (\varphi)(s)+(\Psi)(s)$ (iki fonksiyonun toplamı)

$(\lambda\varphi)(s) := \lambda\varphi(s)$ (fonksiyonun sabitle çarpımı)

$(\varphi\Psi)(s) := (\varphi)(s).(\Psi)(s)$ (iki fonksiyonun çarpımı)

şeklinde$\varphi, \psi: ₵ \to ₵$ iki fonksiyon tanımlayalım. $\overline{\varphi}(s)$ ile de $(\varphi)(s)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğini gösterelim.

$$\mathrm{P} = \{\varphi(s) := \sum_{k=0}^{n} a_k s^k : n \geq 0, a_k \in C, 0 \leq k \leq n\}$$

3.1.2.1.1 Teorem: $A \in B(H)$ ve $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k s^k \in \mathrm{P}$ için

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k \in B(H), \quad A^0 = I \text{ ve}$$

$$\overline{\varphi}(A) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_k (A^*)^k \in B(H)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Buna göre $\varphi(S) \to \varphi(A)$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $(\varphi+\Psi)(A) = (\varphi)(A)+(\Psi)(A)$

b) $(\lambda\varphi)(A) = \lambda\varphi(A)$

c) $(\varphi\Psi)(A) = (\varphi)(A).(\Psi)(A)$

d) $[\varphi(A)]^* = \overline{\varphi}(A)$

c) şıkkını $(\varphi\Psi)(\mathrm{A}) = (\varphi)(\mathrm{A}).(\Psi)(\mathrm{A})$ ve $(\varphi)(\mathrm{s}) = \alpha_0$ polinomunun da operatör içine dönüşüm olduğunu da unutmamalıyız.

Bir U cebirinde U' cebirine tanımlanan $\mathrm{a} \to \mathrm{a}'$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa buna bir homomorfizm denir.

a) $(\mathrm{a+b})' = \mathrm{a}' + \mathrm{b}'$;

b) $(\lambda \mathrm{a})' = \lambda \mathrm{a}'$;

c) $(\mathrm{ab})' = \mathrm{a}'\mathrm{b}'$

Literatürde Teorem 3.1.2.1.1.'i keyfi $\varphi(\mathrm{S})$ polinomundan $\varphi(\mathrm{A})$ operatörüne götüren dönüşüm P 'den $B(H)$'a bir homomorfizmdir. Bu da ilaveten d) özelliğini sağlar.

Aşağıdaki sonuç A'nın spektrumu ile $\varphi(\mathrm{A})$'nın spektrumu arasında bir bağıntı kurar.

3.1.2.1.2 Teorem: Eğer $A \in B(H)$ ve $\varphi \in \mathrm{P}$ ise bu takdirde $Sp(\varphi(\mathrm{A})) = \varphi(\mathrm{S_p}(\mathrm{A}))$

.

3.1.2.1.3 Sonuç: Eğer $A \in B(H)$ özeşlenik ve $\varphi(\mathrm{S}) \in \mathrm{P}$ polinomu reel katsayılı ise $\varphi(\mathrm{A})$'da özeşleniktir ve

$$\|\varphi(\mathrm{A})\| = \max\{|\varphi(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\} \quad (1.5)$$

3.1.2.1.4 Teorem: Eğer $A \in B(H)$ ve $\varphi \in \mathrm{P}$ ise bu takdirde aşağıdakilerin doğruluğunu görmek kolaydır.

1. $\varphi(\mathrm{A})$ terslenebilirdir. $\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$ için $\varphi(\lambda) \neq 0$;
2. Eğer $\varphi(\mathrm{A})$ terslenebilir ise, bu durumda;

   $S_p(\varphi(\mathrm{A})^{-1}) = \{\varphi(\lambda)^{-1}, \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}$.

3.1.2.2. Özeşlenik Operatörlerin Sürekli Fonksiyonları

Kabul edelim ki A, H Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör olsun. Eğer φ , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı keyfi bir fonksiyon ise,

$\|\varphi\|_A = \sup\{|\varphi(\lambda)| : \lambda \in \mathrm{Sp(A)}\}$ şeklinde tanımlayabiliriz.

Eğer φ sürekli özel bir polinom ise, bu takdirde kompakt olan sp(A)nın noktasındadır. Buradan, supremumu maksimum olarak

$$\|\varphi(\mathrm{A})\| = \|\varphi\|_{\mathrm{A}}$$

şeklinde yazabiliriz.

Bundan sonra $C(R)$ ile R üzerinde tanımlı bütün sürekli, kompleks değerli fonksiyonların cebirini göstereceğiz.

3.1.2.2.1 Teorem: Eğer A, H hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör ve $\varphi \in C(R)$ ise bu takdirde,

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi\text{-}\varphi_n\|_A = 0, \quad (\varphi_n)_{n\geq 1} \subset \mathrm{P}$$

olacak şekilde bir $\varphi(\mathrm{A}) \in \mathrm{B(H)}$ vardır ve bu durumda;

$$\varphi(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathrm{A}) .$$

$\varphi \to \varphi(\mathrm{A})$ dönüşümü$C(R)$ den $\mathrm{B(H)}$ 'ya $[\varphi(\mathrm{A})]^* \varphi(\mathrm{A}) = \varphi(\mathrm{A})[\varphi(\mathrm{A})]^*$ olup normal operatördür. Ayrıca, eğer φ reel değerli ise, bu durumda $\varphi(\mathrm{A})$ özeşleniktir.

3.1.2.2.2 Örnek: Eğer $\mathrm{A} \in \mathrm{B(H)}$ özeşlenik ve $\varphi(s) = e^{is}$, $s \in R$ ise

$$e^{iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{k!}} (\mathrm{iA})^{\mathrm{k}}$$

Ayrıca, $e^{i\mathrm{A}}$ bir üniter operatördür ve onun tersi;

$$(e^{iA})^* = e^{-iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{k!}} (-\mathrm{iA})^{\mathrm{k}}$$

şeklinde operatördür.

Şimdi, eğer $\lambda \in C\backslash R, A \in B(H)$özeşlenik ve $\varphi(s)=\dfrac{1}{s-\lambda} \in C(R)$ ise, bu durumda

$$\varphi(\mathrm{A})=(\mathrm{A}\text{-}\lambda \mathrm{I})^{-1}$$

Sağlanır ve eğer,$A, B \in H$ bir özeşlenik operatörü ve $\varphi, \psi \in C(R)$ verilmiş iki fonksiyon ise bu durumda $\varphi(\mathrm{A})\psi(\mathrm{A})=\psi(\mathrm{A})\varphi(\mathrm{A})$ değişme özelliği vardır. Bu özellik, aşağıda verildiği gibi bir diğer operatöre genişletilebilir.

3.1.2.2.3 Teorem: Kabul edelim ki $A, B \in H$ve $\varphi \in C(R)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $B \in B(H)$, $AB = BA$özelliğini sağlayan bir operatör ise, bu durumda

$\varphi(A)B = B\varphi(A)$dır.

3.1.2.2.4 Teorem: Eğer A, H Hilbert uzayında sınırlı bir özeşlenik operatör ve φ de sürekli bir fonksiyon ise,

$$Sp(\varphi(A)) = \varphi(Sp(A))\text{dır.}$$

3.1.2.2.5 Sonuç: Teorem 2.14'ün iddialarına göre aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

a) $\varphi(\mathrm{A})$ operatörüözeşleniktir. $\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$ için$\varphi(\lambda) \in R$;

b) $\varphi(\mathrm{A})$ operatörüüniterdir. $\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$ için $|\varphi(\lambda)|=1$;

c) $\varphi(\mathrm{A})$ operatörü tersinirdir. $\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$ için $\varphi(\lambda) \neq 0$;

d) Eğer $\varphi(\mathrm{A})$ özeşlenik ise, bu durumda $\|\varphi(\mathrm{A})\|=\|\varphi\|_{\mathrm{A}}$.

Şimdi özeşlenik operatör fonksiyonları için, eşitsizliklerin genişletilebilmesi için, aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

3.1.2.2.6 Teorem: A, H Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatörü olsun. $C(R)$den $B(H)$'ya olan $\varphi \to \varphi(\mathrm{A})$ homomorfizması sıralamayı korur, yani; eğer

$\varphi, \psi \in C(R)\, S_p(\mathrm{A})$ üzerinde reel değerli iki fonksiyon ve her $\lambda \in S_p(\mathrm{A})$ için $\psi(\lambda) \leq \varphi(\lambda)$ ise bu durumda; $\psi(\mathrm{A}) \leq \varphi(A)$ dır.

3.1.2.2.7 Teorem: Eğer $\mathrm{A} \in \mathrm{B(H)}$ operatörü pozitif ve özeşlenik ise, bu durumda $B^2 = A$olacak şekilde $B := \sqrt{\mathrm{A}} \in \mathrm{B(H)}$ olan bir tek pozitif özeşlenik operatörü vardır. Ayrıca, eğer A tersinir ise, B de tersinirdir.

Eğer $A, B \in H$ ise $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ operatörü de özeşleniktir ve pozitiftir. Dolayısıyla A operatörünün mutlak değeri de tanımlanır. Yani, $|A| := \sqrt{\mathrm{A}^*\mathrm{A}}$ şeklide ifade edilir.

Kompleks analizden biliyoruz ki $z \in ₵$ için $z = |z|.e^{i\arg(z)}$ şeklide yazılabiliriz. İşte bu şekilde yazabildiğimiz kompleks sayı ₵’den B(H)’ya homomorfizm olan bir dönüşümle H Hilbert uzayında sınırlı normal bir operatör olup, bu karakterizasyondan da anlaşılacağı üzere, bir operatörün mutlak değeri ile bir üniter operatörün çarpımı şeklinde de bakabiliriz.

3.1.2.2.8 Teorem:H Hilbert uzayında her sınırlı A lineer operatörü için $B = |A| \in \mathrm{B(H)}$ olan bir pozitif özeşlenik operatörü ile $A = CB$ tanım kümesi $\mathrm{D_C} = \overline{\mathrm{B(H)}}$ ve değer kümesi$R_C = C(D_C) = \overline{A(H)}$ olacak şekilde bir C izometrik operatörü vardır.

Özel olarak da aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.1.2.2.9 Sonuç: Eğer$A, B \in H$ operatörü normal ise, bu durumda $B = |A| \in \mathrm{B(H)}$ olacak şekilde bir pozitif özeşlenik operatörü ve $A = BC = CB$ olan bir C üniter operatörü vardır. Üstelik, eğer A tersinir ise bu durumda B ve C bu şartlar altında tek türlü belirlidir.

3.1.2.2.10 Not: Şimdi kabul edelim ki $B \in \mathrm{B(H)}$ pozitif özeşlenik operatörü ve C de bir izometrik operatörü için $A = CB$ olsun. Bu durumda

a) $B = \sqrt{\mathrm{A}^*\mathrm{A}}$; sonuç olarak B, yukarıda ki şartlar altında tek türlü belirlidir;

b) C’nin yukarıdaki şartlar altında tek türlü belirlenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün birebir (1:1) olmasıdır.

3.1.3. Özeşlenik Operatörlerin Basamak Fonksiyonları

A, H Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör olsun. Buradaki amacımız $C(R)$den $B(H)$'ya tanımlanan $\varphi \rightarrow \varphi(\mathrm{A})$ homomorfizmasının sıralamayı koruduğunu göstermektir. Bunun içinde;

$$\varphi_{\lambda}(s) = \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

şeklidende tanımlanan bir fonksiyon cebirini gözönünde bulunduracağız.

φ_{λ} , $\lambda \in R$ basamak fonksiyonlarını içeren fonksiyonların cebirini gözönünde bulunduracağız. Yukarıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonun $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\overline{\varphi}_{\lambda}(s) = \varphi_{\lambda}(s)$$

$$\varphi^{2}{}_{\lambda}(s) = \varphi(s)$$

$$[\varphi_{\lambda}(\mathrm{A})]^{*} = \varphi_{\lambda}(s)$$

$$[\varphi_{\lambda}(\mathrm{A})]^{2} = \varphi_{\lambda}(\mathrm{A})$$

özelliklerini sağladığını görmek zor değildir. Dolayısıyla $\varphi_{\lambda}(\mathrm{A})$ aynı zamanda bir projeksiyon operatördür.

Ancak, φ_{λ} fonksiyonuna, λ 'yı içeren keyfi aralık üzerinde sürekli fonksiyonlar tarafından düzgün olarak yaklaşılamayacağından dolayı, genelde bir $\varphi_{\lambda}(\mathrm{A})$ operatörünü $\varphi_{\lambda,n} \in C(R)$için $\varphi_{\lambda,n}(\mathrm{A})$ operatörlerinin düzgün bir limiti olarak tanımlamananın hiçbir yolu yoktur.

Operatörlerin düzgün limiti kavramını açıklamak için, yani $\varphi_{\lambda}(\mathrm{A})$ operatörünü tanımlamak için operatörlerin güçlü limit kavramını kullanacağız. Bunu yapmak için de

$$\varphi_{\lambda}(s) := \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 1 - n(s-\lambda), & \lambda \leq s \leq \lambda + \dfrac{1}{n} \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan $\varphi_{\lambda,s}$ reel değerli sürekli fonksiyonların azalan bir dizinin noktasal bir limiti olarak φ_{λ} fonksiyonlarının limitini göz önünde bulunduracağız.

3.1.3.1 Tanım: $\varphi_{\lambda,n}(\mathrm{A})$ özeşlenik operatörlerine uygun olan diziler, azalmayan ve $B(H)$'daki sıralamaya göre sıfırla alttan sınırlıdır. Aynı zamanda, H Hilbert uzayında bazı sınırlı özeşlenik $\varphi_{\lambda}(\mathrm{A})$ operatörüne güçlü yakınsaktır.

3.1.3.2 Tanım: Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir φ fonksiyonu-na, eğer reel sayılar kümesi üzerinde sürekli reel değerli artmayan bir dizinin bir noktasal limiti ise, bu fonksiyona üstten yarı süreklidir denir.

Başka bir ifadeyle: Rüzerinde, reel değerli bir φ fonksiyonunun üstten yarı sürekli olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $s_0 \in R$ ve her $\varepsilon > 0$ için, $s \in (s_0 - J, s_0 + J)$ olmak üzere $\varphi(s) < \varphi(s_0) + \varepsilon$ şartını sağlayan bir $J > 0$ sayısının var olmasıdır.

3.1.3.3 Teorem: A, H Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatör ve φ de reel sayılar kümesi üzerinde negatif olmayan üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda; $S_p(\mathrm{A})$'dan φ'ye, her $n \in N$ için $C(R)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonların artmayan bir $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ dizisi noktasal yakınsayacak şekilde bir tek pozitif özeşlenik bir $\varphi(\mathrm{A})$ operatörü vardır. Buradan da

$$\varphi(\mathrm{A}) = (s) \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\mathrm{A}) \cdot$$

3.1.3.4 Teorem: $A \in B(H)$ özeşlenik operatör, φ ve ψ de negatif olmayan ℝ'de üstten yarı sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda α >0 için

$$(\varphi + \Psi)(\mathrm{A}) := (\varphi)(\mathrm{A}) + (\Psi)(\mathrm{A})$$
$$(\alpha\varphi)(\mathrm{A}) := \alpha\varphi(\mathrm{A})$$

$(\varphi\Psi)(\mathrm{A}) := (\varphi)(\mathrm{A}).(\Psi)(\mathrm{A})$

şeklinde tanımlanan $(\varphi+\Psi)$, $(\alpha\varphi)$ ve $(\varphi\Psi)$ fonksiyonları da negatif olmayan üstten yarı süreklidir. Üstelik, eğer her $s \in S_p(\mathrm{A})$ için $\varphi(s) \leq \psi(s)$ ise bu durumda $\varphi(\mathrm{A}) \leq \psi(\mathrm{A})$.

Şimdi yeni bir fonksiyon kümesi tanımlayalım.

R(R):={ $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$: φ_1, φ_2 R'de tanımlı negatif olmayan üstten yarı sürekli fonksiyonlar}

Yukarıdaki kümeyi tanımlamamızın amacı, negatif olmayan üstten yarı sürekli fonksiyonlar şartını genişleterek R(R) şeklinde tanımlanan bu fonksiyonların noktasal toplam, skalerle çarpım ve çarpım işlemleri altında bir cebir olduğunu görmek hiçte zor değildir.

3.1.3.5 Teorem: $A \in B(H)$ bir özeşlenik operatör ve $\varphi \in$ R(R) olsun.

Bu durumda $\varphi(\mathrm{A}) \in B(H)$, $\varphi \in$ R(R) olan bir özeşlenik operatör vardır ve bu operatör

$$\varphi(\mathrm{A}) = \varphi_1(\mathrm{A}) - \varphi_2(\mathrm{A}).$$

R(R)'den $B(H)$'a tanımlanan $\varphi \to \varphi(\mathrm{A})$ dönüşümü bir homomorfizmdir ve bu homomorfizm aşağıdaki şekilde sıralamayı korur, yani eğer $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ ve $s \in S_p(\mathrm{A})$ için $\varphi(s) \leq \psi(s)$ şartını sağlayan iki fonksiyon ise, bu durumda $\varphi(\mathrm{A}) \leq \psi(\mathrm{A})$. Ayrıca eğer $B \in B(H)$ operatörü $AB = BA$ değişme özellğini sağlıyorsa bu durumda $\varphi(A)B = B\varphi(A)$olur.

3.1.4. Özeşlenik Operatörlerin Spektral Ayrılışı

$A \in B(H)$ özeşlenik operatörü ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için φ_λ ise

$$\varphi_\lambda(s) = \begin{cases} 1, & -\infty < s \leq \lambda \\ 0, & \lambda < s < +\infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun.

Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{E}_\lambda := \varphi_\lambda(\mathrm{A})$ operatörü bir projeksiyon operatörüdür.

3.1.4.1 Teorem: (Spektral Gösterim Teoremi)

A, H Hilbert uzayında bir sınırlı özeşlenik operatör ve

$$m=\min\{\lambda : \lambda \in S_p(\mathrm{A})\}=\min(S_p(\mathrm{A}))$$

$$M=\max\{\lambda : \lambda \in S_p(\mathrm{A})\}=\max(S_p(\mathrm{A})) \text{ olsun.}$$

Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlayan ve A operatörünün "spektral ailesi" olarak adlandırılan $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$projeksiyonların bir ailesi vardır.

a) $\lambda \le \lambda'$ için $\mathrm{E}_\lambda \le \mathrm{E}_{\lambda'}$

b) $\mathrm{E}_{m-0} = 0,\ \mathrm{E}_m = \mathrm{I}$ ve her $\lambda \in R$ için $\mathrm{E}_{\lambda+0} = \mathrm{E}_\lambda$

c) $A = \int_{m-0}^{M} \lambda \, d\mathrm{E}_\lambda$

şekliden gösterime sahiptir.

Genel olarak,ℝ'de tanımlı her sürekli kompleks değerli φ fonksiyonu ve her $\varepsilon > 0$için ,

$\|\varphi(A) - \sum_{k=!}^{n} \varphi(\lambda_k') \, [E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}]\| \le \varepsilon$(1.6)

şartını sağlayan

$$\begin{aligned} &\lambda_0 < \lambda_1 = m < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = \mathrm{M} \\ &\lambda_k - \lambda_{k-1} \le \delta, \qquad 1 \le k \le n \ (2.7) \\ &\lambda'_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k], \qquad 1 \le k \le n \end{aligned}$$

δ>0 sayısı mevcuttur. Buradan da

$$\varphi(A) = \int_{m-0}^{\mathrm{M}} \varphi(\lambda) d\mathrm{E}_\lambda$$

Şeklinde Rieman-Stieltjej tipi integrale dönüşür.

3.1.4.2 Sonuç:A, E_λ ve φ Teorem 2.25.? deki iddiaları sağlasın. Bu durumda; her $x, y \in \mathrm{H}$ için

$$\varphi(A)_x = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d\mathrm{E}_\lambda x \,.(2.8)$$

gösterimi ve

$$(\varphi(A)_{x.y}) = \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d(\mathrm{E}_\lambda x, y) \; (2.9)$$

Özel olarak $y = x$ olarak alınırsa her $x \in \mathrm{H}$ için

$$< \varphi(A)_{x,x} >= \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) d < \mathrm{E}_\lambda x, x > .(1.7)$$

Üstelik, her $x \in \mathrm{H}$ için

$$\| \varphi(A)_x \|^2 = \int_{m-0}^{M} | \varphi(\lambda) |^2 \, d\| \mathrm{E}_\lambda x \|^2 .(1.8)$$

3.1.4.3 Teorem: A, H Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik bir operatör ve

m:=min($S_p(\mathrm{A})$)

M:=max($S_p(\mathrm{A})$) olsun.

Eğer$\{F_\lambda\}_{\lambda \in R}$, her $\lambda \in R$ ve E_λ ’da (1.5) deki gibi tanımlanırsa $\mathrm{F}_\lambda = \mathrm{E}_\lambda$.

Yukarıdaki iki teoremden de anlaşılacağı gibi projeksiyon operatörlerin spektral ailesi sınırlı özeşlenik bir A operatörü tarafından tek şekilde belirlenir ve tek şekilde gösterime sahiptir. Bu spektral aile aynı zamanda, A operatörünün özelliklerini direkt yansıtır.

3.1.4.4 Teorem: $\{E_\lambda\}_{\lambda \in R}$sınırlı özeşlenik A operatörünün spektral ailesi olsun. Eğer B, H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör ise AB=BA olabilmesi için gerek ve yeterli koşul her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{E}_\lambda \mathrm{B} = \mathrm{B}\mathrm{E}_\lambda$ olmasıdır. Ayrıca özel olarak $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{E}_\lambda \mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{E}_\lambda$.

3.1.4.5 Teorem: $\{\mathrm{E}_\lambda\}_{\lambda \in}$ sınırlı özeşlenik A operatörünün spektral ailesi ve $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda;

a) μ , A operatörünün regüler değeridir, yani A-I'nın tersinir olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{E}_{\mu-\theta} = \mathrm{E}_{\mu+\theta}$ olan bir $\theta > 0$'ınvarolmasıdır.

b) $\mu \in S_p(\mathrm{A}) \Leftrightarrow$ her $\theta > 0$ için $\mathrm{E}_{\mu-\theta} < \mathrm{E}_{\mu+\theta}$

c) μ , A operatörünün bir özdeğeridir $\Leftrightarrow$ $\mu \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{E}_{\mu-0} < \mathrm{E}_{\mu}$

Aşağıdaki sonuç, Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörler için bir çok sonuçla ilişkili eşitsizliklerin elde edilmesinde önemli bir role sahiptir.

3.1.4.6 Teorem: (Total Varyasyonlu Schwarz Eşitsizliği)

$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$sınırlı özeşlenik bir A operatörünün spektral ailesi, m=min $S_p(\mathrm{A})$ ve M=max $S_p(\mathrm{A})$ olsun. Bu durumda her $x, y \in \mathrm{H}$ için $\lambda \to < \mathrm{E}_\lambda x, y >$ fonksiyonu sınırlı varyasyonludur ve

$$\bigvee_{m-0}^{\mathrm{M}} (\mathrm{E}_{(.)} x, y) \leq \| x \| . \| y \|$$

İspat: Eğer P, her $x \in \mathrm{H}$ için <P x, x >≥0, yani H Hilbert uzayında negatif olmayan bir özeşlenik operatör ise, bu durumda her $x, y \in \mathrm{H}$ için

$$|< \mathrm{P}x, x >|^2 \leq < \mathrm{P}x, x >< \mathrm{P}y, y >$$

Eşitsizliği H Hilbert uzayında Schwarz eşitsizliğinin bir genelleştirilmesidir. Şimdi, eğer

d :m-s=$t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = \mathrm{M}$,

S>0 için [m-s,M] aralığının keyfi bir parçalanışı ise, bu durumda negatif olmayan operatörler için Schwarz eşitsizliğinden,

$$\bigvee_{m-0}^{\mathrm{M}} (< \mathrm{E}_{(.)} x, y >) = \operatorname{Sup}_d \{ \sum_{i=0}^{n-1} |< (\mathrm{E}_{t_{i+1}} - \mathrm{E}_{t_i}) x, y >| \}$$
$$\leq \operatorname{Sup}_d \{ \sum_{i=0}^{n-1} [< (\mathrm{E}_{t_{i+1}} - \mathrm{E}_{t_i}) x, x >^{1/2} < (\mathrm{E}_{t_{i+1}} - \mathrm{E}_{t_i}) y, y >^{1/2}] \} := \mathrm{I} \quad ....(1.15)$$

Reel sayılar için Cauchy-Bunyokowski-Schwarz eşitsizliğinden her $x, y \in \mathrm{H}$ için

$$I \le \underset{d}{\mathrm{Sup}}\{[\sum_{i=0}^{n-1} < (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})x, x >]^{1/2}[\sum_{i=0}^{n-1} < (E_{t_{i+1}} - E_{t_i})y, y >]^{1/2}$$

$$\le [\bigvee_{m-0}^{M} (< E_{(.)}x, x >)]^{1/2}[\bigvee_{m-0}^{M} (< E_{(.)}y, y >)]^{1/2} \quad (1.9)$$

$s \to 0$ için teorem ispatlanmış olur.

3.1.4.1. Operatör Monoton ve Operatör Konveks Fonksiyonlar

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I bir aralık, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bu f fonksiyonu operatör sıralamasına göre monoton ise bu sürekli f fonksiyonuna monoton operatör denir. Yani, eğer A ve B H Hilbert uzayında, $A \le B$ ve $S_p(A), S_p(B) \subset I$ olacak şekilde iki sınırlı özeşlenik operatör ise bu durumda $f(A) \le f(B)$ oluyorsa bu reel değerli sürekli fonksiyona monoton operatör denir. Şimdi konveks operatör kavramını verelim. Eğer, A ve B H Hilbert uzayında $S_p(A), S_p(B) \subset I$ olacak şekilde keyfi iki tane sınırlı özeşlenik operatör ise, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f((1-\lambda)A + \lambda B) \le (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B) \quad (1.10)$$

oluyorsa bu f fonksiyonuna konveks operatör denir. Bu tanımında "$\le$" yerinde "$\ge$" alınırsa bu tanıma benzer şekilde "konkav operatör" tanımıda verilebilir.

3.1.4.1.1 Teorem: (LÖwner-Heinz Eşitsizliği)

A ve B H Hilbert uzayında iki pozitif operatör olsun. Bu durumda eğer $A \ge B \ge 0$ ise, buradan her $r \in [0,1]$ için $A^r \ge B^r$.

3.1.4.1.2 Teorem: (Jensen Operatör Eşitsizliği)

H ve K iki Hilbert uzayı ve $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, A ve A_j, j=1,2,…,k için j içinde spektral olan H Hilbert uzayında özeşlenik operatörler ise, bu durumda aşağıdaki şartlar birbirine denktir.

i) f, j üzerinde konveks operatör;

ii) Her $A:H \to H$ özeşlenik ve $C:K \to H$ izometri, yani $C^*C = 1_K$ operatör ise, $f(C^*AC) \le C^* f(A)C$;

iii) Her $A:H \to H$ özeşlenik ve $C:H \to H$ izometri için $f(C^*AC) \le C^* f(A)C$;

iv) Her $A_j:H \to H$ özeşlenik ve $C_j:K \to H$, $\sum_{j=1}^{k} C_j^* C_J = 1_K$ sınırlı lineer operatörleri için

$$f(\sum_{j=1}^{k} C_j^* A_j C_j) \le \sum_{j=1}^{k} C_j^* f(A_j) C_j;$$

v) Her $A_j:H \to H$ özeşlenik ve $C_j:H \to H$, $\sum_{j=1}^{k} C_j^* C_J = 1_H$ sınırlı lineer operatörleri için

$$f(\sum_{j=1}^{k} C_j^* A_j C_j) \le \sum_{j=1}^{k} C_j^* f(A_j) C_j;$$

vi) Her özeşlenik $A_j:H \to H$ operatörü ve $P_j:H \to H$, $\sum_{j=1}^{k} P_J = 1_H$ projeksiyon operatör ise, bu durumda

$$f(\sum_{j=1}^{k} P_j A_j P_j) \le \sum_{j=1}^{k} P_j f(A_j) P_j$$

3.1.4.1.3 Teorem: (Hansen-Pedersen-Jensen Eşitsizliği)

J, sıfırı içeren bir aralık ve $f: J \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. A ve A_j, j=1,2,…,k spektrumları J de olan, H Hilbert uzayında özeşlenik operatörler olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i) f, J üzerinde konveks operatör ve $f(0) \le 0$;

ii) Her $A:H \to H$ özeşlenik operatör ve $C:H \to H$ $C^*C \le 1_H$ olan bir daralma dönüşümü ise $f^*(C^*AC) \le C^* f(A)C$;

iii) Her $A_j:H \to H$ özeşlenik operatör ve $C_j:H \to H$, $\sum_{j=1}^{k} C_j^* C_J \le 1_H$ sınırlı lineer operatörler ise $f(\sum_{j=1}^{k} C_j^* A_j C_j) \le \sum_{j=1}^{k} C_j^* f(A_j) C_j$;

iv) Her $A:H \to H$ özeşlenik bir operatör ve P de bir projeksiyon ise, bu durumda $f(PAP) \leq Pf(A)P$

3.1.4.1.4 Teorem: [T.Furuta, sayfa 13] f , $[0,\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in [0,\infty)$ için $f(t) \leq 0$ ise, bu durumda Teorem 2.33'ün (i)-(vi) şartlarının her biri aşağıdaki şarta denktir.

vii) $-f$ monoton operatör fonksiyondur.

3.1.4.1 Sonuç: $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin monoton operatör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul f nin konkav operatör olmasıdır.

3.1.4.1.6 Teorem: f , $r \leq \infty$ için $[0,r)$ aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

i) f konveks operatördür ve $f(0) \leq 0$;

ii) $t \to \dfrac{f(t)}{t}$ fonksiyonu $(0,r)$ üzerinde monoton operatördür.

3.1.4.1.7 Sonuç: f , $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli olan ve pozitif değer alan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nin monoton operatör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $t \to \dfrac{f(t)}{t}$ fonksiyonunun monoton operatör olmasıdır.

3.1.4.1.7 Teorem: $f: J = [0,\infty) \to \mathbb{R}$alttan sınırlı, sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i) f, J üzerinde konkav operatördür;

ii) f, J üzerinde monoton operatördür.

Özel olarak, $f(t) = t^r$ fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında monoton operatör olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $r \in [0,1]$ olmasıdır. $f(t) = t^r$ fonksiyonunun (0, ∞)'da konveks operatör olması için $r \in [1,2]$ yada $r \in [-1,0]$ olmasıdır. Ayrıca $f(t) = t^r$ fonksiyonu $r \in [0,1]$ ise (0, ∞) aralığında operatör konkavdır.

3.2. JENSEN TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

3.2.1. JENSEN EŞİTSİZLİĞİNİN TERSLERİ

3.2.1.1. Drsgomir-Lonescu Eşitsizliklerinin Operatör Versiyonu

3.2.1.1.1 Teorem: I bir aralık olsun ve $f: I \to \mathbb{R}$,I aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer A $Sp(A) \subset [m, M]$ ile H hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ise;

$(0\leq)<f(A)x,x>-f(<Ax,x>)\leq<f'(A)Ax,x>-<Ax,x>.<f'(A)x,x>$(1.11)

her x∈H için, $\|x\| = 1$

İspat:f, konveks ve diferansiyellenebilir olduğu için,

$f(t)-f(s)\leq f'(t).(t-s)$ her $t,s\in [m,M]$.

Şimdi, biz bir eşitsizlik seçelim $s=<Ax,x>\in [m,M]$ her x ϵ H $\|x\| = 1$

$Sp(A) \subset[m,M]$, o zaman

$f(t)-f(<Ax,x>)\leq f'(t).(t-<Ax,x>)$ (1.12)

her $t\in [m,M]$ her $x \in H\|x\| = 1$

Biz $x \in H\|x\| = 1$ i (1.11) denkleminde sabitlersek ve düzgünce uygularsak ;

$<[f(A)-f(<Ax,x>)1_H]x,x>\leq<f'(A).(A-<Ax,x>1_H)x,x>$ her x∈ H $\|x\| = 1$.

3.2.1.1.2 Sonuç: f , Teorem3.2.1.1.1. deki olarak farz edelim. Eğer Aj $Sp(Aj) \subset [m, M] \subset I, J \in \{1, \dots, n\}$ ve $xj \in H,\ j \in \{1, \dots, n\} \sum_{j=1}^{n} \|x\|^2 = 1$ ile sınırlandırılsın, o zaman

$(0\leq)\sum_{j=1}^{n}.<f(A_j)x_j,x_j>-f(\sum_{j=1}^{n}.A_jx_j,x_j)$

$\leq\sum_{j=1}^{n} < f'(A_j)A_jx_j,x_j>-\sum_{j=1}^{n}.<A_jx_j,x_j>.\sum_{j=1}^{n} < f'(A_j)x_j,x_j>.$ (1.13)

3.2.1.1.3 Sonuç:f fonksiyonunu Teorem 3.2.1.1.1. deki olarak alalım. Eğer
$Aj\ \ Sp(Aj) \subset [m, M] \subset I,$

$j\in\{1,\dots,n\}$ ve $p_j\geq0$, $j\in\{1,\dots n\}$ $\sum_{j=1}^{n} p_j=1$ ile sınırlandırılmış operatör ise, o zaman

$(0\leq)\sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j)$-f$(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j)$

$\leq\sum_{j=1}^{n} p_j f'(x_j)x_j$-$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j . \sum_{j=1}^{n} p_j f'(x_j)$,

$x_j \in\{1,\ldots,n\}$ Dragomir ve Ionescu tarafından 1994 de ilk halini kapsar.

3.2.1.2. Diğer Tersler

Uygulamalarda daha kullanışlı olabilecek eşitsizlikler

$<f(A)x,x>-f(<Ax,x>)$, $x \in H$, $\|x\| = 1$.

Bunlar spektrum margins terimleridir m, M ve f fonksiyonunun. Bunun devamında şu sonuca varabiliriz.

3.2.1.2.1 Teorem:I, bir aralık olsun ve $f: I \rightarrow R$, I aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $A\ Sp(A) \subset [m, M] \subset I$ ile H hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ise; o zaman

$(0\leq)<f(A)x,x>-f(<Ax,x>)$

$\leq\frac{1}{2}.(M-m)[\|f'(A)x\|^2 - < f'(A)x, x >^2]^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}(f'(M) - f'(m))[\|Ax\|^2 - < Ax, x >^2]^{\frac{1}{2}}$

$\leq\frac{1}{4}(M-m)(f'(M)- f'(m))$

$x\in H$ $\|x\| = 1$.

$(0\leq)<f(A)x,x>-f(<Ax,x>)\leq\frac{1}{4}(M-m)(f'(M)- f'(m))$

$$\begin{cases} < Mx - Ax, Ax - mx >< f'(M)x - f'(A)x, f'(A)x - f'(m)x > \\ < Ax, x > -\dfrac{M+m}{2} \text{II} < f'(A)x, x > -\dfrac{f'(M)+f'(m)}{2} \end{cases}$$

$\leq\frac{1}{4}(M-m)(f'(M)- f'(m))$ (1.15)

Herhangi bir $x \in H$ ve $\|x\| = 1$.

Dahası, eğer m>0 ve f'(m)>0 ise, o zaman

$(0\leq)<f(A)x,x>-f(<Ax,x>)\leq\frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}}<Ax,x>< f'(A)x,x>$,

$(\sqrt{M}$-$\sqrt{m})(\sqrt{f'(M)}$-$\sqrt{f'(m)})[< Ax, x >< f'(A)x, x >]^{\frac{1}{2}}$(1.16)

Herhangi bir $x \in H\|x\| = 1$.

İspat:A,$(H; <.,.>)$ Hilbert uzayında sınırlı bir operatör olsun ve farz edelim ki $Sp(A) \subset [m, M]$skalerler için m<M olsun. Eğer h ve g $[m, M]$ de sürekli ve

$\gamma := min_{t\in[m,M]} h(t)ve\Gamma := max_{t\in[m,M]} h(t)$ o zaman

$$| <h(A)g(A)x,x>-<h(A)x,x>.<g(A)x,x> | \leq \frac{1}{2}.(\Gamma - y)[\|g(A)x\|^2 - < g(A)x, x >^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$(\leq \frac{1}{4}(\Gamma\text{-y})(\Delta\text{-}\delta))(1.17)$$

Herhangi bir x $\in$ H IIxII=1.,δ:=$min_{t\in[m,M]]}$g(t) ve Δ:=$max_{t\in[m,M]}$g(t).

Dahası

$$<Af'(A)x,x>-<Ax,x>.<f'(A)x,x> \leq \frac{1}{2}(M - m)[\|f'(A)x\|^2 - < f'(A)x, x >^2]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M - m)(f'(M) - f'(m))(1.18)$$

ve

$$<Af'(A)x,x>-<Ax,x>.<f'(A)x,x> \leq \frac{1}{2}(f'(M)\text{-}f'(m))[\|f'(A)x\|^2 - < f'(A)x, x >^2]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M\text{-}m)(f'(M)\text{-}f'(m)) \qquad (1.19)$$

Her bir $x \epsilon H\|x\| = 1$. Birlikte istenen sonucu sağlar.

$$| <h(A)g(A)x,x>-<h(A)x,x><g(A)x,x> | \leq \frac{1}{4}(\Gamma\text{-y})(\Delta\text{-}\delta)$$

$$\begin{cases} [< \Gamma x - h(A)x, f(A)x - yx >< \Delta x - g(A)x, g(A)x - \delta x >]^{\frac{1}{2}} \\ \left|h(A)x, x > -\frac{\Gamma+y}{2}\right|| g(A)x, x > -\frac{\Delta+\delta}{2} | \end{cases} (1.20)$$

Her bir x $\in$ H $\|x\| = 1$.

$$<Af'(A)x,x>-<Ax,x>.<f'(A)x,x> \leq \frac{1}{4}(M\text{-}m)(f'(M)\text{-}f'(m))$$

$$\begin{cases} [< Mx - Ax, Ax - mx >< f'(M)x - f'(A)x, f'(A)x - f'(m)x >]^{\frac{1}{2}} \\ | Ax, x > -\frac{M + m}{2} || f'(A)x, x > -\frac{f'(M) + f'(m)}{2}| \end{cases}$$

Her bir $x \in H\|x\| = 1$.Eğer y ve δ pozitifse o zaman,

| <h(A)g(A)x,x>-<h(A)x,x><g(A)x,x> |

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\frac{(\Gamma-y)(\Delta-\delta)}{\sqrt{\Gamma y \Delta \delta}} & < h(A)x,x >< g(A)x,x > \\ (\sqrt{\Gamma}-\sqrt{y})(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta})[< h(A)x,x >< g(A)x,x >]^{\frac{1}{2}} & \end{cases}$$

Her bir $x \in H\|x\| = 1$.

Şimdi, biz belirtebiliriz ki,

$<Af'(A)x,x>-<Ax,x>.<f'(A)x,x>$

$$\leq\begin{cases} \frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} < Ax,x >< f'(A)x,x >, \\ (\sqrt{M}-\sqrt{m})(\sqrt{f'(M)}-\sqrt{f'(m)})[< Ax,x >< f'(A)x,x >]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Her bir $x \in H\|x\| = 1$.

3.2.1.2.2 Sonuç: f, teorem 3.2.1.2.1. deki gibi olsun. Eğer

$Aj\ Sp(Aj) \subset [m,M] \subset I,$

$j \in \{1,\dots,n\}$ ve $p_j \geq 0$, $j \in \{1,\dots n\}$ $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ ile sınırlandırılmış operatör ise, o zaman

$(0\leq)\sum_{j=1}^{n} < f(A_j)x_j,x_j>-f(\sum_{j=1}^{n}(A_j x_j,x_j))$

$$\leq\begin{cases} \frac{1}{2}(M-m)[\sum_{j=1}^{n}\|f'(A_j)x_j\|^2-([\sum_{j=1}^{n}< f'(A_j)x_j,x_j >)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(f'(M)-f'(m)[\sum_{j=1}^{n}\|A_j x_j\|^2-\left(\sum_{j=1}^{n}< A_j x_j,x_j >\right)^2]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$\leq\frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m))$ (1.21)

Her bir $x_j \in H$, $j \in \{1,\dots,n\}$ $\sum_{j=1}^{n}\|x\|^2 = 1$.

Ayrıca

$(0\leq)\sum_{j=1}^{n}.<f(A_j)x_j,x_j>-f(\sum_{j=1}^{n}.A_j x_j,x_j)\leq\frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m))$

$$\left\{\begin{array}{c} [\sum_{j=1}^{n} < Mx_j - A_j x, A_j x_j - m x_j >]^{\frac{1}{2}} \\ x[\sum_{j=1}^{n} < f'(\mathrm{M}) x_j - f'(A_j) x_j, f'(A_j) x_j - f'(\mathrm{m}) x_j >]^{\frac{1}{2}} \\ |\sum_{j=1}^{n} < A_j x_j, x_j > -\frac{M+m}{2} \,||\, \sum_{j=1}^{n} < f'(A_j) x_j, x_j > -\frac{f'(\mathrm{M}) + f'(\mathrm{m})}{2} \,| \end{array}\right.$$

$\leq \frac{1}{4}$(M-m)(f'(M)-f'(m)) (1.22)

Her bir $xj \in H, j \in \{1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^{n} \|x\|^2 = 1$.

Dahası, eğer $m > 0$ ve f'(m)>0 ise o zaman

$$(0 \leq) \sum_{j=1}^{n} < f(Aj) xj, xj > - f(\sum_{j=1}^{n} (A\, j xj, xj))$$

$$\leq \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{4} \frac{(M-m)(f'(M) - f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} \sum_{j=1}^{n}. < A_j x_j, x_j > \sum_{j=1}^{n}. < f'(A_j) x_j, x_j >, \\ (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) \\ x[\sum_{j=1}^{n}. < A_j x_j, x_j > \sum_{j=1}^{n}. < f'(A_j) x_j, x_j >]^{\frac{1}{2}} \end{array}\right. \qquad (1.23)$$

Her bir $xj \in H, j \in \{1, \dots, n\}ile\sum_{j=1}^{n} \|x\|^2 = 1$.

3.2.1.2.3 Sonuç: Varsayalım ki f,3.2.1.2.1. Teoremi gibidir. Eğer

$Aj, Sp(Aj) \subset [m, M] \subset I$,

$j \in \{1, \dots, n\}$ ve $pj \geq 0, j \in \{1, \dots n\}$ $\sum_{j=1}^{n} p\, j = 1$ ile sınırlandırılmış operatör ise, o zaman

$$(0 \leq) < \sum_{j=1}^{n} p_j f(A_j) x, x > - f(< \sum_{j=1}^{n} p_j A_j x, x >)$$

$$\leq \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(M-m)[\sum_{j=1}^{n} p_j \|f'(A_j)x\|^2 - < \sum_{j=1}^{n} p_j f'(A_j) x, x >^2]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(f'(\mathrm{M}) - f'(\mathrm{m}))[\sum_{j=1}^{n} p_j \|A_j x\|^2 - < \sum_{j=1}^{n} p_j A_j x, x >^2]^{\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

$\leq\frac{1}{4}$(M-m)(f'(M)-f'(m)) (1.24)

Herhangi $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

Ayrıca belirtebiliriz ki

$$(0 \leq) < \sum_{j=1}^{n} p_j f(A_j)x, x > - f(< \sum_{j=1}^{n} p_j A_j x, x >)$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'\,(M) - f'(m))$$

$$-\begin{cases} [\sum_{j=1}^{n} p_j < Mx - A_j x, A_j x - mx >]^{\frac{1}{2}} \\ x[\sum_{j=1}^{n} p_j < f'(M)x - f'(A_j)x, f'(A_j)x - f'(m)x >]^{\frac{1}{2}} \\ | < \sum_{j=1}^{n} p_j A_j x, x > - \frac{M+m}{2} \; || \; < \sum_{j=1}^{n} p_j f'(A_j)x, x > - \frac{f'(M)+f'(m)}{2} \; | \end{cases}$$

$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M) - f'(m))$ (1.25)

Herhangi bir $x \in H$ ile ‖x‖ = 1.

Dahası, eğer $m > 0$ ve f'(m) > 0,ise o zaman

$$(0 \leq) < \sum_{j=1}^{n} p_j f(A_j)x, x > - f(< \sum_{j=1}^{n} p_j A_j x, x >)$$

$$\leq\begin{cases} \frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} < \sum_{j=1}^{n} p_j A_j x, x >< \sum_{j=1}^{n} p_j f'(A_j)x, x >, \\ (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)}) \\ x[< \sum_{j=1}^{n} p_j A_j x, x >< \sum_{j=1}^{n} p_j f'(A_j)x, x >]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Her bir $x \in H$ ile ‖x‖ = 1.(1.26)

3.2.1.2.4 Dikkat: Eşitsizlik 1.26sonuçların bazıları dışbükey fonksiyon f negatif olmayan ve azalmayan tekdüze olduğu durumda pozitif operatörlerin toplamı için ters eşitsizlik üretmek için kullanılabilir.

$$(0 \leq) \left\| \sum_{j=1}^{n} Pj \;\; f\,(Aj) \right\| - f\left(\left\| \sum_{j=1}^{n} Pj\; Aj \right\| \right) \leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m))$$

Dahası, eğer biz (1.26) eşitsizliğini kullanırsak, o zaman elde ederiz:

$$(0 \leq) \left\| \sum_{j=1}^{n} Pj \;\; f\,(Aj) \right\| - f\left(\left\| \sum_{j=1}^{n} Pj\; Aj \right\| \right)$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{2} \bullet \frac{(M-m)\left(f'(M)-f'(m)\right)}{\sqrt{Mmf\prime(M)f\prime(m)}} \left\| \sum_{j=1}^{n} p_j A_j \right\| \left\| \sum_{j=1}^{n} p_j f'\;(A_j) \right\| \\ \left(\sqrt{M}-\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{f'(M)}-\sqrt{f'(m)}\right)\left[\left\| \sum_{j=1}^{n} p_j A_j \right\| \left\| \sum_{j=1}^{n} p_j f'\;(A_j) \right\|\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.27)$$

3.2.2. Bazı Slater Tipi Eşitsizlikler

3.2.2.1. Reel Değiskenli Fonksiyonlar İçin Slater Tipi Eşitsizlikler

I'nın gerçek sayılar aralığında olduğunu varsayalım ve $f\colon I \rightarrow \;\mathbb{R}I$ bir dışbükey fonksiyonudur. O halde$f,\; I$ üzerinde süreklidir ve I'nın her noktada sonlu sol ve sağ türevleri vardır. Üstelik, eğer $x, y \in \; I$ ve $x \;<\; y$, sonra$f'_(x) \leq f'$ (x) ≤ $f_y'(y) \leq f'(y) f'_{\_}\; ve\; f'$ ifadelerinin azalmayan fonksiyon olduğunu gösterir. Ayrıca, dışbükey bir fonksiyonu en sayılabilir sayıda noktalar hariç türevlenebilir olması gerektiği bilinmektedir

Dışbükey fonksiyon f:$I \rightarrow \mathbb{R}$, f'alt diferansiyeli af ile gösterilen tüm fonksiyonların kümesi

$I \rightarrow [-\infty, \infty]$ ö$\boldsymbol{yle\; ki\; \varphi\; (I)}\; \subset \mathbb{R}$ve

$f\;(x) \leq f\;(a) + (x-a)\;\varphi(a)$ herhangi$x\; \epsilon\; I$.

Ayrıca, iyi bilinen f dışbükey olması durumunda I, sonra δf boş olmayan bir,

f_, $f + \epsilon\; \delta f$ ve eğer $\varphi \in \delta f$, o zaman

$f'_{\_}$ (x) ≤ φ (x)≤ $f' + (x)$ herbiri $x \;\in\;\; I$.

Özellikle, φ azalmayan fonksiyondur.

Eğer f, I üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir fonksiyon ise, $\delta f = \{f'\}$.Bu sonucun devamında iyi bilinen Slater eşitsizliği:

3.2.2.1.1 Teorem: eğer $f: I \to \mathbb{R}$ ye artmayan konveks fonksiyon $x_i \epsilon I$, $pi \geq 0$

$Pn := \sum_{j=1}^{n} p\, i > 0\ ve\ \sum_{j=1}^{n} p\, i\, \varphi(xi) \neq 0, \varphi \epsilon\ \delta f$ ise, o zaman

$\frac{1}{\mathrm{Pn}} \sum_{j=1}^{n} p_i \mathrm{f}(x_i) \leq f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} p\mathrm{ixi}\ \varphi(\mathrm{xi})}{\sum_{j=1}^{n} p\mathrm{i}\ \varphi(\mathrm{xi})}\right)$(1.28)

3.2.2.2. Operatörler İçin Bazı Slater Tipi Eşitsizlikler

3.2.2.2.1 Teorem: I bir aralık olsun ve $f: I \to \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $A\ sp(A) \subset [m, M]$ ile H hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ve f^'(A) H da pozitizif tanımlı operatör ise o zaman;

$0 \leq f(\frac{<Af'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>}) - < f(A)x, x > \leq$

$f'(\frac{<Af'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>})[\frac{<Af'(A)x,x> - <Ax,x><f'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>}]$ (1.29)

Her bir $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

Şimdi, $t \in [m, M]$ ve A operatörü için düzenleme yaparsak, o zaman her bir $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

$< f'(A).(t.1H - A)x, x > \leq < [f(t)\ 1H - f(A)]x, x > \leq < f'(t).(t.1H - A)x, x >$(1.30)

t$\in [m, M]$ için ve her bir x ∈ H ile ‖x‖ = 1.

$t < f(A)x, x > - < f'(A)Ax, x > \leq f(t) - < f(A)x, x > \leq f^{\wedge\prime}(t)t - f^{\wedge\prime}(t) < Ax, x >$

$t \in [m, M]$için ve Her bir $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

Şimdi$A, mI \leq A \leq MI$ ile sınırlı operatör ve $f'(A)$ pozitif tanımlı, o zaman

$$mf'(A) \leq Af'(A) \leq Mf'(A),$$

$m < f'(A)x, x > \leq < Af'(A)x, x > \leq M < f'(A)x, x >\ Her\ bir\ x \in H\ ile\ \|x\| = 1$,

$t0 := (\frac{<Af'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>}) \in [m, M]$ Her bir $x \in H$ ile $\|x\| = 1.$

3.2.2.2.2 Açıklama: $f'(A)$,H üzerinde pozitif tanımlı operatör için önemlidir ki;

(<Af^' (A)x,x>)/(<f^' (A)x,x>)∈ I

Her bir $x \in H$ ile $\|x\| = 1(1.31)$

3.2.2.2.3 Açıklama: Şimdi, eğer fonksiyonlar I üzerinde konkav ve (1.31) koşullar sağlanıyorsa, o zamanher $x \in H$ ile $\|x\| = 1$ için

$0 \leq < f(A)x, x > - f(\frac{<Af'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>}) \leq$

$f'(\frac{<Af'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>})[\frac{<Af'(A)x,x>-<Ax,x><f'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>}]$(1.32)

eşitsizliği doğrudur.

3.2.2.3. Diğer Tersler

Negatif olmayan üst sınırlar dahada kullanışlı şu sonucu verebiliriz;

$$f\left(\frac{<Af'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>}\right)\text{-<f(A)x,x>}$$

Her $x \in H$ ile $\|x\| = 1.$

3.2.2.3.1 Teorem:I bir aralık olsun ve $f: I \to \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde konveks ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $A\ sp(A) \subset [m, M]$ ile H Hilbert uzayında sınırlandırılmış bir operatör ve f'(A),H da pozitif tanımlı operatör. Eğer biz tanımlarsak

$$B(f', A; x) := \frac{1}{< f'(A)x, x >} . f'(\frac{< Af'(A)x, x >}{< f'(A)x, x >}),$$

O zaman

$$(0 \leq) f\left(\frac{< Af'(A)x, x >}{< f'(A)x, x >}\right) -$$

$$< f(A)x, x > \leq (f', A; x)x \begin{cases} \frac{1}{2}(M - m)[\|f'(A)\|^2 - < f'(A)x, x >^2]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(f'(M) - f'(m)[\|Ax\|^2 - < Ax, x >^2]^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$\leq \frac{1}{4}(M - m)(f'(M) - f'(m))\ B(f', A; x)$ (1.33) ve

$$(0 \leq)\, f(\frac{<Af'(A)x,x>}{<f'(A)x,x>}) - < f(A)x,x > \leq B(f',A;x)x[\frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m))$$

$$-\begin{cases}[< Mx - Ax, Ax - mx >< f'(M)x - f'(A)x - f'(m)x >]^{\frac{1}{2}} \\ | < Ax,x > - \dfrac{M+m}{2} II < f'(A)x,x > - \dfrac{f'(M)+f'(m)}{2} \ | \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m))\, B(f',A;x) \quad (1.34)$$

Her $x \in H$ ile $\|x\| = 1.$

Dahası, eğer A pozitif tanımlı operatör ise o zaman

$$(0 \leq)\, f(\frac{< Af'(A)x,x >}{< f'(A)x,x >}) - < f(A)x,x > \leq \ B(f',A;x)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} < Ax,x >< f'(A)x,x > \\ (\sqrt{M}-\sqrt{m})(\sqrt{f'(M)}-\sqrt{f'(m)})[< Ax,x >< f'(A)x,x >]^{\frac{1}{2}} \end{cases} (1.35)$$

Her $x \in H$ ile $\|x\| = 1.$

A<H;<.,.>> hilbert uzayında sınırlı operatör olsun ve $Sp(A) \subset [m,M]$ $m < M$. Eğer h ve g, $[m,M]$ de sürekli olsun ve y:=$min_{t\in[m,M]}$h(t) ve Γ:=$max_{t\in[m,M]}$h(t),

o zaman

$$| < h(A)g(A)x,x > - < h(A)x,x >.< g(A)x,x > \ |$$

$$\leq \frac{1}{2}.(\Gamma - y)[\|g(A)x\|^2 - < g(A)x,x >^2]^{\frac{1}{2}}(\leq \frac{1}{4}(\Gamma - y)(\Delta - \delta)$$

(1.36)

Burada$x \in H$ ile $\|x\| = 1.$,δ:=$min_{t\in[m,M]}$g(t) ve Δ:=$max_{t\in[m,M]}$g(t).

Dahası

$$< Af'(A)x,x > - < Ax,x >.< f'(A)x,x >$$

$$\leq \frac{1}{2}(M-m)[\|f'(A)x\|^2 - < f'(A)x,x >^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M)-f'(m))$$

ve

$$< Af'(A)x,x> - < Ax,x>.< f'(A)x,x>$$
$$\leq \frac{1}{2}(f'(M) - f'\ (m))[\|Ax\|^2 - < Ax,x>^2]$$
$$\leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M) - f'(m))$$

Burada$x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

Eşitsizliği daha kullanışlı yaparsak;

$$|< h(A)g(A)x,x> - < h(A)x,x>.< g(A)x,x>| \leq \frac{1}{4}(\Gamma - \mathrm{y})(\Delta - \delta)$$

$$-\begin{cases}[< \Gamma x - h(A)x, f(A)x - \mathrm{y}x >< \Delta x - g(A)x, g(A)x - \delta\,(\mathrm{x})>]^{\frac{1}{2}} \\ |< h(A)x,x> - \frac{\Gamma+\mathrm{y}}{2} I \mathrm{I} < g(A)x,x> - \frac{\Delta+\delta}{2}| \end{cases} \quad (1.37)$$

Her $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

$$< Af'(A)x,x> - < Ax,x>.< f'(A)x,x> \leq \frac{1}{4}(M-m)(f'(M) - f'(m))$$
$$-\begin{cases}[< Mx - Ax, Ax - mx >< f'\ (M)x - f'\ (A)x, f'\ (A)x - f'\ (m)x>]^{\frac{1}{2}} \\ |< Ax,x> - \frac{M+m}{2}||< f'(A)x,x> - \frac{f'(M)+f'(m)}{2}| \end{cases}$$

Dahası, 3. Eşitsizlik üretmek için, biz Grüss tipinin sonucunda denklem elde edebiliriz.Eğery ve δ pozitif ise o zaman;

$$|< h(A)g(A)x,x> - < h(A)x,x>.< g(A)x,x>|$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}\frac{(\Gamma-\mathrm{y})(\Delta-\delta)}{\sqrt{\Gamma \mathrm{y}\Delta\delta}} < h(A)x,x>< g(A)x,x> \\ (\sqrt{\Gamma} - \sqrt{\mathrm{y}})(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})[< \mathrm{h(A)x,x} >< g(A)x,x>]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.38)$$

Şimdi, (1.38) yi kullanarak biz belirtebiliriz ki;

$$< Af'(A)x,x> - < Ax,x>.< f'(A)x,x>$$
$$\leq \begin{cases}\frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}} < Ax,x>< f'\ (A)x,x> \\ (\sqrt{M} - \sqrt{m})(\sqrt{f'(M)} - \sqrt{f'(m)})[< Ax,x>< f'\ (A)x,x> \end{cases} \quad (1.39)$$

3.2.2.3.2 Görüş: (1.39) eşitsizliğinden gözlemleyebiliriz ki ;

$$(1 \leq)\frac{< Af'(A)x,x >}{< Ax,x >.< f'(A)x,x >} \leq \frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}}+1$$

$$f'\left(\frac{< Af'(A)x,x >}{< f'(A)x,x >}\right) \leq f'\left(\left[\frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}}+1\right] < Ax,x >\right)$$

Burada$x \in H$ ile $\|x\| = 1.f'$ monoton azalmayan ve A pozitif tanımlı operatör için.Şimdi, yukarıdaki 1.eşitsizlikten belirtilebilir ki ;

$$(0 \leq)f\left(\frac{< Af'(A)x,x >}{< f'(A)x,x >}\right)-< f(A)x,x > \leq \frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}}$$

$$Xf'\left(\left[\frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}}+1\right] < Ax,x >\right)) < Ax,x >$$

ve 2.eşitsizlikten

$$(0 \leq)f\left(\frac{< Af'(A)x,x >}{< f'(A)x,x >}\right)-< f(A)x,x > \leq \sqrt{M}-\sqrt{m})(\sqrt{f'(M)}-\sqrt{f'(m)}$$

$$Xf'\left(\left[\frac{1}{4}\frac{(M-m)(f'(M)-f'(m))}{\sqrt{Mmf'(M)f'(m)}}+1\right] < Ax,x >\right)\left[\frac{<Ax,x>}{<f'(A)x,x>}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.40)$$

3.2.3. Konveks Fonksiyonlar İçinBazı Eşitsizlikler

3.2.3.1. İki Operatör İçin Bazı Eşitsizlikleri

3.2.3.1.1 Teorem: I bir aralık olsun ve $f\colon I \to \mathbb{R}$, I üzerinde dışbükey

ve türevlenebilen fonksiyon olsun(I'nın aralığı) $f$in türevif'süreklidir. Eğer A ve $B$$H$Hilbertuzayında özeşlenik iki operatör ve $Sp(A), Sp(B) \subset [m,M] \subset I$ için

$\langle f'(A)x,x\rangle \langle By,y\rangle - \langle f'(A)Ax,x\rangle$

$\leq\langle f(B)y,y\rangle - \langle f(A)x,x\rangle$

$\leq\langle f'$(B) By, $y\rangle$ - $\langle Ax,x\rangle \langle f'(B)y,y\rangle$(1.41)

Burada biri $x,y \in H$ ile $\|x\| = \|y\|$=1.

$\langle f'(A)x,x\rangle\langle Ay,y\rangle - \langle f'(A)Ax,x\rangle$

$\leq\langle f(A)y,y\rangle - \langle f(A)x,x\rangle$

$\leq \langle f'(A)Ay, y\rangle - \langle Ax, x\rangle\langle f'(A)y, y\rangle$(1.42)

$\langle f'(A)x, x\rangle\langle Bx, x\rangle - \langle f'(A)Ax, x\rangle$

$\leq \langle f(B)x\rangle - \langle f(A)x, x\rangle$

$\leq \langle f'(B)Bx, x\rangle - \langle Ax, x\rangle\langle f'(B)x, x\rangle$(1.43)

İspat:.f, Iüzerinde koveks ve diferansiyellenebildiğinden beri, sonra şunu elde ederiz

$f'(s).(t-s) \leq f(t) - f(s) \leq f'(t).(t-s)$(1.44)

Şimdi her$x \in H, \| x \| = 1$için

$< f'(t).(t.1_H - A)x, x > \leq < [f(t).1_H - f(A)]x, x > \leq$

$< f'(t).(t.1_H - A)x, x >$ (1.45)

$t\langle f'(A)x, x\rangle - \langle f'(A)Ax, x\rangle \leq f(t) - \langle f(A)x, x\rangle$

$\leq f'(t)t - f'(t)\langle Ax, x\rangle$(1.46)

Her bir $t \in [m, M]$ ve herhangi $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

$\langle[\langle f'(A)x, x\rangle B - \langle f'(A)Ax, x\rangle 1h]y, y\rangle \leq \langle[f(B) - \langle f(A)x, x\rangle 1h]y, y\rangle$

$\leq \langle[f'(B)B - \langle Ax, x\rangle f'(B)]y, y\rangle$

Olup ispat tamamlanır.

3.2.3.1.2 Uyarı: Eğer biz $x \in H$ ile $\|x\| = 1$ve $B =< Ax, x >.1_H$' yi seçersek, o zaman Mond-Pecaric eşitsizliğinin tersini elde ederiz. İkinci eşitsizlik dışbükey fonksiyonlar için Mond-Pecaric eşitsizliğini sağlayacaktır.

Aşağıdaki doğal sonuçlardan biridir:

3.2.3.1.3 Sonuç: I bir aralık olsun ve $f: I \to \mathbb{R}$,I dışbükey ve türevlenebilir fonksiyon olsun. Ayrıca, A'nın Hilbert boşluğunda H ile$Sp(A) \subseteq [m, M] \subset I$ kendine eş operatör olduğunu varsayalım. Eğer g artmayan ve [m, M] üzerinde süreklidir ve

$f'[g(A) - A] \geq 0$(1.47)

$(f \circ g)(A) \geq$f(A)

3.2.3.1.4 Teorem: I bir aralık olsun ve $f: I \to \mathbb{R}$,I dışbükey ve türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer A ve B Hİlbert boşluğunda H ile $Sp(A), Sp(B) \subseteq [m, M] \subset I$özeşlenik operatörleridir,

$f'(\langle Ax,x\rangle)(\langle By,y\rangle - \langle Ax,x\rangle)$

$\leq \langle f(B)y,y\rangle - f(\langle Ax,x\rangle)$

$\leq \langle f'(B)By,y\rangle - \langle Ax,x\rangle\langle f'(A)y,y\rangle$ (1.48)

$f'(\langle Ax,x\rangle)(\langle Ay,y\rangle - \langle Ax,x\rangle) \leq \langle f(A)y,y\rangle - f(\langle Ax,x\rangle)$

$\leq \langle f'(A)Ay,y\rangle - \langle Ax,x\rangle\langle f'(A)y,y\rangle$(1.49)

Her biri x, y ∈ H ile $\|x\| = \|y\| = 1$ ve

$f'(\langle Ax,x\rangle)(\langle Bx,x\rangle - \langle Ax,x\rangle) \leq \langle f(B)x,x\rangle - f(\langle Ax,x\rangle)$(1.50)

$\leq \langle f'(B)Bx,x\rangle - \langle Ax,x\rangle\langle f'(B)x,x\rangle$

İspat. f, I üzerinde konveks ve türevlenebildiğinden, her $t, s \in [m, M]$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$f'(s).(t-s) \leq f(t) - f(s) \leq f'(t).(t-s)$(1.51)

Eğer biz $s = \langle Ax,x\rangle \in [\mathrm{m,M}]$ seçersek, bir düzeltme ile $x \in H$ ile $\|x\|$= 1, sonra elde ederiz

$f'(\langle Ax,x\rangle).(t - \langle Ax,x\rangle) \leq f(t) - f(\langle Ax,x\rangle) \leq f'(t).(t - (\langle Ax,x\rangle)$(1.52)

Her $x, y \in H$, $\|x\| = \|y\| = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$< f'(< Ax,x >).(B - < Ax,x >.1_H)y,y > \leq < [f(B) - f(< Ax,x >).1_H]y,y >$

$\leq f'(B).(B - < Ax,x >.1_H)y,y >$(1.53)

3.2.3.1.5 Dikkat: Eğer (1.53)'deki $B = A$ veya $y = x$ seçersek gözlemleriz ve o zaman Mond-Pecaric eşitsizliğini yeniden elde ederiz..

3.2.3.1.6 Sonuç:f, A ve B'yi (3.2.3.1.4.) teoremi gibi varsayalım. Eğer $f, [m, M]$ aralığında artan and $B\,(H)$ operratöründe $B \geqq A$ veya f azalan ve $B \leq A$ise , o zaman biz Jensen tipi eşitsizliği elde ederiz.

$\langle f(B)x,x\rangle \geq f(\langle Ax,x\rangle)$(1.54)

Burada $x \in H$ ile $\|x\|$=1.

İspat:(1.54)'deki ilk eşitsizlik tarafından açıktır ve detaylar hariç bırakılır.

3.2.4. İkikez Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar İçin Jensen Operatörü

3.2.4.1 Teorem:A,H Hilbert uzayında pozitif tanımlı olsun ve kabul edelim ki $Sp(A) \subset [m, M]$ bazı skalerler için m, M ile $0 < m < M$. Eğer $f(m, M)$ üzerinde 2. Kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve $p \in (-\infty, 0) U (1, \infty)$ için biz sahibizdir $\gamma < \Gamma$ için;

$\gamma < \frac{\cdot}{p(p-1)} t^{2-p}.f^{\wedge\prime\prime}(t) \leq \Gamma$ her bir $t \in (m, M)$(1.55)

O zaman

$\gamma(<A^p x, x> - < Ax, x >^p) \leq <f(A)x,x> - f(<Ax,x>) \leq \Gamma(<A^p x,x> - <Ax,x>^p)$ (1.56)

Her biri için $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

Eğer ,

$\delta < \frac{\cdot}{p(p-1)} t^{2-p}.f''((t) \leq \Delta$her bir $t \in (m, M)$ve bazı $\delta < \Delta$, $p \in (0,1)$, o zaman

$\delta(< Ax, x >^p - <A^p x,x>) \leq <f(A)x,x> - f(<Ax,x>) \leq \Delta(< Ax, x >^p - <A^p x,x>)$

Her biri için $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

3.2.4.2 Dikkat: Biz görürüz ki eğer f, (m, M) üzerinde 2. Kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve $\varphi := inf_{t \in (m,M)} f''($ (t), $\Phi := sup_{t \in (m,M)} f''((t)$, o zaman biz eşitsizlik elde ederiz.

$$\frac{1}{2}\varphi[< A^2x, x > - < Ax, x >^2] \leq < f(A)x, x > - f(< Ax, x >)$$
$$\leq \frac{1}{2}\varphi[< A^2x, x > - < Ax, x >^2$$

3.2.4.3 Sonuç: A_j pozitif tanımlı operatör olsun, $Sp(A_j) \subset [m, M] \subset (0, \infty) j \in \{1,2, \ldots n\}$. Eğer$f$, (m, M) üzerinde 2kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve$p \in (-\infty, 0) U(1, \infty)$ ise o zaman;

$\gamma[\sum_{j=1}^{n}.<A_j^p, x_j, x_j>-(\sum_{j=1}^{n}.< A_j, x_j, x_j >)^p]$

$\leq\sum_{j=1}^{n}.<f(A_j)\, x_j, x_j>-f(\sum_{j=1}^{n}.<A_j, x_j, x_j>)$

$\Gamma[\sum_{j=1}^{n}.<A_j^p, x_j, x_j>-(\sum_{j=1}^{n}.<< A_j, x_j, x_j >)^p]$ her bir $x_j \in H$, j$\in \{1,2,\dots,n\}$

$$\sum_{j=1}^{n}\|x\|^2 = 1.$$

3.2.4.4 Teorem: A, H hilbert uzayında pozitif tanımlı olsun ve kabul edelim ki $Sp(A) \subset [m, M]$ bazı skalerler için m, M ile $0 < m < M$. Eğer $f(m, M)$ üzerinde 2 kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve У≤$t^2.f''(t) \leq \Gamma$ özellikleri varsa, herhangi bir $t \in (m, M)$ için;

У$(ln < Ax, x > -< lnAx, x >) \leq< f(A)x, x > -f(< Ax, x >)\delta<\Delta$,o zaman

$$\delta\,(< AlnAx, x > -< Ax, x > ln(< Ax, x >)) \leq < f(A)x, x > -f(< Ax, x >)$$

$$\leq \Delta(< AlnAx, x > -< Ax, x > ln(< Ax, x >))$$

Her bir $x \in H$ ile $\|x\| = 1$.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Eşitsizlik Teorisi ile Sınırlı Lineer Operatörler Teorisi birleştirilmiş. Literatürde iyi şekilde bilinen reel anlamdaki Jensen Eşitsizliğinin, sınırlı, lineer operatörlere taşınması ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.. Bunu yaparken, Dragomir' in 2012 yılında yayımladığı "Operator Inequality of the Jensen, Cebysev and Grüss Type" adlı eseri temel kaynak olarak kullanılmıştır. Bu kitaptaki tanım ve teoremler ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Eşitsizlik ve Operatör Teorisi alanında çalışmak isteyen genç bilim insanlarına Türkçe bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

Azpeitia A. G., 1994. ConvexFunctionsandHadamardInequality,Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bombardelli M.,Varosanec S., 2009. Properties Of h-ConvexFunctionsRelatedtotheHermite-Hadamard-FejerInequalities, ComputersandMatematicswith Applications, 58, 1869--1877.

Burai P.,Hazy A., 2001. On Approximately h-ConvexFunctions, Journalof Convex Analysis, 18, 2.

Beckenbach E. F. , 1948. ConvexFunctions,Bull. Amer. Math. Soc. 54, 439-460.

Dragomir S. S.,Pecaric J. , 1995. Persson L. E., SomeinequalityofHadamardType, Soochow J. Math., 21, 335-341.

Dragomir S. S., 2011.InequalitiesforFunctions of SelfadjointOperators on HilbertSpaces, http://ajmaa.org/RGMIA/monographs/InFuncOp.pdf. (Erişim Tarihi: 01.04.2016)

Dragomir S. S., 2011. TheHermite-HadamardTypeInequalitiesforOperatorConvexFunctions,Appl. Math. Comput., 218, 3, 766-772.

Dragomir S. S., 2010. CebysevTypeİnequalitiesforFunctions of SelfadjointOperators in HilbertSpaces, LinearandMultilinearAlgebra, 58, no. 7-8, 805-814.

Erdaş Y.,Unluyol E., Salaş S., 2015. TheHermite-HadamardTypeInequalitiesforOperator m-ConvexFunctions in Hilbert Space, Journal of New Theory, 5, 80-91.

Furuta T., Hot J. M., Pecaric J., Seo Y. , Mond-Pecaric20015. Method in OperatorInequalitiesforBoundedSelfadjointOperators on aHilbertSpace,Element, Zagreb.

Godunova E. K.,Levin V. I., 1985. Neravenstradljafuncciisirokogo Klassa SoderzascegoVypuklye, MonotonnyeInekotoryeDrugieVidyFunkaii,Vycislitel Mat. iMt. Fiz.,Mezvuzov Sb. Nauc. Trudov. MGPI, Moscow, 138-142.

Moslehian M. S.,Najafi H., 2011. AroundOperatorMonotoneFunctions,Integr. Equ. Oper. Theory.,doi: 10.1007/s00020-011-1921-0, 71, 575--582.

Mitrinovic D.S. , Lackovic I. B. 1985.HermiteandCconvexity, AequationesMath. 28, 229-232.

Mitrinovic D. S.,Pecaric J. E., 1990. Note on a class of functions of GodunovaandLevin,C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 12, 33-36.

Mitrinovic D. S.,Pecaric J. E., Fink A. M., 1993. Classicaland New Inequalitiesin Analysis,KluwerAcad. Publ. Pearce C. E. M.,Rubinov A. M., 1999. P-Funcutions, Quasi-ConvexFunctionsandHadamard-TypeInequalities, J. Math. Anal. Appl., 240,92-104.

Pachpatte B. G.,2003. On SomeInequalitiesforConvexFunctions, RGMIARes. Rep. Coll., 6(E).

Pecaric J. E.,Proschan F., Tong Y. L., 1992. FunctionsConvex, PartialOrderings, and Statistical Applications,AcademicPress. Inc., San Diego.

Sarıkaya M. Z., Set E., Özdemir M. E., 2010. On Some New Inequalitiesof HadamardTypeInvolving h-ConvexFunctions, Acta Math. Univ.Comenianae, Vol. LXXIX, 2, pp. 265-272.

Sarıkaya M. Z., Sağlam A.,Yıldırım H., 2008. On Some New InequalitiesHadamardTypeInequalitiesfor h-ConvexFunctions, Journal of MatematicalInequalities, Vol. 2, 3, pp. 335-341.

Salaş S.,Unluyol E., Erdaş Y., 2015. TheHermite-HadamardTypeInequalitiesforOperator p-ConvexFunctions in Hilbert Space, Journal of New Theory, 4, 74-79.

Salaş S.,Unluyol E., ErdaşY. , 2015. Yeni bir operatör konveks sinifiES_{h}O, Mini Matematik İstatistik Sempozyumu, 17 Aralık, OrduÜniversitesi, Ordu, Türkiye, 9.

Tseng K. L.,Yang G. S., Dragomir S. S., 2003. On Quasi-ConvexFunctionsandHadamard-TypeInequality,RGMIARes. Rep.Coll.,Article 1., 6 (3) .

Tunc M.,2011. On Some New InequalitiesforConvexFunctions, Turk. J. Math.,35, 1-7.

Unluyol E. , Salaş S.,Erdaş Y., 2015. TheHermite-HadamardTypeInequalitiesforOperator h-ConvexFunctions in Hilbert Space, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling,ICAAMM, June ,YildizTecnicalUniversityIstanbul, 8-12.

Unluyol E., Salaş S., Erdaş Y., 2015. Some New Hermite-HadamardTypeInequalitiesand Applications forTwoOperator ES_{h}O-ConvexFunctions in Hilbert Space, International Conference on Advancementin Mathematical Sciences, November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 190.

Unluyol E.,ErdaşY., Salaş S. 2015. SomenewHermite-HadamardTypeInequalitiesforTwoOperator (α,m)-ConvexFunctions in HilbertSpaces, International Conference on Advancement in MathematicalSciences,05-07 November, Porto Bello Hotel Resort, Spa, Antalya, 104.

Unluyol E., S. Salaş, Y. Erdaş, 2015.Some New Hermite-HadamardTypeInequalitiesand Applications forGodunova-LevinOperatorConvexFunctions in Hilbert Space, International Conference on Advancement in MathematicalSciences, 05-07 November, Porto Bello Hotel Resort,Spa, Antalya, 224.

Varosanec S., 2007. On h-Convexity, J. Math. Anal. Appl., 326, 303-311.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : TURGAY EKİCİ

Doğum Yeri : ÇARŞAMBA/SAMSUN

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

E-mail : 55turgayfb55@gmail.com

İletişim Bilgileri: Sultangaziçok programlı Anadolu lisesi; SULTANGAZİ/İSTANBUL

Öğrenim Durumu:

DERECE	**BÖLÜM/ PROGRAM**	**OKUL/ ÜNİVERSİTE**	**YIL**
Ortaöğretim	Sultangazi ATATÜRK LİSESİ		2009
Lisans ve Lisansla birleştirilmiş Tezsiz Yüksek Lisans	ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ/MATEMATİK	ORDU Üniversitesi	2013