

**T.C.  
ORDU ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BERTRAND EĞRİ ÇİFTİNE AİT FRENET ÇATISINA GÖRE  
SMARANDACHE EĞRİLERİ**

**ÜNZİLE ÇELİK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ORDU 2016**

## TEZ ONAY

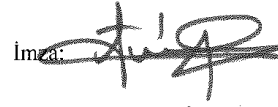
Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Ünzile ÇELİK tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında yürütülen “Bertrand Eğri Çiftine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri” adlı bu tez, jürimiz tarafından 24 /07 / 2015 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

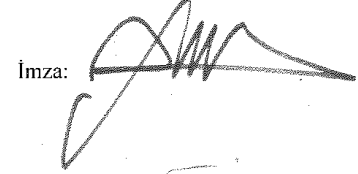
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT  
Matematik, Ordu Üniversitesi

Başkan : Doç. Dr. Selahattin MADEN  
Matematik, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT  
Matematik, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa BİLİCİ  
Matematik, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

İmza: 

İmza: 

İmza: 

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 15/01/2016 tarih ve 24/25 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

13/07/2015

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Kürşat BORKMAZ

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.



Ünzile ÇELİK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### BERTRAND EĞRİ ÇİFTİNE AİT FRENET ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

Ünzile ÇELİK

Ordu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı, 2015  
Yüksek Lisans Tezi, 79s.  
Danışman: Yrd. Doç. Dr.Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş Bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki Çalışmalar Bölümünde Smarandache eğrileri ile ilgili çalışmalara yer verildi. Genel Bilgiler Bölümünde Öklid uzayı ile ilgili bilgilerden söz edildi. Materyal ve Yöntem Bölümünde Öklid uzayında Bertrand eğri çiftleri ve Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlar anlatıldı.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bertrand eğrisine ait partner eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları hesaplandı ve bulunan bu değerler, Bertrand eğrisine bağlı olarak ifade edildi.Son olarak elde edilen Smarandache eğrilerinin Bertrand eğri çiftine dahil olup olmadığı incelendi.

**Anahtar Sözcükler:** Öklid Uzayı, Bertrand Eğri Çifti, Smarandache Eğrisi

## ABSTRACT

### SMARANDACHE CURVES OF BERTRAND CURVE PAIR ACCORDING TO FRENET FRAME

Ünzile ÇELİK

University of Ordu  
Institute for Graduate Studies in Science and Technology  
Department of Mathematic, 2015  
MSc. Thesis, 79p.  
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

This study consist six fundamental chapters. In the introduction chapter, the aim of study and the reasons why this subject is interested are given. Then each chapter is covered with literature review of Smarandache curve. In general formation chapter is included with some information about Euclidean space. The basic concepts of Bertrand curve pair and Smarandache curves on Euclidean space are given in the material and method chapter.

The Findings chapter is the original part of the study. In this chapter, when the Frenet vectors and the unit Darboux vector of the partner curve of Bertrand curve are taken as the position vectors, the curvature and the torsion of Smarandache curves are calculated. These values are expressed depending upon the Bertrand curve and it is examined whether the resulting Smarandache curves have relations with Bertrand curves.

**Key Words:** Euclidean Space, Bertrand Curve, Smarandache Curves

## TEŞEKKÜR

Tüm alıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Do. Dr. Süleyman ŞENYURT' a en samimi duygularım ile teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca benim bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme en içten Őükranlarımı sunuyorum.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ .....	I
ÖZET .....	II
ABSTRACT .....	III
TEŞEKKÜR .....	IV
İÇİNDEKİLER .....	V
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR .....	VII
1. GİRİŞ .....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....	2
3. GENEL BİLGİLER .....	4
4. MATERYAL ve YÖNTEM .....	15
4.1. Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çifti .....	15
4.2. Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri .....	23
5. BULGULAR .....	43
5.1. $T^*N^*$ Smarandache Eğrisi .....	43
5.2. $N^*B^*$ Smarandache Eğrisi .....	48
5.3. $T^*B^*$ Smarandache Eğrisi .....	53
5.4. $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi .....	59
5.5. $N^*C^*$ Smarandache Eğrisi .....	65
6. SONUÇ ve ÖNERİLER .....	75
6.1. Sonuçlar .....	75
6.2. Öneriler .....	76
7. KAYNAKLAR .....	77
ÖZGEÇMİŞ .....	79

## ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Darboux Vektörü.....	9
Şekil 4.1. Bertrand Eğri Çifti.....	15
Şekil 4.2. Bertrand Eğri Çiftine Ait Frenet Çatılarının Gösterimi.....	18
Şekil 4.3. $\beta(s)$ Eğrisi.....	41
Şekil 4.4. $TN$ -Smarandache Eğrisi.....	42
Şekil 4.5. $NB$ -Smarandache Eğrisi.....	42
Şekil 4.6. $TNB$ -Smarandache Eğrisi.....	42
Şekil 4.7. $NC$ -Smarandache Eğrisi.....	42
Şekil 5.1. Bertrand Eğri Çifti.....	74
Şekil 5.2. $T^*N^*$ -Smarandache Eğrisi.....	74
Şekil 5.3. $T^*B^*$ -Smarandache Eğrisi.....	74
Şekil 5.4. $N^*B^*$ -Smarandache Eğrisi.....	74
Şekil 5.5. $T^*N^*B^*$ -Smarandache Eğrisi.....	74
Şekil 5.6. $N^*C^*$ -Smarandache Eğrisi.....	74



## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

- $E^3$  : 3-boyutlu Öklid uzayı
- $S^2$  : Öklid Uzayında Birim küre
- $\tilde{S}^2$  : Dual Uzayında Birim Küre
- $\| \|$  : Norm
- $\langle \rangle$  : İç çarpım
- $\wedge$  : Vektörel çarpım
- $T$  : Teğet Vektör
- $N$  : Aslinormal Vektör
- $B$  : Binormal Vektör
- $C$  : Birim Darboux vektörü
- $W$  : Darboux vektörü
- $\kappa$  : Eğrinin eğriliği
- $\tau$  : Eğrinin burulması (torsiyon)
- $\beta_1$  :  $T^*N^*$  -Smarandache Eğrisi
- $\beta_2$  :  $N^*B^*$  -Smarandache Eğrisi
- $\beta_3$  :  $T^*B^*$  -Smarandache Eğrisi
- $\beta_4$  :  $T^*N^*B^*$  -Smarandache Eğrisi
- $\beta_5$  :  $N^*C^*$  -Smarandache Eğrisi

## 1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde birçok çalışmalar yapılmaktadır. Özellikle eğrilerin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak, birçok yeni teoriler elde edilmektedir. Bunlardan biriside Bertrand eğrisidir.

Bertrand eğrisi ilk olarak 1850 yılında Bertrand Russel tarafından tanımlanmıştır.  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin aslinormal vektörleri birbiriyle lineer bağımlı ise  $\alpha$  eğrisine Bertrand eğrisi,  $\alpha^*$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin Bertrand partner eğrisi,  $(\alpha, \alpha^*)$  ikilisine de Bertrand eğri çifti denilmektedir.

2008 yılında Turgut ve Yılmaz tarafından yapılan çalışmada Smarandache eğrileri tanımlanmıştır. Smarandache eğrileri; eğrinin Frenet vektörleri konum vektörü olarak ele alındığında elde edilen regüler eğrilerdir.

Bu çalışmada  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olmak üzere  $\alpha^*$  Bertrand partner eğrisinin Frenet vektörleri  $T^*$ ,  $N^*$  ve  $B^*$ , birim Darboux vektörü  $C^*$  ile gösterilirse bu vektörler tarafından oluşturulan  $T^*N^*$ ,  $N^*B^*$ ,  $T^*B^*$ ,  $T^*N^*B^*$  ve  $N^*C^*$  Smarandache eğrilerinin tanımları verilerek eğrilikleri hesaplandı. Daha sonra bu eğrilikler  $\alpha$  Bertrand eğrisinin eğrilikleri cinsinden ifade edildi.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Turgut ve Yılmaz 2008 yılında “Smarandache Curves in Minkowski space-time” isimli çalışmada Minkowski uzayında Smarandache eğrisinin tanımını ifade ederek ,  $E_1^4$  de  $TB_2$  Smarandache eğrisine ait bazı özel durumlarını incelemiş ve bu eğrinin Frenet elemanlarını hesaplanmıştır.

Ali, 2010 yılında, “Special Smarandache Curves in Euclidian Space” isimli çalışmada bazı özel Smarandache eğrilerini tanımlayarak bu eğrilere ait Frenet-Serret invaryantlarının özel durumlarını çalışmıştır.

Çetin ve ark., (2010), “SmarandacheCurvesAccordingtoBishopFrame in Euclidian 3-Space” isimli çalışmada Öklid uzayında Bishop çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlar ve bu eğrilerin bazı diferansiyel geometrik özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca Smarandache eğrisine ait oskülatör kürenin merkezini ve kürenin eğriliği ile ilgili sonuçlar bulmuşlardır.

Şenyurt ve Sivas, (2013), “Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama” isimli çalışmada  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri  $T, N, B$  ve birim Darboux vektörü  $C$  olmak üzere  $NC$  -Smarandache eğrisini tanımlamışlar ve bununla birlikte  $NB$  ve  $TNB$  - Smarandache eğrilerinin eğriliklerini hesaplamışlardır.

Bektaş ve Yüce, (2013), “Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidian 3-Space” isimli çalışmada Öklid uzayında Darboux çatısına ait Smarandache eğrilerini incelemişler ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonları ve sonuçları vermişlerdir.

Bayrak ve ark., (2013), “Special SmarandacheCurves in  $E_1^3$ ” isimli çalışmada Minkowski uzayında regüler bir eğriye ait Frenet vektörleri tarafından oluşturulan Smarandache eğrilerini inceleyerek bazı sonuçlar bulmuşlardır.

Taşköprü ve Tosun, (2014), “Smarandache Curves According to Sabban Frame on  $S^2$ ” isimli çalışmada  $S^2$  birim küresi üzerinde Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemişler ve bu eğrilerin karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Çalışkan ve Şenyurt, (2015), “SmarandacheCurves in Terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves” isimli çalışmada, küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini araştırmışlar ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarıyla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Çalışkan ve Şenyurt, (2015), “Smarandache Curves in Terms of Sabban Frame of Fixed Pole Curves” isimli çalışmada, Birim Darboux vektörünün küre yüzeyinde çizdiği eğrinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini araştırmışlar ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarıyla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

### 3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayına ait temel kavramlara yer verilmiştir.

**Tanım 3.1.**  $A \neq \emptyset$  bir cümle ve  $V$  de  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$f : A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş

**Afin uzay** denir:

$$\mathbf{A1:} \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$\mathbf{A2:} \forall P \in A$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır.

**Tanım 3.2.**  $V, A$  ile birleşen bir afin uzay olsun.  $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$  noktaları için

$\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$  cümlesi  $V$  nin bir bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$ -lisine  $A$  afin

uzayının bir afin çatısı denir. Burada  $P_0$  noktasına çatının başlangıç noktası ve

$P_i, 1 \leq i \leq n$ , noktalarına da çatının birim noktaları denir.  $\text{boy}V = n$  ise  $A$  ya  $n$ -boyutlu

bir Afin uzay denir.

**Tanım 3.3.**  $V, A$  ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu

denir:  $\forall x, y, z \in V$  ve  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için

**i) Bilineerlik Aksiyomu;**

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

**ii) Simetri Aksiyomu;**

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

**iii) Pozitif Tanımlılık (Kararlılık) Aksiyomu;**

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}.$$

**Tanım 3.4.** Reel standart afin uzayı  $\mathbb{R}^n$  olmak üzere,  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$  için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma  $\mathbb{R}^n$  de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $\mathbb{R}^n$  vektör uzayı ile birleşen afin uzayına  $n$ -boyutlu standart Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir.

**Örnek 3.1.**  $X, Y \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

**Tanım 3.5.**  $X \in E^n$  noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun.  $x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ , fonksiyonuna  $E^n$  nin  $i$ -yinci koordinat fonksiyonu denir.

**Tanım 3.6.**  $d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}, d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$

şeklinde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(X, Y) \in \mathbb{R}$  sayısına da  $X$  ile  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık denir.

**Tanım 3.7.**  $\mathbb{R}^n$  iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı  $E^n$  olmak üzere,  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\} \in E^n$  nokta  $(n+1)$ -lisi için,  $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$  cümlesi  $E^n$  nin bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  cümlesine  $E^n$  de bir Öklid çatı veya dik çatı denir.

**Tanım 3.8.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  diferensiyellenebilir fonksiyona  $E^n$  de bir eğri denir. Burada  $I$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı ve  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  eğrisinin parametresidir.

**Tanım 3.9.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}, \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı  $\|\alpha'\|$  fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu,  $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$  sayısına  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki skaler hızı,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left( \frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right) \Big|_t$$

vektörüne de  $\alpha$  eğrisinin hız vektörü denir.

**Tanım 3.10.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  eğrisi için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise eğriye birim hızlı eğri,  $s \in I$  parametresine de eğrinin yay parametresi denir.

**Tanım 3.11.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  bir eğri ve  $a, b \in I$  için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \tag{3.1}$$

reel sayısına  $\alpha(a)$  ile  $\alpha(b)$  noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

**Tanım 3.12.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  bir eğri ve  $\phi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(r)}\}$  cümlesi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\phi\}, \quad k > r$$

olmak üzere  $\phi$  cümlesinden Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  ortonormal sistemine  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Serret Frenet r-ayaklısı,  $\forall V_i, 1 \leq i \leq r$ , vektörüne de Serret Frenet vektörü denir.

**Teorem 3.1.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

1)  $s \in I$  yay parametresi ise

$$\begin{cases} V_1(s) = \alpha'(s) \\ V_2(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s) \\ V_3(s) = T(s) \times N(s) \end{cases} \quad (3.2)$$

2)  $s \in I$  yay parametresi değilse

$$\begin{cases} V_1(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} \alpha'(s) \\ V_2(s) = B(s) \times N(s) \\ V_3(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} (\alpha'(s) \times \alpha''(s)) \end{cases} \quad (3.3)$$

Şeklinde verilir (Hacısalihoglu,1983).

**Tanım 3.13.**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet- $r$ -ayaklısı

$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  olsun.

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle, 1 \leq i < r,$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  **$i$ -yinci eğrilik fonksiyonu** ve  $k_i(s) \in \mathbb{R}$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki  **$i$ -yinci eğriliği** denir.

**Teorem 3.2.**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ,

$i$ -yinci eğriliği  $k_i(s)$  olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında



$$\begin{cases} V_1'(s) = k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), & 1 \leq i < r \\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_r(s) \end{cases}$$

bağıntısı vardır(Hacısalihoglu,1983).

$n = 3$  özel halinde  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet3-ayaklısı  $\{T, N, B\}$  ile gösterilir. Burada  $T$  ye teğet vektör,  $N$  ye aslinormal vektör ve  $B$  ye de binormal vektör denir.  $\alpha$  eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri de sırasıyla  $\kappa$  ve  $\tau$  olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s), \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (3.4)$$

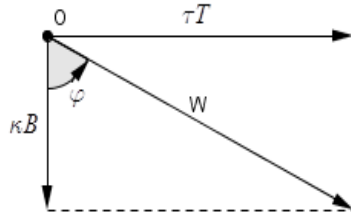
şeklinde olur (Hacısalihoglu,1983).

Diğer yandan  $\alpha$  eğrisi üzerinde  $\alpha(s)$  noktası eğriyi çizerken bu noktadaki  $\{T, N, B\}$  Frenet3-ayaklısı her  $s$  anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **Darboux (ani dönme) eksen**i denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = N \wedge N',$$

$$W = \tau T + \kappa B \quad (3.5)$$

dırve bu vektöre Darboux vektörü adı verilir, ( Şekil 3.1 ).



Şekil 3.1. Darboux vektörü

$W$  Darboux vektörü ile  $B$  vektörleri arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse şekilden,

$$\sin \varphi = \frac{\tau}{\|W\|} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \quad (3.6)$$

dır.  $W$  Darboux vektörü yönündeki birim vektör  $C$  ile gösterilirse

$$C = \frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B$$

olur. Burada  $\kappa$  ile  $\tau$  nun yerine (3.6) deki karşılıkları yazılırsa

$$C = \sin \varphi T + \cos \varphi B \quad (3.7)$$

bulunur (Fenchel,1951).

**Tanım 3.14.**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla  $k_1(s)$  ve  $k_2(s)$  olsun.

$$H : I \rightarrow \mathbb{R}, H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı  $H_1$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin **1-inci harmonik eğriliği** denir.

**Tanım 3.15.**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki hız vektörü sabit bir  $U$  vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye **eğilim çizgisi (helis)** ve  $S_p\{U\}$  ya da eğilim çizgisinin **eğilim ekseni** denir.

**Teorem 3.3.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi bir eğilim çizgisidir  $\Leftrightarrow H_1(s) = sbt$ ,  
(Hacısalihoglu,1983).

**İspat:**  $\Rightarrow$  Kabul edelim ki  $\alpha$  bir eğilim çizgisi olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  olmak üzere, eğilim çizgisi tanımına göre

$$\langle T(s), U \rangle = \cos \theta$$

olur. Bu ifadenin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \langle T'(s), U \rangle = 0 &\Rightarrow \kappa \langle N(s), U \rangle = 0 \\ &\Rightarrow N \perp U \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan  $U \in \mathcal{S}_p \{T(s), B(s)\}$  olduğundan

$$U = aT(s) + bB(s)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade sırasıyla  $T$  ve  $B$  ile iç çarpılırsa

$$\langle U, T(s) \rangle = a = \cos \theta, \quad (3.8)$$

$$\langle U, B(s) \rangle = b = \sin \theta$$

olur ve buradan

$$U = \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\langle N(s), U \rangle = 0$$

ifadesinin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle N'(s), U \rangle + \langle N(s), U' \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \kappa(s)\langle T(s), U \rangle - \tau(s)\langle B(s), U \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \tan\theta \\
&\Rightarrow H_1(s) = \tan\theta.
\end{aligned}$$

elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Kabul edelim ki  $\forall s \in I$  için  $H_1(s) = \tan\theta$  olsun. İddia ediliyor ki  $\alpha$  bir eğilim çizgisidir.

$H_1(s) = \tan\theta$  ise  $H_1(s) = \tan\theta = \tan\theta$  alınabilir. Buradan

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0$$

olur.

$$U(s) = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

vektörünü tanımlayalım. Açının sabit olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa

$$U' = \cos\theta T' + \sin\theta B',$$

$$U' = \left( \underbrace{\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta}_{=0} \right) N(s),$$

$$U' = 0 \Rightarrow U = \tan\theta.$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
\langle \alpha'(s), U \rangle &= \langle T(s), U \rangle \\
&= \langle T(s), \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s) \rangle \\
&= \cos \theta \\
&= \text{sbt}
\end{aligned}$$

olur ki bu da  $\alpha$  bir eğilim çizgisi olması demektir.

**Teorem 3.4.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart  $\tau = 0$  olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

**İspat:** " $\Rightarrow$ " Kabul edelim ki  $\alpha$  birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda  $\forall s \in I$  için  $\alpha(s)$  noktalarının tümü bir  $E$  düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali  $q$ , düzlem üzerinde herhangi bir nokta  $p$  olsun. Bu durumda

$$\langle \alpha(s) - p, q \rangle = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınır

$$\begin{aligned}
\langle \alpha'(s), q \rangle + \langle \alpha(s) - p, q' \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \alpha'(s), q \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle T(s), q \rangle = 0
\end{aligned}$$

olur ve tekrar türev alınır

$$\begin{aligned}
\langle \alpha''(s), q \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \kappa(s)N(s), q \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \langle N(s), q \rangle = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $q$  vektörünün  $T$  ve  $N$  vektörlerine dik olduğu görülür. Bu durumda  $q$  vektörü  $B$  ye paralel olur. Dolayısıyla

$$B(s) = \pm \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadenin türevi alınır

$$B' = 0$$

bulunur ve

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

eşitliğinden

$$\tau(s) = 0$$

elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Kabul edelim ki  $\tau(s) = 0$  olsun.  $B'(s) = -\tau(s)N(s)$  idi. Buradan

$$B'(s) = 0,$$

$$B(s) = c = sbt.$$

olur.  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle$  fonksiyonunu tanımlayalım.  $s = 0$  ise

$F(0) = 0$  dır.  $F$  nin  $s$  ye göre türevi alınır

$$F'(s) = \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha'(s) - \alpha'(0), B'(s) \rangle$$

$$= \langle T(s), B(s) \rangle + \langle T(s) - \kappa(s), N(s) \rangle$$

$$= 0,$$

$$F'(s) = sbt.$$

dır. Buna göre

$$\langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle = 0$$

eşitliği  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(0)$  noktasından geçen ve  $B$  vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir.

**Teorem 3.5.**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart  $\kappa = 0$  olmasıdır (Hacısalihoglu, 1983).

**İspat:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

dir. Bu durumda

$$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(s) = b,$$

$$\Leftrightarrow \alpha(s) = bs + c, \quad b, c \in IR.$$

#### 4. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde Öklid uzayında Bertrand eğri çifti ve Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

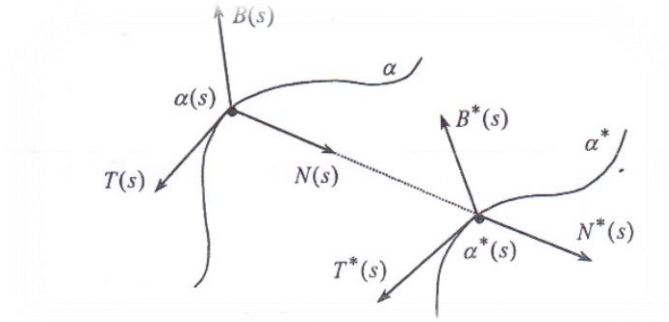
##### 4.1. Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çifti

**Tanım 4.1.1.**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  ve  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  diferensiyellenebilir iki eğri, bu eğrilerin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  ve  $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$  olsun.

$\forall s \in I$  için

$$\{N(s), N^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise  $(\alpha, \alpha^*)$  ikilisine bir Bertrand eğri çifti denir (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 4.1. Bertrand Eğri Çifti

**Teorem 4.1.1.**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olsun.  $\lambda$  sabit bir sayı olmak üzere

$\alpha^*$  eğrisi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \quad (4.1)$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu, 2006).

**İspat:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı bir eğri olsun. Bertrand eğri çifti tanımına göre

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + u(s)N(s) \quad (4.2)$$

biçiminde verilebilir.



$$(\alpha^*)' = \alpha' + u'N + uN' = \alpha' + u'N + u(-\kappa T + \tau B)$$

ve buradan

$$(\alpha^*)' = (1-u\lambda)T + u'N + u\tau B \quad (4.3)$$

bulunur.  $(\alpha^*)'(s)$  vektörü  $T^*(s)$  vektörüne paralel olduğundan

$$(\alpha^*)' \perp N^*(s)$$

dir.  $N^*(s)$  vektörü  $N(s)$  vektörüne paralel olduğundan

$$(\alpha^*)' \perp N(s)$$

olur. Öyleyse

$$\langle (\alpha^*)', N \rangle = 0$$

dır. Burada  $(\alpha^*)'$  in yerine yukarıda bulunan eşiti yazılırsa

$$u' = 0,$$

$$u = sbt$$

bulunur.  $u = \lambda$  alınır (4.1.2) ifadesinden

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.2.**  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrileri  $(I, \alpha)$  ve  $(I, \alpha^*)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktası ile  $\alpha^*$  eğrisinin  $\alpha^*(s)$  noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Hacısalihioğlu, 1983; Sabuncuoğlu, 2006).

**İspat :**  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s).N(s)$  eğrisinin yay parametresi  $s^*$  ile gösterilsin.

$$\frac{d\alpha^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda'(s) \cdot N(s) + \lambda(s) \cdot N'(s)$$

$$\begin{aligned} T^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds} &= T(s) + \lambda'(s) \cdot N(s) + \lambda(s) [-\kappa(s) \cdot T(s) + \tau(s) \cdot B(s)] \\ &= (1 - \lambda\kappa) \cdot T(s) + \lambda'(s) \cdot N(s) + \lambda \cdot \tau \cdot B(s) \end{aligned}$$

$$\langle T^*(s) \cdot \frac{ds^*}{ds}, N(s) \rangle = \lambda'(s)$$

$$\lambda'(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = \text{sabit.}$$

**Teorem 4.1.3.**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki birim teğet vektörleri arasındaki açı sabittir (Hacısalıhoğlu, 1983).

**İspat :**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  ve  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  diferensiyellenebilir iki eğri, bu eğrilerin Frenet 3-ayaklısı sırasıyla  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  ve  $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$  olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle T(s), T^*(s) \rangle &= \left\langle \frac{dT}{ds}, T^* \right\rangle + \left\langle T, \frac{dT^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} \right\rangle \\ &= \langle \kappa N, T^* \rangle + \frac{ds^*}{ds} \langle T, \kappa^* N^* \rangle \\ &= \kappa \langle N, T^* \rangle + \frac{ds^*}{ds} \kappa^* \langle T, N^* \rangle \end{aligned}$$

yazılabilir.  $\{N(s), N^*(s)\}$  sistemi lineer bağımlı olduğundan

$$\langle N, T^* \rangle = 0 \text{ ve } \langle T, N^* \rangle = 0$$

dır. Bu neticeler yukarıda kullanılırsa

$$\frac{d}{ds} \langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$$

bulunur. O halde

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = \text{sabit}$$

olur. Kabul edelim ki  $T(s)$  ile  $T^*(s)$  arasındaki açı  $\theta$  olsun. O zaman

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = \cos \theta = sbt$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

**Teorem 4.1.4.**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çiftlerinin birim teğet vektörleri arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere Frenet vektörleri arasında

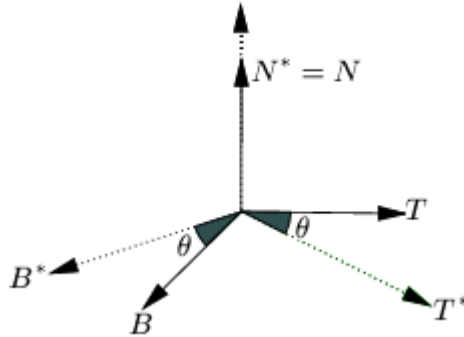
$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu,2006).

**İspat:**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olduğundan teğetler arasındaki açı ile binormaller arasındaki açı aynı olur (Şekil 4.2.). Bu durumda çatılar arasında

$$\begin{cases} T^* = \cos \theta T - \sin \theta B \\ N^* = N \\ B^* = \sin \theta T + \cos \theta B \end{cases} \quad (4.4)$$

bağıntıları yazılabilir. Bu da ispatı tamamlanır.



**Şekil 4.2.** Bertrand eğri çiftinin Frenet çatılarının gösterimi

**Teorem 4.1.5.**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olsun.  $\alpha$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$  ise bunlar arasında

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1, \quad \mu = -\lambda \cot \theta \quad (4.5)$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoglu,1983).

**İspat:**  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s)$  noktalarında Frenet 3-ayaklıları sırasıyla  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  ve  $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$  olsun. Buna göre  $T(s)$  ile  $T^*(s)$  arasındaki açı  $\theta$  olmak üzere

$$T^* = \cos \theta T + \sin \theta B$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$\alpha'^* = \frac{ds^*}{ds} T^* = (1 - \lambda\kappa)T + \lambda\tau B$$

dir. Buradan

$$\begin{cases} \cos \theta = (1 - \lambda\kappa) \frac{ds}{ds^*} \\ \sin \theta = \lambda\tau \frac{ds}{ds^*} \end{cases}$$

bulunur. Bu ifade taraf tarafa oranlanırsa

$$\lambda\kappa + \lambda\tau \cot \theta = 1$$

veya  $\mu = \lambda \cot \theta$  alınırsa

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1,$$

bulunur.

**Teorem 4.1.6.**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olsun.  $\alpha$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$ ,

$\alpha^*$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa^* = \frac{\lambda\kappa - \sin^2 \theta}{\lambda(1 - \lambda\kappa)}, \\ \tau^* = \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2 \tau} \end{cases} \quad (4.6)$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu,2006).

**İspat:**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olsun.

$$T^* = \frac{(\alpha^*)'}{\|(\alpha^*)'\|},$$

olduğundan  $(\alpha^*)' = v^* T^*$  dir. (4.4) eşitliğinden yararlanarak

$$(\alpha^*)' = v^* \cos \theta T - v^* \sin \theta B$$

bulunur. (4.3) eşitliğine göre

$$(\alpha^*)' = (1 - u\lambda)T + u'N + u\tau B$$

olduğundan

$$\begin{cases} v^*(s) \cos \theta = 1 - \lambda\kappa(s) \\ v^*(s) \sin \theta = -\lambda\tau(s) \end{cases} \quad (4.7)$$

olur.  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu  $f^*$  olmak üzere

$$(f^*)^{-1} = h^*$$

olsun.  $f^*(s) = t$  ise  $h^*(t) = s$  olur.  $f^*(I) = J$  olmak üzere  $\alpha^* \circ h^* : J \rightarrow E^3$  eğrisi birim

hızlı bir eğri olur.  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda N(s)$  eşitliğinin her iki yanının  $h^*$  fonksiyonu ile bileşkesi alınarak

$$\alpha^* \circ h^* = \alpha \circ h^* + \lambda(N \circ h^*)$$

$$\alpha oh^* = \alpha^* oh^* - \lambda(Noh^*)$$

elde edilir.  $N^* = N$  olduğundan bu eşitlik

$$\alpha oh^* = \alpha^* oh^* - \lambda(N^* oh^*)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda  $\alpha oh^*$  eğrisi ile  $\alpha^* oh^*$  eğrisi Bertrand eğri çifti oluşturur.  $(\alpha oh^*) \circ (h^*)^{-1} = \alpha$  ve  $\alpha$  birim hızlı bir eğri olduğundan  $\alpha oh^*$  eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu  $h^*$  dir.  $f^*(s) = t$  olsun.

$$(f^*)'(s) = \left\| (f^*)'(s) \right\| = v^*(s),$$

$$(h^*)'(t) = \left\| (\alpha oh^*)'(t) \right\| = v(t),$$

$$(h^*)'(t) = \frac{1}{(f^*)'(s)} = \frac{1}{v^*(s)}$$

olduğundan

$$v(t) = \frac{1}{v^*(s)}$$

olur.

Şimdi  $\alpha oh^*$  eğrisi ile  $\alpha^* oh^*$  eğrisinin Bertrand eğri çifti oluşturduğunu göz önüne alarak (4.7) eşitliklerinde  $\lambda$  yerine  $-\lambda$ ,  $\theta$  yerine  $-\theta$  yazılırsa

$$v(t) \cos \theta = 1 + \lambda \kappa^{*'}(t),$$

$$v(t) \sin \theta = -\lambda \tau^{*'}(t)$$

elde edilir. Burada  $\kappa^{*'}(t)$  ve  $\tau^{*'}(t)$  ile  $\alpha^* oh^*$  birim hızlı eğrisinin eğrilik ve burulması olmak üzere  $\kappa^{*'}(t) = \kappa^*(s)$  ve  $\tau^{*'}(t) = \tau^*(s)$  olduğundan

$$\begin{cases} v(t) \cos \theta = 1 + \lambda \kappa^*(s) \\ v(t) \sin \theta = -\lambda \tau^*(s) \end{cases} \quad (4.8)$$

olur. (4.1.7) ve (4.1.8) ifadelerindeki birinci eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\cos^2 \theta = (1 - \lambda \kappa)(1 + \lambda \kappa^*),$$

$$\kappa^* = \frac{\lambda \kappa - \sin^2 \theta}{\lambda(1 - \lambda \kappa)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.7) ve (4.8) ifadelerindeki ikinci eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = \lambda^2 \tau \tau^* \\ \tau^* = \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2 \tau} \end{cases} \quad (4.9)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.7.**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olsun.  $\alpha$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$ ,

$\alpha^*$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa^* = \kappa \cos \theta - \tau \sin \theta \\ \tau^* = \kappa \sin \theta + \tau \cos \theta \end{cases} \quad (4.10)$$

bağıntısı vardır (Kasap E.1996).

**İspat:**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olsun.

$$\begin{cases} \kappa^* = \langle T^{**'}, N^* \rangle \\ \tau^* = \langle N^{**'}, B^* \rangle \end{cases}$$

olduğundan bu ifadede (4.4) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\begin{cases} \kappa^* = \langle \cos \theta T' + \sin \theta B', N \rangle \\ \tau^* = \langle N', -\sin \theta T + \cos \theta B \rangle \end{cases}$$

bulunur. (3.4) eşitliğine göre yukarıdaki bağıntı

$$\begin{cases} \kappa^* = \langle (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) N, N \rangle \\ \tau^* = \langle -\kappa T + \tau B, -\sin \theta T + \cos \theta B \rangle \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{cases} \kappa^* = \kappa \cos \theta - \tau \sin \theta \\ \tau^* = \kappa \sin \theta + \tau \cos \theta \end{cases}$$

elde edilir.

## 4.2. Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri

**Tanım 4.2.1.** Konum vektörü, herhangi bir  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye **Smarandache eğrisi** denir (Turgut ve Yılmaz,2008).

Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

**Tanım 4.2.2.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

Konum vektörü

$$\beta(s) = \frac{a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s) + c^2(s)}} \quad (4.11)$$

olan vektörün çizdiği regülereğriye **Smarandache eğrisi** denir (Şenyurt ve Sivas,2013).

**Tanım 4.2.3.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

$$\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$



eğrisi  $TN$  -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, A.,2010).

**Teorem 4.2.1.**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$

olsun.  $TN$  -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{TN}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{TN}}$  torsiyonu sırasıyla;

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta_1^2 + \mu_1^2 + \eta_1^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}, \\ \tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}\left[(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\bar{\eta}_1 + \tau\bar{\delta}_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(\bar{\mu}_1 - \bar{\delta}_1)\right]}{\left[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa\tau'\right]^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2} \\ \quad + \frac{\sqrt{2}(\kappa^2 + \kappa')(\kappa\bar{\eta}_1 - \tau\bar{\mu}_1)}{\left[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa\tau'\right]^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2} \end{array} \right.$$

şeklinde verilir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = -\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) - \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau') \\ \mu_1 = -\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) - \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau') \\ \eta_1 = \kappa\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2\kappa(\tau\kappa' - \kappa\tau') \\ \bar{\delta}_1 = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \bar{\mu}_1 = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' \\ \bar{\eta}_1 = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{array} \right.$$

dir (Ali, A.,2010).

**İspat:**  $\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$  Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{TN}}$  yay parametresine göre

türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TN}} \frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \frac{(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{TN}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TN}}(s) = \frac{(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}} \quad (4.12)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \delta_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \\ \mu_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')] \\ \eta_1 = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \end{cases}$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{TN}}$  türevi

$$T'_{\beta_{TN}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} (\delta_1 T + \mu_1 N + \eta_1 B) \quad (4.13)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{TN}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{TN}}$  ile gösterilirse (4.13) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{TN}}$  eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \|T'_{\beta_{TN}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\delta_1^2 + \mu_1^2 + \eta_1^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}$$

olur.  $\beta_{TN}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{TN}}$  ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{T'_{\beta_{TN}}}{\|T'_{\beta_{TN}}\|},$$

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{\delta_1 T + \mu_1 N + \eta_1 B}{\sqrt{\delta_1^2 + \mu_1^2 + \eta_1^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{TN}} = T_{\beta_{TN}} \wedge N_{\beta_{TN}}$  olduğundan  $B_{\beta_{TN}}$  vektörü

$$B_{\beta_{TN}} = \frac{(\kappa\eta_1 - \tau\mu_1)T + (\kappa\eta_1 + \tau\delta_1)N + (-\kappa\mu_1 - \kappa\delta_1)}{\sqrt{(\delta_1^2 + \mu_1^2 + \eta_1^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}$$

olur.  $\beta_{TN}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_{TN}'' = \frac{-(\kappa^2 + \kappa')T + (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2)N + (\kappa\tau + \tau')B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_{TN}''' = \frac{\bar{\delta}_1 T + \bar{\mu}_1 N + \bar{\eta}_1 B}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Burada  $\bar{\delta}_1$ ,  $\bar{\mu}_1$  ve  $\bar{\eta}_1$

$$\begin{cases} \bar{\delta}_1 = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \bar{\mu}_1 = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \bar{\eta}_1 = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{TN}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{TN}}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_{TN}}$  torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\langle \beta_{TN}' \wedge \beta_{TN}'', \beta_{TN}''' \rangle}{\|\beta_{TN}' \wedge \beta_{TN}''\|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{TN}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{TN}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2} \left[ (\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\bar{\eta}_1 + \tau\bar{\delta}_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(\bar{\mu}_1 - \bar{\delta}_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa\bar{\eta}_1 - \tau\bar{\mu}_1) \right]}{(\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.4.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

$$\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

eğrisi  $NB$ -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, A.,2010).

**Teorem 4.2.2.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $NB$ -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{NB}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{NB}}$  torsiyonu sırasıyla ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta_2^2 + \mu_2^2 + \eta_2^2}}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2} \\ \tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}\left[\left(\tau(2\tau^2 + \kappa^2)\right)\bar{\delta}_2 + (-\kappa'\tau + \kappa\tau')\bar{\mu}_2 + \left(\kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau\kappa'\right)\bar{\eta}_2\right]}{\left[\tau(2\tau^2 + \kappa^2)\right]^2 + \left[-\kappa'\tau + \kappa\tau'\right]^2 + \left[\kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau\kappa'\right]^2} \end{array} \right.$$

şeklinde verilir. Burada,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_2 = 2\tau^2(-\kappa' + \tau\kappa) + \kappa\tau(\kappa^2 + 2\tau') \\ \mu_2 = \kappa(-\kappa^3 - \tau'\kappa + \tau\kappa') - \tau^2(3\kappa^2 + 2\tau^2) \\ \eta_2 = \kappa^2(\tau' - \tau^2) - \tau(2\tau^3 + \kappa\kappa') \\ \bar{\delta}_2 = -\kappa'' + \kappa(2\tau' + \kappa^2) + \tau(\kappa' + \kappa\tau) \\ \bar{\mu}_2 = \kappa(-3\kappa' + \tau\kappa) + \tau(-3\tau' + \tau^2) - \tau'' \\ \bar{\eta}_2 = -\tau(\kappa^2 + \tau^2 + 3\tau') + \tau'' \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Sivas,2013).

**İspat:**  $\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$  Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{NB}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{NB}} \frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{NB}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NB}}(s) = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}} \quad (4.14)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \delta_2 = 2\tau^2(-\kappa' + \tau\kappa) + \kappa\tau(\kappa^2 + 2\tau') \\ \mu_2 = \kappa(-\kappa^3 - \tau'\kappa + \tau\kappa') - \tau^2(3\kappa^2 + 2\tau^2) \\ \eta_2 = \kappa^2(\tau' - \tau^2) - \tau(2\tau^3 + \kappa\kappa') \end{cases}$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{NB}}$  türevi

$$T'_{\beta_{NB}}(s) = \frac{\sqrt{2}(\delta_2 T + \mu_2 N + \eta_2 B)}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2} \quad (4.15)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{NB}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{NB}}$  ile gösterilirse (4.15) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{NB}}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_{NB}} &= \|T'_{\beta_{NB}}\|, \\ \kappa_{\beta_{NB}} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta_2^2 + \mu_2^2 + \eta_2^2}}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2} \end{aligned}$$

olur.  $\beta_{NB}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{NB}}$  ile gösterilirse bu vektör

$$\begin{aligned} N_{\beta_{NB}} &= \frac{T'_{\beta_{NB}}(s)}{\|T'_{\beta_{NB}}(s)\|}, \\ N_{\beta_{NB}} &= \frac{\delta_2 T + \mu_2 N + \eta_2 B}{\sqrt{\delta_2^2 + \mu_2^2 + \eta_2^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{NB}} = T_{\beta_{NB}} \wedge N_{\beta_{NB}}$  olduğundan  $B_{\beta_{NB}}$  vektörü

$$B_{\beta_{NB}} = \frac{-\tau[\eta_2 + \mu_2]T + [\tau\delta_2 + \kappa\eta_2]N + [-\kappa\mu_2 + \tau\delta_2]B}{\sqrt{(\kappa^2 + 2\tau^2)(\delta_2^2 + \mu_2^2 + \eta_2^2)}}$$

olur.  $\beta_{NB}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla,

$$\beta_{NB}'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(-\kappa' + \tau\kappa)T - (\kappa^2 + \tau^2 + \tau')N + (\tau' - \tau^2)B\}$$

ve

$$\beta_{NB}''' = \frac{\bar{\delta}_2 T + \bar{\mu}_2 N + \bar{\eta}_2 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada  $\bar{\delta}_2$ ,  $\bar{\mu}_2$  ve  $\bar{\eta}_2$

$$\begin{cases} \bar{\delta}_2 = -\kappa'' + \kappa(2\tau' + \kappa^2) + \tau(\kappa' + \kappa\tau) \\ \bar{\mu}_2 = \kappa(-3\kappa' + \tau\kappa) + \tau(-3\tau' + \tau^2) - \tau'' \\ \bar{\eta}_2 = -\tau(\kappa^2 + \tau^2 + 3\tau') + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{NB}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{NB}}$  ile gösterilirse

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\langle \beta_{NB}' \wedge \beta_{NB}'', \beta_{NB}''' \rangle}{\|\beta_{NB}' \wedge \beta_{NB}''\|^2}$$

dir. Burada  $\beta_{NB}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli

işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{NB}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2} \left[ (\tau(2\tau^2 + \kappa^2))\bar{\delta}_2 + (-\kappa'\tau + \kappa\tau')\bar{\mu}_2 + (\kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau\kappa')\bar{\eta}_2 \right]}{\left[ \tau(2\tau^2 + \kappa^2) \right]^2 + \left[ -\kappa'\tau + \kappa\tau' \right]^2 + \left[ \kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau\kappa' \right]^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.5.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

$$\beta_{TB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

eğrisi  $TB$ -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, A.,2010).

**Teorem 4.2.3.**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $TB$ -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{TB}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{TB}}$  torsiyonu sırasıyla;

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta_3^2 + \mu_3^2}}{(\kappa - \tau)^4} \\ \tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}[\kappa^3 \bar{\eta}_3 - 2\kappa^2 \tau \bar{\eta}_3 + \kappa^2 \tau \bar{\delta}_3 + \kappa \tau^2 \bar{\eta}_3 - 2\kappa \tau^2 \bar{\delta}_3 + \tau^3 \bar{\delta}_3]}{[\tau(\kappa - \tau)^2]^2 + [\tau(\kappa - \tau)^2]^2} \end{array} \right.$$

olur. Burada,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_3 = -\kappa^4 + 3\kappa^3 \tau - 3\kappa^2 \tau^2 + \kappa \tau^3 \\ \mu_3 = 0 \\ \eta_3 = \kappa^3 \tau - 3\kappa^2 \tau^2 + 3\kappa \tau^3 - \tau^4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}_3 = -3\kappa \kappa' + 2\kappa \tau' + \kappa' \tau \\ \bar{\mu}_3 = \kappa^3 + \tau \kappa^2 - \kappa \tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'' \\ \bar{\eta}_3 = \kappa \tau' + 2\kappa' \tau - 3\tau \tau' \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır.

**İspat:**

$$\beta_{TB}(s) = \frac{(T + B)}{\sqrt{2}}$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{TB}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TB}} \frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \frac{(\kappa - \tau)N}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa - \tau)^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{TB}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TB}}(s) = N \quad (4.16)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$T'_{\beta_{TB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa - \tau} (-\kappa T + \tau B) \quad (4.17)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{TB}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{TB}}$  ile gösterilirse (4.17) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{TB}}$  eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \|T'_{\beta_{TB}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau}$$

olur.  $\beta_{TB}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{TB}}$  ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{T'_{\beta_{TB}}}{\|T'_{\beta_{TB}}\|},$$

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{TB}} = T_{\beta_{TB}} \wedge N_{\beta_{TB}}$  olduğundan  $B_{\beta_{TB}}$  vektörü

$$B_{\beta_{TB}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

olur.  $\beta_{TB}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla



$$\beta_{TB}'' = \frac{(-\kappa^2 + \tau\kappa)T + (\kappa' - \tau')N + (\kappa\tau - \tau^2)B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_{TB}''' = \frac{\bar{\delta}_3 T + \bar{\mu}_3 N + \bar{\eta}_3 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada  $\bar{\delta}_3$ ,  $\bar{\mu}_3$  ve  $\bar{\eta}_3$

$$\begin{cases} \bar{\delta}_3 = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau \\ \bar{\mu}_3 = \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'' \\ \bar{\eta}_3 = \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{TB}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{TB}}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_{TB}}$  torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\langle \beta_{TB}' \wedge \beta_{TB}'', \beta_{TB}''' \rangle}{\|\beta_{TB}' \wedge \beta_{TB}''\|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{TB}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{TB}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}(\kappa^3 \bar{\eta}_3 - 2\kappa^2 \tau \bar{\eta}_3 + \kappa^2 \tau \bar{\delta}_3 + \kappa \tau^2 \bar{\eta}_3 - 2\kappa \tau^2 \bar{\delta}_3 + \tau^3 \bar{\delta}_3)}{(\tau(\kappa - \tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa - \tau)^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.6.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

$$\beta_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N + B)$$

eğrisi  $TNB$ -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, A.,2010).

**Teorem 4.2.4.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $TNB$ -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{TNB}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{TNB}}$  torsiyonu sırasıyla;

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\delta_4^2 + \mu_4^2 + \eta_4^2}}{4 (\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)},$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3} \left[ 2\kappa^3 \bar{\eta}_4 - 2\kappa^2 \tau \bar{\eta}_4 + 2\kappa^2 \tau \bar{\delta}_4 + 2\kappa \tau^2 \bar{\eta}_4 - 2\kappa \tau^2 \bar{\delta}_4 + 2\tau^3 \bar{\delta}_4 + \kappa \tau' \bar{\eta}_4 - \kappa' \tau \bar{\eta}_4 + \kappa \tau' \bar{\mu}_4 + \kappa \tau' - \kappa' \tau \bar{\mu}_4 - \kappa' \tau \bar{\delta}_4 \right]}{\left[ 2\kappa \tau (\kappa - \tau) + \kappa \tau' - \tau \kappa' + 2\tau^3 \right]^2 + \left[ \kappa \tau' - \tau \kappa' \right]^2 + \left[ 2\kappa^3 + \kappa \tau' + 2\kappa \tau^2 - 2\kappa^2 \tau - \kappa' \tau \right]^2}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} \delta_4 = \kappa^2 (-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 4\tau\kappa - \kappa^2 \tau') + \kappa \tau (\kappa' + 2\tau^2 + 2\tau') - 2\kappa' \tau^2 \\ \mu_4 = \kappa^2 (-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 2\kappa \tau - \tau') + \tau^2 (-2\tau^2 + 2\kappa \tau + \kappa') + \kappa \tau (\kappa' - \tau') \\ \eta_4 = 2\kappa^2 (\kappa \tau - 2\tau^2 + \tau') + \tau^2 (4\kappa \tau - 2\tau^2 + \kappa') - \kappa \tau (\tau' + 2\kappa') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\delta}_4 = \kappa' \tau - \kappa'' - 3\kappa \kappa' + 2\kappa \tau' + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\ \bar{\mu}_4 = \tau^3 - \kappa^3 - 3(\kappa \kappa' + \tau \tau') - (-\kappa'' + \tau'') + \kappa \tau (\kappa - \tau) \\ \bar{\eta}_4 = \tau'' - \kappa^2 \tau - 3\tau \tau' - \tau^3 + 2\tau \kappa' + \kappa \tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Sivas,2013).

**İspat:**  $\beta_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{TNB}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TNB}} \frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ -\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B \right]$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \frac{\sqrt{6} \sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - \kappa \tau}}{3}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{TNB}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau}} \quad (4.18)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \delta_4 = \kappa^2(-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 4\tau\kappa - \kappa^2\tau') + \kappa\tau(\kappa' + 2\tau^2 + 2\tau') - 2\kappa'\tau^2 \\ \mu_4 = \kappa^2(-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 2\kappa\tau - \tau') + \tau^2(-2\tau^2 + 2\kappa\tau + \kappa') + \kappa\tau(\kappa' - \tau') \\ \eta_4 = 2\kappa^2(\kappa\tau - 2\tau^2 + \tau') + \tau^2(4\kappa\tau - 2\tau^2 + \kappa') - \kappa\tau(\tau' + 2\kappa') \end{cases}$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{TNB}}$  türevi

$$T'_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\delta_4 T + \mu_4 N + \eta_4 B}{(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} \quad (4.19)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{TNB}}$  ile gösterilirse (4.19) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{TNB}}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_{TNB}} &= \|T'_{\beta_{TNB}}\|, \\ \kappa_{\beta_{TNB}} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\delta_4^2 + \mu_4^2 + \eta_4^2}}{(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} \end{aligned}$$

olur.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{TNB}}$  ile gösterilirse

$$\begin{aligned} N_{\beta_{TNB}} &= \frac{T'_{\beta_{TNB}}(s)}{\|T'_{\beta_{TNB}}(s)\|}, \\ N_{\beta_{TNB}} &= \frac{\delta_4 T + \mu_4 N + \eta_4 B}{\sqrt{\delta_4^2 + \mu_4^2 + \eta_4^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{TNB}} = T_{\beta_{TNB}} \wedge N_{\beta_{TNB}}$  olduğundan  $B_{\beta_{TNB}}$  vektörü

$$B_{\beta_{TNB}} = \frac{((\kappa - \tau)\eta_4 - \tau\mu_4)T + (\tau\delta_4 + \kappa\eta_4)N - (\kappa\mu_4 + (\kappa - \tau)\delta_4)B}{\sqrt{(2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau)(\delta_4^2 + \mu_4^2 + \eta_4^2)}}$$

olur.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa sırasıyla,

$$\beta_{TNB}'' = \frac{1}{\sqrt{3}} [(-\kappa' - \kappa^2 + \kappa\tau)T - (\kappa^2 + \kappa' + \tau' + \tau^2)N + (\kappa\tau - \tau^2 + \tau')B]$$

ve

$$\beta_{TNB}''' = \frac{\bar{\delta}_4 T + \bar{\mu}_4 N + \bar{\eta}_4 B}{\sqrt{3}}$$

dır. Burada  $\bar{\delta}_4$ ,  $\bar{\mu}_4$  ve  $\bar{\eta}_4$

$$\begin{cases} \bar{\delta}_4 = \kappa'\tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \\ \bar{\mu}_4 = \tau^3 - \kappa^3 - 3(\kappa\kappa' + \tau\tau') - (-\kappa'' + \tau'') + \kappa\tau(\kappa - \tau) \\ \bar{\eta}_4 = \tau'' - \kappa^2\tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{TNB}}$  ile gösterilirse

$\tau_{\beta_{TNB}}$  torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\langle \beta_{TNB}' \wedge \beta_{TNB}'', \beta_{TNB}''' \rangle}{\|\beta_{TNB}' \wedge \beta_{TNB}''\|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{TNB}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve

gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{TNB}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3} \left[ \begin{aligned} &2\kappa^3\bar{\eta}_4 - 2\kappa^2\tau\bar{\eta}_4 + 2\kappa^2\tau\bar{\delta}_4 + 2\kappa\tau^2\bar{\eta}_4 - 2\kappa\tau^2\bar{\delta}_4 + 2\tau^3\bar{\delta}_4 + \\ &\kappa\tau'\bar{\eta}_4 - \kappa'\tau\bar{\eta}_4 + \kappa\tau'\bar{\mu}_4 + \kappa\tau'\bar{\delta}_4 - \kappa'\tau\bar{\mu}_4 - \kappa'\tau\bar{\delta}_4 \end{aligned} \right]}{\left[ 2\kappa\tau(\kappa - \tau) + \kappa\tau' - \tau\kappa' + 2\tau^3 \right]^2 + [\kappa\tau' - \tau\kappa']^2 + \left[ 2\kappa^3 + \kappa\tau' + 2\kappa\tau^2 - 2\kappa^2\tau - \kappa'\tau \right]^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.7.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

$$\beta_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + C)$$

eğrisi  $NC$  -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Şenyurt ve Sivas,2013).

**Teorem 4.2.5.**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $NC$  -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{NC}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{NC}}$  torsiyonu sırasıyla;

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2}}{\left((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|\right)^2},$$

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \left[ \begin{aligned} &-2\bar{\delta}_5\tau^2\varphi' \sin \varphi + \bar{\delta}_5(\varphi')^2 \sin^2 \varphi - \bar{\delta}_5\kappa^2\varphi' \sin \varphi + \kappa\bar{\mu}_5\tau + (\varphi')^3 \cos^2 \varphi \bar{\mu}_5 \\ &+ \varphi'^2 \cos^2 \varphi \bar{\eta}_5\kappa - 2\varphi' \cos \varphi \bar{\eta}_5\kappa^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\eta}_5\tau^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\mu}_5\tau - \kappa\bar{\mu}_5\varphi'' \sin \varphi \\ &- \kappa\bar{\mu}_5\varphi'^2 \cos \varphi + \bar{\mu}_5\varphi'' \cos \varphi \tau - \bar{\mu}_5\varphi'^2 \sin \varphi \tau + \varphi'^2 \cos \varphi \bar{\eta}_5\tau \sin \varphi \\ &+ \bar{\mu}_5\kappa'\varphi' \sin \varphi - \kappa\bar{\eta}_5\tau\varphi' \sin \varphi - \bar{\delta}_5\kappa\varphi' \cos \varphi \tau + \bar{\delta}_5\kappa\varphi'^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ &+ \bar{\delta}_5\kappa^2\tau + \bar{\mu}_5\varphi'^3 \sin^2 \varphi - \bar{\mu}_5\kappa'\tau + \kappa\bar{\eta}_5\tau^2 + \bar{\eta}_5\kappa^3 + \bar{\delta}_5\tau^3 \end{aligned} \right]}{\left[ \begin{aligned} &\left( \kappa(\varphi')^2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left( \tau(\varphi')^2 \sin \varphi - \kappa^2\varphi' - 2\tau^2\varphi' \right) \sin \varphi + \kappa^2\tau + \tau^3 \end{aligned} \right]^2} \\ + \left[ \begin{aligned} &\left( \tau\varphi'' - \tau'\varphi' - \kappa(\varphi')^2 \right) \cos \varphi + \left( \kappa'\varphi' - \tau(\varphi')^2 - \kappa\varphi'' \right) \sin \varphi - \tau\kappa' + (\varphi')^3 + \kappa\tau' \end{aligned} \right]^2} \\ + \left[ \begin{aligned} &\left( \kappa(\varphi')^2 \cos \varphi + \tau(\varphi')^2 \sin \varphi - 2\kappa^2\varphi' - \tau^2\varphi' \right) \cos \varphi - \kappa\tau\varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \end{aligned} \right]^2}$$

olur. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_5 = \tau^2 \varphi'' \cos \varphi - \kappa \varphi' \varphi'' \cos^2 \varphi - \tau \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - (\varphi')^4 \sin \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \sin \varphi \\ \quad - \tau^2 (\varphi')^2 \sin \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin^2 \varphi - \kappa' (\varphi')^2 - \tau^2 \kappa' - 2\kappa' \kappa \varphi' \cos \varphi \\ \quad - 2\kappa' \varphi' \tau \sin \varphi - \tau \tau' \varphi' \cos \varphi + \kappa' (\varphi')^2 \cos^2 \varphi + \tau' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \\ \quad + \kappa \tau \tau' - \kappa \tau \varphi'' \sin \varphi - \varphi' \tau' \kappa \sin \varphi \\ \mu_5 = \kappa (\varphi')^3 \cos \varphi + 3\kappa^3 \varphi' \cos \varphi + 3\tau^2 \kappa \varphi' \cos \varphi - 2\kappa^2 (\varphi')^2 \cos^2 \varphi - 4\kappa \tau (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \kappa^2 (\varphi')^2 - \kappa^4 - 2\kappa^2 \tau^2 + 3\kappa^2 \tau \varphi' \sin \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 + 3\tau^3 \varphi' \sin \varphi + \tau (\varphi')^3 \sin \varphi - 2\tau^2 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\ \eta_5 = \tau' (\varphi')^2 + \kappa^2 \tau' - 2\kappa \tau' \varphi' \cos \varphi - \kappa^2 \varphi'' \sin \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi + \tau \varphi' \varphi'' \sin^2 \varphi \\ \quad - (\varphi')^4 \cos \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \cos \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 \cos \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \cos^2 \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \tau \varphi' \varphi'' - \tau \kappa \kappa' + \tau \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau \kappa' \varphi' \cos \varphi + \kappa \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - \tau' (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}_5 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa^2 \varphi' \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\ \bar{\mu}_5 = 2\kappa \varphi'' \cos \varphi - 2\kappa (\varphi')^2 \sin \varphi - 3\kappa \kappa' + \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau' \varphi' \sin \varphi + 2\tau \varphi'' \sin \varphi \\ \quad + 2(\varphi')^2 \cos \varphi - 3\tau \tau' \\ \bar{\eta}_5 = (\kappa \tau \varphi' - 3\varphi' \varphi'') \cos \varphi + (\tau^2 \varphi' - \varphi''' + (\varphi')^3) \sin \varphi - \kappa^2 \tau - \tau^3 + \tau'' \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Sivas,2013).

**İspat:** 
$$\beta_{NC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + C)$$

Smarandache eğrisinde  $C$  nin yerine (3.7) den karşılığı yazılırsa

$$\beta_{NC} = \frac{(\sin \varphi T + N + \cos \varphi B)}{\sqrt{2}}$$

olur.  $s_{\beta_{NC}}$  yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_{NC}} \frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \frac{(\varphi' \cos \varphi - \kappa)T + (\tau - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınır  $\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \frac{\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{NC}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NC}}(s) = \frac{(\varphi' \cos \varphi - \kappa)T + (\tau - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}} \quad (4.20)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_5 = \tau^2 \varphi'' \cos \varphi - \kappa \varphi' \varphi'' \cos^2 \varphi - \tau \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - (\varphi')^4 \sin \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \sin \varphi \\ \quad - \tau^2 (\varphi')^2 \sin \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin^2 \varphi - \kappa' (\varphi')^2 - \tau^2 \kappa' - 2\kappa' \kappa \varphi' \cos \varphi \\ \quad - 2\kappa' \varphi' \tau \sin \varphi - \tau \tau' \varphi' \cos \varphi + \kappa' (\varphi')^2 \cos^2 \varphi + \tau' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \\ \quad + \kappa \tau \tau' - \kappa \tau \varphi'' \sin \varphi - \varphi' \tau' \kappa \sin \varphi \\ \mu_5 = \kappa (\varphi')^3 \cos \varphi + 3\kappa^3 \varphi' \cos \varphi + 3\tau^2 \kappa \varphi' \cos \varphi - 2\kappa^2 (\varphi')^2 \cos^2 \varphi - 4\kappa \tau (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \kappa^2 (\varphi')^2 - \kappa^4 - 2\kappa^2 \tau^2 + 3\kappa^2 \tau \varphi' \sin \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 + 3\tau^3 \varphi' \sin \varphi + \tau (\varphi')^3 \sin \varphi \\ \quad - 2\tau^2 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\ \eta_5 = \tau' (\varphi')^2 + \kappa^2 \tau' - 2\kappa \tau' \varphi' \cos \varphi - \kappa^2 \varphi'' \sin \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi + \tau \varphi' \varphi'' \sin^2 \varphi \\ \quad - (\varphi')^4 \cos \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \cos \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 \cos \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \cos^2 \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \tau \varphi' \varphi'' - \tau \kappa \kappa' + \tau \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau \kappa' \varphi' \cos \varphi + \kappa \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - \tau' (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \end{array} \right.$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{NC}}$  türevi

$$T'_{\beta_{NC}}(s) = \frac{\sqrt{2}(\delta_5 T + \mu_5 N + \eta_5 B)}{\left( (\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\| \right)^2} \quad (4.21)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{NC}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{NC}}$  ile gösterilirse  $\kappa_{\beta_{NC}}$  eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \|T'_{\beta_{NC}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2}}{\left( (\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\| \right)^2}$$

olur.  $\beta_{NC}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{NC}}$  ile gösterilirse

$$N_{\beta_{NC}} = \frac{T'_{\beta_{NC}}(s)}{\|T'_{\beta_{NC}}(s)\|},$$

$$N_{\beta_{NC}} = \frac{\delta_5 T + \mu_5 N + \eta_5 B}{\sqrt{\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{NC}} = T_{\beta_{NC}} \wedge N_{\beta_{NC}}$  olduğundan  $B_{\beta_{NC}}$  vektörü

$$B_{\beta_{NC}} = \frac{\mu_5 (\varphi' \sin \varphi - \tau) T + (\delta_5 (\tau - \varphi' \sin \varphi) - \eta_5 (\varphi' \cos \varphi - \kappa)) N + (\mu_5 (\varphi' \cos \varphi - \kappa)) B}{\sqrt{((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\|)(\delta_5^2 + \mu_5^2 + \eta_5^2)}}$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{NC}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_{NC}'' = \frac{(\varphi'' \cos \varphi - (\varphi')^2 \sin \varphi - \kappa') T + (\kappa \varphi' \cos \varphi + \tau \varphi' \sin \varphi - \kappa^2 - \tau^2) N}{\sqrt{2}} + \frac{(\tau' - \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^2 \cos \varphi) B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_{NC}''' = \frac{\bar{\delta}_5 T + \bar{\mu}_5 N + \bar{\eta}_5 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada  $\bar{\delta}_5$ ,  $\bar{\mu}_5$  ve  $\bar{\eta}_5$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}_5 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa^2 \varphi' \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\ \bar{\mu}_5 = 2\kappa \varphi'' \cos \varphi - 2\kappa (\varphi')^2 \sin \varphi - 3\kappa \kappa' + \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau' \varphi' \sin \varphi + 2\tau \varphi'' \sin \varphi \\ \quad + 2(\varphi')^2 \cos \varphi - 3\tau \tau' \\ \bar{\eta}_5 = (\kappa \tau \varphi' - 3\varphi' \varphi'') \cos \varphi + (\tau^2 \varphi' - \varphi''' + (\varphi')^3) \sin \varphi - \kappa^2 \tau - \tau^3 + \tau'' \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{NC}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{NC}}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_{NC}}$  torsiyonu



$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\langle \beta_{NC}' \wedge \beta_{NC}'', \beta_{NC}''' \rangle}{\left\| \beta_{NC}' \wedge \beta_{NC}'' \right\|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{NC}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{NC}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \left[ \begin{aligned} & -2\bar{\delta}_5 \tau^2 \varphi' \sin \varphi + \bar{\delta}_5 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi - \bar{\delta}_5 \kappa^2 \varphi' \sin \varphi + \kappa \bar{\mu}_5 \tau + (\varphi')^3 \cos^2 \varphi \bar{\mu}_5 \\ & + \varphi'^2 \cos^2 \varphi \bar{\eta}_5 \kappa - 2\varphi' \cos \varphi \bar{\eta}_5 \kappa^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\eta}_5 \tau^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\mu}_5 \tau - \kappa \bar{\mu}_5 \varphi'' \sin \varphi \\ & - \kappa \bar{\mu}_5 \varphi'^2 \cos \varphi + \bar{\mu}_5 \varphi'' \cos \varphi \tau - \bar{\mu}_5 \varphi'^2 \sin \varphi \tau + \varphi'^2 \cos \varphi \bar{\eta}_5 \tau \sin \varphi \\ & + \bar{\mu}_5 \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa \bar{\eta}_5 \tau \varphi' \sin \varphi - \bar{\delta}_5 \kappa \varphi' \cos \varphi \tau + \bar{\delta}_5 \kappa \varphi'^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ & + \bar{\delta}_5 \kappa^2 \tau + \bar{\mu}_5 \varphi'^3 \sin^2 \varphi - \bar{\mu}_5 \kappa' \tau + \kappa \bar{\eta}_5 \tau^2 + \bar{\eta}_5 \kappa^3 + \bar{\delta}_5 \tau^3 \end{aligned} \right]}{\left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left( \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - \kappa^2 \varphi' - 2\tau^2 \varphi' \right) \sin \varphi + \kappa^2 \tau + \tau^3 \right]^2} \\ + \left[ \left( \tau \varphi'' - \tau' \varphi' - \kappa (\varphi')^2 \right) \cos \varphi + \left( \kappa' \varphi' - \tau (\varphi')^2 - \kappa \varphi'' \right) \sin \varphi - \tau \kappa' + (\varphi')^3 + \kappa \tau' \right]^2 \\ + \left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \cos \varphi + \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - 2\kappa^2 \varphi' - \tau^2 \varphi' \right) \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \right]^2$$

şeklinde elde edilir.

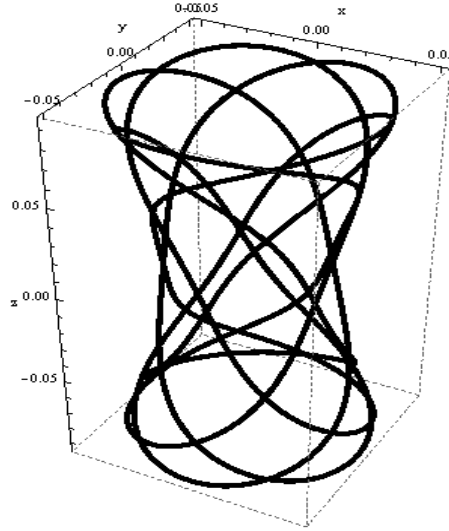
**Örnek 4.2.1.**

$$\beta(s) = \left( \frac{9}{208} \sin 16s - \frac{1}{117} \sin 36s, -\frac{9}{208} \cos 16s + \frac{1}{117} \cos 36s, \frac{6}{65} \sin 10s \right)$$

eğrisinin Frenet vektörleri (Ali, A.,2010) ve birim Darboux vektörü

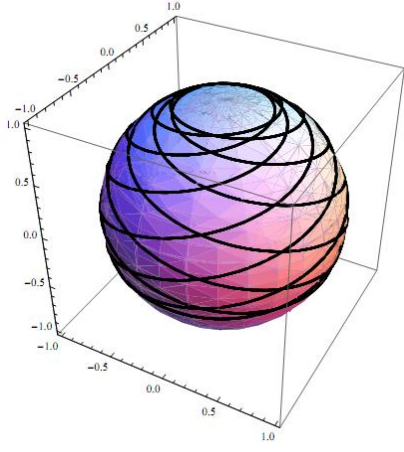
$$\begin{cases} T(s) = \left( \frac{9}{13} \cos 16s - \frac{4}{13} \cos 36s, \frac{9}{13} \sin 16s - \frac{4}{13} \sin 36s, \frac{12}{13} \cos 10s \right) \\ N(s) = \left( \frac{12}{13} \cos 26s, \frac{12}{13} \sin 26s, -\frac{5}{13} \right) \\ B(s) = \left( -\frac{9}{13} \sin 16s - \frac{4}{13} \sin 36s, \frac{4}{13} \cos 36s + \frac{9}{13} \cos 16s, \frac{12}{13} \sin 10s \right) \\ C(s) = \left( \frac{5}{13} \cos 26s, \frac{5}{13} \sin 26s, \frac{12}{13} \right) \end{cases}$$

şeklinde bulunur (Şekil 4.2.1).

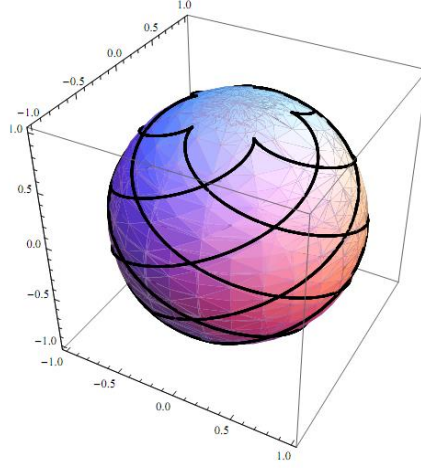


**Şekil 4.3.**  $\beta(s)$  eğrisi

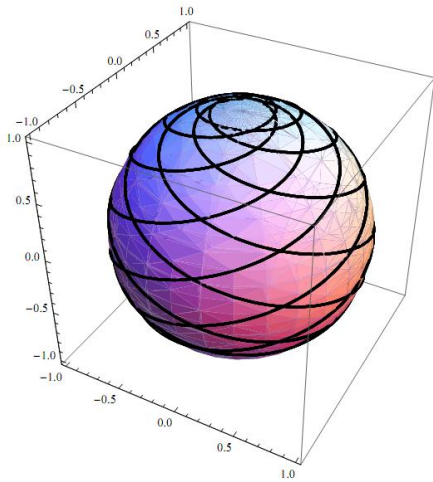
Bu eğriye ait  $TN$ ,  $NB$ ,  $TNB$  ve  $NC$  -Smarandache eğrileri sırasıyla;



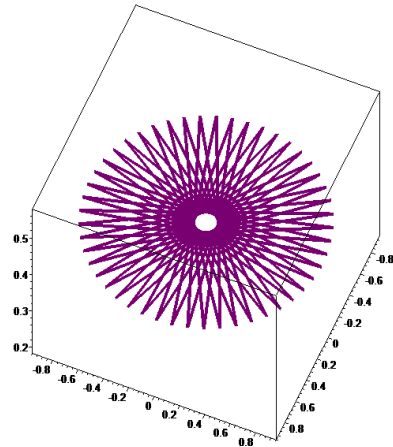
Şekil 4.4.  $TN$  -Smarandache Eğrisi



Şekil 4.5.  $NB$  -Smarandache Eğrisi



Şekil 4.6.  $TNB$  -Smarandache eğrisi



Şekil 4.7.  $NC$  -Smarandache eğrisi

## 5. BULGULAR

Bu bölüm çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada,  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olmak üzere  $\alpha^*$  Bertrand partner eğrisinin Frenet vektörleri tarafından oluşturulan Smarandache eğrileri ;

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^* \text{-Smarandache eğrisi.}$$

şeklinde gösterilerek bu eğrilere ait eğrilik ve burulmalar hesaplanmıştır. Elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları  $\alpha$  Bertrand eğrisinin eğrilik ve burulmaları cinsinden ifade edilmiştir.

### 5.1. $T^*N^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_1(s) = \beta_{T^*N^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad (5.1)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_1}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_1} \frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{(-\kappa^* T^* + \kappa^* N^* + \tau^* B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_1}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}{2}} \quad (5.3)$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_1$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + \kappa^* N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \quad (5.4)$$

şeklinde olur. (5.1) ifadesinde  $T^*$  ve  $N^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi T + N + \sin \varphi B) \quad (5.5)$$

olur. (5.4) denkleminde (4.4) ve (4.10) bağıntıları dikkate alınır (5.5) ifadesindeki  $\beta_1$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{-\kappa T + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) N + \tau B}{\sqrt{\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)^2}} \quad (5.6)$$

şeklinde bulunur. (5.4) ifadesinin tekrar türevi alınır katsayılar

$$\begin{cases} \gamma_1 = (-\kappa^{*'} - \kappa^{*2})(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \kappa^* (\kappa^* \kappa^{*'} - \tau^* \tau^{*'}) \\ \nu_1 = (-\|W^*\|^2 + \kappa^{*'}) (2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^* (\kappa^* \kappa^{*'} + \tau^* \tau^{*'}) \\ \chi_1 = (\kappa^* \tau^* + \tau^{*'}) (2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \tau^* (\kappa^* \kappa^{*'} + \tau^* \tau^{*'}) \end{cases} \quad (5.7)$$

olmak üzere  $T'_{\beta_1}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_1}(s) = \sqrt{2} \frac{(\gamma_1 T^* + \nu_1 N^* + \chi_1 B^*)}{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} \quad (5.8)$$

olur. (5.7) ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases}
\bar{\gamma}_1 = (-\kappa' - \kappa^2 \cos \theta + \kappa \tau \sin \theta) (\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)^2) \\
\quad + \kappa \left( \|W\| \|W\|' + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) (\kappa' \cos \theta - \tau' \sin \theta) \right) \\
\bar{\nu}_1 = (-\|W\|^2 + \kappa' \cos \theta - \tau' \sin \theta) (\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)^2) \\
\quad - (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \left( \|W\| \|W\|' + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) (\kappa' \cos \theta - \tau' \sin \theta) \right) \\
\bar{\chi}_1 = (\kappa \tau \cos \theta - \tau^2 \sin \theta + \tau') (\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)^2) \\
\quad - \tau \left( \|W\| \|W\|' + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) (\kappa' \cos \theta - \tau' \sin \theta) \right)
\end{cases}
\tag{5.9}$$

şeklinde olur.  $T'_{\beta_1}(s)$  türevi ifadesinde (4.4) ve (5.9) bağıntıları yerine yazılırsa  $T'_{\beta_1}$  vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}(\bar{\gamma}_1 T + \bar{\nu}_1 N + \bar{\chi}_1 B)}{(\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)^2)^2}
\tag{5.10}$$

olarak bulunur.  $\beta_1$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_1}$  ile gösterilirse (5.8) bağıntısından  $\kappa_{\beta_1}$  eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta_1} &= \|T'_{\beta_1}\|, \\
\kappa_{\beta_1} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\nu}_1^2 + \bar{\chi}_1^2}}{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}
\end{aligned}
\tag{5.11}$$

olur. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_1}$  eğriliğinin Bertrand eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\nu}_1^2 + \bar{\chi}_1^2}}{(\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)^2)^2}
\tag{5.12}$$

dır.  $\beta_1$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_1}$  ile gösterilirse (5.8) bağıntısından

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\gamma_1 T^* + \nu_1 N^* + \chi_1 B^*}{\sqrt{\gamma_1^2 + \nu_1^2 + \chi_1^2}}$$

olur. Burada  $T^*, N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_1}$  ifadesinin Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$N_{\beta_1} = \frac{\bar{\gamma}_1 T + \bar{\nu}_1 N + \bar{\chi}_1 B}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\nu}_1^2 + \bar{\chi}_1^2}} \quad (5.13)$$

şeklindedir.  $B_{\beta_1} = T_{\beta_1} \wedge N_{\beta_1}$  olduğundan  $B_{\beta_1}$  vektörü

$$B_{\beta_1} = \frac{(\kappa^* \chi_1 - \tau^* \nu_1) T^* + (\kappa^* \chi_1 + \tau^* \gamma_1) N^* - (\kappa^* \nu_1 + \kappa^* \gamma_1) B^*}{\sqrt{(\gamma_1^2 + \nu_1^2 + \chi_1^2)(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})}} \quad (5.14)$$

olur. Burada  $T^*, N^*, B^*, \kappa^*$  ve  $\tau^*$  ifadelerinin yerine (4.10) ve (4.4) den karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_1}$  binormal vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$B_{\beta_1} = \frac{(\bar{\chi}_1(\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) - \bar{\nu}_1 \tau) T + (\kappa \bar{\chi}_1 + \tau \bar{\gamma}_1) N - (\kappa \bar{\nu}_1 + \bar{\gamma}_1(\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)) B}{\sqrt{(\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)^2)(\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\nu}_1^2 + \bar{\chi}_1^2)}} \quad (5.15)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_1$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınınca;

$$\beta_1'' = \frac{(-\kappa^{*2} - \kappa^{*'}) T^* + (\kappa^{*'} - \|W^*\|^2) N^* + (\kappa^* \tau^* + \tau^{*'}) B^*}{\sqrt{2}}$$

$$\beta_1''' = \frac{\eta_1 T^* + \lambda_1 N^* + \rho_1 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_1$ ,  $\lambda_1$  ve  $\rho_1$  katsayıları

$$\begin{cases} \eta_1 = (-\kappa^{*'} - \kappa^{*2})' - \kappa^* (-\|W^*\|^2 + \kappa^{*'}) \\ \lambda_1 = \kappa^* (-\kappa^{*'} - \kappa^{*2}) + (-\kappa^{*2} + \kappa^{*'} - \tau^{*2})' - \tau^* (\kappa^* \tau^* + \tau^{*'}) \\ \rho_1 = \tau^* (-\|W^*\|^2 + \kappa^{*'}) + (\kappa^* \tau^* + \tau^{*'})' \end{cases} \quad (5.16)$$

şeklindedir.  $\beta_1$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_1}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_1}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\langle \beta_1' \wedge \beta_1'', \beta_1''' \rangle}{\|\beta_1' \wedge \beta_1''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_1'$ ,  $\beta_1''$  ve  $\beta_1'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\tau_{\beta_1}$  torsiyonu

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 = \kappa^* (\kappa^* \tau^* + \tau^{*'}) - \tau^* (-\|W^*\|^2 + \kappa^{*'}) \\ \mathcal{G}_1 = \kappa^* (\kappa^* \tau^* + \tau^{*'}) + \tau^* (-\kappa^{*'} - \kappa^{*2}) \\ \tilde{\lambda}_1 = -\kappa^* \|W^*\|^2 - \kappa^{*'} + \kappa^* (\kappa^{*'} + \kappa^{*2}) \end{cases} \quad (5.17)$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}(\mathcal{G}_1 \eta_1 + \mathcal{G}_1 \lambda_1 + \tilde{\lambda}_1 \rho_1)}{\mathcal{G}_1^2 + \mathcal{G}_1^2 + \tilde{\lambda}_1^2} \quad (5.18)$$

olur. (5.16) ve (5.17) bağıntısında (4.10) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar



$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_1 = (-\kappa' - \kappa^2 \cos \theta + \kappa \tau \sin \theta)' - \kappa(-\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)') \\ \bar{\lambda}_1 = \kappa(-\kappa' - \kappa^2 \cos \theta + \kappa \tau \sin \theta) + (-\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)') \\ \quad - \tau(\kappa \tau \cos \theta - \tau^2 \sin \theta + \tau') \\ \bar{\rho}_1 = \tau(-\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)') + (\kappa \tau \cos \theta - \tau^2 \sin \theta + \tau') \end{array} \right. \quad (5.19)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{G}}_1 = (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)(\kappa \tau \cos \theta - \tau^2 \sin \theta + \tau') - \tau(-\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)') \\ \bar{\wp}_1 = \kappa(\kappa \tau \cos \theta - \tau^2 \sin \theta + \tau') + \tau(-\kappa' - \kappa^2 \cos \theta + \kappa \tau \sin \theta) \\ \bar{\tilde{\lambda}}_1 = -\left[ \kappa(-\|W\|^2 + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)') + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta)(-\kappa' - \kappa^2 \cos \theta + \kappa \tau \sin \theta) \right] \end{array} \right. \quad (5.20)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.18)de yerine yazılırsa  $T^*N^*$ -Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_1}$  torsiyonunun Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2}(\bar{\mathcal{G}}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{\wp}_1 \bar{\lambda}_1 + \bar{\tilde{\lambda}}_1 \bar{\rho}_1)}{\bar{\mathcal{G}}_1^2 + \bar{\wp}_1^2 + \bar{\tilde{\lambda}}_1^2}$$

olarak bulunur.

## 5.2. $N^*B^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_2(s) = \beta_{N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad (5.21)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_2}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_2} \frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{(-\kappa T^* - \tau N^* + \tau B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.22)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_2}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \sqrt{\frac{2\tau^{*2} + \kappa^{*2}}{2}} \quad (5.23)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_2$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{-\kappa^* T^* - \tau^* N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{2\tau^{*2} + \kappa^{*2}}} \quad (5.24)$$

şeklinde olur. (5.21) ifadesinde  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \theta T + N + \cos \theta B) \quad (5.25)$$

olur. (5.24) denkleminde (4.4) ve (4.10) den karşılıkları yazılırsa (5.25) ifadesinde verilen  $\beta_2$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{-\kappa T - (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) N + \tau B}{\sqrt{\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2}} \quad (5.26)$$

şeklinde bulunur. (5.24) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \gamma_2 = (-\kappa^{*'} + \tau^* \kappa^*) (\kappa^{*2} - 2\tau^{*2}) + \kappa^* (\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'}) \\ \nu_2 = (-\kappa^{*2} - \tau^{*'} + \tau^{*2}) (\kappa^{*2} - 2\tau^{*2}) - \tau^* (\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'}) \\ \chi_2 = (-\tau^{*2} - \tau^{*'}) (\kappa^{*2} - 2\tau^{*2}) - \tau^* (\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'}) \end{cases} \quad (5.27)$$

olmak üzere  $T'_{\beta_2}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_2}(s) = \sqrt{2} \frac{(\gamma_2 T^* + \nu_2 N^* + \chi_2 B^*)}{(\kappa^{*2} + 2\tau^{*2})^2} \quad (5.28)$$

olur. (5.27) ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma}_2 = (-\kappa' + \kappa(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta))(\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2) \\ \quad + \kappa(\|W\|\|W\|' + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta))(\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta) \\ \bar{\nu}_2 = (-\kappa^2 - (\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta) - \tau^2)(\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2) \\ \quad + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)(\|W\|\|W\|' + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta))(\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta) \\ \bar{\chi}_2 = (-\tau(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) + \tau')(\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2) \\ \quad - \tau(\|W\|\|W\|' + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta))(\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta) \end{array} \right. \quad (5.29)$$

şeklinde olur.  $T'_{\beta_2}(s)$  türevi fadesinde (4.10) ve (5.29) bağıntıları yerine yazılırsa

$T'_{\beta_2}$  vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}(\bar{\gamma}_2 T + \bar{\nu}_2 N + \bar{\chi}_2 B)}{(\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2)^2} \quad (5.30)$$

olarak bulunur.  $\beta_2$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_2}$  ile gösterilirse (5.28) bağıntısından  $\kappa_{\beta_2}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_2} &= \|T'_{\beta_2}\|, \\ \kappa_{\beta_2} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_2^2 + \bar{\nu}_2^2 + \bar{\chi}_2^2}}{(\kappa^{*2} + 2\tau^{*2})^2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

olur. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_2}$  eğriliğinin Bertrand eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_2^2 + \bar{\nu}_2^2 + \bar{\chi}_2^2}}{(\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2)^2} \quad (5.32)$$

dır.  $\beta_2$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_2}$  ile gösterilirse (5.28) bağıntısından

$$N_{\beta_2} = \frac{T'_{\beta_2}}{\|T'_{\beta_2}\|},$$

$$N_{\beta_2} = \frac{\gamma_2 T^* + \nu_2 N^* + \chi_2 B^*}{\sqrt{\gamma_2^2 + \nu_2^2 + \chi_2^2}}$$

olur. Burada  $T^*, N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_2}$  vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_2} = \frac{\bar{\gamma}_2 T + \bar{\nu}_2 N + \bar{\chi}_2 B}{\sqrt{(\bar{\gamma}_2^2 + \bar{\nu}_2^2 + \bar{\chi}_2^2)}} \quad (5.33)$$

şeklindedir.  $B_{\beta_2} = T_{\beta_2} \wedge N_{\beta_2}$  olduğundan  $B_{\beta_2}$  vektörü

$$B_{\beta_2} = \frac{-\tau^* (\chi_2 + \nu_2) T^* + (\tau^* \gamma_2 + \kappa^* \chi_2) N^* + (-\kappa^* \nu_2 + \tau^* \gamma_2) B^*}{\sqrt{(\kappa^{*2} + 2\tau^{*2})(\gamma_2^2 + \nu_2^2 + \chi_2^2)}} \quad (5.34)$$

olur. Burada  $T^*, N^*, B^*, \kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) ve (4.4) den karşılıkları yazılırsa

$B_{\beta_2}$  binormal vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_{\beta_2} = -\frac{(\bar{\chi}_2 (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) + \bar{\nu}_2 \tau) T + (\bar{\chi}_2 \kappa + \bar{\gamma}_2 \tau) N}{\sqrt{(\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2)(\bar{\gamma}_2^2 + \bar{\nu}_2^2 + \bar{\chi}_2^2)}} + \frac{(-\bar{\nu}_2 \kappa + \bar{\gamma}_2 (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)) B}{\sqrt{(\|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)^2)(\bar{\gamma}_2^2 + \bar{\nu}_2^2 + \bar{\chi}_2^2)}} \quad (5.35)$$

olarak bulunur.  $\beta_2$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa,

$$\beta_2'' = \frac{(-\kappa^{*'} + \tau^* \kappa^*) T^* - (\|W^*\|^2 + \tau^{*'}) N^* + (\tau^{*'} - \tau^{*2}) B^*}{\sqrt{2}},$$

$$\beta_2''' = \frac{\eta_2 T^* + \lambda_2 N^* + \rho_2 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_2, \lambda_2$  ve  $\rho_2$  katsayıları

$$\begin{cases} \eta_2 = (-\kappa^{*'} + \kappa^* \tau^*)' + \kappa^* (\|W^*\|^2 + \tau^{*'}) \\ \lambda_2 = \kappa^* (-\kappa^{*'} + \kappa^* \tau^*) + (-\|W^*\|^2 - \tau^{*'})' - \tau^* (-\tau^{*2} + \tau^{*'}) \\ \rho_2 = \tau^* (-\|W^*\|^2 - \tau^{*'}) + (-\tau^{*2} + \tau^{*'})' \end{cases} \quad (5.36)$$

şeklindedir.  $\beta_2$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_2}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_2}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\langle \beta_2' \wedge \beta_2'', \beta_2''' \rangle}{\|\beta_2' \wedge \beta_2''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_2', \beta_2''$  ve  $\beta_2'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\tau_{\beta_2}$  torsiyonu

$$\begin{cases} \mathcal{G}_2 = 2\tau^{*3} + \kappa^{*2} \tau^* \\ \wp_2 = \kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*'} \tau^* \\ \tilde{\lambda}_2 = \kappa^* (\|W^*\|^2 + \tau^{*'}) + \tau^* (-\kappa^{*'} + \kappa^* \tau^*) \end{cases} \quad (5.37)$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2} (\mathcal{G}_2 \eta_2 + \wp_2 \lambda_2 + \tilde{\lambda}_2 \rho_2)}{\mathcal{G}_2^2 + \wp_2^2 + \tilde{\lambda}_2^2} \quad (5.38)$$

olur. (5.36) ve (5.37) bağıntısında (4.10) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_2 = (-\kappa' + \kappa(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta))' - \kappa(-\|W\|^2 + (\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta)) \\ \bar{\lambda}_2 = \kappa(-\kappa' + \kappa(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)) + (-\|W\|^2 - (\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta))' \\ \quad - \tau(-\tau(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) + \tau') \\ \bar{\rho}_2 = \tau(-\|W\|^2 + (\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta)) + (-\tau(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) + \tau')' \end{array} \right. \quad (5.39)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{G}}_2 = (-\kappa \sin \theta - \tau \cos \theta)(-\tau(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) + \tau') \\ \quad + \tau(\|W\|^2 + (\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta)) \\ \bar{\wp}_2 = \kappa(-\tau(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) + \tau') + \tau(-\kappa' + \kappa(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)) \\ \bar{\lambda}_2 = \kappa(\|W\|^2 + (\kappa' \sin \theta + \tau' \cos \theta)) \\ \quad + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)(-\kappa' + \kappa(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta)) \end{array} \right. \quad (5.40)$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (5.2.18)de yerine yazılırsa  $N^*B^*$ -Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_2}$  torsiyonunun Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{(\bar{\mathcal{G}}_2 \bar{\eta}_2 + \bar{\wp}_2 \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_2 \bar{\rho}_2)}{\bar{\mathcal{G}}_2^2 + \bar{\wp}_2^2 + \bar{\lambda}_2^2}$$

olarak bulunur.

### 5.3. $T^*B^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_3(s) = \beta_{T^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad (5.41)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_3}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_3} \frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{(\kappa^* - \tau^*) N^*}{\sqrt{2}} \quad (5.42)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_3}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*} \quad (5.43)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_3$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = \frac{(\kappa^* - \tau^*) N^*}{\sqrt{\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*}} \quad (5.44)$$

şeklinde olur. (5.41) ifadesinde  $T^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos \theta - \sin \theta) T + (\sin \theta + \cos \theta) B] \quad (5.45)$$

olur. (5.44) bağıntısında (4.4) ve (4.10) dan karşılıkları yazılırsa (5.45) ifadesinde verilen  $\beta_3$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3} = \frac{[\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] N}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2 - \|W\|^2 \sin 2\theta}} \quad (5.46)$$

şeklinde bulunur. (5.44) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \gamma_3 = -\kappa^* (\kappa^* - \tau^*) (\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*) \\ \nu_3 = (\kappa^* - \tau^*)' (\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*) - (\kappa^* - \tau^*) (\|W^*\| \|W^*\|' - \kappa^{*'} \tau^* - \kappa^* \tau^{*'}) \\ \chi_3 = \tau^* (\kappa^* - \tau^*) (\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*) \end{cases} \quad (5.47)$$

olmak üzere  $T'_{\beta_3}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_3}(s) = \sqrt{2} \frac{(\gamma_3 T^* + \nu_3 N^* + \chi_3 B^*)}{(\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*)^2} \quad (5.48)$$

olur. (5.47) ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\gamma_3} = -\kappa[\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)](\kappa^2 - \tau^2 - \|W\|^2 \sin 2\theta) \\ \overline{\nu_3} = [\kappa'(\cos \theta - \sin \theta) - \tau'(\sin \theta + \cos \theta)](\kappa^2 - \tau^2 - \|W\|^2 \sin 2\theta) \\ \quad - [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)](\kappa\kappa' - \tau\tau' - \|W\| \|W\|' \sin 2\theta) \\ \overline{\chi_3} = \tau[\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)](\kappa^2 - \tau^2 - \|W\|^2 \sin 2\theta) \end{cases} \quad (5.49)$$

şeklinde olur.  $T'_{\beta_3}(s)$  türev ifadesinde (4.4) ve (5.49) bağıntıları yerine yazılırsa

$T'_{\beta_3}(s)$  vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$T'_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{2}(\overline{\gamma_3} T + \overline{\nu_3} N + \overline{\chi_3} B)}{(\kappa^2 - \tau^2 - \|W\|^2 \sin 2\theta)^2} \quad (5.50)$$

olarak bulunur.  $\beta_3$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_3}$  ile gösterilirse (5.48) bağıntısından

$\kappa_{\beta_3}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_3} &= \|T'_{\beta_3}\|, \\ \kappa_{\beta_3} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\gamma_3^2 + \nu_3^2 + \chi_3^2}}{(\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*)^2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

olur. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_3}$  eğriliğinin Bertrand eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi



$$\kappa_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\gamma_3^2 + \nu_3^2 + \chi_3^2}}{(\kappa^2 - \tau^2 - \|W\|^2 \sin 2\theta)^2} \quad (5.52)$$

dır.  $\beta_2$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_2}$  ile gösterilirse (5.48) bağıntısından

$$N_{\beta_3} = \frac{T_{\beta_3}'}{\|T_{\beta_3}'\|},$$

$$N_{\beta_3} = \frac{\gamma_3 T^* + \nu_3 N^* + \chi_3 B^*}{\sqrt{\gamma_3^2 + \nu_3^2 + \chi_3^2}}$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_3}$  vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_3} = \frac{\bar{\gamma}_3 T + \bar{\nu}_3 N + \bar{\chi}_3 B}{\sqrt{\bar{\gamma}_3^2 + \bar{\nu}_3^2 + \bar{\chi}_3^2}} \quad (5.53)$$

şeklindedir.  $B_{\beta_3} = T_{\beta_3} \wedge N_{\beta_3}$  olduğundan  $B_{\beta_3}$  vektörü

$$B_{\beta_3} = \frac{(\kappa^* - \tau^*)(\chi_3 T^* - \gamma_3 B^*)}{\sqrt{(\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*)(\gamma_3^2 + \nu_3^2 + \chi_3^2)}} \quad (5.54)$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $B^*$ ,  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.4) ve (4.10) dan karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_3}$  binormal vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_{\beta_3} = \frac{(\chi_3 T - \gamma_3 B)[\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]}{\sqrt{(\kappa^2 - \tau^2 - \|W\|^2 \sin 2\theta)(\gamma_3^2 + \nu_3^2 + \chi_3^2)}} \quad (5.55)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_3$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınır

$$\beta_3'' = \frac{(-\kappa^{*2} + \tau^* \kappa^*)T^* + (\kappa^{*'} - \tau^{*'})N^* + (\kappa^* \tau^* - \tau^{*2})B^*}{\sqrt{2}},$$

$$\beta_3''' = \frac{\eta_3 T^* + \lambda_3 N^* + \rho_3 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_3$ ,  $\lambda_3$  ve  $\rho_3$  katsayıları

$$\begin{cases} \eta_3 = (-\kappa^{*2} + \kappa^* \tau^*)' - \kappa^* (\kappa^* - \tau^*)' \\ \lambda_3 = -\kappa^{*2} + \kappa^{*2} \tau^* + (\kappa^* - \tau^*)'' - \kappa^* \tau^{*2} + \tau^{*3} \\ \rho_3 = \tau^* (\kappa^* - \tau^*)' + (\kappa^* \tau^* - \tau^{*2})' \end{cases} \quad (5.56)$$

şeklindedir.  $\beta_3$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_3}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_3}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\langle \beta_3' \wedge \beta_3'', \beta_3''' \rangle}{\|\beta_3' \wedge \beta_3''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_3'$ ,  $\beta_3''$  ve  $\beta_3'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$\tau_{\beta_3}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\gamma_3 (\kappa^* \tau^* - \tau^{*2}) - \chi_3 (-\kappa^{*2} + \kappa^* \tau^*)}{(\|W^*\|^2 - 2\kappa^* \tau^*)^2} \quad (5.57)$$

olur. (5.56) bağıntısında (4.10) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l}
\bar{\eta}_3 = -\kappa' \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \\
- 2\kappa' \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \right]' \\
\bar{\lambda}_3 = -\kappa^2 \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \\
+ \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \right]'' \\
- \tau^2 \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \\
\bar{\rho}_3 = \tau' \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \\
+ 2\tau \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \right]'
\end{array} \right. \quad (5.58)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l}
\bar{g}_3 = -\kappa' \\
\bar{\varphi}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \\
\bar{\lambda}_3 = \tau'
\end{array} \right. \quad (5.59)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.57) de yerine yazılırsa  $T^*B^*$ -Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_3}$  torsiyonunun Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_3} = \sqrt{2} \frac{\tau \bar{g}_3 + \kappa \bar{\lambda}_3}{\bar{\varphi}_3 \|W\|^2}$$

olarak bulunur.

#### 5.4. $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_4(s) = \beta_{T^*N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad (5.60)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_4}$  yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_4} \frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ -\kappa^* T^* + (\kappa^* - \tau^*) N^* + \tau^* B^* \right] \quad (5.61)$$

olur ve norm alınır  $\frac{ds_{\beta_4}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)} \quad (5.62)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_4$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + (\kappa^* - \tau^*) N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \kappa^* \tau^*)}} \quad (5.63)$$

şeklinde olur. (5.60) ifadesinde  $T^*$ ,  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa

Smarandache eğrisinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\cos \theta - \sin \theta) T + N + (\sin \theta + \cos \theta) B] \quad (5.64)$$

olur. (5.63) denkleminde (4.4) ve (4.10) bağıntıları dikkate alınır (5.64)

ifadesindeki  $\beta_4$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{-\kappa T + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] N + \tau B}{\sqrt{\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]^2}} \quad (5.65)$$

şeklinde bulunur. (5.63) ifadesinin tekrar türevi alınır katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_4 = \left( -\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \tau^* \kappa^* \right) 2 \left( \|W^*\|^2 - \tau^* \kappa^* \right) + \kappa^* \left( 2 \|W^*\| \|W^*\|' - \tau^* \kappa^{*'} - \tau^{*'} \kappa^* \right) \\ \nu_4 = \left( -\|W^*\|^2 + (\kappa^* - \tau^*)' \right) 2 \left( \|W^*\|^2 - \tau^* \kappa^* \right) \\ \quad - (\kappa^* - \tau^*) \left( 2 \|W^*\| \|W^*\|' - \tau^* \kappa^{*'} - \tau^{*'} \kappa^* \right) \\ \chi_4 = \left( \kappa^* \tau^* - \tau^{*2} + \tau^{*'} \right) 2 \left( \|W^*\|^2 - \tau^* \kappa^* \right) - \tau^* \left( 2 \|W^*\| \|W^*\|' - \tau^* \kappa^{*'} - \tau^{*'} \kappa^* \right) \end{array} \right. \quad (5.66)$$

olmak üzere  $T'_{\beta_4}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3} \gamma_4 T^* + \nu_4 N^* + \chi_4 B^*}{4 \left( \|W^*\|^2 - \kappa^* \tau^* \right)^2} \quad (5.67)$$

olur. (5.66) ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma}_4 = \left[ -\kappa' - \kappa (\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)) \right] \left( \|W\|^2 + [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)]^2 \right) \\ \quad + \kappa \left( \|W\| \|W\|' + [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)] [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)]' \right) \\ \bar{\nu}_4 = \left[ -\|W\|^2 + (\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta))' \right] \left( \|W\|^2 + [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)]^2 \right) \\ \quad - [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)]^2 [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)]' \\ \quad - [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)] \|W\| \|W\|' \\ \bar{\chi}_4 = \left[ \tau [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)] + \tau' \right] \left( \|W\|^2 + [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)]^2 \right) \\ \quad - \tau \left( \|W\| \|W\|' + [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)] [\kappa (\cos \theta - \sin \theta) - \tau (\sin \theta + \cos \theta)]' \right) \end{array} \right. \quad (5.68)$$

şeklinde olur.  $T'_{\beta_4}(s)$  türev ifadesinde (4.4) ve (5.68) bağıntıları yerine yazılırsa  $T'_{\beta_4}$  vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}(\bar{\gamma}_4 T + \bar{\nu}_4 N + \bar{\chi}_4 B)}{\left(\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]^2\right)^2} \quad (5.69)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_4$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_4}$  ile gösterilirse (5.67) bağıntısından

$\kappa_{\beta_4}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_4} &= \|T'_{\beta_4}\|, \\ \kappa_{\beta_4} &= \frac{\sqrt{3} \sqrt{\gamma_4^2 + \nu_4^2 + \chi_4^2}}{4 \left(\|W^*\|^2 - \kappa^* \tau^*\right)^2} \end{aligned} \quad (5.70)$$

olur. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) dan karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_4}$  eğriliğinin Bertrand eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_4} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\left(\bar{\gamma}_4^2 + \bar{\nu}_4^2 + \bar{\chi}_4^2\right)}}{\left(\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]^2\right)^2} \quad (5.71)$$

dır.  $\beta_4$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_4}$  ile gösterilirse (5.67) bağıntısından

$$\begin{aligned} N_{\beta_4} &= \frac{T'_{\beta_4}}{\|T'_{\beta_4}\|}, \\ N_{\beta_4} &= \frac{\gamma_4 T^* + \nu_4 N^* + \chi_4 B^*}{\sqrt{\gamma_4^2 + \nu_4^2 + \chi_4^2}} \end{aligned}$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.4) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_4}$  vektörünün Bertrand eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$N_{\beta_4} = \frac{\bar{\gamma}_4 T + \bar{\nu}_4 N + \bar{\chi}_4 B}{\sqrt{\bar{\gamma}_4^2 + \bar{\nu}_4^2 + \bar{\chi}_4^2}} \quad (5.72)$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_4} = T_{\beta_4} \wedge N_{\beta_4}$  olduğundan  $B_{\beta_4}$  vektörü

$$B_{\beta_4} = \frac{(\chi_4(\kappa^* - \tau^*) - \tau^* \nu_4)T^* + (\tau^* \gamma_4 + \kappa^* \chi_4)N^* - (\kappa^* \nu_4 + \gamma_4(\kappa^* - \tau^*))B^*}{\sqrt{2(\|W^*\|^2 - \kappa^* \tau^*)(\gamma_4^2 + \nu_4^2 + \chi_4^2)}} \quad (5.73)$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$ ,  $B^*$ ,  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.10) ve (4.4) den karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_4}$  binormal vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_{\beta_4} = \frac{[\bar{\chi}_4(\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)) - \bar{\nu}_4 \tau]T + (\bar{\chi}_4 \kappa + \bar{\gamma}_4 \tau)N}{\sqrt{\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]^2(\bar{\gamma}_4^2 + \bar{\nu}_4^2 + \bar{\chi}_4^2)}} - \frac{[\bar{\nu}_4 \kappa + \bar{\gamma}_4(\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta))]B}{\sqrt{\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]^2(\bar{\gamma}_4^2 + \bar{\nu}_4^2 + \bar{\chi}_4^2)}} \quad (5.74)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_4$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınır

$$\beta_4'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ (-\kappa'^* - \kappa^{*2} + \kappa^* \tau^*)T^* + (-\|W^*\|^2 + \kappa'^* - \tau'^*)N^* + (\kappa^* \tau^* - \tau^{*2} + \tau'^*)B^* \right]$$

$$\beta_4''' = \frac{\eta_4 T^* + \lambda_4 N^* + \rho_4 B^*}{\sqrt{3}}$$

olur. Burada  $\eta_4$ ,  $\lambda_4$  ve  $\rho_4$  katsayıları

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_4 = (-\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \kappa^* \tau^*)' - \kappa^* \left( -\|W^*\|^2 + (\kappa^* - \tau^*)' \right) \\ \lambda_4 = \kappa^* \left( -\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \kappa^* \tau^* \right) + \left( -\|W^*\|^2 + (\kappa^* - \tau^*)' \right)' \\ \quad - \tau^* \left( \kappa^* \tau^* - \tau^{*2} + \tau^{*' } \right) \\ \rho_4 = \tau^* \left( -\|W^*\|^2 + (\kappa^* - \tau^*)' \right) + \left( \kappa^* \tau^* - \tau^{*2} + \tau^{*' } \right)' \end{array} \right. \quad (5.75)$$

şeklindedir.  $\beta_4$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_4}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_4}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\langle \beta_4' \wedge \beta_4'', \beta_4''' \rangle}{\|\beta_4' \wedge \beta_4''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_4'$ ,  $\beta_4''$  ve  $\beta_4'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$\tau_{\beta_4}$  torsiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_4 = (\kappa^* - \tau^*) \left( \kappa^* \tau^* - \tau^{*2} + \tau^{*' } \right) - \tau^* \left( \|W^*\|^2 + (\kappa^* - \tau^*)' \right) \\ \mathcal{P}_4 = \kappa^* \left[ \kappa^* \tau^* + \tau^{*2} + \tau^{*' } + \tau^* \left( -\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \kappa^* \tau^* \right) \right] \\ \mathcal{L}_4 = - \left[ \kappa^* \left( -\|W^*\|^2 + (\kappa^* - \tau^*)' \right) + (\kappa^* - \tau^*) \left( -\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \kappa^* \tau^* \right) \right] \end{array} \right. \quad (5.76)$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_4} = \sqrt{3} \frac{(\mathcal{G}_4 \eta_4 + \mathcal{P}_4 \lambda_4 + \mathcal{L}_4 \rho_4)}{\mathcal{G}_4^2 + \mathcal{P}_4^2 + \mathcal{L}_4^2} \quad (5.77)$$

olur. (5.75) ve (5.76) katsayılar ifadesinde (4.10) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar



$$\left\{ \begin{array}{l}
\bar{\eta}_4 = \left( -\kappa' - \kappa [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \right)' \\
\quad - \kappa \left( -\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]' \right) \\
\bar{\lambda}_4 = \kappa \left( -\kappa' - \kappa [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \right) \\
\quad + \left( -\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]' \right) \\
\quad - \tau \left( \tau [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] + \tau' \right) \\
\bar{\rho}_4 = \tau \left( -\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]' \right) \\
\quad + \left( \tau [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] + \tau' \right)'
\end{array} \right. \quad (5.78)$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l}
\bar{\mathcal{G}}_4 = \left( \kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta) \right) \left( \tau [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] + \tau' \right) \\
\quad - \tau \left( -\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]' \right) \\
\bar{\mathcal{F}}_4 = \kappa \left( \tau [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] + \tau' \right) \\
\quad + \tau \left( -\kappa' - \kappa [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \right) \\
\bar{\lambda}_4 = \kappa \left( -\|W\|^2 + [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)]' \right) \\
\quad + \left( [\kappa(\cos \theta - \sin \theta) - \tau(\sin \theta + \cos \theta)] \left( -\kappa' - \kappa^2(\cos \theta - \sin \theta) + \tau\kappa(\sin \theta + \cos \theta) \right) \right)
\end{array} \right. \quad (5.79)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.77) de yerine yazılırsa  $T^*N^*B^*$ -Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_4}$  torsiyonunun Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3} \left( \bar{\mathcal{G}}_4 \bar{\eta}_4 + \bar{\mathcal{F}}_4 \bar{\lambda}_4 + \bar{\lambda}_4 \bar{\rho}_4 \right)}{\bar{\mathcal{G}}_4^2 + \bar{\mathcal{F}}_4^2 + \bar{\lambda}_4^2}$$

olarak bulunur.

### 5.5. $N^*C^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_5(s) = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad (5.80)$$

(3.7)ye benzer olarak  $C^*$  ;

$$C^* = \sin \varphi^* T^* + \cos \varphi^* B^* \quad (5.81)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\varphi^*, W^*$  ile  $B^*$  arasındaki açıdır.  $N^*$  in yerine (4.4) den ve  $C^*$  in yerine (5.81) den karşılıkları yazılırsa

$$\beta_5(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \varphi^* T^* + N^* + \cos \varphi^* B^*) \quad (5.82)$$

olur. Eğrinin  $s_{\beta_5}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} T_{\beta_5} \frac{ds_5}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \varphi^* T^* + N^* + \cos \varphi^* B^*)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*) T^* + (\tau^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*) B^* \right] \end{aligned} \quad (5.83)$$

olur ve norm alınırsa,

$$\frac{ds_5}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\| + (\varphi^{*'})^2} \quad (5.84)$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifade (5.83) de yerine yazılırsa,  $\beta_5$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_5}(s) = \frac{(\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*) T^* + (\tau^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*) B^*}{\sqrt{\|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\| + (\varphi^{*'})^2}} \quad (5.85)$$

şeklinde olur. Darboux vektörü tanımından

$$W^* = N^* \wedge N^{*'} = \tau^* T^* + \kappa^* B^*$$

olur. Burada  $\tau^*, \kappa^*, T^*$  ve  $B^*$  in yerine karşılıkları yazılırsa Darboux vektörünün normu

$$\begin{aligned}
\|W^*\| &= \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \\
&= \sqrt{\kappa^2 \cos^2 \theta - 2\kappa\tau \cos \theta \sin \theta + \tau^2 \sin^2 \theta} \\
&\quad \sqrt{+\kappa^2 \sin^2 \theta + 2\kappa\tau \cos \theta \sin \theta + \tau^2 \cos^2 \theta} \\
&= \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\
\|W^*\| &= \|W\| \tag{5.86}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.6) ya benzer olarak

$$\begin{aligned}
\cos \varphi^* &= \frac{\kappa^*}{\|W^*\|} \\
&= \frac{\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta}{\|W\|} \\
&= \cos \theta \frac{\kappa}{\|W\|} - \sin \theta \frac{\tau}{\|W\|} \\
&= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi
\end{aligned}$$

$$\cos \varphi^* = \cos(\varphi + \theta) \tag{5.87}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sin \varphi^* &= \frac{\tau^*}{\|W^*\|} \\
&= \frac{\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta}{\|W\|} \\
&= \sin \theta \frac{\kappa}{\|W\|} + \cos \theta \frac{\tau}{\|W\|} \\
&= \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi
\end{aligned}$$

$$\sin \varphi^* = \sin(\varphi + \theta) \tag{5.88}$$

olur. (5.87) den (veya (5.88) den)

$$\begin{aligned}
\cos \varphi^* = \cos(\varphi + \theta) &\Rightarrow \varphi^{*'} \sin \varphi^* = \varphi' \sin(\varphi + \theta) \\
&\Rightarrow \varphi^{*'} = \varphi' \tag{5.89}
\end{aligned}$$

bulunur. (5.82) ifadesinde  $T^*$ ,  $N^*$ ,  $B^*$  in yerine (4.4) den ve  $\cos\varphi^*$ ,  $\sin\varphi^*$ ,  $\|W^*\|$ ,  $\varphi^{*'}$ ,  $\kappa^*$ ,  $\tau^*$  in yerine, (4.10), (5.86), (5.87), (5.88) ve (5.89) ifadelerinden karşılıkları yazılırsa  $T_{\beta_5}$  eğrisinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$T_{\beta_5} = \frac{(-\kappa + \varphi' \cos \varphi)T + (\tau - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{\|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2}} \quad (5.90)$$

şeklinde bulunur. (5.85) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_5 = (\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*)' \left( \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\| + (\varphi^{*'})^2 \right) \\ \quad - (\varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^*) \left( \|W^*\| \|W^{*'}\| - \varphi^{*''} \|W^*\| - \varphi^{*'} \|W^{*'}\| + (\varphi^{*'}) (\varphi^{*''}) \right) \\ \nu_5 = \left[ -\|W^*\|^2 + \varphi^{*'} \|W^*\| \right] \left( \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\| + (\varphi^{*'})^2 \right) \\ \chi_5 = (\tau^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*)' \cdot \left( \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\| + (\varphi^{*'})^2 \right) \\ \quad - (\tau^* - \varphi^{*'} \sin \varphi^*) \left( \|W^*\| \|W^{*'}\| - \varphi^{*''} \|W^*\| - \varphi^{*'} \|W^{*'}\| + (\varphi^{*'}) (\varphi^{*''}) \right) \end{array} \right. \quad (5.91)$$

olmak üzere  $T_{\beta_5}'(s)$  türevi

$$T_{\beta_5}'(s) = \frac{\sqrt{2}(\gamma_5 T^* + \nu_5 N^* + \chi_5 B^*)}{\left[ \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\| + (\varphi^{*'})^2 \right]^2} \quad (5.92)$$

olur. (5.92) ifadesinde  $\kappa^*$ ,  $\tau^*$ ,  $\|W^*\|$  ve  $\varphi^{*'}$  in yerine (4.10), (5.86) ve (5.89) ifadelerinden karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases}
\overline{\gamma}_5 = \left( -\kappa \cos \theta + \tau \sin \theta + \varphi' \cos(\varphi + \theta) \right)' \left( \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2 \right) \\
\quad - \left( -\kappa \cos \theta + \tau \sin \theta + \varphi' \cos(\varphi + \theta) \right) \left( \|W\| \|W\|' - \varphi'' \|W\| - \varphi' \|W\|' + (\varphi')(\varphi'') \right) \\
\overline{\nu}_5 = \left( -\|W\|^2 + \varphi' \|W\| \right) \left( \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2 \right) \\
\overline{\chi}_5 = \left( \kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta) \right)' \cdot \left( \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2 \right) \\
\quad - \left( \kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta) \right) \left( \|W\| \|W\|' - \varphi'' \|W\| - \varphi' \|W\|' + (\varphi')(\varphi'') \right)
\end{cases}
\quad (5.93)$$

şeklinde olur. Bulunan bu ifadeler  $T'_{\beta_5}(s)$  türev ifadesinde yerine yazılırsa  $T'_{\beta_5}(s)$  vektörünün Bertrand eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_5}(s) = \sqrt{2} \frac{\left[ (\overline{\gamma}_5 \cos \theta + \overline{\chi}_5 \sin \theta)T + \overline{\nu}_5 N + (-\overline{\gamma}_5 \sin \theta + \overline{\chi}_5 \cos \theta)B \right]}{\left[ \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2 \right]^2}
\quad (5.94)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_5$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_5}$  ile gösterilirse (5.92) bağıntısından

$\kappa_{\beta_5}$  eğriliği

$$\begin{aligned}
\kappa_{\beta_5} &= \|T'_{\beta_5}\|, \\
\kappa_{\beta_5} &= \frac{\sqrt{2(\gamma_5^2 + \nu_5^2 + \chi_5^2)}}{\left[ \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'} \|W^*\| + (\varphi^{*'})^2 \right]^2}
\end{aligned}
\quad (5.95)$$

Burada  $\gamma_5$ ,  $\nu_5$ ,  $\chi_5$ ,  $\|W^*\|$ ,  $\varphi^{*'}$  nın yerine (5.86), (5.89) ve (5.90) ifadelerinden karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_5}$  eğrisinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_5} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\gamma_5^2 + \nu_5^2 + \chi_5^2}}{\left[ \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2 \right]^2} \quad (5.96)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_5$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_5}$  ile gösterilirse (5.92) bağıntısından

$$N_{\beta_5} = \frac{T'_{\beta_5}}{\|T'_{\beta_5}\|},$$

$$N_{\beta_5} = \frac{\gamma_5 T^* + \nu_5 N^* + \chi_5 B^*}{\sqrt{\gamma_5^2 + \nu_5^2 + \chi_5^2}} \quad (5.97)$$

Burada  $T^*$ ,  $N^*$ ,  $B^*$ ,  $\gamma_5$ ,  $\nu_5$ ,  $\chi_5$  in yerine sırasıyla (4.4), (5.93), (5.86), (5.87), (5.88) ve (5.89) ifadelerinden karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_5}$  eğrisinin Bertrand eğrisine bağlı ifadesi

$$N_{\beta_5} = \frac{(\overline{\gamma_5} \cos \theta + \overline{\chi_5} \sin \theta) T + \overline{\nu_5} N + (-\overline{\gamma_5} \sin \theta + \overline{\chi_5} \cos \theta) B}{\sqrt{\overline{\gamma_5^2} + \overline{\nu_5^2} + \overline{\chi_5^2}}} \quad (5.98)$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_5} = T_{\beta_5} \wedge N_{\beta_5}$  olduğundan  $B_{\beta_5}$  vektörü

$$B_{\beta_5} = - \frac{\nu_5 (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*)}{\sqrt{\left( \|W^*\|^2 - 2\varphi'^* \|W^*\| + (\varphi'^*)^2 \right) (\gamma_5^2 + \nu_5^2 + \chi_5^2)}} T^*$$

$$- \frac{\chi_5 (\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*) + \gamma_5 (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*)}{\sqrt{\left( \|W^*\|^2 - 2\varphi'^* \|W^*\| + (\varphi'^*)^2 \right) (\gamma_5^2 + \nu_5^2 + \chi_5^2)}} N^* \quad (5.99)$$

$$+ \frac{\nu_5 (\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*)}{\sqrt{\left( \|W^*\|^2 - 2\varphi'^* \|W^*\| + (\varphi'^*)^2 \right) (\gamma_5^2 + \nu_5^2 + \chi_5^2)}} B^*$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$ ,  $B^*$ ,  $\gamma_5$ ,  $\nu_5$ ,  $\chi_5$ ,  $\kappa^*$ ,  $\tau^*$ ,  $\sin \varphi^*$ ,  $\cos \varphi^*$  ve  $\varphi'$  in yerine sırasıyla (4.4), (4.10), (5.93), (5.87), (5.88) ve (5.89) ifadelerinden karşılıkları yazılırsa

$B_{\beta_5}$  binormal vektörünün Bertrand eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\begin{aligned}
B_{\beta_5} = & \frac{\overline{\nu_5} \left[ -2\kappa \sin \theta \cos \theta + \tau (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \varphi' \sin(\varphi + 2\theta) \right]}{\sqrt{(\|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2) (\overline{\gamma_5^2} + \overline{\nu_5^2} + \overline{\chi_5^2})}} T \\
& + \frac{\overline{\gamma_5} \left[ (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta)) \right]}{\sqrt{(\|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2) (\overline{\gamma_5^2} + \overline{\nu_5^2} + \overline{\chi_5^2})}} N \\
& + \frac{\overline{\nu_5} \left[ \kappa (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + 2\tau \sin \theta \cos \theta + \varphi' \cos(\varphi + 2\theta) \right]}{\sqrt{(\|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| + (\varphi')^2) (\overline{\gamma_5^2} + \overline{\nu_5^2} + \overline{\chi_5^2})}} B
\end{aligned} \tag{5.100}$$

dır.  $\beta_5$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa,

$$\beta_5'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\varphi' \cos \varphi^* - \kappa^*)' T^* + (-\|W^*\|^2 + \varphi'^* \|W^*\|) N^* + (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*)' B^* \right]$$

ve

$$\beta_5''' = \frac{\eta_5 T^* + \lambda_5 N^* + \rho_5 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_5$ ,  $\lambda_5$ ,  $\rho_5$  katsayıları

$$\begin{cases}
\eta_5 = (\varphi' \cos \varphi^* - \kappa^*)'' + \kappa^* \|W^*\|^2 - \kappa^* \varphi'^* \|W^*\| \\
\lambda_5 = \kappa^* (\varphi' \cos \varphi^* - \kappa^*)' + (-\|W^*\|^2 + \varphi'^* \|W^*\|)' - \tau^* (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*)' \\
\rho_5 = -\tau^* \|W^*\|^2 + \tau^* \varphi'^* \|W^*\| + (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*)''
\end{cases} \tag{5.101}$$

şeklindedir.  $\beta_5$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_5}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_5}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\langle \beta_5' \wedge \beta_5'', \beta_5''' \rangle}{\|\beta_5' \wedge \beta_5''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_5'$ ,  $\beta_5''$  ve  $\beta_5'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\tau_{\beta_5}$  torsiyonu

$$\begin{cases} \partial_5 = -\left(-\|W^*\|^2 + \varphi'^* \|W^*\|\right) \left(\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*\right) \\ \wp_5 = -\left[\left(\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*\right) \left(\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*\right)' + \left(\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*\right)' \left(\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*\right)\right] \\ \tilde{\lambda}_5 = \left(\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*\right) \left(-\|W^*\|^2 + \varphi'^* \|W^*\|\right) \end{cases} \quad (5.102)$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2}(\partial_5 \eta_5 + \wp_5 \lambda_5 + \tilde{\lambda}_5 \rho_5)}{\partial_5^2 + \wp_5^2 + \tilde{\lambda}_5^2} \quad (5.103)$$

olur. (5.101) ve (5.102) ifadesinde (4.10), (5.86), (5.87), (5.88) ve (5.89) ifadelerinden karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \overline{\eta}_5 = \left(\varphi' \cos(\varphi + \theta) - \kappa \cos \theta + \tau \sin \theta\right)'' + (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \|W\|^2 \\ \quad - (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \varphi' \|W\| \\ \overline{\lambda}_5 = (\kappa \cos \theta - \tau \sin \theta) \left(\varphi' \cos(\varphi + \theta) - \kappa \cos \theta + \tau \sin \theta\right)' \\ \quad + \left(-\|W\|^2 + \varphi' \|W\|\right)' - (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) \left(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta)\right)' \\ \overline{\rho}_5 = (-\kappa \sin \theta - \tau \cos \theta) \|W\|^2 + (\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta) \varphi' \|W\| \\ \quad + \left(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta)\right)'' \end{cases} \quad (5.104)$$



ve

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{G}}_5 = -\left(-\|W\|^2 + \varphi' \|W\|\right) \left(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta)\right) \\ \overline{\wp}_5 = -\left[ \begin{aligned} &\left(\varphi' \cos(\varphi + \theta) - \kappa \cos \theta + \tau \sin \theta\right) \left(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta)\right)' \\ &+ \left(\varphi' \cos(\varphi + \theta) - \kappa \cos \theta + \tau \sin \theta\right)' \left(\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta - \varphi' \sin(\varphi + \theta)\right) \end{aligned} \right] \\ \overline{\lambda}_5 = \left(\varphi' \cos(\varphi + \theta) - \kappa \cos \theta + \tau \sin \theta\right) \left(-\|W\|^2 + \varphi' \|W\|\right) \end{cases} \quad (5.105)$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2} \left(\overline{\mathcal{G}}_5 \eta_5 + \overline{\wp}_5 \lambda_5 + \overline{\lambda}_5 \rho_5\right)}{\overline{\mathcal{G}}_5^2 + \overline{\wp}_5^2 + \overline{\lambda}_5^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Örnek 5.1:**  $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, 1)$  helis eğrisi bir Bertrand eğrisidir. Bu eğrinin

Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, 1) \\ N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0) \\ B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1) \\ C(s) = (0, 0, 1) \\ \kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tau(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Bu eğriye ait Bertrand eğrisinin denklemi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$$

idi.  $\lambda = \frac{2}{\sqrt{2}}$  alınırsa  $\alpha^*(s)$  eğrisinin denklemi;

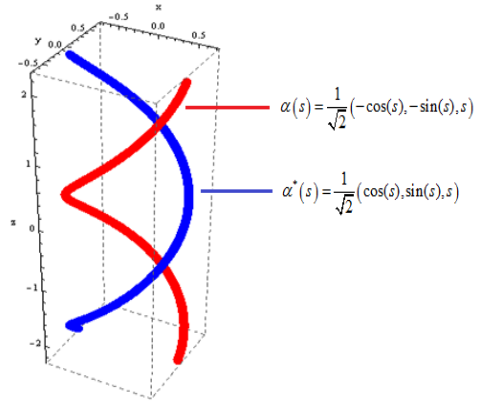
$$\alpha^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, 1) + \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0),$$

$$\alpha^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 1)$$

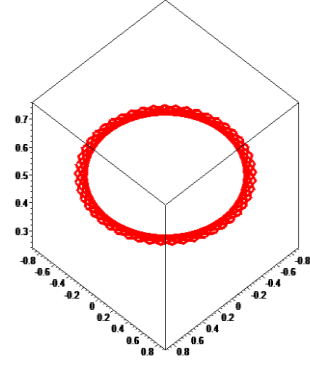
olur.  $\alpha^*(s)$  eğrisinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} T^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1) \\ N^*(s) = (\cos s, \sin s, 0) \\ B^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, 1) \\ C^*(s) = (0, 0, 1) \\ \kappa^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tau^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

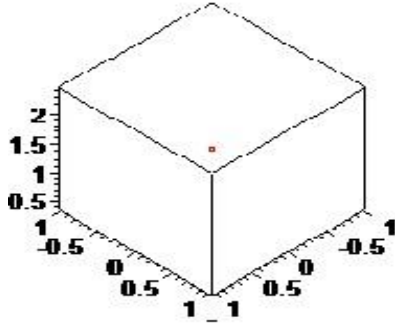
şeklinde bulunur. Bertrand eğri çiftine ait Smarandache eğrileri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



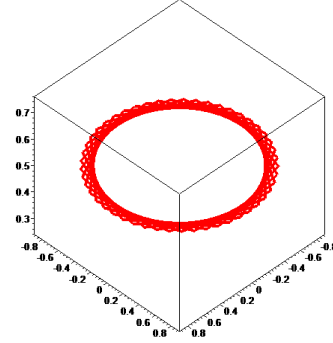
Şekil 5.1. Bertrand Eğri Çifti



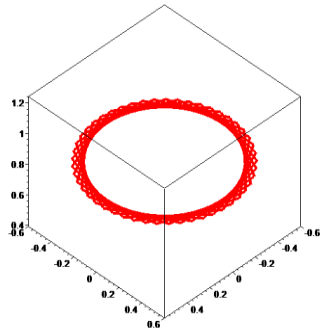
Şekil 5.2.  $T^*N^*$ -Smarandache Eğrisi



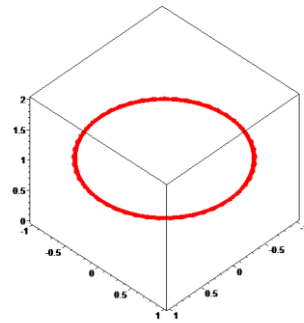
Şekil 5.3.  $T^*B^*$ -Smarandache Eğrisi



Şekil 5.4.  $N^*B^*$ -Smarandache Eğrisi



Şekil 5.5.  $T^*N^*B^*$ -Smarandache Eğrisi



Şekil 5.6.  $N^*C^*$ -Smarandache Eğrisi

## 6. SONUÇ ve ÖNERİLER

### 6.1. Sonuçlar

Bu tezde ilk olarak  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olarak alındığında  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisinin  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet vektörleri ve  $C^*$  birim Darboux vektörü tarafından oluşturulan Smarandache eğrileri ;

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \text{ eğrisi} \quad T^*N^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \text{ eğrisi} \quad N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \text{ eğrisi} \quad T^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \text{ eğrisi} \quad T^*N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \text{ eğrisi} \quad N^*C^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları hesaplanmıştır. İkinci olarak yukarıda verilen Smarandache eğrileri  $\alpha$  Bertrand eğrisinin Frenet vektörlerine bağlı olarak

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta T + N + \sin \theta B)$$

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos \theta - \sin \theta)T + (\sin \theta + \cos \theta)B]$$

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin \theta T + N + \cos \theta B)$$

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos \theta - \sin \theta)T + N + (\sin \theta + \cos \theta)B]$$

$$\beta_5(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \varphi T + N + \cos \varphi B)$$

şeklinde ifade edilmiş olup bu eğrilerin eğrilik ve burulmaları hesaplanmıştır.

## 6.2. Öneriler

Bu çalışma  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti ele alınarak Öklid uzayında yapılmıştır.

**a-**  $(\alpha, \alpha^*)$  Evolüt-involüt eğrileri olması durumunda yapılır.

**b-**  $(\alpha, \alpha^*)$  Mannheim eğri çifti olması durumunda yapılır.

Bu iki çalışma Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans Tezi olarak yapılmıştır. Benzer şekilde  $(\alpha, \alpha^*)$  Evolüt-involüt eğrileri,  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti ve  $(\alpha, \alpha^*)$  Mannheim eğri çifti için yapılan bu çalışmalar Lorenzt uzayında ve Dual uzayda da yapılabilir. Hatta bu uzaylar üzerinde değişik çatılar alınarak bu çatılar tarafından üretilecek Smarandache eğrileri tanımlanabilir ve bu eğrilerin bazı özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Ali, A. 2010. Special Smarandache Curves in the Euclidian Space. International Journal of Mathematical Combinatorics, 2: 30-36.
- Bayrak, N., Bektaş, Ö. ve Yüce, S. 2013. Special Smarandache Curves in  $E_1^3$ . International Conference on Applied Analysis and Algebra, 2012.
- Bektaş, Ö., Yüce, S. 2013. Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidian 3-Space. Romanian Journal of Mathematics and Computerscience, 3: 48-59.
- Çalışkan, A., Şenyurt, S. 2015. Smarandache Curves in Terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves. General Mathematics Notes, 31(2).
- Çalışkan, A., Şenyurt, S. 2015. Smarandache Curves in Terms of Sabban Frame of Fixed Pole Curves. Boletim da Sociedade Paranaense de Mathematica 3 srie. 34(2): 53-62.
- Çetin, M., Tuncer, Y. ve Karacan, M. 2014. Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3- Space. General Mathematics Notes, 20: 50-66.
- Ekmekçi, N., İlarıslan, K. 2001. On Bertrand Curves and Their Characterization. Differential Geometry-Dynamical Systems, 3(2): 17-24.
- Fenchel, W. 1951. On The Differential Geometry of Closed Space Curves. Bulletin of American Mathematical Society, 57: 44-54.
- Görgülü, A., Özdamar, E. 1986. A Generalizations of the Bertrand Curves as General inclined curve in  $E^n$ . Communications Faculty of Sciences University of Ankara, 35(1): 53-60.
- Hacısalıhoğlu, H. 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. 7, Malatya.
- Kasap, E. 1996. Bertrand Regle Yüzey Çiftleri İle İlgili Yeni Karakteristik Özellikler. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Liu, H., Wang, F. 2008. Mannheim partner curves in 3-space. Journal of Geometry 88 (1-2): 120-126.
- Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferansiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 436.

- Şenol, A., Zıplar, E. ve Yaylı, Y. 2012. General Helices and Bertrand Curves in Riemannian Space Form. *Mathematica Aeterna*, 2(2): 155-161.
- Şenyurt, S. 2012. Natural Lifts and The Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Mannheim Partner Curves in  $E^3$ . *International Journal of the Physical Sciences*, 7(16): 2414-2421.
- Şenyurt, S., Sivas, S. 2013. Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama. *Ordu Üniversitesi Bilimsel Teknik Dergisi*, 3(1):46-60.
- Taşköprü, K., Tosun, M. 2014. Smarandache Curves on  $S^2$ . *Boletim da Sociedade Paranense de Mathematica*, 32(1): 51-59.
- Turgut, M., Yılmaz, S. 2008. Smarandache Curves in Minkowski Space-time. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 3:51-55.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı-Soyadı** : Ünzile ÇELİK  
**Doğum Yeri** : İskenderun  
**Doğum Tarihi** : 06.05.1987  
**Bildiği Yabancı Dil** : İngilizce  
**İletişim Bilgileri** : unzile.celik@hotmail.com

Öğrenim Durumu :			
Derece	Bölüm/ Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi	2012
Tezsiz Yüksek Lisans	Matematik	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2014
İş Deneyimi:			
Görev	Görev Yeri	Yıl	
Matematik Öğretmenliği	Turnasuyu Kız Anadolu Lisesi ORDU	2012-2013	
Matematik Öğretmenliği	Gülyalı Merkez Ortaokulu	2013-2014	
Matematik Öğretmenliği	Ayşe Şahin Çok Programlı Anadolu Lisesi	2014-2015	