T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUVVET SERİSİ TOPLANABİLME METOTLARI İÇİN BAZI TAUBER TİPİ TEOREMLER

SELİM BAĞCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SELİM BAĞCI

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KUVVET SERİSİ TOPLANABİLME METOTLARI İÇİN BAZI TAUBER TİPİ TEOREMLER

SELİM BAĞCI

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 61 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. CEMAL BELEN)

Bu tez kuvvet serisi toplanabilme metodu ile ilgili Tauber tipi teoremleri inceleyen bir derleme çalışmasıdır.

Giriş bölümü olan ilk bölümde tezin çerdiği çalışmalara ve tezin amacına yer verilmiştir.

İkinci bölümde teze ait temel gösterimler, tanımlar ve sonuçlar sunulmuştur.

Tezin ana bölümü olan üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda J_p kuvvet serisi metodu ile ilgili Tauber tipi teoremler incelenmiştir. Bu teoremler J_p toplanabilme metodunun alışılmış anlamdaki yakınsaklığı ve ayrıca ağırlıklı ortalama metoduna göre toplanabilmeyi gerektirdiği koşulları içermektedir. İkinci kısmında ise benzer ilişki çift dizilerle elde edilmiş kuvvet serisi metodu için incelenmiştir.

Tezin son bölümünde ise tüm çalışmaya ait sonuçlar ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Tauber Tipi Teoremler, Kuvvet Serisi Toplanabilme Metodu, J_p-toplanabilme, Çift Diziler

ABSTRACT

SOME TAUBERIAN THEOREMS FOR POWER SERIES METHODS OF SUMMABILITY

SELİM BAĞCI

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 61 PAGES

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. CEMAL BELEN)

This work is a compilation thesis which studies basic Tauberian theorems for power series method of summability.

In the first chapter, which is an introduction part, the studies in the thesis and the purpose of the thesis are included.

In the second chapter, basic notations, definitions and results of the thesis are presented.

The third chapter is main chapter of the thesis and it is divided into two sections. In the first section, Tauberian theorems for J_p power series summability method are examined. These theorems include conditions that allow convergence and summability by weighted mean method are implied by J_p summability method. In the second section, similar relations are established for power series method derived for double sequences.

In the final chapter some conclusions and recommendations of the thesis are presented.

Keywords: Tauberian Theorems, Power Series Summability Method, J_p-summability, Weighted Mean Method, Double Sequences.

TEŞEKKÜR

İki yıllık bir çalışmanın ürünü olan bu tezin hazırlanması sürecinde, disiplinli çalışma anlayışını hayatıma aşılayan, deneyimlerinden, bilgilerinden, yaptığı çalışmalarından faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve akademik hayatıma ismi altında başlamaktan onur duyduğum değerli danışmanım Doç. Dr. Cemal BELEN'e ayrıca maddi ve manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen aileme bu teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

J_p	:	Yakınsaklık yarıçapı 1 olan kuvvet serisi metodu
M_p	:	p dizisi ile belirlenen ağırlıklı ortalama metodu
c	:	Tüm yakınsak dizilerin kümesi
$x_n = O(1)$	:	$\{x_n\}$ dizisinin yeterince büyük n değerleri için sınırlı olması
$x_n = o(1)$	:	$\{x_n\}$ dizisinin bir sıfır dizisi olması
$x_n \sim y_n$	:	$n \to \infty$ iken $\{x_n/y_n\}$ dizisinin limitinin 1 olması
Δ^n	:	n. mertebeden fark operatörü
$\{t_n\}$	:	Bir dizinin ağırlıklı ortalamalar dizisi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	$1, 2, 3, ...$pozitif tam sayılar sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	$0, 1, 2, 3, ...$ negatif olmayan tam sayılar kümesi
$x_n = O_L(1)$	:	$\{x_n\}$ dizisinin yeterince büyük n değerleri için soldan sınırlı olması
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	:	$\{x_n\}$ dizisinin üst limiti
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	:	$\{x_n\}$ dizisinin alt limiti

1. GİRİŞ

Abel (1826), $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < 1$ için yakınsak olan reel katsayılı bir kuvvet serisi olmak üzere, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

olduğunu, diğer bir ifadeyle yakınsak bir serinin Abel toplanabilir olduğunu ispatlamıştır. Ancak, bu önermenin karşıtı doğru değildir. Örneğin, $f(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ için $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1/2$ olmasına rağmen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi ıraksaktır.

Alfred Tauber (1897) Abel'in teoreminin karşıtının $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$ ek koşulu altında doğru olduğunu, yani

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = s \in \mathbb{R}$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$$

ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

olduğunu ispatlamıştır.

Hardy (1910), Tauber'in teoremindeki $\{n a_n\}$ dizisinin bir sıfır dizisi olması koşulunu ondan daha zayıf bir koşul olan sınırlı olma koşulu ile değiştirilebileceğini öne sürmüş ve Littlewood (1911) bu öneriyi kullanarak aynı sonucu elde etmiştir. Hardy ve Littlewood elde ettikleri karşıt teoremi *Tauber tipi teorem* olarak isimlendirmiştir. Böylece bir dizinin veya serinin herhangi bir metot ile toplanabilirliğinden, belirli bir ek koşul aracılığı ile alışılmış anlamda yakınsaklığının elde edildiği teoremler "Tauber tipi" teoremler olarak literatürdeki yerini almıştır. Bu teoremlerde kullanılan ilave koşullar ise genellikle "Tauber koşulu" olarak adlandırılır.

Toplanabilme teorisindeki en önemli ve genel metotlardan biri de kuvvet serisi ile toplanabilme metodudur. Katsayıları $p_0 > 0$, $p_k \geq 0$ $(k = 1, 2, ...)$ koşulunu sağlayan ve yakınsaklık yarıçapı $R \in (0, \infty]$ olan $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ kuvvet serisi verilsin. $\{s_k\}$ herhangi bir sayı dizisi olmak üzere eğer $\sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k$ kuvvet serisi $|x| < R$ için yakınsak ve de $\lim_{x \to R^-} p(x)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k = s$ ise $\{s_k\}$ dizisi s sayısına $\{p_k\}$ dizisi ile belirlenen kuvvet serisi metoduna göre toplanabilirdir denir. Yakınsaklık yarıçapına veya $\{p_k\}$ dizisinin seçimine bağlı olarak kuvvet serisi metodu Abel, logaritmik L, J_p ve Borel metodu gibi özel durumlara sahiptir.

Kuvvet serisi toplanabilme metotlarının en çok kullanılan özel durumu ise yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu J_p-metodudur. J_p-toplanabilme metodu belirli koşullar altında regüler olan bir metottur. Yani, yakınsak bir dizi veya seri aynı limit veya toplam değerine J_p-toplanabilirdir. Ancak bunun karşıtı doğru değildir. Diğer taraftan Ishiguro (1964) ağırlıklı ortalama metodu olarak adlandırılan M_p-toplanabilme metodunun J_p-toplanabilme metodunu gerektiğini göstermiştir. J_p-toplanabilme metoduna ilişkin Tauber tipi teoremler iki gruba ayrılabilir. Birincisi, J_p-toplanabilmeden M_p -toplanabilmenin elde edildiği (kısaca $J_p \to M_p$ tipi) teoremler, ikincisi ise J_p-toplanabilmeden yakınsaklığın elde edildiği (kısaca $J_p \to c$ tipi) teoremlerdir. Bu iki gruba ait başlıca Tauber tipi teoremler Ishiguro (1964,1965), Štepánek (1966), Kwee (1971,1972), Mikhalin (1977), Borwein (1981), Tietz ve Trautner (1988), Tietz (1989), Kratz ve Stadtmüller (1989), Tietz (1990) tarafından yapılan çalışmalarda mevcuttur. Bunun yanı sıra Baron ve Statdmüller (1997) çift dizilerin ağırlıklı ortalama metodu ile kuvvet serisi metodu arasındaki ilişkiyi elde ederek bu metotlar ile ilgili Tauber tipi teoremler elde etmişlerdir. Çanak ve Totur (2012), Mikhalin'in (1977) bir sonucundan yararlanarak yeni bir $J_p \to c$ tipi Tauber teoremi ispatlamışlardır. Totur ve Çanak (2017) ise Tietz'e (1990) ait bir $J_p \to c$ tipi Tauber teoremini genişletmişlerdir.

Bu yüksek lisans tezi J_p kuvvet serisi metodu için yukarıda belirtilen calışmaları kapsamlı bir şekilde ele alan bir derleme çalışmasıdır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde ilk olarak tezin tamamında kullanılan bazı gösterimlerin anlamlarına yer verilecektir. Daha sonra tez çalışmasının ana konusu olan kuvvet serisi toplanabilme metodu tanıtılıp bazı özellikleri sunulacaktır. Son olarak çift dizi ve çift seri kavramlarına değinilecektir.

2.1 Gösterimler

c ile tüm yakınsak dizilerin kümesi, $\exp\{x\}$ ile e^x üstel fonksiyonu gösterilecektir. Bunların yanı sıra Landau sembolleri ve asimptotik denklik gösterimleri ve bunların anlamları aşağıdaki gibidir.

f ve g, bir x_0 noktasının komşuluğunda tanımlı fonksiyonlar olsun.

Eğer x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı tüm x değişkenleri için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa o zaman $f(x) = O(g(x))$, $(x \to x_0)$ gösterimi kullanılır. Bu tanım sembolik olarak

$$f(x) = O(g(x)),\ \ (x \to x_0) \Leftrightarrow \exists C > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|$$

şeklinde yazılabilir. Eğer burada x değişkenleri $|x - x_0| < \delta$ yerine $x_0 - \delta < x < x_0$ veya $x_0 < x < x_0 + \delta$ koşulunu gerçeklerse o zaman sırasıyla $f(x) = O(g(x))$, $\left(x \to x_0^-\right)$ ve $f(x) = O(g(x))$, $\left(x \to x_0^+\right)$ gösterimlerinin anlamları elde edilir.

Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı mevcut öyle ki $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm x değişkenleri için $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ ise o zaman $f(x) = o(g(x))$, $(x \to x_0)$ gösterimi kullanılır. Eğer g fonksiyonu ilgili komşulukta sıfırdan farklı ise

$$f(x) = o(g(x)),\ \ (x \to x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

yazılabilir.

Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ise f ve g, x_0 noktasının bir komşuluğunda denktir denir ve bu durum $f(x) \sim g(x)$, $(x \to x_0)$ şeklinde gösterilir.

Yukarıda kullanılan gösterimler $x \to x_0$ yerine $x \to \infty$ yazıldığında da geçerlidir. Bunları sembolik olarak aşağıdaki gibi açıklayabiliriz:

$$f(x) = O(g(x)), \ (x \to \infty) \Leftrightarrow \exists C > 0 \ , \exists M > 0, \ \forall x > M, \ |f(x)| \leq C\,|g(x)|\,,$$

$$f(x) = o(g(x)), \ (x \to \infty) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ , \exists M > 0, \ \forall x > M, \ |f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|\,,$$

$$f(x) \sim g(x), \ (x \to \infty) \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Tek başına $f(x) = O(g(x))$ veya $f(x) = o(g(x))$ veya $f(x) \sim g(x)$ kullanılması bunların $x \to \infty$ iken geçerli olduğu anlamına gelecektir. Örneğin, herhangi iki $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizisi için $a_n = O(b_n)$ kısa gösterimi, $a_n = O(b_n)$ $(n \to \infty)$ anlamında kullanılacaktır. O sembolü yerine O_L sembolü kullanıldığında ise bu $f(x) \geq -Cg(x)$, yani soldan sınırlılık anlamına gelecektir.

2.2 Toplanabilme metodu ve Kuvvet Serileri

Herhangi bir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi için bir toplanabilme metodu basit olarak bu seriye onun $\{s_n\}$ kısmi toplamlar dizisi ile ilişkili olan bir "toplam" veya bir "limit" olarak adlandırılan bir tek sayı karşılık getirme işlemidir. Pratikte bir toplanabilme metodu üzerinde çalışıldığında aşağıdaki dönüşümlerden biri ele alınır.

Diziden-Diziye: $$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} s_k$$

Diziden-Fonksiyona: $$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)\, s_k \qquad (0 < x < R \ \text{ için})$$

Seriden-Diziye: $$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk} s_k$$

Seriden-Fonksiyona: $$t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)\, s_k \qquad (0 < x < R \ \text{ için}).$$

Burada R sayısı sonlu veya sonsuz olabilir. (c_{nk}) matrisine veya $\{c_k(x)\}$ fonksiyonlar dizisine genellikle dönüşümün çekirdeği denir.

Diziden-diziye veya diziden-fonksiyona tanımlı bir metot için $s_n \to s$ $(n \to \infty)$ iken buna karşılık gelen t_n veya $t(x)$, $n \to \infty$ iken veya $x \to R^-$ iken s sayısına yaklaşır ise ilgili metoda regüler metot denir.

Aşağıdaki teorem diziden fonksiyona tanımlı metotların regülerliğini karakterize etmektedir.

Teorem 2.2.1 $\{c_k(x)\}$, $0 < x < R$ için tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda aşağıda belirtilen (a) ve (b) koşullarının gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart (i), (ii) ve (iii) koşullarının gerçeklenmesidir.

(a) $\{s_k\}$ dizisinin yakınsaklığı her $x \in (0, R)$ için $t(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x) s_k$ serisinin yakınsaklığını gerektirir.

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s$ iken $\lim\limits_{x\to R^-} t(x) = s$ dir.

(i) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x)$ serisi her $x \in (0, R)$ için mutlak yakınsaktır ve öyle A ve M sayıları vardır ki $0 < A < R$ ve her $x \in (A, R)$ için $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(x)| < M$ dir.

(ii) Her $k = 0, 1, 2, ...$ için $\lim\limits_{x\to R^-} c_k(x) = 0$ dır.

(iii) $\lim\limits_{x\to R^-} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x) = 1$ dir (Shawyer ve Watson, 1994).

$\{p_k\}$ reel sayı dizisi için

$$\begin{aligned} p_0 &> 0, \quad p_k \geq 0 \;\; (k = 1, 2, ...) \\ p(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \quad \text{kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı } R \in (0, \infty] \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

olsun. $\{s_k\}$ reel terimli bir dizi olmak üzere $\sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k$ kuvvet serisi $|x| < R$ için yakınsak ve de

$$\lim_{x\to R^-} \frac{1}{p(x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k = s$$

ise $\{s_k\}$ dizisi s sayısına kuvvet serisi metodu ile toplanabilirdir denir ve bu durum $s_k \to s(P)$ şeklinde gösterilir.

Not 2.2.1

(i) $0 < R < \infty$ ise $\{p_k\}$ dizisini $\{p_k R^k\}$ dizisi ile değiştirebiliriz. Böylece $\sum_{k=0}^{\infty} p_k R^k x^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olur. Sonuç olarak (P) kuvvet serisi metotlarında sadece $R = 1$ ve $R = \infty$ durumlarını ele almak yeterlidir.

(ii) Eğer her $k = 0, 1, 2, ...$ için $p_k = 1$ ise $R = 1$ ve $p(x) = 1/(1 - x)$ olur. Bu durumda (P) kuvvet serisi metodu Abel toplanabilme metodu olarak adlandırılır.

(iii) Eğer $R = 1$ ise (P) metodu J_p metodu olarak adlandırılır.

(iv) Eğer her $k = 0, 1, 2, ...$ için $p_k = 1/k!$ ise $R = \infty$ ve $p(x) = e^x$ olur. Bu durumda (P) kuvvet serisi metodu Borel toplanabilme metodu olarak adlandırılır (Boos, 2000).

Teorem 2.2.2

(i) $R = \infty$ ise (P) metodu regülerdir.

(ii) $0 < R < \infty$ ise (P) metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k R^k = \infty$ olmasıdır (Shawyer ve Watson, 1994; Borwein 1957).

Teorem 2.2.3

(a) Aşağıdakiler denktir.

(i) J_p metodu regülerdir.

(ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x) = \infty$.

(iii) $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \to \infty \quad (n \to \infty)$.

(b) Borel metodunun regüler olması için gerek ve yeter şart $p(x)$'in bir polinom olmaması, yani sonsuz çoklukta k için $p_k \neq 0$ olmasıdır. (Boos, 2000).

Tanım 2.2.1 $\{\mu_k\}$ reel terimli bir dizi olsun. Eğer her $n, k = 0, 1, 2, ...$ için $\Delta^n \mu_k \geq 0$ ise $\{\mu_k\}$ dizisine tamamen monoton veya mutlak monoton dizi denir. Burada,

$$\Delta^n \mu_k = \begin{cases} \mu_k, & n = 0 \text{ ise} \\ \Delta^{n-1}\mu_k - \Delta^{n-1}\mu_{k+1}, & n \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıp, Δ^n, n. mertebeden fark operatörü olarak adlandırılır. Ayrıca reel ve sanal kısımları tamamen monoton diziler olan kompleks terimli diziler tamamen monoton dizi olarak tanımlanır (Boos, 2000; Hardy 1949).

Teorem 2.2.4 $\{\mu_k\}$ tamamen monoton bir dizi ise

$$\mu_k = \int t^k d\chi(t)$$

gösterimi geçerlidir. Burada integral Riemann-Stieltjes integrali olup $\chi(t)$, t değişkeninin azalmayan ve sınırlı bir fonksiyonudur (Hardy, 1949).

$\{p_n\}$ negatif olmayan reel sayıların $p_0 > 0$ özelliğine sahip bir dizisi ve

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

olsun. $\{s_n\}$ reel terimli herhangi bir dizi veya veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \qquad P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k$$

$$p_s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k$$

$$\sigma(x) := \frac{p_s(x)}{p(x)} = \frac{1}{p(x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k$$

ve

$$t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k$$

tanımlayalım. Ayrıca,

$$0 < x < 1 \ \text{ için } \ p(x) < \infty \tag{2.2.2}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 < x < 1$ için

$$\begin{aligned} P(x) &= p_0 + (p_0 + p_1)\, x + (p_0 + p_1 + p_2)\, x^2 + \cdots \\ &= \left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\ &= p(x)\, \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

yani

$$(1-x)\, P(x) = p(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{2.2.3}$$

olur.

Tanım 2.2.2 $t_n \to s\ (n \to \infty)$ ise $\{s_n\}$ dizisi veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi $p = \{p_n\}$ dizisi ile belirlenen ağırlıklı ortalama metoduna göre s sayısına yakınsaktır veya kısaca $\{s_n\}$ dizisi s sayısına M_p-toplanabilirdir (yakınsaktır) denir ve bu durum $s_n \to s\,(M_p)$ veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(M_p)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3 $\sigma(x)$ serisi $0 < x < 1$ için yakınsak ve $\sigma(x) \to s\ (x \to 1^-)$ ise $\{s_n\}$ dizisi (veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi) s sayısına J_p kuvvet serisi metodu ile toplanabilirdir veya kısaca $\{s_n\}$ dizisi s sayısına J_p-toplanabilirdir (yakınsaktır) denir ve bu durum $s_n \to s\,(J_p)$ (veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(J_p)$) ya da $s_n \to s\,(J, p_n)$ (veya $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(J, p_n)$) ile gösterilir.

$s_n \to s$ iken $s_n \to s\,(M_p)$ ve $s_n \to s\,(J_p)$ olduğu, yani M_p ve J_p metotlarının regüler olduğu bilinmektedir (Hardy, 1949; syf. 57,81). Aşağıdaki teorem ise M_p ve J_p metotları arasındaki ilişkiyi ifade eder.

Teorem 2.2.5 $s_n \to s\,(M_p)$ ise $s_n \to s\,(J_p)$ dir (Ishiguro, 1964).

İspat. $s_n \to s\,(M_p)$ olsun. $t_{-1} = P_{-1} = 0$ olmak üzere $t_n P_n - t_{n-1} P_{n-1} = p_n s_n$ olduğundan

$$p_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (t_n P_n - t_{n-1} P_{n-1})\, x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n$$

olur. Buradan, (2.2.3) eşitliği kullanılarak

$$\frac{p_s(x)}{p(x)} = \frac{(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n}{p(x)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n}{\frac{1}{1-x}p(x)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n P_n x^n}{P(x)} = \frac{P_t(x)}{P(x)}$$

eşitliği elde edilir. J_p metodu regüler olduğundan $t_n \to s$ $(n \to \infty)$ iken $\frac{P_t(x)}{P(x)} \to s$ $(x \to 1^-)$ olur. Bu ise, yukarıdaki eşitliğe göre $s_n \to s\,(J_p)$ olmasını gerektirir. ■

Teorem 2.2.5'in karşıtının geçerli olmadığını görmek için aşağıdaki örneği ele alabiliriz.

Örnek 2.2.1 $\{s_n\}$ dizisi

$$s_n = \begin{cases} k+1, & n = 2k \text{ ise} \\ -(k+1), & n = 2k+1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve her k için $p_k = 1$ olsun. Bu durumda

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k = \begin{cases} \frac{k+1}{2k+1}, & n = 2k \text{ ise} \\ 0, & n = 2k+1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $\{t_{2k}\}$ dizisi 1/2 ye, $\{t_{2k+1}\}$ dizisi 0'a yakınsar. O halde $\{t_n\}$ yakınsak değildir. Yani $\{s_n\}$ dizisi M_p-toplanabilir değildir. Fakat, $|x| < 1$ için $p(x) = 1/(1-x)$ olup

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(x)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k &= (1-x)\left(1 - x + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 3x^5 + \cdots\right) \\ &= (1-x)\left[(1-x) + 2x^2(1-x) + 3x^4(1-x) + \cdots\right] \\ &= (1-x)^2\left[1 + 2x^2 + 3x^4 + \cdots\right] \\ &= (1-x)^2 \frac{1}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

ve böylece

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{p(x)}\sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$$

olduğundan $\{s_n\}$ dizisi 1/4 sayısına J_p-toplanabilirdir (Aasma ve diğ., 2017).

Bu örnek, J_p-toplanabilir olan fakat yakınsak olmayan dizilerin de mevcut olduğunu göstermektedir.

2.3 Çift Diziler ve Seriler

Tanım kümesi $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ olan bir fonksiyona çift indisli dizi veya kısaca çift dizi denir.

Aşağıda çift dizilerin yakınsaklığı tanımı, diğer bir adıyla Pringsheim anlamında yakınsaklık tanımı verilmektedir.

Tanım 2.3.1 $\{x_{m,n}\}$ bir çift dizi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık en az bir $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ mevcut öyle ki her $m \geq m_0$ ve her $n \geq n_0$ için $|x_{m,n} - x| < \varepsilon$ ise $\{x_{m,n}\}$ dizisi x sayısına yakınsaktır denir ve bu durum

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{m,n} = x \qquad \text{veya} \qquad P\text{-} \lim_{m,n\to\infty} x_{m,n} = x \qquad \text{veya} \qquad x_{m,n} \to x$$

ile gösterilir (Pringsheim, 1900).

Tanımda $\max\{m_0, n_0\} = n_\varepsilon$ alırsak $m \geq n_\varepsilon$ ve $n \geq n_\varepsilon$ iken $m \geq m_0$ ve $n \geq n_0$ olacağından tanımı tek bir n_ε indisi ile de verebiliriz.

Eğer her m, n için $|x_{m,n}| \leq M$ olacak biçimde bir M sayısı varsa, ya da

$$\sup\{|x_{m,n}| : m, n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

ise $\{x_{m,n}\}$ dizisi sınırlıdır denir.

Yakınsak bir dizi sınırlı iken yakınsak bir çift dizi sınırlı olmayabilir.

Örnek 2.3.1

$$x_{m,n} = \begin{cases} n, & m = 1 \\ m, & n = 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olsun. Her $m, n \geq 2$ için $x_{m,n} = 0$ olduğundan $x_{m,n} \to 0$ dır. Ancak $\{x_{m,n}\}$ sınırlı bir dizi değildir.

$\{a_{k,l}\}$ bir çift dizi olmak üzere her $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l}$$

olsun. Buna göre her $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için

$$\begin{aligned} a_{k,l} &= S_{k,l} - S_{k,l-1} - (S_{k-1,l} - S_{k-1,l-1}) \\ &= S_{k,l} - S_{k,l-1} - S_{k-1,l} + S_{k-1,l-1} \end{aligned}$$

olur.

Genel terimi $\{a_{k,l}\}$ ve kısmi toplamlar dizisi $\{S_{m,n}\}$ olan bir çift seri

$$\sum_{k,l} a_{k,l} \qquad \text{veya} \qquad \sum_{(k,l)}\sum a_{k,l}$$

ya da indisleri de belirtilerek

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty} a_{k,l}$$

şeklinde gösterilir. $(S_{m,n})$ yakınsak ise $\sum\limits_{k,l} a_{k,l}$ serisi yakınsaktır denir. Eğer $S_{m,n} \to S$ ise S sayısına $\sum\limits_{k,l} a_{k,l}$ serisinin çift toplamı denir ve

$$\sum_{k,l} a_{k,l} = S$$

yazılır (Ghorpade ve Limaye, 2010).

3. KUVVET SERİSİ TOPLANABİLME METOTLARI İÇİN BAZI TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümün birinci kısmında J_p kuvvet serisi metodu ile ilgili temel niteliğinde olan Tauber tipi teoremleri içeren çalışmalar incelenecektir. Bu çalışmalar kronolojik olarak ele alınacaktır.

İkinci kısımda ise çift indisli diziler için kuvvet serisi metodu incelenip buna ilişkin bir Tauber tipi teorem ele alınmıştır.

3.1 J_p-Toplanabilme Metodu İçin Tauber Tipi Teoremler

Bu kısımda aksi belirtilmedikçe $\{p_n\}$ dizisinin

$$p_0 > 0, \qquad p_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

koşullarını sağladığı ve $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu kabul edilecektir.

İlk olarak M_p-toplanabilme metoduna ilişkin bilinen aşağıdaki Tauber tipi teoremi ispatsız olarak ifade edelim.

Teorem 3.1.1 $n = 0, 1, \ldots$ için $p_n > 0$ olmak üzere

$$a_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$$

olsun. Eğer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi M_p-toplanabilir ise bu seri aynı toplama yakınsaktır (Hardy 1949, syf. 124).

M_p metodu J_p metodunu gerektirdiğinden benzer bir sonucun J_p metodu için geçerli olacağını bekleyebiliriz.

Teorem 3.1.2

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{m} p_n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} = O(1) \qquad (m \to \infty), \tag{3.1.1}$$

bir M sabiti için

$$0 < p_n \leq M, \qquad (n = 0, 1 \ldots), \tag{3.1.2}$$

ve

$$\frac{n}{P_n} = O(1) \tag{3.1.3}$$

koşulları gerçeklensin. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s sayısına J_p-toplanabilir ve

$$a_n = o\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \tag{3.1.4}$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s sayısına yakınsaktır (Ishiguro, 1964).

İspat. $0 < x < 1$ için

$$\begin{aligned} s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_m p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{m-1} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} + \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \\ &= I + J \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{\sum_{n=0}^{m-1} |s_m - s_n| p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \\ &\leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \left\{ p_1 \frac{|a_1| p_0}{p_1} + p_2 \frac{|a_2| (p_0 + p_1)}{p_2} + \cdots + p_m \frac{|a_m| (p_0 + p_1 + \cdots p_{m-1})}{p_m} \right\} \end{aligned}$$

olur. Eğer $x = 1 - \frac{1}{m}$ alınırsa

$$|I| \leq \frac{P_m}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \frac{1}{P_m} \left\{ p_1 \frac{|a_1| P_0}{p_1} + p_2 \frac{|a_2| P_1}{p_2} + \cdots + p_m \frac{|a_m| P_{m-1}}{p_m} \right\}$$

elde edilir. (3.1.4) koşulundan

$$m \to \infty \quad \text{için} \qquad \frac{|a_m| \, P_{m-1}}{p_m} = o\,(1)$$

dir. Dolayısıyla, (3.1.1) den

$$m \to \infty \quad \text{için} \quad I = o\,(1) \tag{3.1.5}$$

dir. Şimdi de J toplamını ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir m sayısı seçelim ki $n > m$ iken

$$|a_n| \leq \varepsilon \frac{p_n}{P_n}$$

olsun. Bu durumda

$$|s_m - s_n| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \varepsilon \left\{ \frac{p_{m+1}}{P_{m+1}} + \frac{p_{m+2}}{P_{m+2}} + \cdots + \frac{p_n}{P_n} \right\} =: \varepsilon Q_n$$

olur. $x = 1 - \frac{1}{m}$ alındığında

$$|J| \leq \frac{\varepsilon \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} Q_n p_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} = \frac{\varepsilon \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} Q_n p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \tag{3.1.6}$$

elde edilir.

$$Q_n \leq \frac{P_n - P_m}{P_m} = \frac{P_n}{P_m} - 1$$

olduğundan ayrıca (3.1.1) ve (3.1.2) den (3.1.6) eşitsizliği

$$\begin{aligned} |J| \quad &\leq \quad \frac{\varepsilon \dfrac{1}{P_m} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} P_n p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} = \frac{\varepsilon P_m \dfrac{1}{P_m^2} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} P_n p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \\ &\leq \quad \varepsilon M \frac{1}{P_m^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada M, her bir durumda farklı olabilen bir sabittir. Ayrıca yine (3.1.2) koşulu kullanılırsa (3.1.3) den yeterince büyük m sayıları için

$$\begin{aligned} |J| \quad &\leq \quad \varepsilon M \frac{1}{P_m^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \leq \varepsilon M \frac{1}{P_m^2} \int_m^{\infty} x \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n dx \\ &\leq \quad \varepsilon M \frac{m^2}{P_m^2} \leq \varepsilon M \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

bulunur. O halde (3.1.5) ve (3.1.7) den

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{x \to 1^-} \frac{p_s\,(x)}{p\,(x)} = s$$

bulunur. Bu ise teoremi ispatlar. ■

Sonuç 3.1.1

$$n = 0, 1, \ldots \text{ için} \quad 0 < \sigma \le p_n \le M \tag{3.1.8}$$

olacak biçimde σ ve M sabitleri mevcut olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s sayısına J_p-toplanabilir ve (3.1.4) koşulu gerçeklenir ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s sayısına yakınsaktır (Ishiguro, 1964).

İspat. (3.1.8) koşulunun (3.1.1) ve (3.1.3) koşullarını gerektirdiğini göstermek yeterlidir. (3.1.8) den yeterince büyük m sayıları için

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \le M \frac{m+1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} \le M \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^n}$$

$$\le \frac{M}{\sigma} < \infty$$

olur. Ayrıca (3.1.8) den yeterince büyük n sayıları için

$$\frac{n}{P_n} \le \frac{n}{(n+1)\,\sigma} < \frac{1}{\sigma}$$

elde edilir. Böylece ispat biter. ■

Uyarı 3.1.1 Sonuç 3.1.1 deki (3.1.4) koşulu

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

koşulu ile değiştirilebilir.

Teorem 3.1.3 $p_n > 0$ olmak üzere

$$p_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.1.9}$$

gerçeklensin. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s sayısına (J, p_n) toplanabilir ve (3.1.4) gerçeklenir ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s sayısına yakınsaktır (Ishiguro, 1965).

İspat. (3.1.9) ve (3.1.4) den öyle bir m sayısı seçebiliriz ki $n > m$ için

$$np_n \le M \tag{3.1.10}$$

(burada M her durum için değişebilen bir sabittir) ve

$$|a_n| \le \varepsilon \frac{p_n}{P_n} \tag{3.1.11}$$

koşulları aynı anda gerçeklenir. Burada ε istenildiği kadar küçük bir pozitif sayıdır. İlk olarak (3.1.9) koşulundan (3.1.1) koşulunun, yani

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n} = O(1) \qquad (m \to \infty \text{ için})$$

koşulunun elde edildiğini gösterelim. (3.1.10) koşulundan

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n \leq M \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1-\frac{1}{m}\right)^n \leq \frac{M}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{m}\right)^n = M$$

dir. Ayrıca $0 < x < 1$ için

$$0 < p_n (1-x^n) = p_n (1-x) \left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) < (1-x)\, np_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{m} p_n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n \right| &= \left| \sum_{n=0}^{m} p_n - \sum_{n=0}^{m} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n - \sum_{n=m+1}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=0}^{m} p_n \left[1 - \left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right] \right| + M \\
&\leq \frac{(p_1 + 2p_2 + \cdots + mp_m)}{m} + M
\end{aligned}$$

bulunur. $np_n = O(1)$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{m} np_n = O(m)$$

olur ve buna göre yeterince büyük m sayıları için

$$\left| \sum_{n=0}^{m} p_n - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n \right| \leq M$$

dir. Buradan

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{m} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n} - 1 \right| \leq \frac{M}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

yani

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{n=0}^{m} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n} = 1$$

elde edilir ve böylece (3.1.1) gerçeklenir. $0 < x < 1$ için

$$\begin{aligned} s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} &= \frac{\sum_{n=0}^{m-1} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} + \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} (s_m - s_n) p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \\ &= I + J \end{aligned}$$

olsun. $x = 1 - \frac{1}{m}$ yazılırsa (3.1.4) ve (3.1.1) den Teorem 3.1.2 nin ispatında olduğu gibi

$$I = o(1) \qquad (m \to \infty \ \text{ için}) \tag{3.1.12}$$

elde edilir.

Şimdi de J toplamını ele alalım. (3.1.10) ve (3.1.11) koşullarından

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &\leq \varepsilon \left\{ \frac{p_{m+1}}{P_{m+1}} + \frac{p_{m+2}}{P_{m+2}} + \cdots + \frac{p_n}{P_n} \right\} \leq \frac{\varepsilon M}{P_m} \{p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots + p_n\} \\ &\leq \frac{\varepsilon M}{P_m} \left\{ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\} \leq \frac{\varepsilon M}{P_m} \frac{n}{m} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $x = 1 - \frac{1}{m}$ için

$$|J| \leq \frac{\frac{\varepsilon M}{m P_m} \sum_{n=m+1}^{\infty} n p_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \leq \frac{\varepsilon P_m \frac{M}{m P_m^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n}$$

elde edilir. (3.1.1) koşulundan yeterince büyük m değerleri için

$$|J| \leq \varepsilon \frac{M}{m P_m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \leq \varepsilon \tag{3.1.13}$$

bulunur. O halde (3.1.12) ve (3.1.13) koşullarından

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{x \to 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s$$

elde edilir ve bu teoremin ispatını tamamlar. ■

Sonuç 3.1.2

$$0 < \frac{\sigma}{n+1} \leq p_n \leq \frac{M}{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde σ ve M sabitleri mevcut olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye J_p-toplanabilir ve

$$a_n = o\left(\frac{1}{n \log n}\right)$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye yakınsaktır (Ishiguro, 1965).

Teorem 3.1.4 (3.1.1) koşulu gerçeklensin. $p_n > 0$ olmak üzere

$$\{p_n\} \text{ monoton azalan bir dizi} \tag{3.1.14}$$

olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye J_p-toplanabilir ve (3.1.4) gerçeklenir ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye yakınsaktır (Ishiguro, 1965).

İspat. Eğer $\sigma > 0$ ve $\{p_n\} \searrow \sigma$ (yani, $\{p_n\}$ dizisi azalarak σ ya yakınsak) ise (3.1.8) koşulu gerçeklenir ve böylece bu teorem Sonuç 3.1.1'in özel bir durumu olur. Dolayısıyla (3.1.1) koşuluna gerek duyulmadan ispat tamamlanır.
Teorem 3.1.3'ün ispatında olduğu gibi

$$s_m - \frac{p_s(x)}{p(x)} = I + J$$

olsun. O zaman (3.1.4) ve (3.1.1) den $x = 1 - \frac{1}{m}$ için

$$I = o(1) \qquad m \to \infty \text{ için}$$

elde edilir. (3.1.11) den

$$|s_m - s_n| \leq \varepsilon \left\{ \frac{p_{m+1}}{P_{m+1}} + \frac{p_{m+2}}{P_{m+2}} + \cdots + \frac{p_n}{P_n} \right\} \leq \varepsilon \frac{P_n}{P_m}$$

ve buna göre (3.1.14) den

$$|J| \leq \frac{\varepsilon \dfrac{1}{P_m} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} P_n p_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} \leq \frac{\varepsilon \dfrac{p_m}{P_m} \displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} P_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

olur. Teorem 3.1.3'ün ispatında olduğu gibi (3.1.1) den $x = 1 - \frac{1}{m}$ iken

$$|J| \leq \varepsilon M \frac{p_m}{P_m^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

dir. Eğer

$$R_n = \sum_{v=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^v = m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^v$$

denilirse (3.1.14) den

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n &= \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n (R_n - R_{n+1}) \\ &= P_{m+1} R_{m+1} + \sum_{n=m+2}^{\infty} R_n (P_n - P_{n-1}) \\ &= P_{m+1} m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m+1} + \sum_{n=m+2}^{\infty} p_n R_n \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|J| &\leq \varepsilon M \frac{p_m}{P_m^2} P_{m+1} m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m+1} + \varepsilon M \frac{p_m}{P_m^2} \sum_{n=m+2}^{\infty} p_n m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \\
&= S_1 + S_2
\end{aligned}$$

dir. $\{p_n\}$ azalan olduğundan $P_m = \sum_{k=0}^{m} p_k \geq (m+1)\, p_m > m p_m$ ve buradan

$$\frac{p_m}{P_m} < \frac{1}{m}$$

dir. Ayrıca $\frac{P_{m+1}}{P_m} \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq S_1 = \varepsilon M \frac{p_m}{P_m} \frac{P_{m+1}}{P_m} m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m+1} \leq \varepsilon M \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m+1} < \varepsilon M$$

elde edilir. Ayrıca, (3.1.14) den

$$0 \leq S_2 \leq \varepsilon M \frac{p_m^2}{P_m^2} m \sum_{n=m+2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \leq \varepsilon M \left(\frac{p_m}{P_m} m\right)^2 \leq \varepsilon M$$

dir. O halde yeterince büyük m değerleri için

$$|J| \leq \varepsilon M$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{x \to 1^-} \frac{p_s(x)}{p(x)} = s$$

bulunur. Böylece ispat biter. ■

Štěpánek (1966), Teorem 3.1.4'de (ve ayrıca Teorem 3.1.2'de) kullanılan (3.1.1) koşuluna gerek olmadığını belirtmiştir. Çünkü, $m = 2, 3, \ldots$ için

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m P_m < \sum_{n=0}^{m} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n < \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

ve

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m = e^{-1}$$

olduğundan

$$\frac{\sum_{n=0}^{m} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n} = O(1) \qquad (m \to \infty)$$

elde edilir.

M_p-metodunun regülerliğinden ve (3.1.4) koşulundan

$$a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = o\left(P_n\right) \tag{3.1.15}$$

dir. Diğer taraftan,

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = o\left(n\right) \qquad \left(n \to \infty\right)$$

koşulu $(J, 1)$ metodu yani Abel toplanabilme metodu için bir Tauber koşulu olduğundan (Tauber, 1897), (3.1.15) koşulunun da J_p metodu için bir Tauber tipi koşul olması beklenir. Aşağıdaki teorem klasik Tauber teoremin basit bir genişlemesidir.

Teorem 3.1.5 (3.1.14) koşulu gerçeklensin ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s sayısına J_p-toplanabilir olsun. Bu durumda (3.1.15) koşulu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s ye yakınsak olmasını gerektirir (Štěpánek, 1966).

İspat.

$$u_n = a_0P_0 + a_1P_1 + \ldots + a_nP_n, \qquad u_{-1} = 0, \qquad P_{-1} = 1$$

$$b_n = \frac{u_{n-1}p_n}{P_{n-1}P_n}, \qquad r_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_{k-1}\left(P_k - P_{k-1}\right)}{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=0}^{n+1} u_{k-1}\left(\frac{1}{P_{k-1}} - \frac{1}{P_k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_{k-1}}{P_{k-1}} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_{k-1}}{P_k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_{k-1}}{P_{k-1}} - \sum_{k=1}^{n+2} \frac{u_{k-2}}{P_{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{P_{k-1}}\left(u_{k-1} - u_{k-2}\right) - \frac{u_n}{P_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P_k}\left(u_k - u_{k-1}\right) - \frac{u_n}{P_{n+1}} \\ &= s_n - \frac{u_n}{P_{n+1}} \end{aligned}$$

ve böylece

$$r_n = s_n - \frac{u_n}{P_{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{3.1.16}$$

olur. (3.1.16) dan $x \in (0, 1)$ için

$$\frac{p_r\left(x\right)}{p\left(x\right)} = \frac{p_s\left(x\right)}{p\left(x\right)} - \frac{1}{p\left(x\right)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{u_n}{P_n} x^n \tag{3.1.17}$$

dir. Yine J_p-metodunun regüler olması nedeniyle (3.1.15) koşulundan

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{p\left(x\right)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{u_n}{P_n} x^n = 0 \tag{3.1.18}$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye J_p-toplanabilir olduğundan (3.1.18) ve (3.1.17) den $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serisi de s sayısına J_p-toplanabilirdir.

$$\frac{P_n}{p_n} b_n = \frac{u_{n-1}}{P_{n-1}}$$

olduğundan (3.1.15) koşulundan $b_n = o\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ koşulu elde edilir. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serisine Teorem 3.1.4 uygulandığında $\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = s$ bulunur. Dolayısıyla (3.1.16) ve (3.1.15) den $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ dir. Böylece Teorem 3.1.5 in ispatı tamamlanır. ■

Sonuç 3.1.3 (3.1.14) koşulunun sağlandığını ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s sayısına J_p-toplanabilir olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p \frac{P_k^p}{p_k^{p-1}} = o(P_n) \qquad (p \geq 1) \tag{3.1.19}$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye yakınsaktır (Štěpánek, 1966).

İspat. $p = 1$ ise (3.1.19) , (3.1.15) koşulunu gerektirir. Eğer $p > 1$ ise Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} |a_k| P_k &= \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} |a_k| \frac{P_k}{p_k^{\frac{p-1}{p}}} p_k^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{P_n}\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p \frac{P_k^p}{p_k^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{P_n}\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p \frac{P_k^p}{p_k^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} P_n^{\frac{p-1}{p}} = \left(\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p \frac{P_k^p}{p_k^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad n = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, yine (3.1.19) koşulu (3.1.15) koşulunu gerektirir. Böylece ispat biter. ■

Not 3.1.1 Kronecker'in dizi ve serilere ilişkin bir teoremi şu şekildedir: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ yakınsak bir seri ve $\{b_n\}$ artan ve sonsuza ıraksak bir dizi ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n} b_k u_k = 0$$

dır (Hardy, 1949; syf. 73).

Sonuç 3.1.4 (3.1.14) koşulunun sağlandığını ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin s ye J_p-toplanabilir olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \left(\frac{P_k}{p_k}\right)^{p-1} < \infty \qquad (p \geq 1)$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye yakınsaktır (Štěpánek, 1966).

İspat. $p = 1$ durumunda iddianın doğruluğu açıktır. $p > 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Not 3.1.1 de ifade edilen Kronecker'e ait teorem $u_k = |a_k|^p \left(\frac{P_k}{p_k}\right)^{p-1}$ ve $b_k = P_k$ alınarak uygulanırsa o zaman (3.1.19) koşulu elde edilir. Böylece Sonuç 3.1.3 den ispat biter. ■

Şimdi de Kwee (1972) tarafından verilen aşağıdaki teoremi ispatlayalım

Teorem 3.1.6 $p(x) \sim p(x^2)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(J, p_n)$ ve

$$n > m \to \infty \quad \text{ve} \quad \frac{P_n}{P_m} \to 1 \quad \text{iken} \qquad \liminf (s_n - s_m) \geq 0 \tag{3.1.20}$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ dir (Kwee, 1972).

Teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmalardan yararlanılacaktır.

Lemma 3.1.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(M_p)$ ve (3.1.20) gerçeklenirse $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ dir.

Bu lemma, Kwee (1967) tarafından, her k için $p_k = 1/(k+1)$ olan logaritmik toplanabilme metodu için ispatlanmıştı. Aynı düşünce ile M_p metodu için de ispatlanabilir.

Lemma 3.1.2 $p(x) \sim p(x^2)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(J, p_n)$ ve K pozitif bir sabit olmak üzere her n için $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \geq -K$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(M_p)$ dir (Kwee, 1971).

İspat. Genelliği kaybetmeksizin her n için $s_n \geq 0$ kabul edebiliriz. $0 < c < 1$ olan keyfi bir c sabiti için

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < c \text{ ise} \\ \frac{1}{x}, & c \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. $a + b = 1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $\phi(x) \leq ax + b$ olacak şekilde a ve b sabitleri seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^-} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n \phi(x^n) &\leq a \lim_{x\to1^-} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^{2n} + b \lim_{x\to1^-} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n \\
&= a\frac{p(x^2)}{p(x)} \lim_{x\to1^-} \frac{1}{p(x^2)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^{2n} + bs \\
&= as + bs \\
&= s
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de $a' + b' = 1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $\phi(x) \leq a'x + b'$ olacak şekilde a ve b sabitleri seçelim. Benzer düşünce ile

$$\lim_{x\to1^-} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n \phi(x^n) \geq s$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{p(x)}\sum_{n=0}^{\infty}p_n s_n x^n\phi\left(x^n\right)=s \tag{3.1.21}$$

elde edilir. $x\to 1^-$ olsun öyle ki $n\to\infty$ iken $x^{n+1}<c\leq x^n$ sağlansın. Bu durumda $v>n$ için $\phi\left(x^v\right)=0$ ve $1\leq v\leq n$ için $\phi\left(x^v\right)=x^v$ olur.

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{v=0}^{n}p_v-\sum_{v=0}^{n}p_v x^v=\sum_{v=0}^{n}p_v x^{-v}\left(x^v-x^{2v}\right)\leq\frac{1}{c}\sum_{v=0}^{n}p_v\left(x^v-x^{2v}\right)\\ &\leq \frac{1}{c}\left(p\left(x\right)-p\left(x^2\right)\right)=o\left(p\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{v=n+1}^{\infty}p_v x^v=\sum_{v=n+1}^{\infty}p_v\left(\frac{x^v-x^{2v}}{1-x^v}\right)\leq\frac{1}{1-c}\sum_{v=n+1}^{\infty}p_v\left(x^v-x^{2v}\right)\\ &\leq \frac{1}{1-c}\left(p\left(x\right)-p\left(x^2\right)\right)=o\left(p\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$P_n=p\left(x\right)+o\left(p\left(x\right)\right)$$

yani $P_n\sim p\left(x\right)$ dir. Bu durumda (3.1.21) eşitliği

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}p_v s_v=s$$

eşitliğine dönüşür. Böylece teorem ispatlanır. ■

Lemma 3.1.3 $\Phi\left(n\right)$ kesin artan, sürekli ve pozitif bir fonksiyon öyle ki $\Phi\left(u\right)\to\infty$ $\left(u\to\infty\right)$ ve $\Phi\left(n\right)-\Phi\left(n-1\right)\to 0$ $\left(n\to\infty\right)$ ve

$$\tau\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x\right)s_n$$

olsun. Ek olarak aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

(i) $c_n\left(x\right)\geq 0,\quad c_n\left(x\right)\to 0$ $\left(x\to\infty\right)$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x\right)=1$.

(ii) $x>M\to\infty$ iken $\Phi\left(x\right)-\Phi\left(M\right)\to\infty$ ise

$$\sum_{n=0}^{M}c_n\left(x\right)\to 0,$$

$N>x\to\infty$ iken $\Phi\left(N\right)-\Phi\left(x\right)\to\infty$ ise

$$\sum_{n=N}^{\infty}c_n\left(x\right)\left\{\Phi\left(n\right)-\Phi\left(N\right)\right\}\to 0$$

dır.

(iii) $n \leq t < n+1$ için $s(t) = s_n$ ise

$$t > u \to \infty \quad \text{iken} \quad \Phi(t) - \Phi(u) \to 0 \quad \text{olduğunda} \quad \liminf(s(t) - s(u)) \geq 0$$

dır

(iv) $\tau(x)$ sınırlıdır.

O halde $\{s_n\}$ sınırlıdır (Kwee, 1971).

Teorem 3.1.6'nın İspatı. $n \leq w < n+1$ için $h(w) = p_n P_n^{-1}$ ve

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int_0^u h(w)\,dw \\ &= \sum_{v=0}^{[u]-1} p_v P_v^{-1} + (u - [u])\, p_{[u]} P_{[u]}^{-1}\end{aligned}$$

olsun. Burada $[u]$ ile u'nun tam kısmı gösterilmektedir. $P_n \to \infty$ koşulundan $\Phi(u) \to \infty$ $(u \to \infty)$ olur. $0 < c < 1$ olmak üzere c keyfi bir sabit olsun. Bu durumda Lemma 3.1.2'nin ispatında olduğu gibi $n \to \infty$ ve $x \to 1^-$ iken $P_n \sim p(x)$ ve $x^{n+1} < c \leq x^n$ dir. Dolayısıyla c sayısı c^2 ile değiştirilebileceğinden $P_{2n} \sim p(x)$ olur. Buradan $P_n \sim P_{2n}$ elde edilir. $n \geq 1$ için $1 \leq \dfrac{P_{n+1}}{P_n} \leq \dfrac{P_{2n}}{P_n}$ dir. Böylece $P_n \sim P_{n+1}$ ve $\Phi(n) - \Phi(n-1) \to 0$ elde edilir.

$$q(x) = p\left(\exp\left(\frac{-1}{x}\right)\right)$$

ve

$$c_n(x) = p_n q^{-1}(x) \exp\left(\frac{-n}{x}\right)$$

olsun. $\exp\{-([x]+1)/x\} \leq \exp(-1) \leq \exp(-[x]/x)$ olduğundan $P_{[x]} \sim q_{(x)}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{M} c_n(x) &= q(x) \sum_{n=0}^{M} p_n \exp\left(\frac{-n}{x}\right) \\ &= O\left(P_{[x]}^{-1} P_m\right)\end{aligned}$$

dir. $x > M \to \infty$, $\Phi(x) - \Phi(M) \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}\Phi(x) - \Phi(M) &= \sum_{n=M+1}^{[x]} \frac{p_n}{P_n} + o(1) \\ &\leq \frac{P_{[x]} - P_M}{P_M} + o(1) \to \infty\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

dir. Bundan dolayı

$$\sum_{n=0}^{M} a_n(x) \to 0$$

dır. $N > x \to \infty$, $\Phi(N) - \Phi(x) \to \infty$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{\infty} c_n(x)\{\Phi(n) - \Phi(N)\} &= q^{-1}(x) \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n \exp\left(-\frac{n}{x}\right) \sum_{v=N}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} \\
&= q^{-1}(x) \sum_{v=N+1}^{\infty} \frac{p_{v-1}\exp\left(-\frac{v}{x}\right)}{P_{v-1}} \sum_{n=v}^{\infty} p_n \exp\left\{-\frac{(n-v)}{v}\right\} \quad (3.1.23) \\
&\leq q^{-1}(x) P_N^{-1} \sum_{v=N+1}^{\infty} p_{v-1} \exp\left(-\frac{v}{x}\right) \exp\left(\frac{v}{N}\right) \sum_{n=v}^{\infty} p_n \exp\left(-\frac{n}{N}\right)
\end{aligned}$$

dir. (3.1.22) ye benzer bir düşünce ile $\frac{P_N}{P_{[x]}} \to \infty$ olduğunu görebiliriz. $P_n \sim P_{2n}$ olduğundan $\frac{N}{x} \to \infty$ dir. Bundan dolayı her $v \geq N$ için düzgün olarak

$$\exp\left(\frac{v}{N}\right) = o\left(\exp\left(\frac{v}{2x}\right)\right)$$

dir. (3.1.23) ün sağında yer alan içteki toplam $q(N) \sim P_N$ yi aşmaz (Bakınız:Kwee, 1971). Dolayısıyla

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n(x)\{\Phi(n) - \Phi(N)\} = o\left(q^{-1}(x)\, q(2x)\right) = o(1)$$

dir. $n \leq t < n+1$, $m \leq n < m+1$ olsun. Bu durumda,

$$\Phi(t) - \Phi(u) = \sum_{v=m+1}^{n} p_v P_v^{-1} + o(1) \geq 1 - \frac{P_m}{P_n} + o(1)$$

dir. Buradan $t > u \to \infty$ iken $\Phi(t) - \Phi(u) \to 0$ olması $n > m \to \infty$ iken $\frac{P_m}{P_n} \to 1$ olmasını gerektirir. Böylece Lemma 3.1.3 den $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(J, p_n)$ ve (3.1.20) koşulları s_n nin sınırlı olmasını gerektirir. Lemma 3.1.2 den $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(M_p)$ ve Lemma 3.1.1 den $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Şimdi ise Mikhalin (1977) tarafından verilen bazı teoremleri ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1.7

$$1 < \frac{m}{n} \to 1 \quad \text{iken} \quad 1 \leq \frac{P_m}{P_n} \to 1 \tag{3.1.24}$$

ve

$$\{1/P_n\} \text{ mutlak (tamamen) monoton bir dizi} \tag{3.1.25}$$

koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim.

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3.1.26}$$

olmak üzere $\{t_n\}$ dizisi için

$$1 < \frac{m}{n} \to 1 \ (n \to \infty) \quad \text{iken} \qquad \liminf (t_m - t_n) \geq 0 \tag{3.1.27}$$

koşulu gerçeklensin. O zaman $\frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = O(1)$ $(x \to 1^-)$ ise $t_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ dir. Ayrıca, $s_n \to s(J_p)$ ise $s_n \to s(M_p)$ dir (Mikhalin, 1977).

Teorem 3.1.8 (3.1.24) ve (3.1.25) gerçeklensin ve $\{s_n\}$ dizisi

$$1 \leq \frac{P_m}{P_n} \to 1 \quad (n \to \infty) \quad \text{iken} \quad \liminf (s_m - s_n) \geq -r \quad (0 \leq r < \infty) \tag{3.1.28}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $\frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = O(1)$ $(x \to 1^-)$ ise $s_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ dir. Eğer $s_n \to s(J_p)$ ise $\limsup |s_n - s| \leq r$ dir.

$p_n = 1/(n+1)$ durumunda Teorem 3.1.7 ve 3.1.8, Kokhanovskii (1974) tarafından, $p_n = 1$ durumunda ise Teorem 3.1.8, Davydov (1963) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.9 (3.1.24) ve (3.1.25) koşulları ile

$$s_n - t_n \geq -C \ (C \geq 0) \quad \text{veya} \quad s_n - t_n \geq -C \frac{P_{n-1}}{(n+1)p_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

koşulu gerçeklensin. Eğer $\frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = O(1)$ $(x \to 1^-)$ ise $s_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ dir. Eğer $s_n \to s(J_p)$ ise $s_n \to s(M_p)$ dir (Mikhalin, 1977).

Teorem 3.1.9, $p_n = 1$ durumunda Teslenko (1974) tarafından, $p_n = 1/(n+1)$ durumunda ise Kokhanovskii (1974) tarafından ispatlanmıştır.

Sonuç 3.1.5 (3.1.24) ve (3.1.25) koşulları gerçeklensin. Eğer

$$s_n = O(1) \ (n \to \infty) \quad \text{veya} \quad s_n = O\left(\frac{P_{n-1}}{(n+1)p_n}\right) \ (n \to \infty)$$

ise $s_n \to s(J_p)$ iken $s_n \to s(M_p)$ dir (Mikhalin, 1977).

Sonuç 3.1.6 (3.1.24) ve (3.1.25) koşulları gerçeklensin. $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k = o(P_n)$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(J_p)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ dir (Mikhalin, 1977).

Sonuç 3.1.5, $p_n = 1$ için Hardy (1949) tarafından, $p_n = 1/(n+1)$ için Kokhanovskii (1974) tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca, Sonuç 3.1.6, monoton azalan $\{p_n\}$ dizileri için Teorem 3.1.4 ile ispatlanmıştı.

Tanım 3.1.1 Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ serisi her $x \in [0,1)$ için yakınsak ve

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n = s$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi veya $\{s_n\}$ dizisi s sayısına (AR) metodu ile toplanabilirdir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(AR)$ ya da $s_n \to s\,(AR)$ ile gösterilir (Mikhalin, 1977).

Yukarıda ifadeleri verilen Teorem 3.1.7-3.1.9 ile Sonuç 3.1.5-3.1.6'nın ispatları için aşağıdaki lemmalar kullanılacaktır.

Lemma 3.1.4 (3.1.24) ve (3.1.25) koşulları gerçeklensin. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(J_p)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(AR)$ dir (Mikhalin, 1977).

İspat. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s\,(J_p)$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n t_n x^n$ serisi $[0,1)$ aralığında yakınsaktır.

$$\limsup \sqrt[n]{|t_n|} \le \limsup \sqrt[n]{P_n\,|t_n|}$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ serisi $[0,1)$ aralığında yakınsaktır. $\{1/P_n\}$ mutlak monoton dizi olduğundan Teorem 2.2.4 den $[0,1)$ aralığında sınırlı ve azalmayan bir $\mu\,(y)$ fonksiyonu

$$\frac{1}{P_n} = \int_0^1 y^n d\mu\,(y) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

eşitliği sağlanacak biçimde mevcuttur. Böylece $0 < x < 1$ için

$$\frac{x^n}{P_n} = \int_0^x u^n d\mu \left(\frac{u}{x}\right)$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{P_n} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k = \\
&= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k u^n d\mu \left(\frac{u}{x}\right) \\
&= (1-x) \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k \sum_{n=k}^{\infty} u^n d\mu \left(\frac{u}{x}\right) \\
&= (1-x) \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k \frac{1}{1-u} d\mu \left(\frac{u}{x}\right) \\
&= (1-x) \int_0^x J\,(u) \frac{p\,(u)}{1-u} d\mu \left(\frac{u}{x}\right)
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$p\,(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k \quad \text{ve} \quad J\,(u) = \frac{1}{p\,(u)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k u^k$$

şeklindedir. Buna göre $J(u)$ fonksiyonundan

$$f(x) = (1-x)\int_0^x J(u)\frac{p(u)}{1-u}d\mu\left(\frac{u}{x}\right)$$

şeklinde tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonuna tanımlı bir dönüşüm elde ettik. Bu dönüşüm regülerdir. Yani $J(u) \to s$ $(u \to 1^-)$ iken $f(x) \to s$ $(x \to 1^-)$ dir. Gerçekten, her $n = 0, 1, \ldots$ için $s_n = 1$ ise $t_n = 1$ ve böylece $f(x) = 1$ ve $J(u) = 1$, yani

$$1 = (1-x)\int_0^x \frac{p(u)}{1-u}d\mu\left(\frac{u}{x}\right)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} f(x) - s &= (1-x)\int_0^x (J(u)-s)\frac{p(u)}{1-u}d\mu\left(\frac{u}{x}\right) \\ &= (1-x)\int_0^{x_0} (J(u)-s)\frac{p(u)}{1-u}d\mu\left(\frac{u}{x}\right) + (1-x)\int_{x_0}^x (J(u)-s)\frac{p(u)}{1-u}d\mu\left(\frac{u}{x}\right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik dönüşümün regüler olmasını gerektirir. Bu ise lemmanın ispatını tamamlar. ■

Lemma 3.1.5 $\{p_n\}$ dizisi

$$\frac{p_n}{P_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

koşulunu gerçeklesin. Eğer $\{s_n\}$ dizisi (3.1.28) koşulunu gerçekler ise her $m \geq n \geq 0$ için

$$s_m - s_n \geq -a(\ln P_m - \ln P_n) - b$$

olacak şekilde $a > 0$ ve $b > 0$ sayıları vardır (Mikhalin, 1977).

İspat. (3.1.28) koşulundan $-r-1$ için öyle N ve δ sayıları vardır ki $n > N$ ve $1 \leq P_m/P_n < 1+\delta$ olduğunda $s_m - s_n > -r-1$ dir. $n \leq N$ ve $P_m \leq P_N(1+\delta)$ olsun. Bu durumda $s_m - s_n$ farkının yalnızca N sayısına bağlı olan bir minimumu vardır ve bu nedenle bir $\delta > 0$ sayısı ve $\gamma \geq r+1$ olan bir $\gamma > 0$ sayısı vardır ki $0 \leq P_m - P_n \leq \delta P_n$ olacak şekildeki her m ve n için $s_m - s_n > \gamma$ dır.

Bir N_1 sayısını $n \geq N_1$ iken $1 \leq P_{n+1}/P_n \leq (1+\delta)$ olacak biçimde seçelim ve $q \geq v \geq N_1$ keyfi sabit pozitif tamsayılar olsun.

$v_0 = v$ olmak üzere v_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $P_n \leq P_{v_k}(1+\delta)$ eşitsizliği sağlanacak biçimdeki en büyük pozitif tamsayı olsun. Böylece

$$P_{v_{k+1}} \leq P_{v_k}(1+\delta) \qquad \text{ve} \qquad P_{v_{k+1}+1} > P_{v_k}(1+\delta)$$

dır. Ayrıca, $v_\theta \leq q-1 < v_{\theta+1}$ ise $P_q \leq P_{v_{\theta+1}}$, $0 \leq P_{v_{k+1}} - P_{vk}$ (her k için) ve böylece

$$s_q - s_v = \sum_{k=0}^{\theta-1}\left(s_{v_{k+1}} - s_{v_k}\right) + s_q - s_{v_\theta} \geq -(\theta+1)\gamma$$

dır. Bunun yanı sıra

$$\begin{aligned} P_q &\geq P_{v_\theta+1} > P_{v_{\theta-1}}(1+\delta) \geq P_{v_{\theta-2}+1}(1+\delta) > P_{v_{\theta-3}}(1+\delta)^2 \ldots \\ &\geq P_{v_\theta}(1+\delta)^{\left[\frac{\theta}{2}\right]} > P_v(1+\delta)^{\frac{\theta}{2}-1} \end{aligned}$$

ve de

$$\ln P_q \geq \ln P_v + \frac{\theta-2}{2}\ln(1+\delta)$$

dır. Buradan

$$1+\theta \leq \frac{\ln P_q - P_v}{\ln(1+\delta)^{1/2}} + 3$$

ve böylece her $q \geq v \geq N_1$ için

$$s_q - s_v \geq -(1+\theta)\gamma > \frac{-\gamma}{\ln(1+\delta)^{1/2}}(\ln P_q - \ln P_v) - 3\gamma \tag{3.1.29}$$

eşitsizliği elde edilir.

$0 \leq v < N_1$ ve $q \geq N_1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} s_q - s_v &= s_q - s_{N_1} + s_{N_1} - s_v \geq s_q - s_{N_1} + \min_{0\leq v\leq N_1}(s_{N_1} - s_v) \\ &\geq \frac{-\gamma}{\ln(1+\delta)^{1/2}}(\ln P_q - \ln P_{N_1}) + \min_{0\leq v\leq N_1}(s_{N_1} - s_v) - 3\gamma \\ &\geq \frac{-\gamma}{\ln(1+\delta)^{1/2}}(\ln P_q - \ln P_v) + \min_{0\leq v\leq N_1}(s_{N_1} - s_v) - 3\gamma \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

dır.

Diğer taraftan $0 \leq v,\ q < N_1$ ise

$$s_q - s_v \geq \min_{0\leq v\leq q\leq N_1-1}(s_q - s_v) \geq \frac{-\gamma}{\ln(1+\delta)^{1/2}}(\ln P_q - \ln P_v) + \min_{0\leq v\leq q\leq N_1}(s_q - s_v) - 3\gamma \tag{3.1.31}$$

dır. Eğer

$$a = \frac{-\gamma}{\ln(1+\delta)^{1/2}} \qquad \text{ve} \qquad b = \max\left\{3\gamma, 3\gamma - \min_{0\leq v\leq q\leq N_1}(s_q - s_v)\right\}$$

denirse (3.1.29)-(3.1.31) den her $q \geq v \geq 0$ için

$$s_q - s_v \geq -a(\ln P_q - \ln P_v) - b$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.1.5 in ispatı tamamlanır. ■

Lemma 3.1.6 Lemma 3.1.5 in hipotezleri altında $\{t_n\}$ dizisi için

$$1 \leq \frac{P_m}{P_n} \to 1 \quad (n\to\infty) \text{ iken} \quad \liminf(t_m - t_n) \geq 0$$

dır (Mikhalin, 1977).

İspat. Lemma 3.1.5 den her $m \geq n \geq 0$ için $s_m - s_n \geq -a\left(\ln P_m - \ln P_n\right) - b$ olacak şekilde $a > 0$ ve $b > 0$ sayıları vardır. $m \geq n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
t_m - t_n &= \frac{1}{P_m}\sum_{k=0}^{m} p_k s_k - \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k s_k = \frac{1}{P_m P_n}\left(P_n \sum_{k=0}^{m} p_k s_k - P_m \sum_{k=0}^{n} p_k s_k\right) \\
&= \frac{1}{P_m P_n}\left(P_n \sum_{k=n+1}^{m} p_k s_k - \left(P_m - P_n\right)\sum_{k=0}^{n} p_k s_k\right) \\
&= \frac{1}{P_m P_n}\left\{p_{n+1}\left(p_0\left(s_{n+1} - s_0\right) + p_1\left(s_{n+1} - s_1\right) + \cdots + p_n\left(s_{n+1} - s_n\right)\right)\right. \\
&\quad + p_{n+2}(p_0\left(s_{n+2} - s_0\right) + p_1\left(s_{n+2} - s_1\right) + \cdots + p_n\left(s_{n+2} - s_n\right)) \\
&\quad \left. + \cdots + p_m\left(p_0\left(s_m - s_0\right) + p_1\left(s_m - s_1\right) + \cdots + p_n\left(s_m - s_n\right)\right)\right\} \\
&\geq \frac{1}{P_m P_n}\left\{-a p_{n+1}\left[p_0\left(\ln P_{n+1} - \ln P_0\right) + \cdots + p_n\left(\ln P_{n+1} - \ln P_n\right)\right] - b p_{n+1} P_n\right. \\
&\quad - a p_{n+2} p_0\left[\left(\ln P_{n+2} - \ln P_0\right) + \cdots + p_n\left(\ln P_{n+2} - \ln P_n\right)\right] - b p_{n+2} P_n \\
&\quad \left. - a p_m\left(p_0\left(\ln P_m - \ln P_0\right) + \cdots + p_n\left(\ln P_m - \ln P_n\right)\right) - b p_m P_n\right\} \\
&= \frac{1}{P_m P_n}\left\{-a p_{n+1} P_n\left(\ln P_{n+1} - \ln P_0^{p_0} P_1^{p_1} \ldots P_n^{p_n}\right) - b p_{n+1} P_n\right. \\
&\quad \left. - \cdots - a p_m P_n\left(\ln P_m - \ln P_0^{p_0} P_1^{p_1} \ldots P_n^{p_n}\right) - b p_m P_n\right\} \\
&= \frac{1}{P_m P_n}\left\{-a\left(P_n \ln P_{n+1}^{p_{n+1}} \ldots P_m^{p_m} - \left(P_m - P_n\right)\ln P_0^{p_0} \ldots P_n^{p_n}\right)\right. \\
&\quad \left. - b\left(P_m - P_n\right) P_n\right\} \\
&\geq -a\left(\frac{P_m - P_n}{P_m}\ln P_m - \frac{P_m - P_n}{P_m P_n}\ln P_0^{p_0} P_1^{p_1} \ldots P_n^{p_n}\right) - b\frac{P_m - P_n}{P_m}
\end{aligned}$$

dir.

$$P_0^{p_0} P_1^{p_1} \ldots P_n^{p_n} \geq \left(\frac{P_n}{C}\right)^{p_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.1.32}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu tümevarım yöntemi ile gösterelim. Burada C sabiti

$$1 \leq \left(1 + \frac{p_{n+1}}{P_n}\right)^{\dfrac{P_n}{p_{n+1}}} \leq C \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eşitsizliği ile tanımlanmaktadır.

(3.1.32) eşitsizliği açık olarak $n = 0$ için doğrudur. $P_0^{p_0} P_1^{p_1} \ldots P_n^{p_n} \geq \left(P_k/C\right)^{p_k}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
P_0^{p_0}P_1^{p_1}.....P_k^{p_k}P_{k+1}^{p_{k+1}} &\geq \left(\frac{P_k}{C}\right)^{P_k} P_{k+1}^{p_{k+1}} \\
&= \left(\frac{P_{k+1}}{C}\right)^{P_{k+1}} \frac{C^{P_{k+1}}}{P_{k+1}^{p_{k+1}}} \left(\frac{P_k}{C}\right)^{P_k} \\
&= \left(\frac{P_{k+1}}{C}\right)^{p_{k+1}} C^{p_{k+1}} \frac{1}{\left(1+\frac{p_{k+1}}{P_k}\right)^{\frac{P_k}{p_{k+1}}p_{k+1}}} \\
&\geq \left(\frac{P_{k+1}}{C}\right)^{p_{k+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (3.1.32) eşitsizliğinin doğruluğu kanıtlanmış olur. Bu eşitsizliği dikkate alarak

$$\begin{aligned}
t_m - t_n &\geq -a\left(\frac{P_m-P_n}{P_m}\ln P_m - \frac{P_m-P_n}{P_mP_n}\ln P_0^{p_0}P_1^{p_1}.....P_n^{p_n}\right) - b\frac{P_m-P_n}{P_m} \\
&\geq -a\left(\frac{P_m-P_n}{P_m}\ln P_m - \frac{P_m-P_n}{P_mP_n}\ln P_n + \frac{P_m-P_n}{P_m}\ln C\right) - b\frac{P_m-P_n}{P_m} \\
&= \frac{P_m-P_n}{P_m}\left(-a\left(\ln\frac{P_m}{P_n} - \ln C\right) - b\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu Lemma 3.1.6'nın geçerliliğini gösterir. ■

Teorem 3.1.7'nin ispatı. Lemma 3.1.4'den $s_n \to s\,(J_p)$ iken $s_n \to s\,(AR)$ yani $\{t_n\}$, s ye Abel toplanabilirdir. Schmidt'in (1925) bilinen teoremine göre (3.1.27) koşulu $t_n \to s$ olmasını yani $s_n \to s\,(M_p)$ olmasını gerektirir. ■

Teorem 3.1.8'in ispatı. $\{p_n\}$ dizisi (3.1.24) ve (3.1.25) koşulunu ve $\{s_n\}$ dizisi (3.1.28) koşulunu sağlasın. Lemma 3.1.6'dan

$$1 \leq \frac{P_m}{P_n} \to 1 \quad (n\to\infty) \quad \text{iken} \qquad \liminf\,(t_m - t_n) \geq 0$$

olup, ayrıca (3.1.24) den

$$1 < \frac{m}{n} \to 1 \quad (n\to\infty) \quad \text{iken} \qquad \liminf\,(t_m - t_n) \geq 0$$

dır. Böylece (3.1.24, (3.1.25) ve (3.1.28) koşulları altında Teorem 3.1.7'den $\frac{1}{p(x)}\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = O(1)$ $(x \to 1^-)$ iken $P_n^{-1}\sum_{k=0}^{n} p_k s_k = O(1)$ $(n\to\infty)$ bulunur. Davydov'un (1963) ilgili teoreminden $s_n = O(1)$ $(n\to\infty)$ elde edilir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}\sum_{k=0}^{n} p_k s_k = s$ eşitliği $\limsup|s_n - s| \leq r$ olmasını gerektirir. ■

Teorem 3.1.9'un ispatı. Teoremin tüm hipotezleri gerçeklensin. (3.1.26) dan

$$t_n - t_{n-1} = \frac{p_n}{P_{n-1}}(s_n - t_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dir. $s_n - t_n \geq -C$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$t_n - t_{n-1} \geq -C\frac{p_n}{P_{n-1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ve böylece her $m \geq n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} t_m - t_n &= t_m - t_{m-1} + t_{m-1} - t_{m-2} + \ldots + t_{n+1} - t_n \\ &\geq -C\left(\frac{p_m}{P_{m-1}} + \frac{p_{m-1}}{P_{m-2}} + \cdots + \frac{p_{n+1}}{P_n}\right) \geq -C\left(P_m - P_n\right)P_n^{-1} \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

dir. Şimdi, $s_n - t_n \geq -C\frac{p_{n-1}}{(n+1)p_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olsun. Bu durumda

$$t_n - t_{n-1} = \frac{p_n}{P_{n-1}}\left(s_n - t_n\right) \geq \frac{-C}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ve böylece

$$t_m - t_n \geq -C\left(\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n+2}\right) \geq -C_1 \ln\frac{m}{n} \tag{3.1.34}$$

dir. (3.1.24)'ü göz önünde bulundurduğumuzda, (3.1.33) ve (3.1.34) den, Teorem 3.1.9'un hipotezleri gerçeklenir ise Teorem 3.1.7'nin de koşullarının gerçeklendiğini görürüz. Bu ise, Teorem 3.1.9'un iddialarının geçerliliği anlamına gelir. ■

Sonuç 3.1.5, Teorem 3.1.9'dan elde edilir.

Sonuç 3.1.6'nın ispatı. $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k = o\left(P_n\right)$ olsun. Bu durumda, $P_n^{-1}\sum_{k=0}^{n} a_k P_k \to 0$ $(n \to \infty)$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} o\left(1\right) &= \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} a_k P_k - \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k = \frac{1}{P_n P_{n-1}}\left(P_{n-1}\sum_{k=0}^{n} a_k P_k - P_n\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k\right) \\ &= a_n - \frac{p_n}{P_{n-1}}\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k \end{aligned}$$

dır. Buradan $n \to \infty$ için $a_n \to 0$ elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{k=0}^{n} a_k P_k = \sum_{k=0}^{n} P_k\left(s_k - s_{k-1}\right) = -\sum_{k=0}^{n} p_k s_k + \sum_{k=0}^{n} p_k a_k + P_n s_n$$

ve böylece

$$s_n - t_n - \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} a_k P_k = o\left(1\right) \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğunda M_p-metodunun regülerliğinden $\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} a_k P_k \to 0$ $(n \to \infty)$ dır. Böylece son eşitlikten

$$s_n - t_n = o\left(1\right) \quad (n \to \infty) \tag{3.1.35}$$

bulunur. O halde, Teorem 3.1.9'un tüm hipotezleri gerçeklenir. $t_n \to s$ $(n \to \infty)$ olması (3.1.35) eşitliğinden $s_n \to s$ $(n \to \infty)$ olmasını gerektirir. ■

Borwein (1981), $\{s_n\}$ bir reel sayı dizisi olmak üzere $s_n \to s\left(J_p\right)$ iken $s_n \to s\left(M_p\right)$ olacak biçimdeki Tauber tipi koşulları içeren aşağıdaki iki teoremi ispatlamıştır. Burada, (2.2.2) koşulunun gerçeklendiği yani $p\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ serisinin $0 < x < 1$ için yakınsak olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.1.10 $s_n \to s\left(J_p\right)$ ve H bir sabit olmak üzere $n = 0, 1, ...$ için $s_n > -H$ olsun. $p\left(x\right)$ fonksiyonu ise, ya

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{p\left(x^2\right)}{p\left(x\right)} = 1 \tag{3.1.36}$$

ya da, $\{\mu_m\}$ tamamen monoton bir dizi olmak üzere

$$m = 0, 1, ... \text{ için} \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{p\left(x^{m+1}\right)}{p\left(x\right)} = \mu_m > 0 \tag{3.1.37}$$

koşuluna sahip olsun. Bu durumda $s_n \to s\left(M_p\right)$ dir (Borwein, 1981).

Teorem 3.1.11

$$np_n = o\left(P_n\right), \tag{3.1.38}$$

$s_n \to s\left(J_p\right)$, $n = 0, 1, ...$ için $\gamma_n \geq 0$ olmak üzere $s_n > -\gamma_n$ ve

$$np_n\gamma_n = O\left(P_n\right) \tag{3.1.39}$$

olsun. Bu durumda $s_n \to s\left(M_p\right)$ dir (Borwein, 1981).

Not edelim ki (2.2.2), (3.1.38)'in ve (2.2.3)'ün bir sonucudur. Gerçekten, (3.1.38) den

$$\frac{np_n}{P_n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

ise

$$\frac{p_n}{P_n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

ve buradan

$$\frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{1}{1 + \frac{p_n}{P_{n-1}}} \to 1 \qquad (n \to \infty)$$

elde edilir ki bu $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k x^k$ serisinin $0 < x < 1$ için yakınsak olmasını gerektirir. Böylece (2.2.3) eşitliğinden (2.2.2) elde edilir.

Teorem 3.1.10 ve Teorem 3.1.11 den bazı sonuçlar elde edilebilir:

Eğer, $\alpha > -1$ olmak üzere $p_k = \binom{k+\alpha}{k}$ olarak alınırsa

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = (1 - x)^{-\alpha - 1} \tag{3.1.40}$$

olur ve bu durumda J_p metodu A_α Abel-tipi metot olur (Borwein, 1957). A_α metodu genelleştirilmiş Abel metodu olarak da bilinmektedir. (3.1.40) ile tanımlanan $p(x)$ fonksiyonu

$$\mu_m = (m + 1)^{-\alpha - 1}$$

ile tanımlı $\{\mu_m\}$ dizisi ile (3.1.37) koşulunu gerçekler. Böylece Teorem 3.1.10 dan A_α metodu için bir Tauber tipi sonuç elde edilir. Bu sonuçta özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa standart Abel metodu için bilinen

$$s_n \to s\,(A) \text{ ve } n = 0, 1, ... \text{ için } s_n > -H \text{ ise } s_n \to s\,(C, 1)$$

sonucu elde edilir (Hardy, 1949; Teorem 13).

$p_n = (n+1)^{-1}$ olması durumunda J_p ve M_p metotları sırasıyla logaritmik L ve l metotlarına dönüşür. $\gamma_n = -\mu \log(n+1)$ için Teorem 3.1.11'in koşulları gerçeklendiğinden Kokhanovskii (1975) tarafından elde edilen

$$s_n \to s\,(L) \text{ ve } n = 0, 1, ... \text{ için } s_n > -\mu \log(n+1) \text{ ise } s_n \to s\,(l)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.10'un ve Teorem 3.1.11'in İspatı. Önce bazı ek notasyonlar kullanalım. $0 < c < 1$ olmak üzere

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & c \le x \le 1 \text{ için} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun ve

$$\psi(x) = \frac{1}{p(x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k \phi\left(x^k\right)$$

tanımlayalım. $0 \le x \le 1$ için

$$-\frac{c}{1-c} + \frac{x}{1-c} \le \phi(x) \le 1 + \frac{1}{c} - \frac{x}{c} \tag{3.1.41}$$

dir.

Teorem 3.1.10'un İspatı. Genelliği bozmaksızın $H = 0$ yani $n = 0, 1, ...$ için $s_n \ge 0$ olduğunu varsayalım.

1. DURUM: (3.1.36) gerçeklensin. (3.1.41) den

$$\begin{aligned} \limsup_{x \to 1^-} \psi(x) &\le \left(1 + \frac{1}{c}\right) \lim_{x \to 1^-} \sigma(x) - \frac{1}{c} \lim_{x \to 1^-} x^k \sigma(x) \\ &= \left(1 + \frac{1}{c}\right) \lim_{x \to 1^-} \sigma(x) - \frac{1}{c} \lim_{x \to 1^-} \frac{p(x^2)}{p(x)} \sigma(x^2) \\ &= \left(1 + \frac{1}{c}\right) s - \frac{s}{c} = s \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\liminf_{x \to 1^-} \psi(x) \ge s$ olduğu gösterilebilir. Buradan $\lim_{x \to 1^-} \psi(x) = s$ elde edilir. Bu, $x_n \to 1^-$ $(n \to \infty)$ olan her $\{x_n\}$ dizisi için $\psi(x_n) \to s$ $(n \to \infty)$ olmasını gerektirir. Özel olarak $x_n = c^{1/n}$ alırsak $x_n \to 1^-$ $(n \to \infty)$ olduğundan

$$\psi\left(c^{1/n}\right) = \frac{1}{p\left(c^{1/n}\right)} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \to s \qquad (n \to \infty)$$

dir. Eğer $k=0,1,...$ için $s_k=1$ seçilirse

$$\frac{P_n}{p\left(c^{1/n}\right)}\to 1 \qquad (n\to\infty) \tag{3.1.42}$$

olur. $t_n\to s$ dir. Böylece

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k s_k=\frac{p\left(c^{1/n}\right)}{P_n}\psi\left(c^{1/n}\right)\to s \qquad (n\to\infty)$$

elde edilir.

2. DURUM. (3.1.37) koşulu gerçeklensin. Teorem 2.2.4'e göre χ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artan ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $m=0,1,...$ için

$$\mu_m=\int_0^1 t^m d\chi\left(t\right)$$

gösterimi vardır. $\mu_1=\int_0^1 d\chi\left(t\right)=\chi\left(1\right)-\chi\left(0\right)>0$ olduğundan öyle bir $c\in(0,1)$ sayısı seçebiliriz ki χ fonksiyonu c noktasında sürekli ve

$$\alpha=\int_c^1\frac{d\chi\left(t\right)}{t}>0$$

olur. Bu durumda $m=0,1,\ldots$ için

$$\frac{1}{p\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k s_k x^k x^{mk}=\frac{p\left(x^{m+1}\right)}{p\left(x\right)}\sigma\left(x^{m+1}\right)\to\mu_m s \quad \left(x\to 1^-\right)$$

ve böylece herhangi bir $a\left(x\right)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ polinomu için

$$\begin{aligned}\frac{1}{p\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}p_k s_k x^k a\left(x^k\right) &\to \left(a_0\mu_0+a_1\mu_1+\cdots+a_m\mu_m\right)s\\ &= s\int_c^1 a\left(t\right)d\chi\left(t\right) \qquad \left(x\to 1^-\right)\end{aligned}$$

olur. χ fonksiyonun c noktasında sürekli olduğundan, $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde

$$0\le x\le 1 \ \text{ için } \quad a\left(x\right)\le\phi\left(x\right)\le b\left(x\right) \quad \text{ve} \quad \int_0^1\left(b\left(t\right)-a\left(t\right)\right)d\chi\left(t\right)<\varepsilon$$

olacak biçimde $a\left(x\right)$ ve $b\left(x\right)$ polinomlarının varlığı gösterilebilir. Buradan,

$$\lim_{x\to 1^-}\psi\left(x\right)=s\int_0^1\phi\left(t\right)d\chi\left(t\right)=s\int_c^1\frac{d\chi\left(t\right)}{t}=s\alpha$$

olur. Dolayısıyla,

$$\psi\left(c^{1/n}\right)=\frac{1}{p\left(c^{1/n}\right)}\sum_{k=0}^{n}p_k s_k\to s\alpha$$

ve $k=0,1,\ldots$ için $s_k=1$ alınırsa

$$\frac{P_n}{p\left(c^{1/n}\right)}\to\alpha$$

elde edilir. Böylece $t_n \to s$ dir. Bu, Teorem 3.1.10'un ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.11'in İspatı. İlk olarak not edelim ki, $0 < x < 1$, $m \geq 1$ için (3.1.38) ve (2.2.3) den

$$\begin{aligned} 0 < p(x) - p\left(x^{m+1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \left(1 - x^{km}\right) \leq m(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} k p_k x^k \\ &= o\left((1-x) P(x)\right) \\ &= o\left(p(x)\right) \qquad \left(x \to 1^-\right) \end{aligned}$$

dir. $x \to 1^-$ iken $p(x) \to \infty$ olduğundan $m \geq 1$ için

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{p\left(x^{m+1}\right)}{p(x)} = 1 \tag{3.1.43}$$

dir. Ayrıca (3.1.41) den $0 < x < 1$ için

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{p(x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(s_k + \gamma_k\right) x^k \phi\left(x^k\right) - \frac{1}{p(x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \gamma_k x^k \phi\left(x^k\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) \sigma(x) - \frac{1}{c} \sigma\left(x^2\right) \frac{p\left(x^2\right)}{p(x)} + \frac{1}{c(1-c)\, p(x)} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \gamma_k x^k \left(1 - x^k\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) \sigma(x) - \frac{1}{c} \sigma\left(x^2\right) \frac{p\left(x^2\right)}{p(x)} + \frac{1-x}{c(1-c)\, p(x)} \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \gamma_k x^k \end{aligned}$$

dir. Böylece, (2.2.3), (3.1.39) ve (3.1.43) den

$$\limsup_{x \to 1^-} \psi(x) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) s - \frac{s}{c} + M = s + M < \infty$$

sağlanacak biçimde bir M sabiti vardır. Benzer şekilde

$$\liminf_{x \to 1^-} \psi(x) > -\infty$$

olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $0 < x < 1$ için $\psi(x) = O(1)$ dir. Buradan

$$\psi\left(c^{1/n}\right) = \frac{1}{p\left(c^{1/n}\right)} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k = O(1)$$

elde edilir. (3.1.42), (3.1.43)'ün bir sonucu olduğundan

$$t_n = O(1) \tag{3.1.44}$$

bulunur. $0 < x < 1$ için

$$(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} P_k t_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x^k$$

olduğundan, (2.2.3) den,

$$\sigma(s) = \frac{1}{P(x)} \sum_{k=0}^{\infty} P_k t_k x^k \to s \qquad \left(x \to 1^-\right) \tag{3.1.45}$$

olur. Ayrıca (2.2.3) ve (3.1.43) den

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{P\left(x^{m+1}\right)}{P\left(x\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{p\left(x^{m+1}\right)}{p\left(x\right)}\frac{1-x}{1-x^{m+1}}=\frac{1}{m+1}\qquad (m=0,1,\dots)\qquad (3.1.46)$$

olup, (3.1.44), (3.1.45) ve (3.1.46) dan, Teorem 3.1.10'un ispatındaki 2. durum kullanıldığında, $Q_n=\sum_{k=0}^{n}P_k$ olmak üzere

$$u_n=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n}P_kt_k\to s\qquad (3.1.47)$$

elde edilir. Bunun yanı sıra, (3.1.38), (3.1.39) ve (3.1.44) den $n\geq 1$ için $\gamma>0$ olmak üzere

$$t_n-t_{n-1}=s_n\frac{p_n}{P_n}-t_{n-1}\frac{p_n}{P_n}>-\frac{\gamma_np_n}{P_n}-t_{n-1}\frac{p_n}{P_n}>-\frac{\gamma}{n}$$

dir. Böylece $m>n>1$ için

$$t_m-t_n\geq-\gamma\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}\geq-\gamma\log\frac{m}{n}$$

ve buradan

$$m>n\to\infty\quad \text{ve}\quad \frac{m}{n}\to 1 \text{ iken } \liminf\left(t_m-t_n\right)\geq 0\qquad (3.1.48)$$

elde edilir. (3.1.38) den

$$nP_n-\left(n-1\right)P_{n-1}=P_n+\left(n-1\right)p_n\sim P_n$$

olduğundan $nP_n\sim Q_n$ dir. Buradan, $\delta>0$ olmak üzere $m>n\left(1+\delta\right)$ için

$$\frac{Q_m}{Q_n}=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=n+1}^{m}P_k+1\geq\frac{P_n}{Q_n}\left(m-n\right)+1\geq\frac{\delta nP_n}{Q_n}+1\to 1+\delta\qquad (n\to\infty)\qquad (3.1.49)$$

elde edilir.

Genelliği bozmadan $s=0$ yani $u_n\to 0$ kabul edelim. (3.1.48) den verilen $\varepsilon>0$ sayısı için öyle pozitif n_0 ve δ sayıları vardır ki $m>n>n_0$ ve $(m/n)<1+2\delta$ olduğunda $t_m-t_n>-\varepsilon$ dur. Dolayısıyla m ve n bu koşullara sahip iken (3.1.47) den

$$\left(t_n-\varepsilon\right)\sum_{k=n+1}^{m}P_k\leq\sum_{k=n+1}^{m}P_kt_k=u_mQ_m-u_nQ_n\leq\left(t_m+\varepsilon\right)\sum_{k=n+1}^{m}P_k$$

ve buradan

$$t_n-\varepsilon\leq\frac{u_mQ_m-u_nQ_n}{Q_m-Q_n}=u_m+\frac{u_m-u_n}{\left(Q_m/Q_n\right)-1}\leq t_m+\varepsilon\qquad (3.1.50)$$

dir. $1+\delta<(m/n)<1+2\delta$ olduğunda $m,n\to\infty$ limite geçildiğinde (3.1.49) dan

$$\frac{1}{\left(Q_m/Q_n\right)-1}=O\left(1\right)$$

ve (3.1.50) den

$$\limsup t_n\leq\varepsilon\qquad \text{ve}\qquad \liminf t_m\geq-\varepsilon$$

elde edilir. Bu nedenle $t_n\to 0$ dır. Böylece Teorem 3.1.11'in ispatı tamamlanır. ■

Uyarı 3.1.2 Teoremin 3.1.10'un ispatının ve Teorem 3.1.11'in ispatının (3.1.44)'e kadar olan kısmının aşikar bir modifikasyonu ile bu teoremlerdeki hipotezlerin "$s_n \to s\,(J_p)$" yerine "$0 < x < 1$ için $\sigma(x) = O(1)$" ve sonuçların "$s_n \to s\,(M_p)$" yerine "$t_n = O(1)$" alındığında da teoremlerin geçerli olduğu gösterilebilir (Borwein, 1981).

Aşağıdaki teoremlerde (3.1.36) ve (3.1.37) koşullarının gerçeklenmesi için bazı yeterli koşullar verilmektedir.

Teorem 3.1.12

$$P_n \sim P_{n+1} \tag{3.1.51}$$

olsun.

(i) Eğer

$$P_n \sim P_{2n} \tag{3.1.52}$$

ise (3.1.36) gerçeklenir.

(ii) Eğer $\{\mu_m\}$ tamamen monoton bir dizi olmak üzere

$$m = 1, 2, \ldots \text{ için} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{nm}} = \mu_{m-1} > 0 \tag{3.1.53}$$

ise (3.1.37) gerçeklenir (Borwein, 1981).

Teorem 3.1.13 $n = 0, 1, \ldots$ için $p_n > 0$ ve

$$p_n \sim p_{n+1} \tag{3.1.54}$$

olsun.

(i) Eğer

$$p_n \sim 2p_{2n} \tag{3.1.55}$$

ise (3.1.36) gerçeklenir.

(ii) Eğer $\{\mu_m\}$ tamamen monoton bir dizi olmak üzere $m = 1, 2, \ldots$ için

$$m = 1, 2, \ldots \text{ için} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{nm}} = m\mu_{m-1} > 0 \tag{3.1.56}$$

ise (3.1.37) gerçeklenir (Borwein, 1981).

Teorem 3.1.12' nin İspatı. (ii) kısmını ispatlayalım. (3.1.51) ve (3.1.53) den, $x \to 1^-$ için

$$P(x^m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{P_{nm}} P_{nm} x^{nm} \sim \mu_{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_{nm} x^{nm} \sim \frac{\mu_{m-1}}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_{nm+k} x^{nm+k} = \frac{\mu_{m-1}}{m} P(x)$$

dir. Dolayısıyla (2.2.3) den

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{p\left(x^m\right)}{p\left(x\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{P\left(x^m\right)}{P\left(x\right)}\frac{1-x^m}{1-x}=\mu_{m-1}$$

dir. Bu (ii) kısmını ispatlar. (i) kısmının ispatı ise benzerdir.

Teorem 3.1.13'ün ispatı aynı şekilde veya (3.1.54)⇒(3.1.51); (3.1.54) ve (3.1.55)⇒(3.1.52); (3.1.54) ve (3.1.56)⇒(3.1.53) gerektirmelerini elde ederek gösterilebilir. ■

J_p-toplanabilmeden yakınsaklığın elde edildiği şimdiye kadar ki sonuçlarda hep $\{p_k\}$ dizisi üzerine çeşitli kısıtlamalar getirildi. Kratz ve Stadtmüller (1989) böyle bir kısıtlamaya ihtiyaç duymadan, sadece reel veya kompleks terimli olan $\{s_k\}$ dizisinin sağladığı bir koşul ile J_p-toplanabilmeden yakınsaklığın elde edildiği bir Tauber tipi teorem ispatlamıştır. Bunun için, $p\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k$ serisi $0<x<1$ için yakınsak olmak şartıyla ilk olarak Borwein ve Kratz (1989) tarafından ele alınan

$$\triangle_n:=\inf_{0<x<1}p\left(x\right)x^{-n}\qquad\qquad(n=0,1,2,...)$$

sayıları kullanılmıştır.

Örnek 3.1.1 $p_k=1$ $(k=0,1,2,...)$ yani Abel metodu durumunda $x\in(-1,1)$ için $p\left(x\right)=1/(1-x)$ dir.

$$\triangle_n=\inf_{0<x<1}\frac{x^{-n}}{1-x}$$

olup $x\in(0,1)$ için tanımlı $x\to\frac{x^{-n}}{1-x}$ fonksiyonu $x_n=1-\frac{1}{n+1}$ noktasında minimuma sahip olduğundan ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n}=e$$

olduğundan

$$\triangle_n=\inf_{0<x<1}\frac{x^{-n}}{1-x}=(n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n}\sim en \tag{3.1.57}$$

dir. Abel metodu için

$$P_n=\sum_{v=0}^{n}p_v=n+1\leq\triangle_n$$

olduğu açıktır (Boos, 2000).

$\triangle_n$ nin bazı özellikleri Borwein ve Kratz (1989) tarafından aşağıdaki gibi verimiştir. Lemmanın ispatı için Boos'dan (2000) yararlanılmıştır.

Lemma 3.1.7

(i) Her $n=0,1,2,...$ için

$$\triangle_n=p\left(x_n\right)x_n^{-n} \tag{3.1.58}$$

olacak şekilde $(0,1)$ aralığında değerler alan bir $\{x_n\}$ dizisi vardır öyle ki $0 \leq x_n \leq x_{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$ dir.

(ii) Her $n, r = 0, 1, 2, ...$ için $x_r^{n-r} \leq \frac{\triangle_r}{\triangle_n} \leq x_n^{n-r}$ dir.

(iii) $\triangle_n \geq P_n$ dir.

(Boos, 2000).

İspat. $p(0) = p_0 > 0$ ve Teorem 2.2.3 den $x \to 1^-$ $p(x)$'in monoton olarak sonsuza ıraksadığını biliyoruz. Bu nedenle herhangi bir $n = 1, 2, ...$ sayısı için $x \to 1^-$ veya $x \to 0^+$ iken $p(x)\, x^{-n} \to \infty$ olur. . $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = p(x)\, x^{-n}$ fonksiyonu sürekli olduğundan her $n = 1, 2, ...$ için $\triangle_n = p(x_n)\, x_n^{-n}$ olacak şekilde bir $x_n \in (0,1)$ sayısı seçebiliriz. Ayrıca, $p(x)$ kesin artan olduğundan $x_0 = 0$ için $\triangle_0 = p(x_0)\, x_0^{-0}$ dır. $\triangle_n$ nin tanımından her $n, r = 0, 1, 2, ...$ için $\triangle_n \leq p(x_r)\, x_r^{-n}$ ve $\triangle_r \leq p(x_n)\, x_n^{-r}$ dir. Buradan

$$x_r^{n-r} = \frac{p(x_r)\, x_r^{-r}}{p(x_r)\, x_r^{-n}} \leq \frac{\triangle_r}{\triangle_n} \leq \frac{p(x_n)\, x_n^{-r}}{p(x_n)\, x_n^{-n}} = x_n^{n-r}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $n \in \mathbb{N}$ ve $r = n-1$ için $x_{n-1} \leq x_n$ elde ederiz. Yani $\{x_n\}$ dizisi monoton artandır. $x_n \to 1 \quad (n \to \infty)$ olduğunu ispatlayalım. Bunun için, bir α sayısı için $x_n \leq \alpha < 1$ $(n \in \mathbb{N})$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\triangle_n$ nin tanımından, g fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için bir minimuma sahiptir ve bu

$$p'(x_n)\, x_n^{-n} - np(x_n)\, x_n^{-n-1} = 0$$

ve böylece

$$\frac{p'(x_n)\, x_n}{p(x_n)} = n \to \infty$$

olmasını gerektirir. Fakat bu $x \in (0,1)$ için $p(x) \geq p_0 > 0$ ve $\sup_{x \in (0,\alpha)} p'(x) < \infty$ olması ile çelişir ($p'(x)$ kuvvet serisinin de yakınsaklık yarıçapı 1 dir). Böylece $\{x_n\}$ dizisinin varlığını ve $\{x_n\}$ dizisinin özel seçimlerinden bağımsız olarak (i) ve (ii) şıklarının doğruluğunu ispatlamış olduk. (iii) nin doğruluğunu gösterelim. (3.1.58) yi gerçekleyen bir $\{x_n\}$ dizisi için,

$$\triangle_n = p(x_n)\, x_n^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_n^{k-n} \geq \sum_{k=0}^{n} p_k x_n^{k-n} \geq \sum_{k=0}^{n} p_k = P_n$$

dir. ■

$p(x_n)\, x_n^{-n} = \triangle_n$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi Abel metodu için $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ile verilebilir.

Teorem 3.1.14 Eğer $s_k \to s\ (J_p)$ ve

$$s_k - s_{k-1} = o\left(\frac{p_k}{\triangle_k}\right) \qquad (k \to \infty)$$

$s_k \to s$ dir (Kratz ve Stadtmüller, 1989).

İspat. $\{s_k\}$ dizisi $s_k - s_{k-1} = o\left(\frac{p_k}{\triangle_k}\right)$ koşulunu gerçeklesin. Genelliği bozmadan $s_k \to 0$ (P) olduğunu kabul edebiliriz. Kabule göre, Her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $k_\varepsilon = 0, 1, 2, ...$sayısı vardır ki

$$k \geq k_\varepsilon \text{ iken } |s_k - s_{k-1}| \leq \varepsilon \frac{p_k}{\triangle_k} \tag{3.1.59}$$

dır. Lemma 3.1.7 ye göre (3.1.58) eşitliğini sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi seçelim.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p_s(x_n)}{p(x_n)} - s_n\right| &= \frac{1}{p(x_n)}\left|\sum_{k=0}^{\infty} p_k s_k x_n^k - s_n \sum_{k=0}^{\infty} p_k x_n^k\right| \\
&= \frac{1}{p(x_n)}\left|\sum_{k=0}^{\infty} p_k (s_k - s_n) x_n^k\right| \\
&\leq \frac{1}{p(x_n)}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k |s_k - s_n| x_n^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k |s_k - s_n| x_n^k\right) \\
&= \frac{1}{p(x_n)}(S_1(n) + S_2(n))
\end{aligned}$$

dir. İlk olarak $S_2(n)$ yi ele alalım. $n \geq k_\varepsilon$ için, (3.1.59) dan

$$\begin{aligned}
S_2(n) &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \sum_{v=n+1}^{k} |s_v - s_{v-1}| x_n^k = \sum_{v=n+1}^{\infty} |s_v - s_{v-1}| \sum_{k=v}^{\infty} p_k x_n^k \\
&\leq \varepsilon \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{p_v}{\triangle_v} \sum_{k=v}^{\infty} p_k x_n^k \\
&= \varepsilon \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{p_v}{\triangle_v} \frac{x_n^v}{x_n^k} \sum_{k=v}^{\infty} p_k x_v^k \left(\frac{x_n}{x_v}\right)^{k-v} \leq \varepsilon \sum_{v=n+1}^{\infty} p_v x_n^v
\end{aligned}$$

dir. Eşitsizliğin son kısmında, $k \geq v > n$ ve $\{x_n\}$ artan olduğundan $\left(\frac{x_n}{x_v}\right)^{k-v} \leq 1$ olduğunu ve $v = 0, 1, 2, ...$ için $\triangle_v x_v^v = p(x_v) \geq \sum_{k=v}^{\infty} p_k x_v^k$ olduğunu kullandık. Şimdi de $S_1(n)$ toplamını değerlendirelim. Herhangi bir $n \geq k_\varepsilon$ için, (3.1.59) dan

$$\begin{aligned}
S_1(n) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} p_k \sum_{v=n+1}^{n} |s_v - s_{v-1}| x_n^k = \sum_{v=1}^{n} |s_v - s_{v-1}| \sum_{k=0}^{v-1} p_k x_n^k \\
&\leq \sum_{v=1}^{k_\varepsilon - 1} |s_v - s_{v-1}| \sum_{k=0}^{v-1} p_k x_n^k + \sum_{v=k_\varepsilon}^{n} |s_v - s_{v-1}| \sum_{k=0}^{v-1} p_k x_n^k \\
&\leq S_3(n) + \varepsilon \sum_{v=k_\varepsilon}^{n} \frac{p_v}{\triangle_v} \sum_{k=0}^{v-1} p_k x_n^k \\
&= S_3(n) + \varepsilon \sum_{v=k_\varepsilon}^{n} \frac{p_v}{\triangle_v} \frac{x_n^v}{x_v^v} \sum_{k=0}^{v-1} p_k x_v^k \left(\frac{x_n}{x_v}\right)^{k-v} \\
&\leq S_3(n) + \varepsilon \sum_{v=k_\varepsilon}^{n} p_v x_n^v
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada da, $k \leq v \leq n$ ve $\{x_n\}$ artan olduğundan $\left(\frac{x_n}{x_v}\right)^{k-v} \leq 1$ olduğu ve de $v = 0, 1, 2, ...$ için $\triangle_v x_v^v = p(x_v) \geq \sum_{k=0}^{v-1} p_k x_v^k$ olduğunu kullandık.

$$\frac{1}{p(x)} \sum_{k=0}^{v-1} p_k x^k \to 0 \qquad (v \text{ sabit ve } x \to 1^-)$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} S_3(n) = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |s_n| &\leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{p_s(x_n)}{p(x_n)}\right| + \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{p_s(x_n)}{p(x_n)} - s_n\right| \\
&\leq 0 + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{p(x_n)} \left(\varepsilon \sum_{v=n+1}^{\infty} p_v x_n^v + \varepsilon \sum_{v=k_\varepsilon}^{n} p_v x_n^v + S_3(n)\right) \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu $s_n \to 0$ olmasını gerektirir. Böylece ispat biter. ■

$p_k = 1$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ için (3.1.57) den $\triangle_n \sim en$ olduğundan Teorem 3.1.14 den Abel toplanabilme için bilinen aşağıdaki Tauber teoremi elde edilir.

Sonuç 3.1.7 $s_n - s_{n-1} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ koşulu Abel toplanabilmeden yakınsaklığın elde edildiği bir Tauber koşuludur.

Tietz ve Trautner (1988) tarafından verilen $J_p \to M_p$ tipi ve $J_p \to c$ tipi aşağıdaki teoremleri ifade edelim.

Teorem 3.1.15 $1 < \frac{n}{m} \to 1\,(m \to \infty)$ iken $1 \leq \frac{P_n}{P_m} \to 1$ olsun. Bu durumda $s_n = O(1)$ koşulu (reel s_n için $s_n = O_L(1)$ koşulu) bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Tietz ve Trautner, 1988).

Teorem 3.1.16

$$np_n = O(P_n) \tag{3.1.60}$$

olsun. Bu durumda $s_n = O(1)$ koşulu (reel s_n için $s_n = O_L(1)$ koşulu) bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Tietz ve Trautner, 1988).

Bu teoremin $p_n := \frac{1}{n+1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ özel durumunda J_p ve M_p metodları sırasıyla logaritmik L ve l metodlarına indirgeneceğinden Kokhanovskii (1975) tarafından ispatlanan şu teorem elde edilir: $s_n = O_L(\ln(n+1))$ koşulu $L \to l$ tipi bir Tauber koşuludur.
Ayrıca, $p_n = \frac{1}{n+1}$ için $s_n = O_L(\ln(n+1))$ koşulu $np_n s_n = O_L(P_n)$ koşuluna denktir. Ayrıca bu koşul $\{p_n\}$ dizisi üzerindeki

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{p(x^2)}{p(x)} = 1$$

koşulu ile birlikte bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Kokhanovskii, 1978). Benzer bir sonuç ise Mikhalin (1978) tarafından ispatlanmıştır. Bu sonuçların hepsi ise Borwein'e ait Teorem 3.1.11'in bir sonucudur. Tietz (1989), Teorem 3.1.11'i aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Teorem 3.1.17

$$np_n = o\left(P_n\right) \tag{3.1.61}$$

olsun. Bu durumda $np_n s_n = O_L\left(P_n\right)$ koşulu bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Borwein, 1981)

Eğer (3.1.60) koşulu gerçeklenirse o zaman $s_n = O_L\left(1\right)$ koşulu $np_n s_n = O_L\left(P_n\right)$ koşulunu gerektirir. Bu nedenle doğal olarak Teorem 3.1.17'deki (3.1.61) koşulunun (3.1.60) koşulu ile değiştirilip değiştirilemeyeceği sorusu ortaya çıkar. Bu sorunun cevabı olumludur ve aşağıdaki teoremin bir sonucudur. Çünkü (3.1.60) koşulu

$$1 < \frac{n}{m} \to 1\left(m \to \infty\right) \quad \text{iken} \quad 1 \leq \frac{P_n}{P_m} \to 1 \tag{3.1.62}$$

koşulundan kesin olarak kuvvetlidir.

Teorem 3.1.18 (3.1.62) sağlansın. Bu durumda $np_n s_n = O_L\left(P_n\right)$ koşulu bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Tietz, 1989).

Teorem 3.1.16 ve Teorem 3.1.17'yi içeren Teorem 3.1.18'in ispatı için aşağıdaki lemmalardan yararlanacağız.

Lemma 3.1.8 $P_{2n} = O\left(P_n\right)$ ise

$$\frac{p\left(x\right)}{p\left(x^2\right)} = O(1) \qquad \left(x \to 1^-\right)$$

dir (Kratz ve Stadtmüller, 1989)

İspat. $P_{2n} = O(P_n)$ olsun.

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k \\
&= (1-x)\left[\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k-1} x^{2k-1}\right] \\
&= (1-x)\left[\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k} x^{2k} + \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k-1} x^{2k}\right] \\
&\leq (1-x)\left(1+\frac{1}{x}\right)\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k} x^{2k} \qquad (P_{2k-1} \leq P_{2k} \text{ olduğundan}) \\
&\leq \frac{C}{x}\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} P_k x^{2k} \qquad (\text{hipotezden}) \\
&= \frac{C}{x}\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^{2k}\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \\
&= \frac{C}{x}\frac{1-x^2}{1-x^2} p\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\frac{p(x)}{p(x^2)} \leq \frac{C}{x} \to C \qquad \left(x \to 1^-\right)$$

elde edilir. ■

Lemma 3.1.9 $P_n \to \infty$ ve $P_{2n} = O(P_n)$ ise her $t \in (0,1)$ için $p\left(t^{1/n}\right) = O(P_n)$ dir (Tietz, 1989).

İspat. $t \in (0,1)$ sabit olsun. Lemma 3.1.8'den her $x \in (0,1)$ için $p(x) < Kp(x^2)$ olacak biçimde bir $K > 0$ sayısı vardır. $Kt^{n/2} \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan $\varepsilon := Kt^{m/2} < 1$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
p\left(t^{1/n}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^{k/n} = \sum_{k=0}^{mn} p_k t^{k/n} + \sum_{k=mn+1}^{\infty} p_k t^{k/2n} t^{k/2n} \\
&\leq P_{mn} + t^{mn/2n}\sum_{k=mn+1}^{\infty} p_k t^{k/2n} = P_{mn} + t^{m/2} p\left(t^{1/2n}\right) \\
&< P_{mn} + Kt^{m/2} p\left(t^{1/n}\right) = P_{mn} + \varepsilon p\left(t^{1/n}\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $P_{2n} = O(P_n)$ olduğundan son eşitsizlikten

$$\frac{p\left(t^{1/n}\right)}{P_n} \leq \frac{P_{mn}}{P_n}\frac{1}{1-\varepsilon} = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

elde edilir. ■

Lemma 3.1.10 (3.1.62) ve $np_n s_n = O_L(P_n)$ koşulları gerçeklensin. Bu durumda

$$\frac{p_s(x)}{p(x)} = O(1) \quad (x \to 1^-) \qquad \text{iken} \quad t_n = O(1)$$

dir (Tietz, 1989).

İspat. $n = 0, 1, \ldots,$ için $np_n s_n > -KP_n$ olacak biçimde bir $K > 0$ sabiti seçelim. Negatif olmayan bir $\{\gamma_n\}$ dizisini

$$\gamma_n := \begin{cases} |s_n| \ , & np_n = 0 \text{ ise} \\ KP_n/np_n \ , & np_n \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $n = 0, 1, \ldots,$ için $s_n \geq -\gamma_n$ ve $np_n\gamma_n = O(P_n)$ dir. Teorem 3.1.11'in ispatını dikkate alarak sabit bir $t \in (0,1)$ seçip

$$\frac{1}{p(t^{1/n})} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k = O(1) \qquad (n \to \infty) \tag{3.1.63}$$

elde ederiz. Stadtmüller ve Trautner (1979), $P_{2n}/P_n = O(1)$ koşulunun (3.1.62) koşulunun bir sonucu olduğunu göstermiştir. Buna göre Lemma 3.1.9'dan $p\left(t^{1/n}\right) = O(P_n)$ olup (3.1.63) den

$$t_n = \frac{p\left(t^{1/n}\right)}{P_n} \frac{1}{p(t^{1/n})} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k = O(1)$$

bulunur. ■

Lemma 3.1.11 (3.1.62), $np_n s_n = O_L(P_n)$ ve $t_n = O(1)$ koşulları gerçeklensin. $n = 0, 1, \ldots$ için $Q_n := P_0 + \cdots + P_n$ olmak üzere

$$\frac{Q_n}{Q_m} \to 1 \ \ (n > m \to \infty) \quad \text{iken} \quad \liminf (t_n - t_m) \geq 0 \tag{3.1.64}$$

dır (Tietz, 1989).

İspat. $n = 0, 1, \ldots,$ için

$$t_n - t_{n-1} = \frac{p_n}{P_n}(s_n - t_{n-1})$$

olduğundan $n > m > 0$ için

$$t_n - t_m = \sum_{v=m+1}^{n} \frac{vp_v s_v}{P_v}\frac{1}{v} - \sum_{v=m+1}^{n} \frac{p_v t_{v-1}}{P_v}$$

dir. Dolayısıyla $np_n s_n \geq -KP_n$ ve $|t_n| \leq K$ koşullarını gerçekleyen $K > 0$ sabit sayısı için $n > m > 0$ iken

$$t_n - t_m \geq -K \ln \frac{n}{m} - K\left(\frac{P_n}{P_m} - 1\right) \tag{3.1.65}$$

elde ederiz. $n > m$ için

$$\frac{n}{m}-1=\frac{(n-m)\,P_m}{m}\frac{1}{P_m}\leq\frac{P_{m+1}+P_{m+2}+\cdots+P_n}{mP_m}=\frac{Q_n-Q_m}{Q_m}\frac{Q_m}{mP_m}\leq\left(\frac{Q_n}{Q_m}-1\right)\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

olduğundan $n > m \to \infty$ iken $Q_n/Q_m \to 1$ ise $n/m \to 1$ dir. Böylece (3.1.62) koşulundan $P_n/P_m \to 1$ dir. O halde (3.1.64), (3.1.65) den elde edilir. ■

Teorem 3.1.18'in İspatı. $\{s_n\}$ dizisi $np_ns_n = O_L(P_n)$ ve J_p-$\lim s_n = \sigma$ koşullarına sahip olsun. Lemma 3.1.10'dan $t_n = O(1)$ ve J_p-$\lim t_n = \sigma$ dir. Böylece Lemma 3.1.11'den (3.1.64) gerçeklenir. (3.1.62) den

$$1 < n/m \to 1 \quad (m\to\infty) \qquad \text{iken} \qquad 1 \leq Q_n/Q_m \to 1$$

dir. Ayrıca, ileride verilecek olan Sonuç 3.1.9'dan $\lim t_n = \sigma$ ise M_p-$\lim s_n = \sigma$ dır. Böylece ispat biter. ■

$np_ns_n = O_L(P_n)$ koşuluna göre Teorem 3.1.18'deki $\{s_n\}$ dizisi reel olmalıdır. Ancak O_L koşulu O koşulu ile değiştirildiğinde Teorem 3.1.18 kompleks $\{s_n\}$ dizileri için de geçerlidir.

Sonuç 3.1.8 (3.1.62) gerçeklensin. Bu durumda $np_ns_n = O(P_n)$ koşulu bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Tietz, 1989).

$r \geq 0$ olsun. $\{s_n\}$ reel terimli bir dizi ise

$$n > m \to \infty \quad \text{ve} \quad \frac{P_n}{P_m} \to 1 \quad \text{iken} \quad \liminf(s_n - s_m) \geq -r \tag{3.1.66(r)}$$

koşulu, $\{s_n\}$ kompleks terimli bir dizi ise

$$n > m \to \infty \quad \text{ve} \quad \frac{P_n}{P_m} \to 1 \quad \text{iken} \quad \limsup|s_n - s_m| \leq r/\sqrt{2} \tag{3.1.67(r)}$$

koşulu Tietz (1990) tarafından Tauber koşulları olarak kullanılmıştır. Bu koşullar $\{s_n\}$ için Schmidt tipi yavaş azalanlık koşulları olarak ifade edilebilir.

Teorem 3.1.19

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \to 1 \tag{3.1.68}$$

olsun ve (3.1.66(r)) (veya (3.1.67(r)) gerçeklensin. Bu durumda M_p-$\lim s_n = \sigma$ iken $\limsup|s_n - \sigma| \leq r$ dir (Tietz, 1990).

İspat. İspatı reel $\{s_n\}$ için ve $\sigma = 0$ durumu için yapalım. (3.1.66(r)) den öyle bir $\delta > 0$ sayısı ve bir $M \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki

$$n > m > M \quad \text{ve} \quad \frac{P_n}{P_m} \leq 1+\delta \quad \text{iken} \quad s_n - s_m \geq -r-\varepsilon \tag{3.1.69}$$

dur. $P_n \to \infty$ olması ve (3.1.68) koşulundan öyle bir $M_0 > M$ vardır ki

$$m > M_0 \qquad \text{iken} \qquad 1 + \frac{\delta}{2} \leq \frac{P_n}{P_m} \leq 1 + \delta \tag{3.1.70}$$

dır. Gerçekten, $m \to \infty$ iken $P_m \to \infty$ olduğundan öyle bir $m_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $m > m_1$ için $P_m > 1 + \dfrac{\delta}{2}$ dir.

$$\frac{P_n}{P_m} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \cdots \frac{P_{m-1}}{P_m} \to 1 \qquad (n > m \to \infty)$$

olduğundan öyle bir $m_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki $m > m_2$ iken $1 \leq \dfrac{P_n}{P_m} \leq 1 + \delta$ dır. $M_0 \geq \max\{m_1, m_2, M\}$ olarak seçilirse her $m > M_0$ için

$$1 + \frac{\delta}{2} \leq P_m < P_n \leq 1 + \delta$$

ve buradan (3.1.70) elde edilir. Böylece (3.1.69) dan $n > m > M_0$ için

$$P_n t_n - P_m t_m = \sum_{v=m+1}^{n} P_v s_v \leq \max_{m+1 \leq v \leq n} s_v \sum_{v=m+1}^{n} P_v \leq (s_n + r + \varepsilon)(P_n - P_m)$$

ve buradan

$$\frac{P_n}{P_m} t_n - t_m \leq (s_n + r + \varepsilon)\left(\frac{P_n}{P_m} - 1\right)$$

olur. Kabule göre $t_n \to 0$ olup (3.1.70) eşitsizliğinden $\liminf_{n\to\infty}(s_n + r + \varepsilon) \geq 0$ elde ederiz. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan $\liminf s_n \geq -r$ elde edilir.

$$P_n t_n - P_m t_m = \sum_{v=m+1}^{n} P_v s_v \leq (s_n - r - \varepsilon)(P_n - P_m)$$

$$t_n - \frac{P_m}{P_n} t_m \geq (s_n - r - \varepsilon)\left(1 - \frac{P_m}{P_n}\right)$$

eşitsizliğinden ise $\limsup s_m \leq r$ bulunur. Ayrıca,

$$\liminf s_n \geq -r \Rightarrow -\liminf\{s_n\} \leq r \Rightarrow \limsup(-s_n) \leq r$$

olduğundan $\limsup |s_n| \leq r$ elde edilir. ■

Sonuç 3.1.9 (3.1.68) gerçeklensin. (3.1.66(0)) (veya 3.1.67(0)) koşulu $M_p \to c$ tipi bir Tauber koşuludur (Tietz, 1990).

Not 3.1.2 Kwee (1972), Lemma 3.1.1' de Sonuç 3.1.9 u (3.1.68) koşuluna kısıtlamadan ifade etmiştir. Ancak bu doğru değildir. Gerçekten,

$$p_{2^k} = 2^k, \; p_{2^k+1} = 0, \; s_{2^k} = 0, \; s_{2^k+1} = 1 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

seçilirse

$$M_p\text{-}\lim s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k = 0$$

olmasına rağmen (s_n) ıraksaktır. Burada

$$P_{2k} = P_{2k+1} = 2^{k+1} - 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

olup (3.1.68) koşulu sağlanmıyor. Çünkü $n = 2k+1$ için

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}}{2^{k+1} - 1} = \frac{2, 2^{k+1} - 1}{2^{k+1} - 1} \to 2 \neq 1$$

dir (Tietz, 1990).

Tietz (1990) tarafından kullanılan bir diğer koşul ise

$$1 < \frac{n}{m} \to 1 \ (m \to \infty) \quad \text{iken} \quad 1 \leq \frac{P_n}{P_m} \to 1 \tag{3.1.71}$$

koşuludur. Eğer (3.1.71) koşulu gerçeklenirse (3.1.66(r)) yerine

$$\frac{n}{m} \to 1 \quad \text{iken} \quad \liminf (s_n - s_m) \geq -r \tag{3.1.72(r)}$$

koşulu, (3.1.67(r)) yerine de

$$\frac{n}{m} \to 1 \quad \text{iken} \quad \limsup |s_n - s_m| \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \tag{3.1.73(r)}$$

koşulu alınabilir. (3.1.68) koşulu (3.1.71) koşulundan elde edileceğinden Teorem 3.1.19 ve onun sonucu aşağıdaki gibi olur.

Teorem 3.1.20 (3.1.71) ve (3.1.72(r)) (veya (3.1.73(r))) gerçeklensin.

$$M_p\text{-}\lim s_n = \sigma \quad \text{ise} \quad \limsup |s_n - \sigma| \leq r$$

dir (Tietz, 1990).

Sonuç 3.1.10 (3.1.71) koşulu gerçeklensin. (3.1.72(0)) (veya (3.1.73(0)) koşulu bir $M_p \to c$ tipi Tauber koşuludur.

Sonuç 3.1.9'un ve Sonuç 3.1.10'un özel halleri logaritmik toplanabilme metodu için Kwee'nin (1967,1971) ve Phillips'in (1973) çalışmalarında, J_p-metodu içinse Jakimovski ve Tietz'in (1980) çalışmasında mevcuttur.

Teorem 3.1.19'un ispatı gösteriyor ki Teorem 3.1.19 ve Teorem 3.1.20'de $s_n = O(1)$ koşulu kabul edilirse M_p-lim $s_n = \sigma$ koşulu $t_n = O(1)$ koşuluna zayıflatılabilir. Bunu göstermek için önce aşağıdaki lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 3.1.12 $t > 0$ olmak üzere $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $c_n(t) = p_n e^{-nt}/p\left(e^{-1/t}\right)$ olsun. Kesin monoton, pozitif, sonsuza ıraksayan ve $f(t+1) - f(t) \to 0$ koşuluna sahip bir $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=0}^{M} c_n(t) \to 0 \qquad (f(t) - f(M) \to \infty, \ t > M \to \infty) \tag{3.1.74}$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n(t)\left[f(n) - f(N)\right] \to 0 \qquad (f(N) - f(t) \to \infty, \ N > t \to \infty) \tag{3.1.75}$$

sağlansın ve $n \leq t < n+1$ için $s(t) = s_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ olan $\{s_n\}$ dizisi verilsin. Eğer

$$s(t) - s(u) > -a\left[f(t) - f(u)\right] - b, \ \ t > u > 0 \tag{3.1.76}$$

koşuluna sahip a ve b sabitleri varsa

$$\frac{P_s(x)}{p(x)} = O(1) \quad \left(x \to 1^-\right) \quad \text{iken} \quad s_n = O(1)$$

geçerlidir (Rangachari, 1980).

Teorem 3.1.21 (3.1.71),

$$P_{2n} = O(P_n) \tag{3.1.77}$$

ve (3.1.66(r)) (veya 3.1.67(r)) gerçeklensin. Bu durumda

$$\left(x \to 1^-\right) \quad \text{iken} \quad \frac{p_s(x)}{p(x)} = O(1) \quad \text{ise} \quad s_n = O(1)$$

dir (Tietz, 1990).

İspat. Teoremi reel $\{s_n\}$ için ispatlamak yeterlidir. Buna göre $\{s_n\}$ reel dizisinin $(3.1\,(r))$ ve $\frac{P_s(x)}{p(x)} = O(1)$ $(x \to 1^-)$ koşullarına sahip olduğunu kabul edelim. $c_n(t)$ ve $s(t)$ Lemma 3.1.12'deki gibi tanımlansın ve

$$f(t) = \ln P_{[t]}, \quad 0 < t < \infty$$

olsun. Bu durumda $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton, sonsuza ıraksak ve $f(t+1) - f(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ koşuluna sahip bir fonksiyondur. Sırasıyla, (3.1.74), (3.1.75) ve (3.1.76) koşullarının gerçeklendiğini gösterelim.

(3.1.74) koşulunu gösterelim.

$$f(t) - f(M) \to \infty \Rightarrow P_{[t]}/P_M \to \infty \tag{3.1.78}$$

olur. Lemma 3.1.7 (iii) den

$$P_{[t]} \leq \inf\left\{p(x)/x^{[t]} : x \in (0,1)\right\}$$

dir. Böylece özel olarak $t > 0$ için $P_{[t]} \leq p\left(e^{-1/t}\right) e$ dir. Bununla birlikte (3.1.78) den $f(t) - f(M) \to \infty$ $(t > M \to \infty)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \leq \frac{P_M}{p\left(e^{-1/t}\right)} = \frac{P_M}{P_{[t]}} . \frac{P_{[t]}}{p\left(e^{-1/t}\right)} = o(1)$$

elde edilir.

Şimdi de (3.1.75) koşulunu gösterelim.

$$f(N) - f(t) \to \infty \Rightarrow \frac{P_N}{P_{[t]}} \to \infty$$

ve (3.1.77) den

$$f(N) - f(t) \to \infty \Rightarrow \frac{N}{t} \to \infty \tag{3.1.79}$$

olur. Bunun yanı sıra Lemma den

$$p\left(e^{-1/N}\right) = O(P_N) \quad (N \to \infty) \tag{3.1.80}$$

elde edilir. $f(N) - f(t) \to \infty$ koşulu uygulanırsa (3.1.79) dan öyle bir $t_0 > 0$ vardır ki $t > t_0$ için $N > 2t$ dir. Buradan $t > t_0$ için $f(N) - f(t) \to \infty$ $(N > t \to \infty)$ iken, (3.1.79) ve (3.1.80) den

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{\infty} c_n(t)\left[f(n) - f(N)\right] &= \frac{1}{p\left(e^{-1/t}\right)} \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n e^{-n/t} \ln \frac{p_n}{P_N} \\
&\leq \frac{1}{P_N p\left(e^{-1/t}\right)} \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n e^{-n/t} \left[p_n - P_N\right] \\
&= \frac{1}{P_N p\left(e^{-1/t}\right)} \sum_{v=N+1}^{\infty} p_v \sum_{n=v}^{\infty} p_n e^{-n/t} \\
&= \frac{1}{P_N p\left(e^{-1/t}\right)} \sum_{v=N+1}^{\infty} p_v e^{-v/t} \sum_{n=v}^{\infty} p_n e^{-(n-v)/t} \\
&\leq \frac{p\left(e^{-1/N}\right)}{P_N p\left(e^{-1/t}\right)} \sum_{v=N+1}^{\infty} p_v e^{-v/t} e^{v/N} \\
&= \frac{p\left(e^{-1/N}\right)}{P_N p\left(e^{-1/t}\right)} \sum_{v=N+1}^{\infty} p_v e^{-v/2t} e^{-v(N-2t)/2Nt} \\
&\leq \frac{p\left(e^{-1/N}\right)}{P_N p\left(e^{-1/t}\right)} \sum_{v=N+1}^{\infty} p_v e^{-v/2t} e^{1-N/2t} \\
&\leq \frac{p\left(e^{-1/N}\right)}{P_N} \frac{p\left(e^{-1/2t}\right)}{p\left(e^{-1/t}\right)} e^{1-N/2t} = o(1)
\end{aligned}$$

bulunur. Çünkü, Lemma 3.1.8'e göre $P_n \to \infty$ ve (3.1.77) koşulları $x \to 1^-$ iken $\frac{p(x)}{p(x^2)} = O(1)$ olmasını gerektirir.

Son olarak, (3.1.68) ve (3.1.66(r)) den, Lemma 3.1.5'ye göre

$$s(t) - s(u) \geq -a \ln \left(\frac{P_{[t]}}{P_{[u]}} - b \right), \qquad t > u > 0$$

olacak şekilde a ve b sabitleri vardır. Yani (3.1.76) koşulu gerçeklenir. Böylece teoremin ispatı Lemma 3.1.12'den çıkar. ■

Teorem 3.1.21'nin özel durumu Abel metodu için Davydov (1963) tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca, Teorem 3.1.8'i Teorem 3.1.21'den elde edebiliriz.

Teorem 3.1.15'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.22 (3.1.71) gerçeklensin. (3.1.66(r)) veya (3.1.67(r)) bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Tietz, 1990).

Teorem 3.1.19'dan ve Teorem 3.1.22'den çıkan aşağıdaki önemli sonuç elde edilir:

Sonuç 3.1.11 (3.1.71) gerçeklensin. (3.1.66(0)) veya (3.1.67(0)) koşulu bir $J_p \to c$ tipi Tauber koşuludur (Tietz, 1990).

Teorem 3.1.23 (3.1.71) gerçeklensin. $P_n a_n = O_L(p_n)$ (veya $P_n a_n = O(p_n)$) koşulu bir $J_p \to c$ tipi Tauber koşuludur (Tietz, 1990).

İspat. $P_n a_n = O_L(p_n)$ koşulundan öyle bir $K > 0$ vardır ki $s_n - s_{n-1} > -Kp_n/P_n$ dir. Böylece $n > m$ için

$$s_n - s_m = \sum_{v=m+1}^{n} (s_n - s_{n-1}) \geq -K \sum_{v=m+1}^{n} \frac{p_v}{P_v} \geq -\frac{K}{P_m} \sum_{v=m+1}^{n} p_v \Rightarrow s_n - s_m \geq -K \left(\frac{P_n}{P_m} - 1 \right)$$

olur. (3.1.71) kabulünden (3.1.66(0)) elde edilir. ■

J_p-$\lim s_n = \sigma \Rightarrow J_p$-$\lim t_n = \sigma$ olduğundan

$$Q_n = P_0 + \cdots + P_n$$

olmak üzere aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.12

$$1 < \frac{n}{m} \to 1 \quad (m \to \infty) \qquad \text{iken} \quad 1 \leq \frac{Q_n}{Q_m} \to 1 \tag{3.1.81}$$

olsun. $Q_n(t_n - t_{n-1}) = O_L(P_n)$ (veya $Q_n(t_n - t_{n-1}) = O(P_n)$) koşulu $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Tietz, 1990).

Şimdi ise (3.1.66(r)) ve (3.1.67(r)) ye benzer olan

$$Q_n/Q_m \to 1 \quad (n > m \to \infty) \qquad \text{iken} \qquad \liminf\,(t_n - t_m) \geq -r \quad , \tag{3.1.82(r)}$$

$$Q_n/Q_m \to 1 \quad (n > m \to \infty) \qquad \text{iken} \qquad \limsup\,(t_n - t_m) \leq r/\sqrt{2} \quad , \tag{3.1.83(r)}$$

koşullarını ele alacağız. Bu koşullar

$$n/m \to 1 \qquad (n > m \to \infty) \qquad \text{iken} \qquad \liminf\,(t_n - t_m) \geq -r \quad , \tag{3.1.84(r)}$$

ve

$$n/m \to 1 \qquad (n > m \to \infty) \qquad \text{iken} \qquad \limsup\,(t_n - t_m) \leq r/\sqrt{2} \tag{3.1.85(r)}$$

koşullarından daha zayıftır. Çünkü

$$\frac{n}{m} - 1 = \frac{n-m}{m}\frac{P_m}{P_m} \leq \frac{P_{m+1} + \cdots + P_n}{mP_m} = \frac{Q_n - Q_m}{Q_m}\frac{Q_m}{mP_m} \leq \frac{Q_n}{Q_m} - 1 \quad (n > m > 0)$$

olduğundan $Q_n/Q_m \to 1$ olması $n/m \to 1$ olmasını gerektirir. (3.1.81) kabul edildiğinde (3.1.82(r)), (3.1.84(r)) ye ve (3.1.83(r)), (3.1.85(r)) ye denktir. Ayrıca J_p-$\lim s_n = \sigma$ iken J_p-$\lim t_n = \sigma$ olduğundan Sonuç 3.1.12'den şu sonucu elde edebiliriz.

Teorem 3.1.24 (3.1.81) gerçeklensin. (3.1.84(0)) (veya (3.1.85(0))) koşulu bir $J_p \to M_p$ tipi Tauber koşuludur (Tietz, 1990).

3.2 Çift Diziler ile Tanımlı Kuvvet Serisi Metotları İçin Tauber Tipi Teoremler

Bu kısımda çift kuvvet serisi metotları için Baron ve Stadtmüller (1997) tarafından verilen bir Tauber tipi teorem incelenecektir.

$m, n \in \mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere $\{p_{m,n}\}$ negatif terimli olmayan ve $p_{0,0} > 0$ koşuluna sahip bir çift indisli dizi olsun.

$$x, y \in (0,1) \text{ için} \quad p\,(x,y) := \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{m,n} x^m y^n < \infty$$

ve

$$x, y \to 1^- \text{ iken } p\,(x,y) \to \infty \tag{3.2.1}$$

olduğunu kabul edelim. Buradaki iki değişkenlilerin limitinin Pringsheim anlamında olduğu, yani değişkenlerin limit noktalarına birbirlerinden bağımsız olarak yaklaştığı kabul edilecektir.

$$x, y \in (0,1) \text{ için } \quad p(x,y) \geq \sum_{k,l=0}^{m,n} p_{k,l} x^k y^l$$

olduğundan (3.2.1) in gerçeklenmesi için gerek ve yeter şart

$$m, n \to \infty \text{ iken } \quad P_{m,n} := \sum_{k,l=0}^{m,n} p_{k,l} := \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{k,l} \to \infty$$

olmasıdır. $\{a_{k,l}\}$ reel ya da kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere

$$s_{m,n} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{k,l}$$

biçiminde tanımlı $S = \{s_{m,n}\}$ dizisini ele alalım.

$$\sigma_{mn} \; : \; = \frac{1}{P_{m,n}} \sum_{k,l=0}^{m,n} p_{k,l} s_{k,l}$$

$$p_S(x,y) \; : \; = \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{m,n} p_{m,n} x^m y^n$$

ve

$$\sigma_S(x,y) := \frac{p_S(x,y)}{p(x,y)}$$

olsun.

(i) Eğer

$$\lim s_{m,n} := \lim_{m,n \to \infty} s_{m,n} = s \quad \text{ ve } \quad \sup_{m,n} |s_{m,n}| < \infty$$

ise S çift dizisi sınırlı olarak s ye yakınsaktır denir ve b-$\lim s_{m,n} = s$ ile gösterilir.

(ii) Eğer her $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$ için $p_S(x,y)$ çift kuvvet serisi yakınsak ve

$$x, y \to 1^- \text{ iken } \; \sigma_S(x,y) \to s$$

ise S çift dizisi J_p kuvvet serisi metodu ile s ye toplanabilirdir denir ve J_p-$\lim s_{m,n} = s$ ile gösterilir.

(iii) Eğer

$$J_p\text{-}\lim s_{m,n} = s \quad \text{ ve } \quad \sup_{x,y \in (0,1)} |\sigma_S(x,y)| < \infty$$

ise S çift dizisi s sayısına sınırlı olarak J_p kuvvet serisi metoduna ile toplanabilirdir denir ve bJ_p-$\lim s_{m,n} = s$ ile gösterilir.

(iv) Eğer

$$m,n \to \infty \quad \text{iken} \quad \sigma_{mn} \to s$$

ise S çift dizisi s sayısına M_p ağırlık ortalama metodu ile toplanabilirdir denir ve M_p-$\lim s_{m,n} = s$ ile gösterilir.

(v) Eğer

$$M_p\text{-}\lim s_{m,n} = s \quad \text{ve} \quad \sup_{m,n} |\sigma_{mn}| < \infty$$

ise S çift dizisi s sayısına sınırlı olarak M_p ağırlık ortalama metodu ile toplanabilirdir denir ve bM_p-$\lim s_{m,n} = s$ ile gösterilir.

$$m,n \to \infty \text{ iken } \frac{P_{m,l}}{P_{m,n}} \to 0 \ (l \text{ sabit}) \ \text{ ve } \ \frac{P_{k,n}}{P_{m,n}} \to 0 \ (k \text{ sabit})$$

koşulları altında sınırlı dizilere karşılık gelen ağırlıklı ortalama metodunun regüler (kısaca b-regüler) olduğu, yani

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{m,n} = s \quad \text{ve} \quad \sup_{m,n} |s_{m,n}| < \infty \text{ iken } \ bM_p\text{-}\lim s_{m,n} = s$$

olduğu bilinmektedir (Hamilton, 1936) . Ayrıca herhangi μ, v sabitleri için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{k,v} x^k}{p(x,y)} \to 0 \ \text{ ve } \ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{p_{\mu,l} y^l}{p(x,y)} \to 0 \quad \left(x,y \to 1^-\right) \tag{3.2.2}$$

koşulları altında J_p çift kuvvet serisi metodu b-regülerdir.

Baron ve Stadmüller (1997) J_p-metodunun M_p-metodundan daha kuvvetli olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 3.2.1 $\{p_{m,n}\}$ dizisinin (3.2.2) koşulunu gerçeklediğini kabul edelim. Bu durumda bM_p-$\lim s_{m,n} = s$ ise bJ_p-$\lim s_{m,n} = s$ dir (Baron ve Stadtmüller, 1997).

İspat. (3.2.2) koşulu gerçeklenirse $\{P_{m,n}\}$ dizisi ile belirlenen J_p kuvvet serisi metodunun b-regüler olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan, $P(x,y) := \sum_{m,n=0}^{\infty} P_{m,n} x^m y^n$ gösterimini kullanırsak

$$p(x,y) = (1-x)(1-y) P(x,y)$$

eşitliğini kolayca elde edebiliriz. Ayrıca

$$P_{m,n}\sigma_{m,n} - P_{m,n-1}\sigma_{m,n-1} - P_{m-1,n}\sigma_{m-1,n} + P_{m-1,n-1}\sigma_{m-1,n-1} = p_{m,n} s_{m,n}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(x,y)}\sum_{m,n=0}^{\infty}p_{m,n}s_{m,n}x^{m}y^{n} &= \frac{1}{p(x,y)}\left[\sum_{m,n=0}^{\infty}P_{m,n}\sigma_{m,n}x^{m}y^{n}-\sum_{m,n=0}^{\infty}P_{m,n-1}\sigma_{m,n-1}x^{m}y^{n}\right.\\
&\quad\left.-\sum_{m,n=0}^{\infty}P_{m-1,n}\sigma_{m-1,n}x^{m}y^{n}+\sum_{m,n=0}^{\infty}P_{m-1,n-1}\sigma_{m-1,n-1}x^{m}y^{n}\right]\\
&= \frac{1}{p(x,y)}(1-y-x+xy)\sum_{m,n=0}^{\infty}P_{m,n}\sigma_{m,n}x^{m}y^{n}\\
&= \frac{(1-x)(1-y)}{p(x,y)}\sum_{m,n=0}^{\infty}P_{m,n}\sigma_{m,n}x^{m}y^{n}\\
&= \frac{1}{P(x,y)}\sum_{m,n=0}^{\infty}P_{m,n}\sigma_{m,n}x^{m}y^{n}\to s\quad\left(x,y\to 1^{-}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece J_p-$\lim s_{m,n}=s$ ve $\sup_{x,y\in(0,1)}|\sigma_S(x,y)|<\infty$, yani bJ_p-$\lim s_{m,n}=s$ elde edilir. ■

Negatif olmayan $p=\{p_n\}$ ve $q=\{q_n\}$ dizileri

$$n\to\infty \text{ iken } 0<P_n:=\sum_{k=0}^{n}p_k\to\infty,\quad 0<Q_n:=\sum_{k=0}^{n}q_k\to\infty,$$

$$\begin{aligned}
x &\in (0,1) \quad \text{için} \quad p(x):=\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k<\infty\\
y &\in (0,1) \quad \text{için} \quad q(y):=\sum_{l=0}^{\infty}q_ly^l<\infty
\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

koşullarını sağlamak şartıyla $p_{k,l}=p_kq_l$ biçiminde çarpanlarına ayrılabilen $\{p_{k,l}\}$ dizisi için tanımlanan kuvvet serisi metoduna J_{pq} metodu, ağırlıklı ortalama metodu ise M_{pq} metodu olarak adlandırılır. (3.2.3) koşulu altında her iki metot b-regülerdir.

Tek boyutlu kuvvet serisi metodunda olduğu gibi

$$\Delta_m^p=\inf_{0<x<1}p(x)\,x^{-m}\quad\text{ve}\quad\Delta_n^q=\inf_{0<y<1}q(y)\,y^{-n}$$

sayıları tanımlansın. J_{pq}-toplanabilmeden yakınsaklığı elde etmek için aşağıdaki Tauber koşulları kullanılacaktır:

$$\begin{aligned}
n &= 1,2,\ldots \quad \text{için} \quad \sup_{m\in\mathbb{N}_0}\left|\sum_{\mu=0}^{m}a_{\mu n}\right|\le\beta_n\frac{q_n}{\Delta_n^q}\\
n &= 1,2,\ldots \quad \text{için} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left|\sum_{v=0}^{n}a_{mv}\right|\le\alpha_m\frac{p_m}{\Delta_m^p}.
\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Burada, $\{\alpha_m\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri negatif olmayan sıfır dizileridir.

Teorem 3.2.2 Çift indisli S dizisi $\{\alpha_m\}$ ve $\{\beta_n\}$ sıfır dizileri için (3.2.4) koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$J_{pq}\text{-}\lim s_{m,n}=s \quad \text{iken} \quad \lim s_{m,n}=s$$

ve

$$bJ_{pq}\text{-}\lim s_{m,n}=s \quad \text{iken} \quad b\text{-}\lim s_{m,n}=s$$

dir (Baron ve Stadtmüller, 1997).

Teoremin ispatında aşağıdaki Lemma ve onun sonucundan yararlanılacaktır.

Lemma 3.2.1 Çift indisli S dizisi negatif olmayan $\{\alpha_m\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri için (3.2.4) koşulunu sağlasın. Bu durumda her $\mu, v, m, n \in \mathbb{N}_0$ için

(i)

$$|s_{\mu v-}s_{m,n}| \leq \sum_{k=\rho_u+1}^{\rho_o} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} + \sum_{l=\theta_u+1}^{\theta_o} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\rho_u = \min\{\mu, m\}$, $\rho_o = \max\{\mu, m\}$ ve $\theta_u = \min\{v, n\}$, $\theta_o = \max\{v, n\}$ şeklindedir.

(ii)

$$|\sigma_s(x_m, y_n) - s_{m,n}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k p_k x_m^k}{p(x_m)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_l q_l y_n^l}{q(y_n)}$$

eşitsizliği geçerlidir (Baron ve Stadtmüller, 1997).

Sonuç 3.2.1 Lemma 3.2.1'deki $\{\alpha_m\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri sınırlı diziler ise

$$\sup_{m,n} |\sigma_s(x_m, y_n) - s_{m,n}| < \infty,$$

sıfır dizileri ise

$$\lim_{m,n\to\infty} |\sigma_s(x_m, y_n) - s_{m,n}| = 0$$

dır.

Lemma 3.2.1 in ispatı. ***(i)*** $\mu \geq m$ ve $v \geq n$ için (3.2.4) dan

$$\begin{aligned}
|s_{\mu v-}s_{m,n}| &= \left|\sum_{k,l=0}^{\mu,v} a_{k,l} - \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{k,l}\right| \leq \left|\sum_{k=m+1}^{\mu}\sum_{l=0}^{v} a_{k,l}\right| + \left|\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=n+1}^{v} a_{k,l}\right| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{\mu}\left|\sum_{l=0}^{v} a_{k,l}\right| + \sum_{l=n+1}^{v}\left|\sum_{k=0}^{m} a_{k,l}\right| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{\mu} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} + \sum_{l=n+1}^{v} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $\mu < m$ ve $v \geq n$ ise o zaman yine (3.2.4) den

$$\begin{aligned} |s_{\mu v-} s_{m,n}| &= \sum_{k=\mu+1}^{m} \left| \sum_{l=0}^{n} a_{k,l} \right| + \sum_{l=n+1}^{v} \left| \sum_{k=0}^{\mu} a_{k,l} \right| \\ &\leq \sum_{k=\mu+1}^{m} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} + \sum_{l=n+1}^{v} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q} \end{aligned}$$

olur. Geriye kalan durumlar benzer şeklide ele alındığında istenen sonucun elde edildiği görülür.

(ii) (3.1.58)'e göre $\Delta_m^p = p(x_m) x_m^{-m}$ ve $\Delta_n^q = q(y_n) y_n^{-n} (x_m)$ eşitliklerini sağlayan 1'e yakınsayan ve azalmayan $\{x_m\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri mevcuttur. Buna göre Lemma 3.2.2 den

$$\begin{aligned} & |\sigma_s(x_m, y_n) - s_{mn}| \\ \leq\ & \frac{1}{p(x_m) q(y_n)} \sum_{\mu,v=0}^{\infty} p_\mu q_v |s_{\mu v-} s_{mn}| x_m^\mu y_n^v \\ \leq\ & \frac{1}{p(x_m) q(y_n)} \sum_{\mu,v=0}^{\infty} p_\mu q_v + \left(\sum_{k=\rho_\mu+1}^{\rho_o} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} + \sum_{l=\theta_u+1}^{\theta_o} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q} \right) x_m^\mu y_n^v \\ \leq\ & \frac{1}{p(x_m)} \left(\sum_{\mu=0}^{m-1} p_\mu x_m^\mu \sum_{k=\mu+1}^{m} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} + \sum_{\mu=m+1}^{\infty} p_\mu x_m^\mu \sum_{k=\mu+1}^{m} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} \right) + \\ & \frac{1}{q(y_n)} \left(\sum_{v=0}^{n-1} q_v y_n^v \sum_{l=v+1}^{n} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q} + \sum_{v=n+1}^{\infty} q_v y_n^v \sum_{l=v+1}^{n} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q} \right) \\ =\ & \frac{1}{p(x_m)} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} \frac{x_m^k}{x_k^k} \sum_{\mu=0}^{k-1} p_\mu x_k^\mu \left(\frac{x_m}{x_k} \right)^{\mu-k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \alpha_k \frac{p_k}{\Delta_k^p} \frac{x_m^k}{x_k^k} \sum_{\mu=k}^{\infty} p_\mu x_k^\mu \left(\frac{x_m}{x_k} \right)^{\mu-k} \right) + \\ & \frac{1}{q(y_n)} \left(\sum_{l=1}^{n} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q} \frac{y_n^l}{y_l^l} \sum_{v=0}^{l-1} q_v y_l^v \left(\frac{y_n}{y_l} \right)^{v-l} + \sum_{l=n+1}^{\infty} \beta_l \frac{q_l}{\Delta_l^q} \frac{y_n^l}{y_l^l} \sum_{v=1}^{\infty} q_v y_l^v \left(\frac{y_n}{y_l} \right)^{v-l} \right) \end{aligned}$$

dir. $\{x_m\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri azalmayan diziler olduğundan $(x_m/x_k)^{\mu-k} \leq 1$ ve $(y_n/y_l)^{v-l} \leq 1$ dir. Ayrıca $\Delta_l^q y_l^l = q(y_l)$ ve $\Delta_k^p x_k^k = p(x_k)$ olduğundan

$$|\sigma_s(x_m, y_n) - s_{m,n}| \leq \frac{1}{p(x_m)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k p_k x_m^k + \frac{1}{q(y_n)} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l q_l y_n^l$$

dir. ■

Sonuç 3.2.1'in İspatı. Sonuç tek boyutlu kuvvet serisi yöntemlerinin düzenliliği ve pozitifliğinden kaynaklanmaktadır. Tek boyutlu kuvvet serisi metodunun regülerliğinden ve pozitifliğinden elde edilir. ■

Teorem 3.2.2'nin ispatı. Sonuç 3.2.1 den elde edilir. ■

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde toplanabilme teorisinin en genel metotlarından biri olan J_p kuvvet serisi toplanabilme metodu için geçmişten günümüze kadar yapılmış başlıca Tauber tipi teoremler kronolojik olarak incelenmiştir. Özel durumda Abel ve logaritmik toplanabilme metodu için ulaşılan sonuçlara yer verilmiştir. Bunun yanı sıra çift dizilerin kuvvet serisi toplanabilme metodu için de bir Tauber tipi sonuç ele alınmıştır. Gerekli görülen yerlerde bu çalışmalarda yer alan sonuçların ispatları daha anlaşılır olacak biçimde düzenlenmiştir.

Çanak ve Totur (2012) ve Totur ve Çanak (2017) tarafından yapılan çalışmalarda olduğu gibi bu tezde ele alınan temel teoremler kullanılarak yeni sonuçlara ulaşılabilir veya bu teoremler yeni koşullar kullanılarak genişletilebilir.

Diğer taraftan çift dizilerle elde edilen kuvvet serisi toplanabilme metotları ile ilgili şimdiye kadar az sayıda Tauber tipi sonuç olması dikkat çekmektedir. Bu nedenle tek boyutlu durumda ele aldığımız özellikle Tietz'e (1989, 1990) ait sonuçların iki boyutlu durumda çalışılması yeni bir problem niteliği taşımaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Aasma, A., Dutta, H., & Natarajan, P. N. (2017). An introductory course in summability theory. Wiley Blackwell. 224 pp.

[2] Abel, N.H. (1826). Recherches sur la serie $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + ...$ *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 1, 311-339.

[3] Baron, S., & Stadtmüller, U. (1997). Tauberian theorems for power series methods applied to double sequences. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 211(2), 574-589.

[4] Baron, S., & Tietz, H. (1994). Produktsätze für Verfahren zur Limitierung von Doppelfolgen. *Analysis Mathematica*, 20(2), 81-94.

[5] Boos, J. (2000). Classical and modern methods in summability, Oxford University Press, Oxford. 600 pp.

[6] Borwein, D. (1957). On a scale of Abel-type summability methods. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(2), 318-322).

[7] Borwein, D. (1981). Tauberian conditions for the equivalence of weighted mean and power series methods of summability. *Canadian Mathematical Bulletin*, 24(3), 309-316.

[8] Borwein, D., & Meir, A. (1987). A Tauberian theorem concerning weighted means and power series. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 101(2), 283-286.

[9] Borwein, D., & Kratz, W. (1989). On relations between weighted mean and power series methods of summability. *Journal of mathematical analysis and applications*, 139(1), 178-186.

[10] Çanak, İ., & Totur, Ü. (2012). Tauberian theorems for the (J, p) summability method. *Applied Mathematics Letters*, 25(10), 1430-1434.

[11] Davydov, N. A. (1963). The (c)-property of the Cesàro and Abel–Poisson methods and theorems of Tauberian type. *Matematicheskii Sbornik*, 102(2), 185-206.

[12] Hamilton, H. J. (1936). Transformations of multiple sequences. *Duke Mathematical Journal*, 2(1), 29-60.

[13] Hardy, G.H. (1910). Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(8), 310-320.

[14] Hardy, G. H. (1949). Divergent Series, Oxford University Press, 16+396 pp.

[15] Ghorpade, S. R., & Limaye, B. V. (2010). A course in multivariable calculus and analysis. Springer Science & Business Media, London. 489 pp.

[16] Ishiguro, K. (1964). A Tauberian theorem for (J, p_n) summability. *Proceedings of the Japan Academy*, 40(10), 807-812.

[17] Ishiguro, K. (1965). Two Tauberian theorems for (J, p_n) summability. *Proceedings of the Japan Academy*, 41(1), 40-45.

[18] Jakimovski, A., & Tietz, H. (1980). Regularly varying functions and power series methods. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 73(1), 65-84.

[19] Kokhanovskii, A. P. (1974). Tauberian theorems for semicontinuous logarithmic methods of summation of series. *Ukrainian Mathematical Journal*, 26(6), 607-613.

[20] Kokhanovskii, A. P. (1975). A condition for the equivalence of logarithmic methods of summability. *Ukrainian Mathematical Journal*, 27(2), 182-186.

[21] Kokhanovskii, A. P. (1978). A tauberian theorem for a class of (J, p_n)-methods of summation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 30(6), 612-615.

[22] Kratz, W., & Stadtmüller, U. (1989). Tauberian theorems for J_p-summability. *Journal of mathematical analysis and applications*, 139(2), 362-371.

[23] Kwee, B. (1967). A Tauberian theorem for the logarithmic method of summation. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 63(2), 401-405.

[24] Kwee, B. (1971). On generalized logarithmic methods of summation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35(1), 83-89.

[25] Kwee, B. (1972). A Tauberian theorem for the (J, p_n) method of summation. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1), 139-142.

[26] Littlewood, J.E. (1911). The converse of Abel's theorem on power series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 9(2), 434-448.

[27] Mikhalin, G. A. (1977). Theorems of Tauberian type for (J, p_n) summation methods. *Ukrainskij matematicheskij zhurnal*, 29(06), 763-770.

[28] Mikhalin, G. A. (1979). On conditions for equivalence of the $(\bar{R}, p_n)$ and (J, p_n) summation methods. Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika, (5), 41-51.

[29] Phillips, R. (1973). A Tauberian theorem for a scale of logarithmic methods of summation. *Canadian Journal of Mathematics*, 25(5), 897-902.

[30] Pringsheim, A. (1900). Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. *Mathematische Annalen*, 53, 289321.

[31] Rangachari, M. S. (1980). Tauberian oscillation theorems for the summability methods of the Hardy family. *Indian Journal of Mathematics.* , 22, 225-243.

[32] Shawyer, B., & Watson, B. (1994). Borel's methods of summability: Theory and Applications. Clarendon Press, Oxford, 1994.

[33] Stadtmüller, U., & Trautner, R. (1979). Tauberian theorems for Laplace transforms. *Journal für die reine und angewandte mathematik*, 311, 283-290.

[34] Štěpánek, F. (1966). A Tauber's theorem for (J, p_n) summability. *Monatshefte für Mathematik*, 70(3), 256-260.

[35] Tauber, A. (1897). Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 8(1), 273-277.

[36] Teslenko, L. S. (1974). On conditions for the equivalence of the Abel-Poisson and Cesaro summation methods of summation, *Approximate Methods of Mathematical Analysis [in Russian]*, 132-143.

[37] Tietz, H., & Trautner, R. (1988). Tauber-Sätze für Potenzreihenverfahren. *Archiv der Mathematik*, 50(2), 164-174.

[38] Tietz, H. (1989). Tauberian theorems of $J_p \to M_p$-type. *Mathematical Journal of Okayama University*, 31, 221-225.

[39] Tietz, H. (1990). Schmidtsche Umkehrbedingungen für Potenzreihenverfahren. *Acta Scientiarum Mathematicarum. Univ. Szeged* , 54(3-4), 355-365.

[40] Totur, Ü.,& Çanak, İ. (2017). A Tauberian theorem for the power-series summability method. *Ukrainian Mathematical Journal*, 69(12), 1701-1713.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	SELİM BAĞCI
Doğum Yeri	DENİZLİ
Doğum Tarihi	29.10.1989
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	0 554 610 17 06
E-Posta Adresi	Selim2545@hotmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Pamukkale Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2013