



**T. C.**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI LOJİSTİK BÜYÜME MODELLERİNİN ANALİZİ**  
**ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

**İSMAİL KAYA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ORDU 2020**

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İSMAİL KAYA



Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### BAZI LOJİSTİK BÜYÜME MODELLERİNİN ANALİZİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İSMAİL KAYA

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 51 SAYFA

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ

Bu tezde, hem önceden tanımlanmamış hem de spesifik olmayan popülasyon dinamiklerini ve daha genel biyolojik büyümeyi modellemek için çeşitli büyüme eğrileri geliştirilmiştir. En başarılı tahmin modellerinin, klasik Verhulst lojistik büyüme denkleminin genişletilmiş formlarına dayandığı gösterilmiştir. Bu tür birkaç modeli daha ayrıntılı olarak inceleyip karşılaştırıyor ve bunlarla ilgili özellikleri araştırıyoruz. Ayrıca daha önce bildirilmemiş birkaç ilişkili sınırlama ve kısıtlamayı da belirleyip ayrıntılarını veriyoruz. Bu modelleri özel durumlar olarak getiren lojistik büyüme eğrisinin genelleştirilmiş bir formu sunulmuştur. Jenerik büyüme modelinin bildirilen sınırlamalarının bu yeni model tarafından ele alındığı ve bununla genişletilmiş büyüme eğrileri arasındaki benzerliklerin tanımlandığı gösterilmiştir. Ayrıca, yeni büyüme formunun, en azından matematiksel temsilde, lojistik büyüme ve varyantlarından belirgin şekilde farklı olan ek büyüme kalıpları içerdiği de gösterilmiştir. Ayrıca, daha önce desteklenmeyen, tipik olmayan popülasyon dinamiklerinin yalnızca model parametre değerlerinin mantıklı bir şekilde seçilmesiyle modellenmesini sağlayan bu yeni model tarafından ek büyüme özelliklerinin barındırıldığını gösteriyoruz. Son olarak, yeni eğrinin eğri uydurma için nasıl kullanılabileceğinin kısa bir özeti sağlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Biyolojik Büyüme Dinamikleri, Lojistik Büyüme, Genelleştirilmiş Lojistik Büyüme, Dönüm Noktası, Eksik Beta Fonksiyonu, Gama Fonksiyonu, Mimimax, Saddle Eğrisi, Sonlu Farklar Yöntemi

## **ABSTRACT**

### **A STUDY ON ANALYSIS OF SOME LOGISTICS GROWTH MODELS**

**İsmail KAYA**

**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL SCIENCES**

**MATHEMATICS**

**MASTER THESIS, 51 PAGES**

**SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KORKMAZ**

In this thesis, various growth curves have been developed to model both previously unidentified and non-specific population dynamics and more general biological growth. Most successful predictive models are shown to be based on extended forms of the classical Verhulst logistic growth equation. We further review and compare several such models in more detail and investigate the relevant features for them. We also identify and detail several previously unreported associated limitations and restrictions. A generalized form of the logistic growth curve is presented, which brings these models as special cases. The reported limitations of the generic growth model are shown to be addressed by this new model and identification of the similarities between this and the extended growth curves. It is also shown that the new growth form, at least in its mathematical representation, contains additional growth patterns that are distinctly different from logistic growth and its variants. We furthermore show that additional growth characteristics are accommodated by this new model, enabling previously unsupported, untypical population dynamics to be modelled by judicious choice of model parameter values alone. Finally, a brief summary of how the new curve can be used for curve fitting is provided.

**Keywords:** Biological Growth Dynamics, Logistic Growth, Generalized Logistic Growth, Inflection Point, Incomplete Beta Function, Gamma Function, Mimimax, Saddle Curve, Finite Difference Method

## TEŞEKKÜR

Tüm çalıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu aan, desteğini esirgemeyen değerli danıőman hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ'a ve Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına sonsuz teşekkür ve őükranlarımı sunarım.

Öęrenim hayatım boyunca gösterdikleri maddi, manevi destekleri ve fedakarlıkları ile her zaman benim yanımda olan annem, babam, kardeőim ve niőanlım Güleda COŐKUN'a teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ.....	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.
ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ŞEKİL LİSTESİ.....	V
ÇİZELGE LİSTESİ.....	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	3
2.1 Lojistik Büyüme Eğrisi.....	3
2.1.1 Lojistik Büyüme.....	3
2.2 Genelleştirilmiş Lojistik Büyüme Fonksiyonu.....	7
2.3 Genelleştirilmiş Lojistik Büyüme Modelleri.....	12
2.3.1 Von Bertalanffy Büyüme Denklemi.....	12
2.3.2 Richards Büyüme Denklemi.....	15
2.3.3 Gompertz Büyüme Fonksiyonu.....	18
2.3.4 Smith'in Denklemi.....	21
2.3.5 Blumberg'in Denklemi.....	26
2.3.6 Jenerik Büyüme Fonksiyonu.....	32
2.3.7 Schnute Denklemi.....	36
2.3.8 Birch'in Richards Denklemine Genellemesi.....	38
2.3.9 Üstel Polinom Büyüme.....	39
3. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	42
4. KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ.....	52

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1	Verhulst lojistik büyümesinin zaman içindeki nüfus büyüklüğü .....	6
Şekil 2.2	Verhulst lojistik büyümesinde, büyüme oranına göre nüfus büyüklüğü....	6
Şekil 2.3	Yukarıdaki parametre değerlerine göre, genelleştirilmiş lojistik büyümesi için ve zaman içindeki popülasyon büyüklüğünün gelişimi .....	11
Şekil 2.4	Yukarıdaki parametrelere göre genelleştirilmiş lojistik büyümesi için ve büyüme oranına göre nüfus büyüklüğünün değerleri.....	12
Şekil 2.5	Von Bertalanffy'nin ağırlık artış eğrisi .....	14
Şekil 2.6	Von Bertalanffy'nin formundaki büyüme oranı (asimptotik değer $K = 100$ olduğunda maksimumunu yaklaşık 30'da gerçekleştirir).....	14
Şekil 2.7	Richards'ın denklemine göre zamanla bitki ağırlığının artması. ....	17
Şekil 2.8	Richards'ın denklemi için ağırlık artışına karşı ağırlık planının oranı. ....	17
Şekil 2.9	Hiper-Gompertz ve normal Gompertz ( $\gamma = 1$ ) büyüme bölgeleri .....	20
Şekil 2.10	Hiper-Gompertz ve normal Gompertz ( $\gamma = 1$ ) ağırlık artış hızlarına göre ağırlık eğrileri .....	20
Şekil 2.11	Richards'ın vakalar karşısında büyüme oranı; .....	21
Şekil 2.12	$hr'$ , $\alpha$ , $N$ yüzey alanlarına karşın $\alpha$ ve $n$ için; $r' = 0.4$ , $r' = 0.5$ .....	26
Şekil 2.13	$N0 = 1.875$ ile Genelleştirilmiş lojistiğin yakın uyumu .....	27
Şekil 2.14	Smith eğrisine üç yakın uyumu ve $N0 = 1.875$ için genelleştirilmiş lojistik büyüme .....	29
Şekil 2.15	Üstteki parametreler için Blumberg büyümesi .....	30
Şekil 2.16	Altındaki parametrelerle Blumberg eğrisi için büyüme oranının boyutu.....	31
Şekil 2.17	Yukarıdaki parametreler için Jenerik büyüme oran eğrisi .....	35
Şekil 2.18	Yukarıdaki parametreler için Jenerik büyüme oran eğrisi .....	35
Şekil 2.19	Küçük $N$ için üssel büyüme gösteren genelleştirilmiş lojistik eğriler.....	39

## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
<b>Çizelge 3.1</b> Özel Durumlar Olarak İyi Bilinen Birkaç Büyüme Formununun Kapsadığı Görülen Bir Büyüme Eğrisi .....	42



## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

---

$N$	:	Nüfus
$K$	:	Nüfusun Taşıma Kapasitesi
$r$	:	Nüfusun İçsel Büyüme Hızı
$N^*$	:	Maksimum Nispi Büyüme Oranındaki Nüfus
$t$	:	Zaman
$\frac{dN}{dt}$	:	Nüfus Artış Hızı
$N_{inf}$	:	Büyüme Hızının Maksimum Olduğu Yer
$t_{inf}$	:	Bükülme Zamanı
$\alpha, \beta, \gamma$	:	Pozitif Gerçek Sayı

---

## 1. GİRİŞ

Biyolojik sistemlerin büyümesini modellemek için çok sayıda model tanıtılmıştır. Bunlar çeşitli şekillerde veya büyük popülasyonlar için çoğunlukla sürekli olarak popülasyon dinamiklerini ele almaktadır. Diğerleri, bir organizma veya organizmalar için ilgilenilen özelliklerin gerçek fiziksel büyümesini modellemektedir. Basit üstel büyüme modeli, ilk dönem için bu büyümeye yeterli bir yaklaşım sağlayabilir. Ancak, popülasyonlar için, hiçbir avcı ya da özel bir rekabet dahil değildir. Bu nedenle popülasyon engelsiz bir şekilde artmaya devam edecektir (veya başlangıçtaki bir büyüme azalması varsa kaçınılmaz olarak sifıra düşecektir). Avlanmanın en önemsiz olduğu durumlarda bile model, gıda ve habitat gibi çevresel kaynaklar için spesifik olmayan rekabet nedeniyle büyüme düşüşlerini kapsamaz. Kendi başına büyüme durumunda, sınırsız büyüme aynı zamanda gerçekçi değildir. Örneğin, bitkiler olgunluğa yaklaşırken, ilgilenilen fiziksel özellikler sınırlayıcı bir boyuta ulaşacaktır. Verhulst [1], popülasyon modeli için kararlı bir popülasyonun sonuç olarak doygunluk seviyesine sahip olacağını düşünmüştür; buna tipik olarak taşıma kapasitesi  $K$  denir ve büyüme büyüklüğü üzerinde sayısal bir üst sınır oluşturur. Bu sınırlayıcı formu dahil etmek ve üstel modele bir uzantı sağlaması için daha sonra gösterilen lojistik büyüme denklemini tanıtmıştır. Daha sonra Verhulst'un lojistik büyüme modelinin birçok genişletilmiş model için temel oluşturduğunu göreceğiz. Her biri orijinalin parametrelili hale getirilmiş bir versiyonudur ve lojistik eğrisinin kısıtlamalarının rahatlamasını sağlamıştır. Bu sınırlamaya rağmen, lojistik büyüme denklemini birçok farklı biyolojik sistemi modellemek için kullanılmıştır. Carlson [2], [3,4] eğrisi ile iyi modellenen bir bakteri büyümesini bildirmiştir. Morgan [5], lojistik denklemini Afrika fillerinin sürü davranışını tanımlamak için kullanmıştır. Krebs [6], Perulu hamsi popülasyon verisine uyması için Verhulst lojistik denklemini de kullanmıştır. Lojistik modelin biyoloji alanı dışında da uygulamaları yapılmıştır. Fisher ve Frey [7] birçok yeni ürün ve teknolojinin pazara girişini tanımlamak için lojistik modelden başarıyla yararlanmışlardır. Lojistik modelinin bu özel uygulamasında  $N$ , halihazırda ele geçirilmiş olan piyasanın ve  $(K - N) / K$ 'nın ele geçirilmesi gereken pazar payının bir ölçüsünü temsil etmektedir. Marchetti ve Nakicenovic [8] dünya enerjisinin kullanımını ve kalan kaynağın miktarını hesaplamak için lojistik modeli kullanmıştır. Herman ve Montroll [9], endüstriyel

devrim kadar evrimsel bir sürecin temel olarak lojistik dinamiklerle de modellenebileceğini göstermiştir. Burada, sanayi devrimi geliştikçe, tarımdaki işgücünün oranı azalırken, sanayideki oran büyümüştür. Bu tezde genelleştirilmiş bir lojistik denklemi tanıtip özelliklerini sunuyoruz. Sonra birkaç önemli büyüme modeli kronolojik sırayla tekrar gözden geçirilerek özellikleri incelenmektedir. Son olarak, her bir modelin tanıtılan genelleştirilmiş lojistik büyüme modelinden türetilebileceğini ve genelleştirilmiş lojistik formun diğer genelleştirilmiş formlarla zıt olduğu görülmektedir.

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

### 2.1 Lojistik Büyüme Eğrisi

Verhulst [1]'un, Pearl ve Reed [12] 'in orijinal çalışmasından bu yana, Verhulst lojistik eğrisinin sigmoid ve asimptotik özelliklerini korurken, büyüme için alternatif fonksiyonel formlar ( $f(N)$ ) öneren çeşitli katkıları olmuştur. Bitki bilimlerinde, ilk olarak Von Bertalanffy [14] tarafından hayvanların büyümesini tanımlamak için geliştirilen bir büyüme denklemini uygulayan ilk Richards [13] olmuştur. Denklemi tanımlamak için genelleştirilmiş lojistik denklem terimini kullanan Nelder [10] tarafından deneysel verilerin uydurulması için Richards büyüme eğrisi kullanılmıştır. Blumberg [15], Richards denkleminin bir genellemesi olarak hiper lojistik denklemi tanımlamıştır. Turner ve ortak yazarlar [16,17] lojistik büyümenin daha da genelleştirilmesini önermiş ve denklemlerine genel lojistik denklem adını vermişlerdir. Daha yakın tarihli bir araştırma makalesinde Buis [18], lojistik büyüme fonksiyonları ile ilgili önceki çalışmalarını yeniden gözden geçirmiş ve ilgili özelliklerinin bazılarını özetlemiştir. Bu bölümde, standart Verhulst denklemini genişleterek iyi bilinen birkaç büyüme fonksiyonu ele alınmıştır. Ayrıca, çoğu büyüme eğrisini karakterize eden ve bir bükülme noktasının varlığından sorumlu olan sigmoid özelliğinin varlığı veya yokluğu incelenmektedir.

#### 2.1.1 Lojistik Büyüme

En basit gerçekçi nüfus dinamiği modeli üstel büyümeye sahip olmandır.

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (2.1)$$

Bunun sonucunda;

$$\frac{dN}{N} = r dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int r dt$$

$$\ln|N| = rt + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \quad N_0 \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

olarak elde edilir.

Burada  $r$ , içsel büyüme hızıdır ve kişi başına büyüme oranını temsil etmektedir. Sınırsız büyümeyi kaldırmak için Verhulst [1] istikrarlı bir popülasyonun

ortamın doygunluk seviyesine sahip olacağını düşünmüştür. Üstel model, mevcut boyutun doygunluk seviyesi  $K$ , rasyonel eksikliğini temsil eden çarpımsal faktör,  $1 - (N/K)$  ile artırılmıştır. Lotka'nın lojistik büyüme kavramının analizinde [10], herhangi bir anda  $\left(\frac{dN}{dt}\right)$  nüfus artış hızı, o anda nüfus büyüklüğünün bir fonksiyonudur,  $N(t)$ , yani,  $\left(\frac{dN}{dt}\right) = f(N)$  bir fonksiyondur.

Sıfır popülasyon sıfır büyümeye sahip olduğundan,  $N = 0$  henüz bilinmeyen  $f(N)$  fonksiyonunun cebirsel bir köküdür.  $f(N)$  'yi  $N = 0$  yakınında bir Taylor serisi olarak genişleterek ve  $f(0) = 0$  olacak şekilde ayarlayarak Lotka aşağıdaki kuvvet serilerini elde etmiştir;

$$\begin{aligned} f(N) &= Nf'(0) + \frac{N^2}{2}f''(0) \\ &= N \left[ f'(0) + \frac{N}{2}f''(0) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

olur.

Burada daha yüksek mertebeden türevlerin ihmal edilebilir olduğu kabul edilir.

$$f'(0) = r \text{ ve } f''(0) = -\frac{2r}{K}$$

eşitlikleri yardımıyla, (burada  $r$ , popülasyonun içsel büyüme hızı ve  $K$ 'nin taşıma kapasitesidir) Verhulst lojistik denklemi elde edilir.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \quad (2.4)$$

dir.

Verhulst lojistik denklemi, literatürde ilk kez eğriyi türeten Verhulst'ten sonra Verhulst-Pearl denklemi ve 1920'de Amerika Birleşik Devletleri'nde nüfus artışını yaklaşık olarak tahmin etmek için eğriyi kullanan Pearl [12] olarak da adlandırılır.

Denklem (2.4)'ün çözümü şu şekildedir:

$$N(t) = \frac{KN_0}{(K - N_0)e^{-rt} - N_0} \quad (2.5)$$

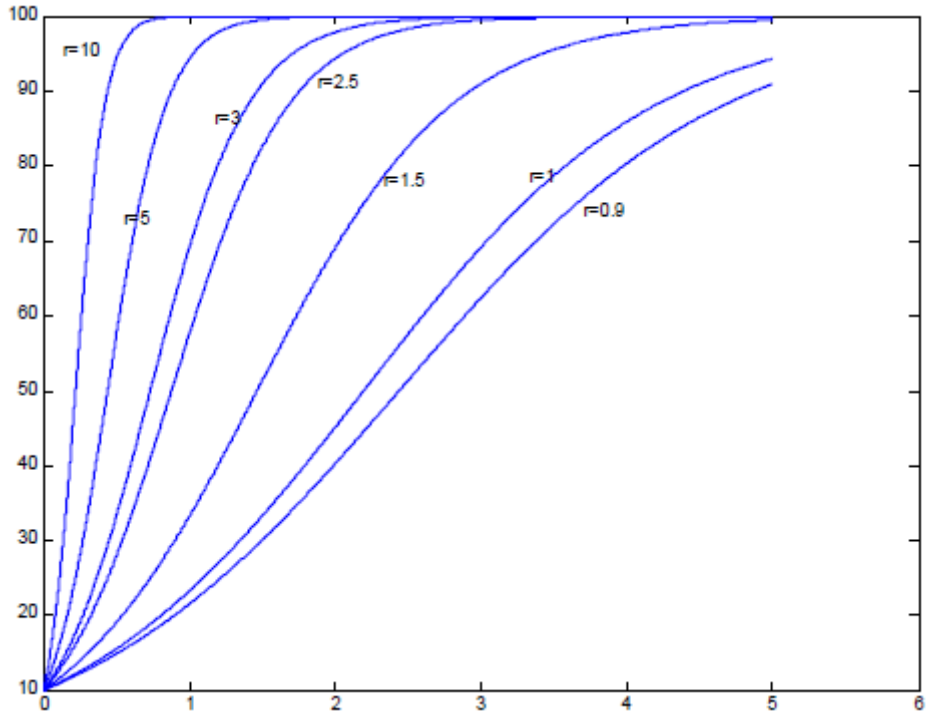
burada  $N_0$ ,  $t = 0$  sırasındaki popülasyon büyüklüğüdür.

Lojistik büyümenin üç önemli özelliği şunlardır:

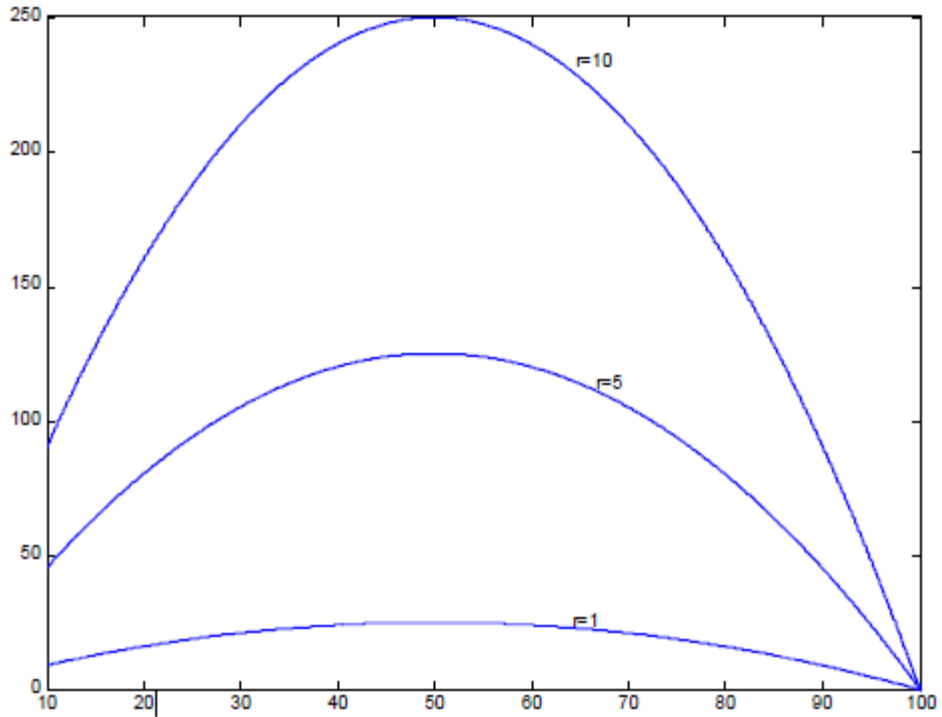
- (i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ , Nihayetinde nüfus taşıma kapasitesine ulaşacaktır.
- (ii) Göreceli büyüme hızı,  $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ , artan nüfus büyüklüğü ile doğrusal olarak azalır.
- (iii) Eğilme noktasındaki nüfus (büyüme hızının maksimum olduğu yer),  $N_{inf}$ , taşıma kapasitesinin tam yarısı  $N_{inf} = \frac{K}{2}$  kadardır.

$r > 0$  için, ortaya çıkan büyüme eğrisi bir sigmoidal şekle sahiptir ve (2.5) den, taşıma kapasitesine asimptotiktir.  $r < 0$  için kişi başına büyüme hızında bir azalma mevcut olduğundan, büyüme eğrisi popülasyonun yok olmasına yol açan sifıra asimptotiktir. Gerçek olmayan, bir büyüme oranı olmayan önemsiz durumda,  $r = 0$ , popülasyon  $N_0$  başlangıç değerinde statik kalır. Nüfus biyologları ve ekolojistler esasen  $r > 0$  olduğu durumla ilgileniyorlar ve bu çalışmada araştırmalarımızı bu durumla sınırladık.

Şekil 2.1,  $N_0 = 10$ ,  $K = 100$  olan  $r$  gibi çeşitli değerler için birkaç lojistik eğriyi göstermektedir.  $r$  büyüdükçe, eğri taşıma kapasitesine ( $K$ ) ulaşır. Şekil 2.2, içsel büyüme hızının varsayılan değerine bakılmaksızın, bükülme noktasındaki nüfusun,  $N_{inf} = \frac{K}{2} = 50$  olduğunu göstermektedir



Şekil 2.1 Verhulst lojistik büyümesinin zaman içindeki nüfus büyüklüğü



Şekil 2.2 Verhulst lojistik büyümesinde, büyüme oranına göre nüfus büyüklüğü.

## 2.2 Genelleştirilmiş Lojistik Büyüme Fonksiyonu

### 2.2.1 Genelleştirilmiş Lojistik Büyüme Fonksiyonunun Tanımı ve Özellikleri

Burada, önceden bildirilen tüm fonksiyonel formları özel durumlar olarak içeren genelleştirilmiş bir lojistik büyüme denklemi önerilmektedir. İlk olarak Nelder [10] tarafından Richards denklemini tanımlamak için kullanılan bir terim olan "Genelleştirilmiş lojistik denklem" terimi kullanılmaktadır. Kabul edilen terimin, tam olarak elde etmeyi amaçladığı şeyi ifade ettiği ve açıkça Richards modelinden daha genel olduğu için uygun bir terim olduğu görülmektedir.

Genelleştirilmiş lojistik fonksiyonu:

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\beta \right]^\gamma \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

$\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  gerçek pozitif sayılardır. Bu tezde çalışmalarımızı çoğunlukla bu parametreler için pozitif değerlerle sınırlıyoruz, çünkü negatif katsayılar her zaman biyolojik olarak makul bir model sunmamaktadır.

Genelleştirilmiş lojistik fonksiyonunun 3 temel özelliği:

- (i)  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ , nüfus nihayetinde taşıma kapasitesine ulaşacaktır.
- (ii) Göreceli büyüme hızı,  $(1/N)(dN/dt)$ , en maksimum seviyesine şu sayede ulaşır;

$$N^* = \left( 1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha - 1} \right)^{-(1/\beta)} K \quad (2.7)$$

şeklindedir.

$N^*$  in gerçek ve  $N_0$ ' dan büyük olması şartıyla, aksi takdirde  $N = K$ ' deki minimum sıfır değerine doğrusal olmayan bir şekilde düşmesi halinde azami nispi büyüme oranı alttaki gibi verilir.

$$\left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)_{max} = rK^{\alpha-1} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \beta\gamma} \right)^{(\alpha-1)/\beta} \left( \frac{\beta\gamma}{\alpha - 1 + \beta\gamma} \right)^\gamma \quad (2.8)$$



$N^*$  nin önemli limit değerleri:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} N^* = 0$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} N^* = e^{\gamma/(1-\alpha)}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} N^* = K$$

dir.

(iii) Bükülme noktasındaki (büyüme hızının maksimum olduğu yerde) popülasyon şu şekildedir:

$$N_{inf} = \left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{-(1/\beta)} K > N^*. \quad (2.9)$$

Açıkçası  $N_{inf} < N_0$  ise, popülasyon bu başlangıç değeri olan  $N_0$  ve kişi başına pozitif bir içsel büyüme ile başlayacağı için hiçbir bükülme mümkün değildir, böylece  $N_{inf}$ 'in elde edilememesini sağlar.  $N_{inf}$ 'teki nispi büyüme oranı yine (2.8)'de yalnızca parantez içindeki ifadeler  $\alpha$ ,  $\alpha - 1$  ile değiştirilir. Maksimum büyüme oranı:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{N_{inf}} = rK^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{\alpha/\beta} \left(\frac{\beta\gamma}{\alpha + \beta\gamma}\right)^\gamma \quad (2.10)$$

şeklindedir.

$N_{inf}$ ' in önemli limit değerleri;

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} N_{inf} = 0$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} N_{inf} = K e^{-(\gamma/\alpha)}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} N_{inf} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} N_{inf} = K$$

dir.

Aynı bükülme değeri,  $\alpha$ ,  $\gamma$  olduğu zaman çok sayıda genelleştirilmiş lojistik form için elde edilir.  $\gamma = \alpha$  ve  $\beta$  oranı sabit kalması koşuluyla lojistik formun değişmesi sağlanır.

Yardımcı değişken olan  $x = (N/K)^\beta$  tanıtımı ile, (2.6) denklemini şu şekilde diferansiyel denkleme dönüştürebiliriz:

$N = x^{\frac{1}{\beta}}K$  (Her iki tarafın  $t$ 'ye göre türevi alınır)

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\beta} x^{(1-\beta)/\beta} K \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{\beta} x^{(1-\beta)/\beta} K \frac{dx}{dt} = r(x^{1/\beta}K)^\alpha (1-x)^\gamma$$

$$\frac{dx}{dt} = \beta r K^{\alpha-1} x^{((\alpha-1)/\beta)+1} (1-x)^\gamma$$

$$\beta r K^{\alpha-1} dt = x^{((1-\alpha)/\beta)-1} (1-x)^{-\gamma} dx \quad (2.11)$$

olur.

Gerekli işlemler yapıldığında elde edilen (2.11) denklemi 0'dan  $t$ 'ye integrallenirse;

$$\int_{(N_0/K)^\beta}^{(N(t)/K)^\beta} x^{((1-\alpha)/\beta)-1} (1-x)^{-\gamma} dx = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (2.12)$$

olarak elde edilir.

(2.12) 'deki integral,  $\alpha, \beta, \gamma$  parametrelerinin herhangi bir sayısal değeri alabileceği genel durumda değerlendirilebilir. Sayısal değerler,  $(1-x)^{-\gamma}$  binom ile genişletilerek ve ardından elde edilen sonuçlarla birleştirilerek seri terim olarak sonuçlandırılabilir.

$$p = (1-\alpha)/\beta > 0$$

$$q = 1-\gamma > 0$$

olduğunda integral;

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx,$$

olur.

$$x_1 = (N(t)/K)^\beta, \quad x_0 = (N_0/K)^\beta,$$

olduğunda, integral iki tamamlanmamış beta fonksiyonunun farkıdır.

$B_{x_1}(p, q)$  ve  $B_{x_0}(p, q)$  tamamlanmamış beta fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$B_{x_1}(p, q) = \int_0^{x_1} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

$$B_{x_0}(p, q) = \int_0^{x_0} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Bundan dolayı;

$$B_{x_1}(p, q) - B_{x_0}(p, q) = \int_{x_0}^{x_1} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (2.13)$$

elde edilir.

$p > 0$ ,  $q > 0$  olan kısıtlamalardan  $\alpha$ ,  $\beta$  için olası alttaki değer aralıkları kabul edilir.

$$\alpha < 1, \beta > 0, \gamma < 1$$

$$\alpha > 1, \beta < 0, \gamma < 1.$$

(2.13)'deki integral,  $0 < x_0 < 1$  ve  $0 < x_1 < 1$  [11]' den dolayı iki seri açılımın farkı olarak ifade edilebilir,

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{x_1^p(1-x_1)^q}{p} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(p+1, n+1)}{B(p+q, n+1)} x_1^{n+1} \right] - \frac{x_0^p(1-x_0)^q}{p} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(p+1, n+1)}{B(p+q, n+1)} x_0^{n+1} \right] = \beta r K^{\alpha-1} t \quad (2.14)$$

şeklinde olur.

Denklem (2.14) sırayla ifade edilebilecek sonsuz bir beta fonksiyon terimleri dizisini içerir. Gama fonksiyonu [12] Lojistik formu (2.6) genel olarak analitik bir çözüm olan  $N(t)$ 'yi kabul etmemektedir.  $t, N$ 'nin bir fonksiyonu olarak kabul edilen durum hariç (2.12)'deki integral, içinde sağlamak şartıyla binom olarak genişletilebilir. Genel durum, bükülme zamanı için bir ifade olan  $t_{inf}$ :

$$t_{inf} = \frac{1}{r K^{\alpha-1} t} \left[ \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{(\alpha-1)/\beta}}{1-\alpha} + \gamma \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{(\alpha-1-\beta)/\beta}}{1-\alpha+\beta} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \frac{\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)^{(\alpha-1-2\beta)/\beta}}{1-\alpha+2\beta} + \dots \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{N_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma \frac{N_0^{1-\alpha+\beta}}{K^\beta(1-\alpha+\beta)} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2!} \frac{N_0^{1-\alpha+2\beta}}{K^{2\beta}(1-\alpha+2\beta)} + \dots \right], (\alpha \neq 1) \quad (2.15)$$

$$t_{inf} = \frac{1}{\beta r} \ln \left[ \frac{(1 + \beta\gamma)^{-1}}{\left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta} \right] + \frac{1}{\beta r} \left[ \gamma(1 + \beta\gamma)^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2!} (1 + \beta\gamma)^{-2} + \dots \right] - \frac{1}{\beta r} \left[ \gamma \left(\frac{N_0}{K}\right)^\beta + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2!} \left(\frac{N_0}{K}\right)^{2\beta} + \dots \right] \quad \alpha = 1 \quad (2.16)$$

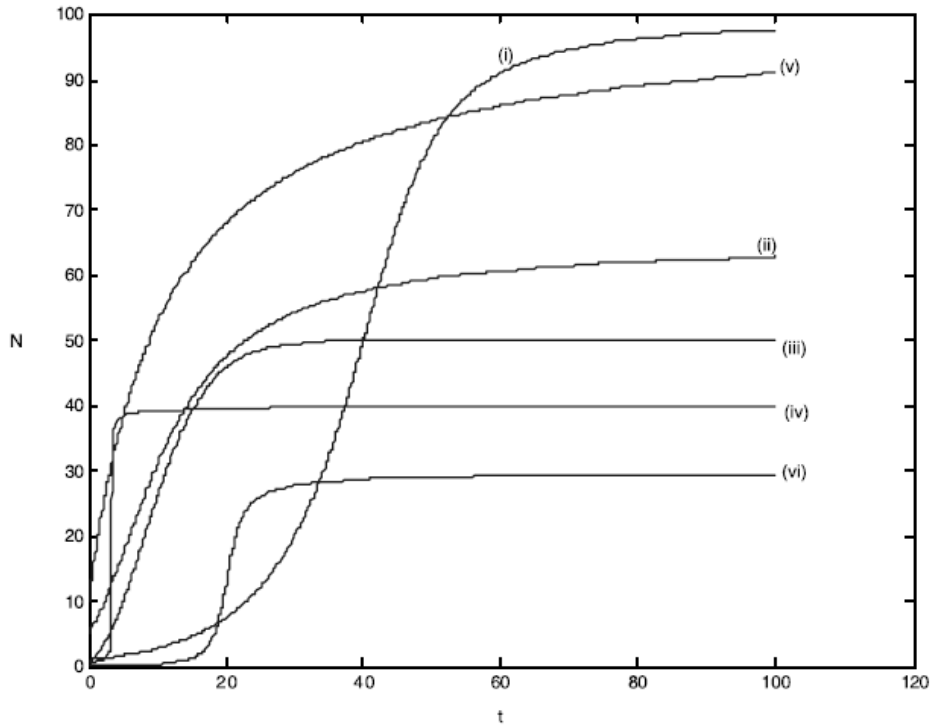
şeklindedir.

Şekil 2.3, genelleştirilmiş lojistik formu (2.6) için genel popülasyon büyüklüğünün ( $N$ ) zamana ( $t$ ) karşı bir gösterimidir.

Aşağıdaki parametre değerlerine göre:

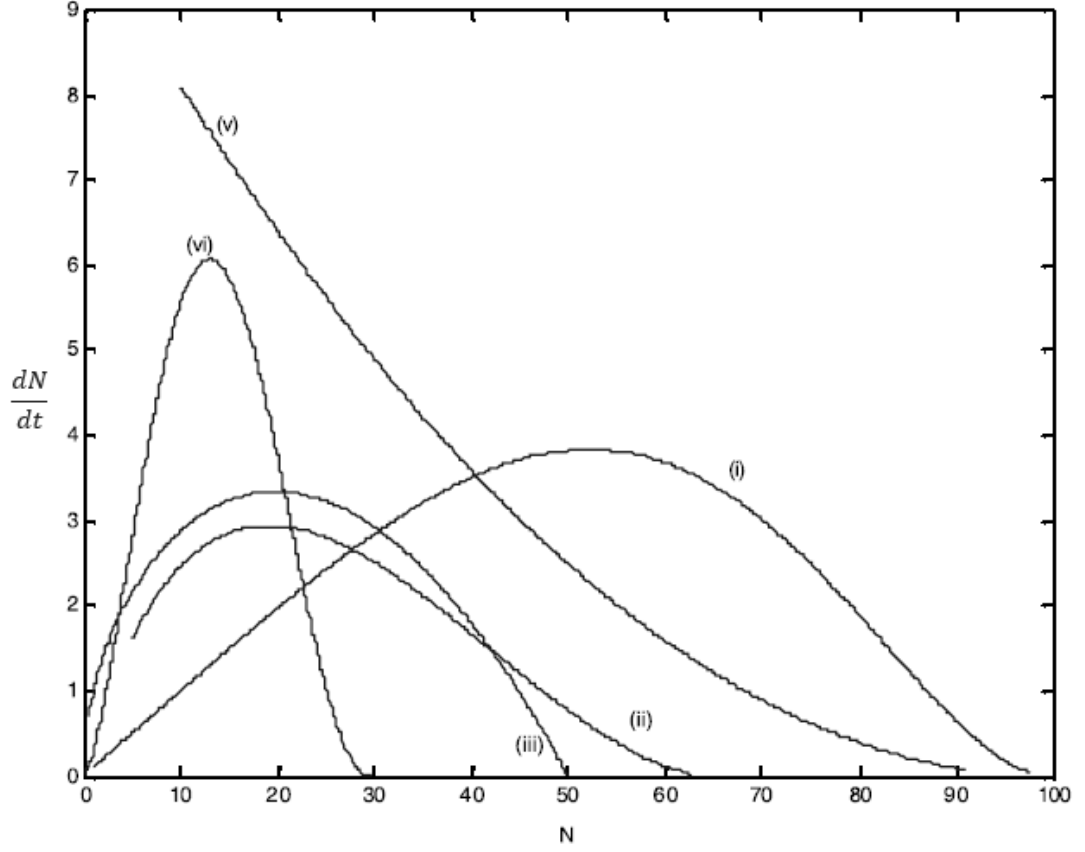
- i.  $r = 0.1$ ,  $N_0 = 1$ ,  $K = 100$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 2$
- ii.  $r = 0.5$ ,  $N_0 = 5$ ,  $K = 65$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.6$ ,  $\gamma = 1.8$
- iii.  $r = 1$ ,  $N_0 = 0.5$ ,  $K = 50$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $\gamma = 1$
- iv.  $r = 1$ ,  $N_0 = 0.5$ ,  $K = 40$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 3$
- v.  $r = 0.001$ ,  $N_0 = 10$ ,  $K = 100$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 2$
- vi.  $r = 0.3$ ,  $N_0 = 0.1$ ,  $K = 30$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $\gamma = 2.5$

bükülme noktaları' da şu şekildedir;



Şekil 2.3 Yukarıdaki parametre değerlerine göre, genelleştirilmiş lojistik büyümesi için ve zaman içindeki popülasyon büyüklüğünün gelişimi

Şekil 2.4 aynı parametreler için büyüme hızını kendi maksimum değeri ile göstermektedir.



Şekil 2.4 Yukarıdaki parametrelere göre genelleştirilmiş lojistik büyümesi için ve büyüme oranına göre nüfus büyüklüğünün değerleri

- (i)  $N_{inf} \approx 52.31$
- (ii)  $N_{inf} \approx 19.19$
- (iii)  $N_{inf} \approx 20$
- (iv)  $N_{inf} \approx 17.77$
- (v)  $N_{inf} \approx 0 < N_0 = 10$  (Bükülme yok)
- (vi)  $N_{inf} \approx 13$

## 2.3 Genelleştirilmiş Lojistik Büyüme Modelleri

### 2.3.1 Von Bertalanffy Büyüme Denklemi

Von Bertalanffy [14], balık ağırlığı artışını modellemek için büyüme denklemini ortaya koydu. Burada Verhulst lojistik büyüme eğrisi, fizyolojik akıl yürütmeye dayalı ham "metabolik tip" ler içerecek şekilde değiştirildi. Bernoulli

diferansiyel denkleminin özel bir durumu olarak görülebilecek aşağıda verilen formu önerdi:

$$\frac{dN}{dt} = rN^{2/3} \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^{1/3} \right] \quad (2.17)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü şu şekildedir,

$$N(t) = K \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{N_0}{K} \right)^{1/3} \right] e^{-\frac{1}{3}rK^{-\frac{1}{3}}t} \right]^3 \quad (2.18)$$

dir.

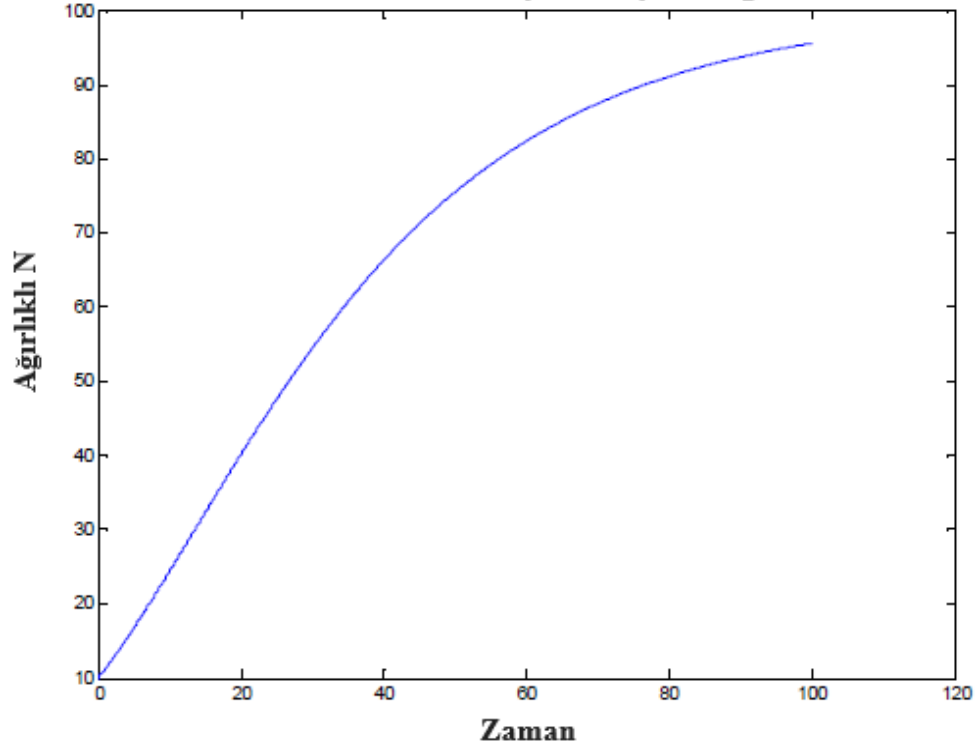
Bertalanffy modeli,  $\alpha = 2/3$ ,  $\beta = 1/3$ ,  $\gamma = 1$  üslerinin değerleri, Turner tarafından öngörülen  $\alpha = 1 + \beta(1 - \gamma)$  koşulunu sağlamadığı için Turner modelinden türetilemez. (Bakınız bölüm 2.3.3 Gompertz) Bu nedenle özel bir durum olarak görülemez ve bu nedenle ayrı bir model olarak görülmelidir.

Altta  $N_{inf}$  şu şekilde verilmiştir;

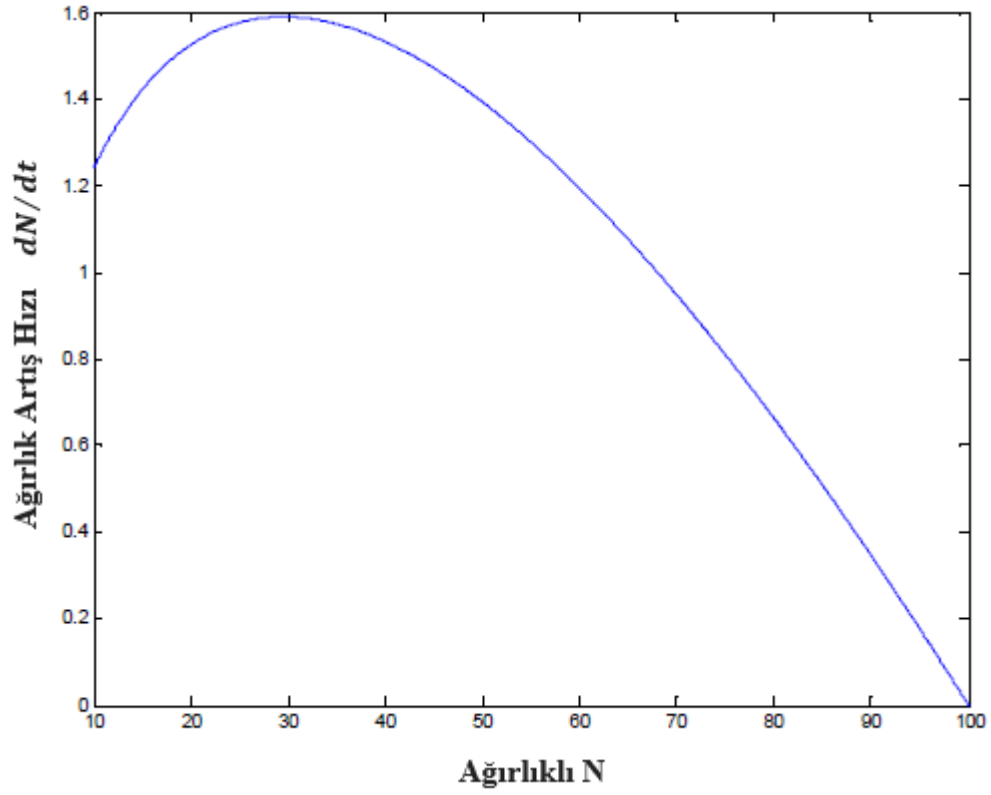
$$N_{inf} = \left( \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} \right)^3 K = \frac{8}{27} K \quad (2.19)$$

Bu, Verhulst eğrisinden farklı olsa da genel modelleme amaçları için hala önemli bir kısıtlamayı temsil etmektedir.

Şekil 2.5 ve 2.6 sırasıyla tipik bir Von Bertalanffy ağırlık büyüme eğrisini ve eğimini göstermektedir.



Şekil 2.5 Von Bertalanffy'nin ağırlık artış eğrisi



Şekil 2.6 Von Bertalanffy'nin formundaki büyüme oranı (asimptotik değer  $K = 100$  olduğunda maksimumunu yaklaşık 30'da gerçekleştirir)

### 2.3.2 Richards Büyüme Denklemi

Richards, Von Bertalanffy tarafından geliştirilen büyüme denklemini ampirik bitki verilerine uyacak şekilde genişletmiştir [13]. Richards'ın önerisi, Bernoulli diferansiyel denkleminin özel bir örneği olan aşağıdaki denklemi kullanmaktır.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\beta \right] \quad (2.20)$$

Burada çözüm şu şekildedir:

$$N(t) = \frac{N_0 K}{\left[ N_0^\beta + (K^\beta - N_0^\beta) e^{-\beta r t} \right]^{1/\beta}} \quad (2.21)$$

dir.

Bununla birlikte, Von Bertalanffy'nin öncüllerinden farklı olarak, Richards büyüme fonksiyonu,  $\gamma = 1$  olduğu durumda Turner modelinden (Bölüm 2.3.3) takip eder.

Bükülme şurada gerçekleşir;

$$N_{inf} = \left( \frac{1}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} K \quad (2.22)$$

dir.

Richards formu, (2.6) 'dan  $\alpha = \gamma = 1$  ile kolayca çıkarılır.  $\beta = 1$  için, (2.20) Verhulst lojistik büyüme denkleminin (2.4) önemsiz bir şekilde azalır, benzer şekilde aynı esnek olmayan bükülme noktası değerini gösterir ve  $\beta = 0$  için üstel büyümeye indirgenir. Denklem (2.20)  $\beta$  'ye bölünerek ve  $\beta \rightarrow 0$  olarak alınırsa Gompertz büyümesini, monomoleküler veya Mitscherlich büyüme formunu ( $\beta = -1$  model üretmez) oluşturur.  $\beta < -1$  için,  $N_{inf}$  tanımsızdır. Bükülme süresi (2.16)'dan elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} t_{inf} &= \frac{1}{\beta r} \ln \left[ \frac{K^\beta}{(1 + \beta) N_0^\beta} \right] - \frac{1}{\beta r} \ln \left[ \frac{\beta}{1 + \beta} \right] + \frac{1}{\beta r} \ln \left[ 1 - \left( \frac{N_0}{K} \right)^\beta \right] \\ &= \frac{1}{\beta r} \ln \left[ \frac{1}{\beta} \left( \left( \frac{K}{N_0} \right)^\beta - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$



$\beta$ 'nın aşırı değerleri için  $N_{inf}$  için aşağıdaki değerleri elde ediyoruz:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} N_{inf} = Ke^{-1}$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} N_{inf} = K$$

Maksimum büyüme oranı (2.10)'dan bulunmuştur;

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \frac{rK\beta}{(1 + \beta)^{1+(1/\beta)}} \quad (2.24)$$

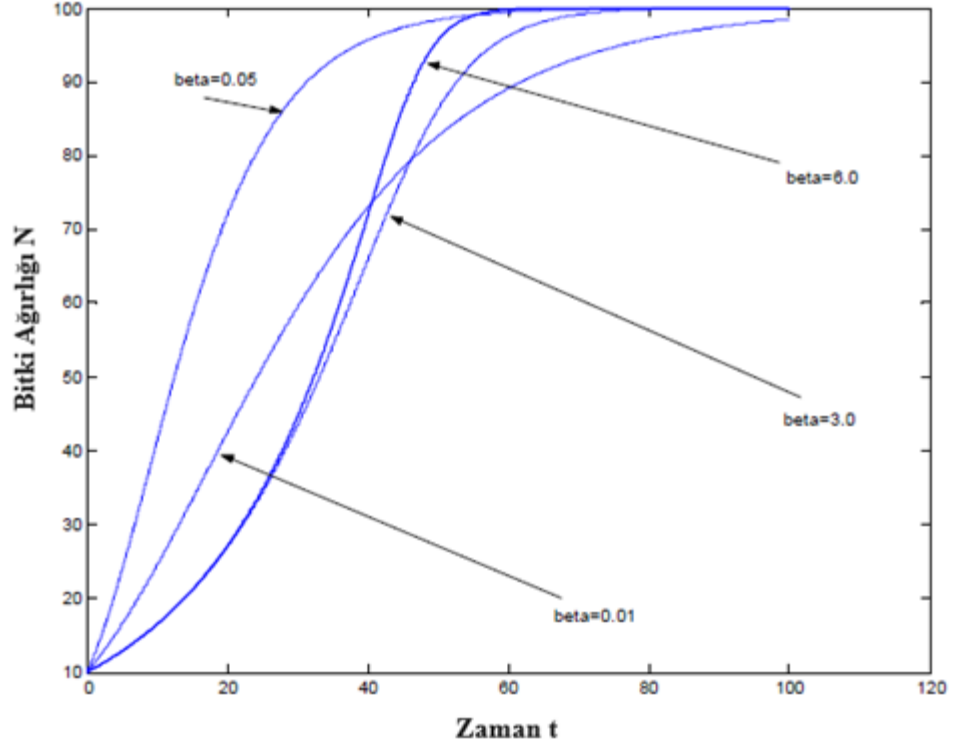
dir.

Nispi büyüme hızı, artan  $N$  ile doğrusal olmayan bir şekilde azaldığından, Richards formu gerçek değerli  $N^*$  'yi kabul etmez.

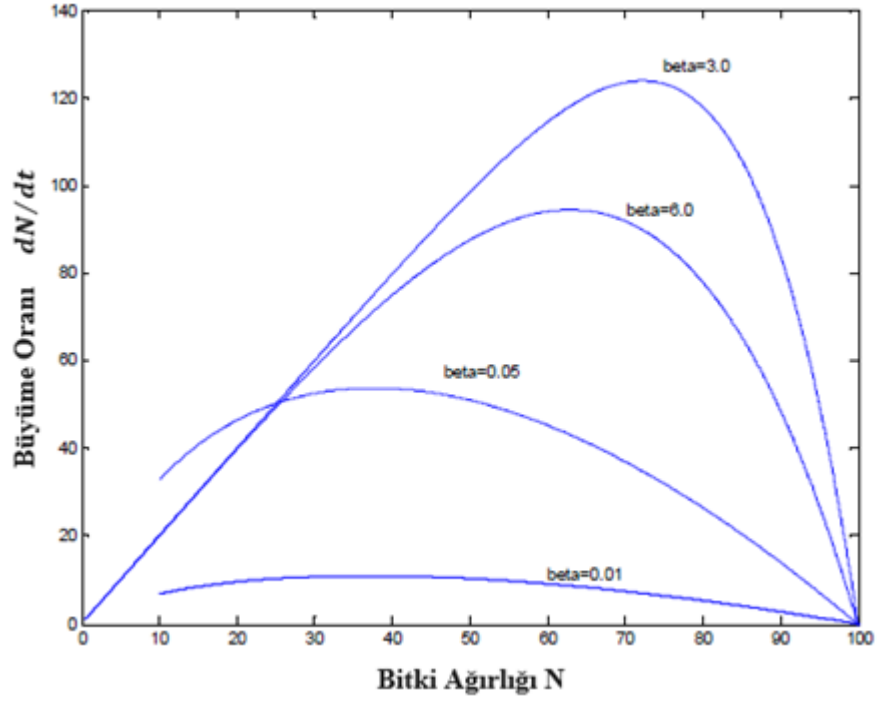
Önceki gözlem ile tutarlı olarak, yukarıdaki değerler,  $\gamma = 1$  ile genel büyüme fonksiyonu için dönüm noktasında karşılıklı gelen popülasyon değerinden de gelir.

Şekil 2.7,  $\beta = 0.01, 0.05, 3.0$  ve  $6.0$  ile dört farklı Richards büyüme eğrisini göstermektedir.

Şekil 2.8,  $\beta = 0.01$  ve  $\beta = 0.01$  için  $N_{inf} \approx 36$  ve  $N_{inf} \approx 38$ 'de bükülme veren küçük değerler için ağırlık artış hızındaki değişimi göstermektedir (Her iki değer de yaklaşık olarak  $K/e$ 'ye eşittir) ve daha büyük  $\beta$  değerleri yüksek bükülme değerleridir.



Şekil 2.7 Richards'ın denklemine göre zamanla bitki ağırlığının artması.



Şekil 2.8 Richards'ın denklemi için ağırlık artışına karşı ağırlık planının oranı.

### 2.3.3 Gompertz Büyüme Fonksiyonu

Gompertz büyüme eğrisi, sınırlayıcı bir durum olarak lojistik denkleminin aşağıdaki formundan elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \frac{r}{\beta^\gamma} N \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\beta \right]^\gamma \\
 &= \frac{rN}{K^\beta} \left( \frac{K^\beta - N^\beta}{\beta} \right)^\gamma \\
 &= r'N \left( \frac{K^\beta - N^\beta}{\beta} \right)^\gamma, \quad \left( r' = \frac{r}{K^\beta} \right)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Burada;

$\frac{K^\beta - N^\beta}{\beta}$  ifadesinin  $\beta \rightarrow 0$  limitine bakarak alttaki formülü elde ederiz;

$$\begin{aligned}
 \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{K^\beta - N^\beta}{\beta} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{\beta \ln K} - e^{\beta \ln N}}{\beta} \\
 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta \ln K)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta \ln N)^n}{n!}}{\beta} \\
 &= \ln \left( \frac{K}{N} \right) + \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta^{n-1}}{n!} [(\ln K)^n - (\ln N)^n] \\
 &= \ln \left( \frac{K}{N} \right)
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde,  $\lim_{\beta \rightarrow 0} (r') = r, \gamma > 0$  dır.

Gompertz fonksiyonu ile modellenen büyüme hızı;

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[ \ln \left( \frac{K}{N} \right) \right]^\gamma \tag{2.26}$$

şeklindedir.

$\gamma > 0, \gamma \neq 1$  ile, bu özel durum daha genel olarak Hiper Gompertz (Turner [17]), genelleştirilmiş ekolojik büyüme fonksiyonu veya basitçe genelleştirilmiş Gompertz fonksiyonu olarak bilinir.

Denklem (2.26) uygun şekilde aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\frac{d}{dt} \left[ \ln \left( \frac{N}{K} \right) \right] = r(-1)^\gamma \left[ \ln \left( \frac{N}{K} \right) \right]^\gamma$$

Entegrasyon üzerine analitik çözüme götüren denklem aşağıdaki gibidir;

$$N(t) = K \exp \left\{ \left[ \ln \left( \frac{N_0}{K} \right) \right]^{1-\gamma} + r'(-1)^\gamma (1-\gamma)t \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Eğilme noktasındaki popülasyon için  $N_{inf}$ ,

$$\frac{dN}{dt} = r'N \left( \frac{K^\beta - N^\beta}{\beta} \right)^\gamma$$

ifadesinin her iki tarafının t ye göre türevini alırsak,

$$\frac{d^2N}{dt^2} = 0,$$

olarak ayarlanır ve limit alınırsa:

$$N_{inf} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1+\beta\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta}} K = Ke^{-\gamma}$$

elde edilir.

Nispeten büyük artan pozitif değerler için,  $\gamma$  bükülme noktası 0'a eğilim gösterir. Aslında, bir bükülme noktasına ulaşmak için  $Ke^{-\gamma} > N_0$ 'ın giderek daha küçük değerleri için, bükülme noktasının  $K$ 'ye eğilim göstermesi gerekir.

$\gamma = 1$  için denklem normal Gompertz büyümesidir. (bakınız [31], [32]).

$$\frac{dN}{dt} = rN \left[ \ln \left( \frac{K}{N} \right) \right] \quad (2.27)$$

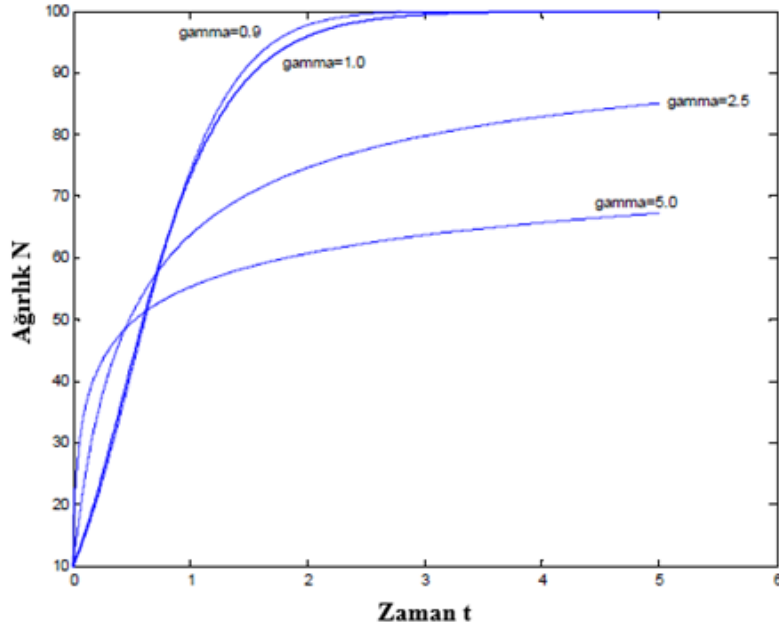
dir.

(2.27)'ye çözüm şu şekildedir:

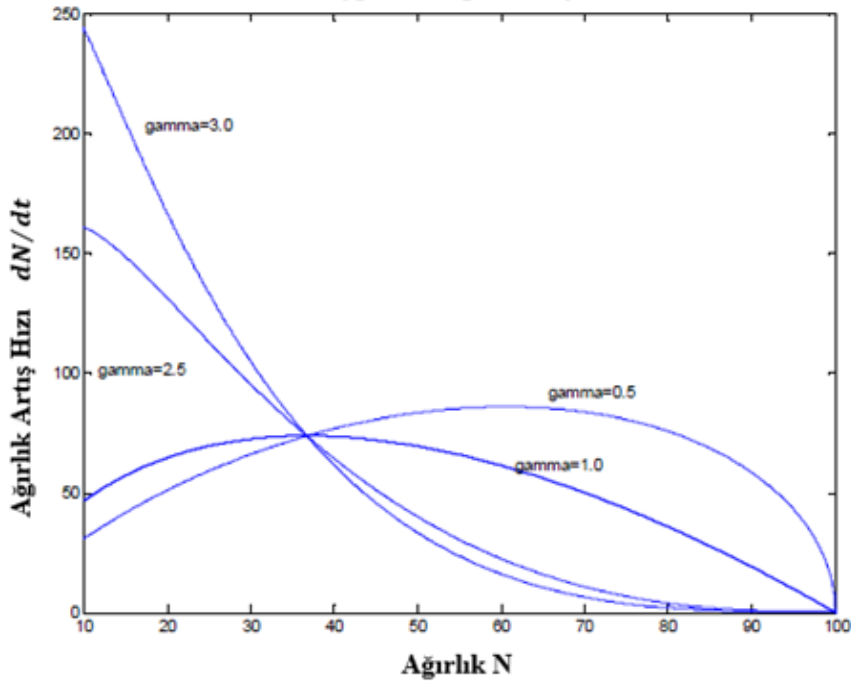
$$N(t) = K \exp \left\{ \ln \left( \frac{N_0}{K} \right) e^{-rt} \right\}$$

Bükülme noktasındaki popülasyon değeri,  $N_{inf} = Ke^{-\gamma}$ , genelleştirilmiş Gompertz büyüme fonksiyonu için  $\gamma = 1$  olan değerden elde edilir. Şekil 2.9, üç Hiper Gompertz büyüme eğrisini ( $\gamma > 0$ ,  $\gamma \neq 1$ ),  $N_0 = 10$  ve  $K = 100$  için normal Gompertz büyümesini ( $\gamma = 1$ ) göstermektedir. Öngörüldüğü gibi, nispeten büyük değerleri orijin'e

yakın  $\gamma = 3$ ,  $N_{inf} \approx 4.5 < N_0$  verir,  $\gamma = 2.5$ ,  $N_{inf} \approx 7.5 < N_0$  verir. Oysa nispeten düşük değerler, gözle görülür bir bükülme noktasına neden olur.  $\gamma = 0.5$  Değeri  $N_{inf} \approx 60$ 'ı verir ve  $\gamma = 1$ , şekil 2.9'da gösterildiği gibi  $N_{inf} \approx 35.5$ 'i verir.



Şekil 2.9 Hiper-Gompertz ve normal Gompertz ( $\gamma = 1$ ) büyüme bölgeleri



Şekil 2.10 Hiper-Gompertz ve normal Gompertz ( $\gamma = 1$ ) ağırlık artış hızlarına göre ağırlık eğrileri

### 2.3.4 Smith'in Denklemi

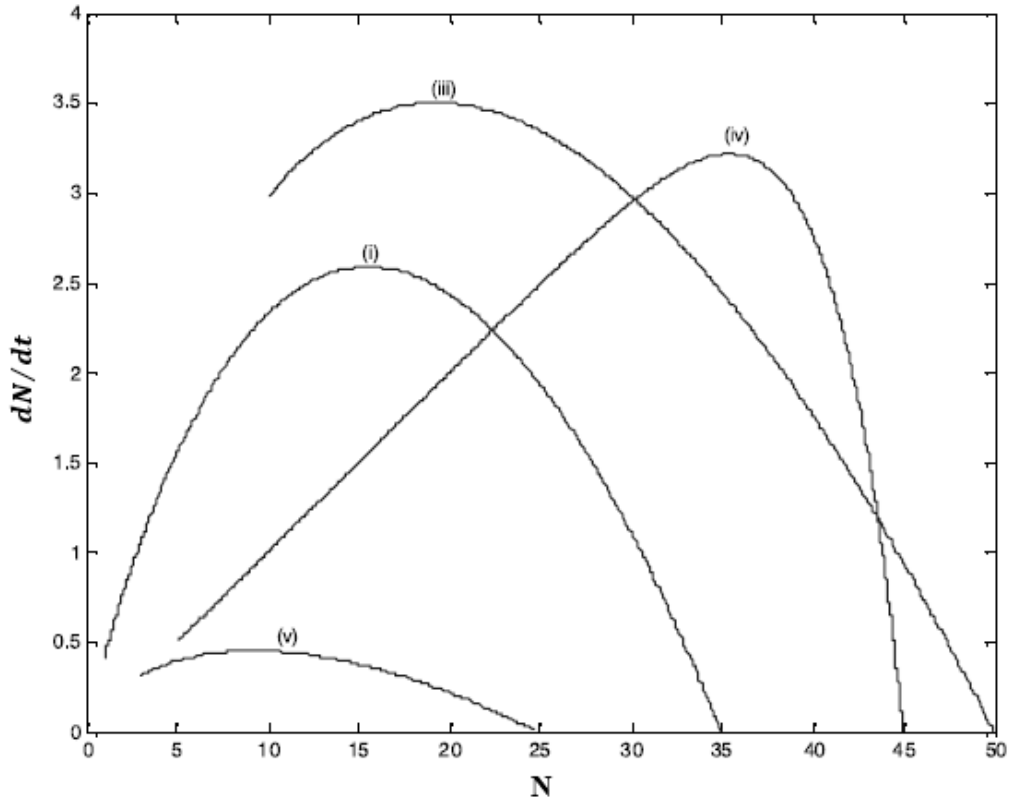
Smith [19], Verhulst lojistik büyüme denkleminin zaman gecikmeleriyle ilgili problemlerden dolayı, deneysel verilere uygun olmadığını bildirmiştir. Yoğunluğun doğum ve ölüm üzerindeki etkisindeki gecikmeler nüfus artış eğrisinin şeklini bozacağını belirtmiştir.

i.  $r = 0.5, N_0 = 1, K = 35, \beta = 0.5,$

ii.  $r = 2.0, N_0 = 10, K = 50, \beta = 0.1,$

iii.  $r = 0.1, N_0 = 5, K = 45, \beta = 10,$

iv.  $r = 5, N_0 = 3, K = 25, \beta = 0.01,$



**Şekil 2.11** Richards'ın vakalar karşısında büyüme oranı;

Smith'e göre lojistik denklemin verilere uygulanmasındaki asıl sorun, sınırlayıcı faktörün henüz kullanılmamış olan kısmının, yani  $1 - (N/K)$ 'nin doğru bir şekilde açıklanmamış olmasıdır. Daha sonra, gıdası sınırlı bir popülasyon için,  $1 - (N/K)$  teriminin, şu anda nüfus tarafından kullanılmayan gıda arzı oranını temsil eden

bir terim ile değiştirilmesi gerektiğini savundu. Eğer  $F$ , bir popülasyonun oranıysa,  $N$  büyüklüğü gıda için kullanılır ve  $T$  doygunluk seviyesindeki karşılık gelen orandır.

O zaman;

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \left( 1 - \frac{F}{T} \right)$$

$(F/T) > (N/K)$ , çünkü büyüyen bir nüfus doymuş bir popülasyondan daha hızlı yiyecek kullanacaktır.  $F$ ,  $N$  ve  $dN/dt$ 'ye bağlı olmalıdır ve en basit ilişki doğrusal olacaktır.

$$F = aN + b \frac{dN}{dt}, \quad a > 0, b > 0$$

dir.

Doygunlukta  $F = T$ ,  $N = K$ ,  $dN/dt = 0$  dır, dolayısıyla  $T = aK$  ve sonuç olarak genelleştirilmiş lojistik büyüme denklemi:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( \frac{1 - \frac{N}{K}}{1 + c \frac{N}{K}} \right) \quad (2.28)$$

şeklinde olur.

Buradaki  $c = rb/a$  dır.

Diferansiyel denklem (2.28), “geciktirme” faktörü  $(1 + c(N/K))^{-1}$  ile ölçeklendirilen Verhulst lojistik büyümesidir ve  $t$ 'nin bir fonksiyonu olarak  $N$  için analitik bir çözüm kabul etmemektedir, aksine;

$$t = \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{(K - N_0)^{1+c}}{N_0} \right] + \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{N}{(K - N)^{1+c}} \right] \quad (2.29)$$

dir.

Smith denkleminin bükülme değeri:

$$N_{inf} = \frac{K}{1 + \sqrt{c + 1}} \quad (2.30)$$

şeklindedir.

$c = 0$  için Smith'in formu,  $N_{inf} = K/2$  ile Verhulst lojistik büyüme formuna indirgerken,  $c > 0$  için,  $N_{inf} < K/2$  ve  $c < 0$  için,  $N_{inf} > K/2$  dir.  $c = -1$  için,

büyüme üssel,  $dN/dt = rN$ 'dir ve dönüm noktası yoktur.  $c \neq -1$  olduğunda maksimum büyüme oranı;

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \frac{rK}{(1 + \sqrt{c + 1})^2} \quad (2.31)$$

şeklindedir.

Bağıl büyüme hızı,  $(1/N)(dN/dt)$ ,  $c > -1$  için artan  $N$ , doğrusal olmayan bir şekilde azalır, düşüş oranı  $c$  parametresi ile düzenlenir. Makalesinde Smith,

$r = 0.44$ ,  $c = 3.46$ ,  $N_0 = 1.875$ ,  $K = 15$  değerlerini verdi. Bu değerler kümesi için dönüm noktası  $N_{inf} \approx 4.82$ 'dir, maksimum büyüme hızı  $((dN/dt))_{max}$  ve dönüm süresi  $t_{inf} = 4.72$  'dir.

Smith'in formu (2.28), genelleştirilmiş formdan (2.6) hemen türetmek yerine, (2.6) 'ya,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  parametrelerinin değerlerinin makul bir şekilde seçilmesiyle bir yaklaşım olarak türetilir. Parametrelerin sadece ikisinin, birim değeri koruyan, diğeri ile sayısal olarak belirlenmesi gerektiğini göreceğiz. Uygun parametre belirlendiğinde ve kişi başına düşen büyüme oranı belirlendiğinde, Smith tarafından sağlanan orijinal veriler kullanılarak genelleştirilmiş lojistik büyüme için  $r'$  belirlenecektir. Bükülme değeri için (2.9) ve (2.30) formüllerini karşılaştırarak başlarız.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{c + 1}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta\gamma}\right)^{1/\beta}$$

dir.

Eğer  $\beta = 1$  olarak ayarlarsak o zaman;

$$\alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{c + 1}} \quad (2.32)$$

dir.

Daha sonra  $f(r', \alpha, N)$  ve  $g(r, c, N)$ , fonksiyonel formlar olan (2.6) ve (2.28)'i belirtirler ve  $h(r', \alpha, N) = |f(r', \alpha, N) - g(r, c, N)|$  dir.  $r'$ , genelleştirilmiş lojistik formu (2.6) için içsel büyüme parametresidir. Sonra  $r'$  ve  $\alpha$  açıları şu şekilde belirlenir;

$$\hat{h}(\hat{r}', \hat{\alpha}) = \min_{\alpha, r'} \max_N h(r', \alpha, N).$$



Özellikle ilk maksimum (en kötü) sapma  $\hat{h}(\hat{N}(r', \alpha))$ ,  $[N_0, K]$  alanında tanımlanmıştır ve daha sonra  $\hat{h}(\hat{N}(r', \alpha))$  ile son sapmayı üreten  $\alpha$  ve  $r'$  açılarını sağlayan  $\alpha$  ve  $r'$  ile birlikte minimizasyonu sağlar. Görselleştirme amacıyla,  $h(r', \alpha, N)$ 'yi  $N$ ,  $\alpha$  'ya göre bir yüzey olarak çiziyoruz ve  $r'$  nün bağımlı parametre olmasına izin veriyoruz. Genelleştirilmiş lojistik eğrisinin bir noktada başlamasını istediğimizden Smith'in büyüme hızıyla aynı olan ilk büyüme oranı,  $r'$  formülüne göre belirlenir.

$$r' = \frac{0.44 \times 1.875 \left(1 - \frac{1.875}{15}\right)}{\left(1 + 3.46 \frac{1.875}{15}\right) 1.875^\alpha \left(1 - \frac{1.875}{15}\right)^\gamma},$$

$$\gamma = \alpha \sqrt{4.46} \text{ dir.}$$

Örneğin eğer  $\alpha$ ,  $[0.1, 1.0]$  kapalı aralığında değişirse o zaman  $r'$ ,  $[0.35, 0.48]$  kapalı aralığında değerlere sahip olabilir. Şekil 2.12,  $r'$ 'in iki değer için iki yüzeyi gösterir.

- i.  $r' = 0.4$
- ii.  $r' = 0.5$

Şekil 2.12'deki yüzey planlarından görüldüğü üzere  $\hat{r}' = 0.4$  daha küçük  $h(N, \alpha)$ 'ya sonuçlanıyor ve  $\hat{\alpha} \approx 0.45$  için eyer eğrisi boyunca  $\hat{h}(\hat{r}', \hat{\alpha})$ ,  $h(r', \alpha, N)$  en minimaks değerlerine ulaşır.  $r'$ , bu durumda, dar bir aralıktaki değerleri alabilir. Daha hassas simülasyonlar, daha doğru değerler elde etmeyi sağlar,  $\hat{r}' = 0.413$ ,  $\hat{\alpha} = 0.473$ . Sonuç olarak  $\hat{\gamma} = 0.473\sqrt{4.46} \approx 1.0$  dir. Genelleştirilmiş lojistik için ayrılma süresi bir yuvarlama işleminden sonra (2.15),  $t_{inf} \approx 5.20$ 'den (eşdeğer Smith eğrisi için  $t_{inf} \approx 4.72$  ile karşılaştırıldığında) elde edilir. Şimdi genelleştirilmiş lojistik fonksiyonumuz mevcuttur.

$$\frac{dN}{dt} = 0.413N^{0.473} \left(1 - \frac{N}{15}\right), \quad N_0 = 1.875,$$

Şekil 2.13'te gösterildiği gibi Smith eğrisi ile çok uyum sağlar:

Çok yakın uyuşmalar Şekil 2.14'te, üç farklı durum için  $r = 0.44$ ,  $N_0 = 1.875$ ,  $K = 15$  Smith'in eğrisi için  $\gamma$  ve genelleştirilmiş lojistik büyüme parametreleri  $\alpha$  ve  $r'$  için aşağıdaki değerler ile gösterilmiştir ( $\alpha$ ; (2.32) 'den kolayca hesaplanır):

- i.  $c = 1$ ,  $r' \approx 0.473$ ,  $\alpha \approx 0.706$ .
- ii.  $c = 5$ ,  $r' \approx 0.39$ ,  $\alpha \approx 0.41$ .
- iii.  $c = -0.5$ ,  $r' \approx 0.36$ ,  $\alpha \approx 1.414$ .

Genel bir kural olarak, Smith'in formunun pozitif bir  $N^*$  'a izin vermediği gerçeğinden yararlanarak,  $\alpha$ 'nın bir değer aralığı, nispi büyüme oranının düşmediği için nispi büyüme hızının maksimum olduğu popülasyon büyüklüğüdür.  $c > -1$  olduğunda büyüyen  $N$  ile doğrusal olarak (2.7) 'den bunun gerçekleşmesi için yapmamız gerektiğini gözlemledik.

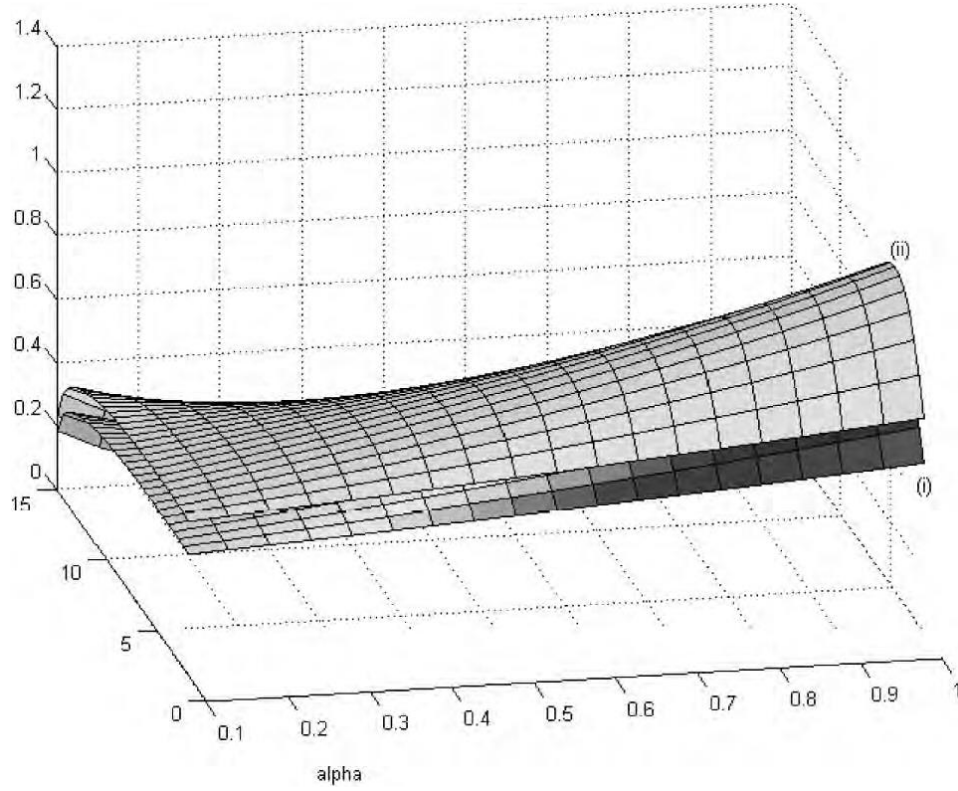
$$\alpha < 1$$

$$\beta\gamma < 1 - \alpha \text{ dır.}$$

(2.32)'den  $\beta = 1$ ,  $\gamma = \alpha\sqrt{c+1}$  ayarlarsak  $\alpha$  için alttaki aralığı elde ederiz:

$$\frac{\sqrt{c+1} - 1}{c} = \frac{N_{inf}}{K} < \alpha < 1.$$

$c = 3.46$  için alan  $0.32 < \alpha < 1$  ve  $c = 1$  için alan  $0.414 < \alpha < 1$  ve  $c = 5$  için alan  $0.29 < \alpha < 1$ . (son iki durum Şekil 2.14'te gösterilmiştir)



Şekil 2.12  $h(r', \alpha, N)$  yüzey alanlarına karşın  $\alpha$  ve  $n$  için;  $r' = 0.4, r' = 0.5$

### 2.3.5 Blumberg'in Denklemleri

Blumberg [15], Verhulst lojistik büyüme denkleminin bir popülasyon dinamiğini veya organ büyüklüğündeki evrimi modellemek için modifikasyonuna dayanan bir başka büyüme denklemi getirmiştir. Blumberg, lojistik eğrisinin ana sınırlamasının, bükülme noktasının bükülmezlik olduğunu gözlemledi.

Ayrıca, bu sınırlandırmanın üstesinden gelmek için zamana bağlı bir polinom olarak görülen sabit içsel büyüme hızı terimini değiştirmeye çalıştığını da gözlemledi, ayrıca gelecekteki değerlerin tahmin edilmesine de yol açtı (ayrıca bakınız [20]).

Bu nedenle Blumberg, hiperlojistik fonksiyon olarak adlandırdı.

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\gamma \right] \quad (2.33)$$

Denklem (2.33) integral denklem olarak yeniden formüle edilebilir.

$$\int_{N_0/K}^{N(t)/K} x^{-\alpha} (1-x)^{-\gamma} dx = rK^{\alpha-1} t$$

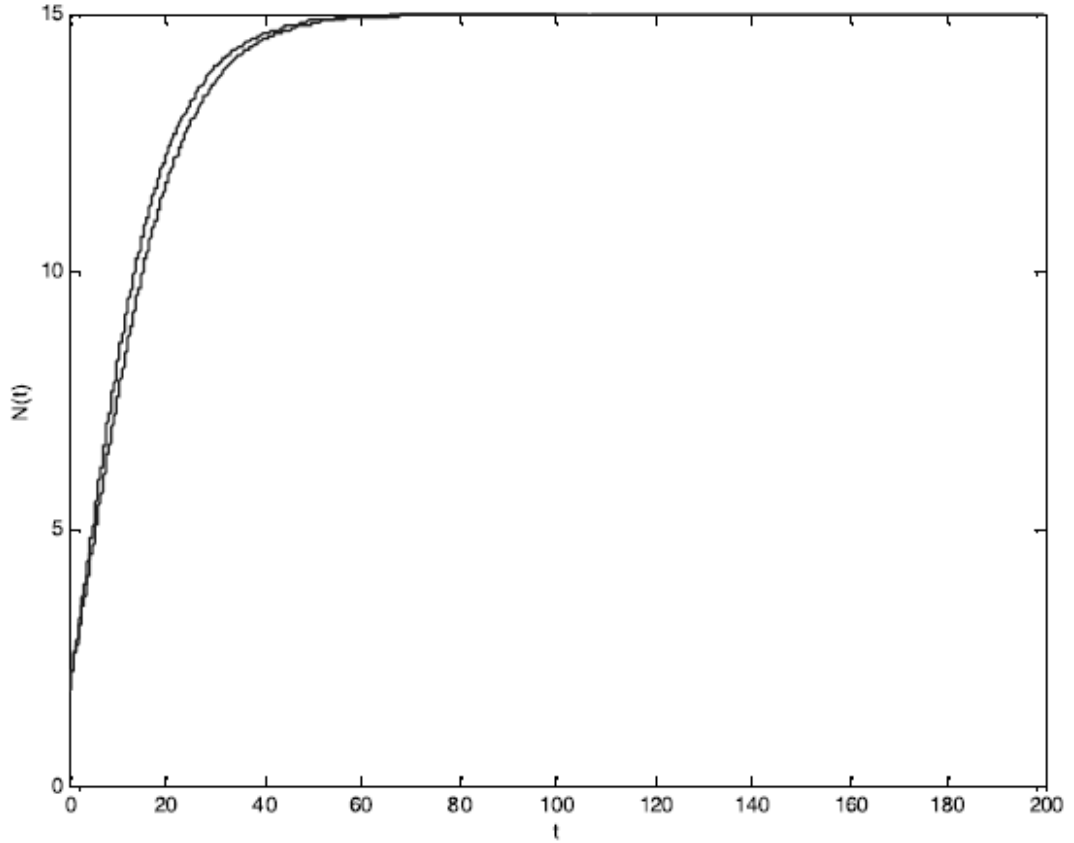
dir.

Bu kapalı form her zaman analitik bir çözümlü sağlamaz ( $\alpha < 1$ ,  $\gamma < 1$  için yine tamamlanmamış beta fonksiyonudur ve (2.14) deki gibi ifade edilebilir). Bu nedenle Blumberg,  $\alpha$  ve  $\gamma$  parametrelerinin çeşitli değerleri için büyüme fonksiyonunun  $N(t)$  (açık bir entegrasyon gerçekleştirildiğinde) analitik ifadelerini belirledi.

Toplanma noktasındaki nüfus,  $N_{inf}$  alttaki ile verilmiştir:

$$N_{inf} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} K$$

şeklindedir.



**Şekil 2.13**  $N_0 = 1.875$  ile Genelleştirilmiş lojistiğin yakın uyumu

$$dN/dt = 0.413N^{0.473}(1 - (N/15)) \text{ ve } N_0 = 1.875 \text{ ile Smith eğimi}$$

$$dN/dt = 0.44 \left( N(1 - (N/15)) / (1 + 3.46(N/15)) \right)$$

Bu aynı zamanda  $\alpha = \gamma$  olduğunda Verhulst lojistik denklemininkiyle de çakışmaktadır.  $\alpha \gg \gamma$  için dönüm noktası, taşıma kapasitesinin çok yakınında gerçekleşir ve  $\alpha \ll \gamma$  için,  $N_{inf}$  0'a yaklaşır ve dönüm noktası sadece  $N_0 < N_{inf}$  ile gerçekleşir.

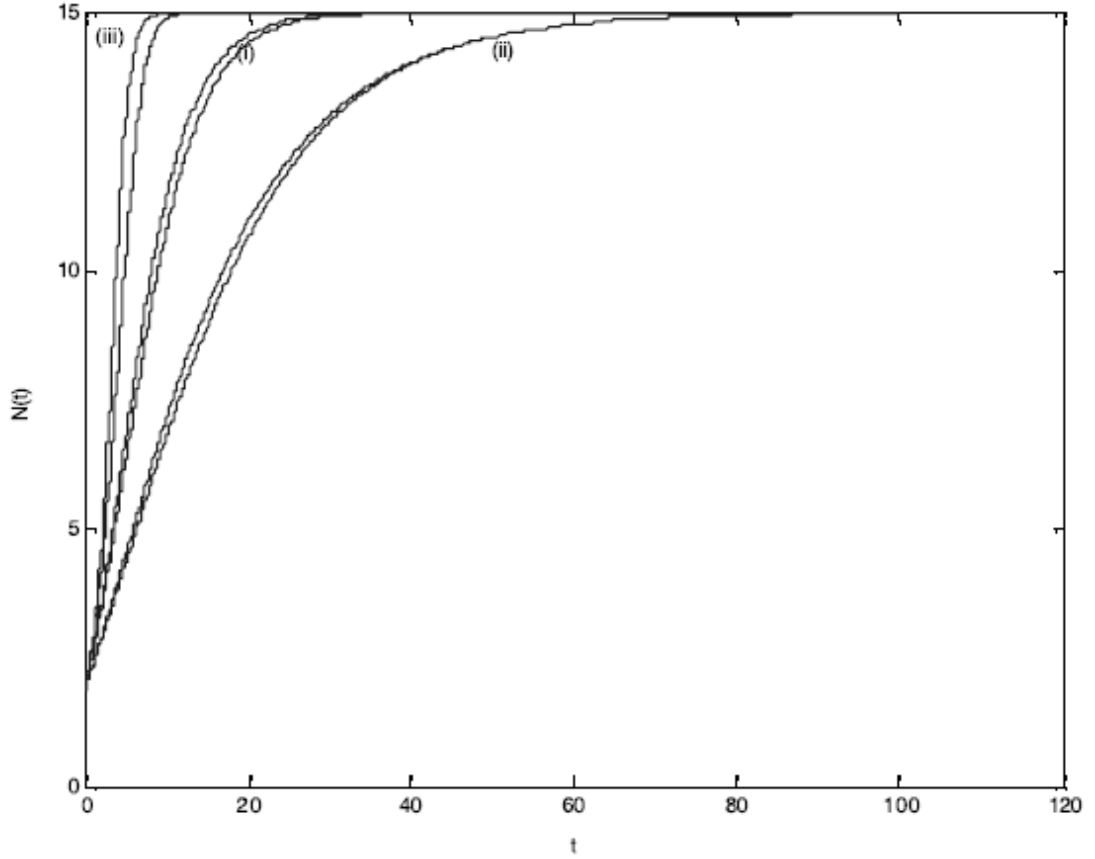
Denklem (2.33), (2.6)'dan  $\beta = 1$  alınarak elde edilir. Eğilme zamanı,  $\alpha \neq 1$  olduğunda (2.15) 'den hesaplanır.

$$t_{inf} = \frac{1}{rK^{\alpha-1}t} \left[ \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha-1}}{1 - \alpha} + \gamma \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha-2}}{2 - \alpha} + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2!} \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\alpha-3}}{3 - \alpha} + \dots \right] - \frac{1}{r} \left[ \frac{N_0^{1-\alpha}}{1 - \alpha} + \gamma \frac{N_0^{2-\alpha}}{K(2 - \alpha)} + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2!} \frac{N_0^{3-\alpha}}{K^2(3 - \alpha)} + \dots \right] \quad (2.34)$$

$\alpha = 1$  olunca (2.16)'dan

$$t_{inf} = \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{K}{N_0(1 + \gamma)} \right] + \frac{1}{r} \left[ \frac{\gamma}{(1 + \gamma)} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2! (1 + \gamma)^2} + \dots \right] - \frac{1}{r} \left[ \gamma \frac{N_0}{K} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2!} \left( \frac{N_0}{K} \right)^2 + \dots \right] \quad (2.35)$$

elde edilir.



**Şekil 2.14** Smith eğrisine üç yakın uyumu ve  $N_0 = 1.875$  için genelleştirilmiş lojistik büyüme

i. 
$$dN/dt = 0.44 \left( N(1 - (N/15)) / (1 + 3.46(N/15)) \right)$$

$$dN/dt = 0.473N^{0.706}(1 - (N/15))$$

ii. 
$$dN/dt = 0.44 \left( N(1 - (N/15)) / (1 + 5(N/15)) \right)$$

$$dN/dt = 0.39N^{0.41}(1 - (N/15))$$

iii. 
$$dN/dt = 0.44 \left( N(1 - (N/15)) / (1 - 0.5(N/15)) \right)$$

$$dN/dt = 0.36N^{1.414}(1 - (N/15))$$

Maksimum büyüme hızı yine (2.10) dan belirlenir:

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{max} = rK^\alpha \frac{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}{(\alpha + \gamma)^{\alpha + \gamma}} \quad (2.36)$$

dir.

Bağıl büyüme oranı maksimum değerine şu şekilde ulaşır:

$$\left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)_{max} = rK^{\alpha-1} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \gamma} \right)^{\alpha-1} \left( \frac{\gamma}{\alpha - 1 + \gamma} \right)^\gamma \quad (2.37)$$

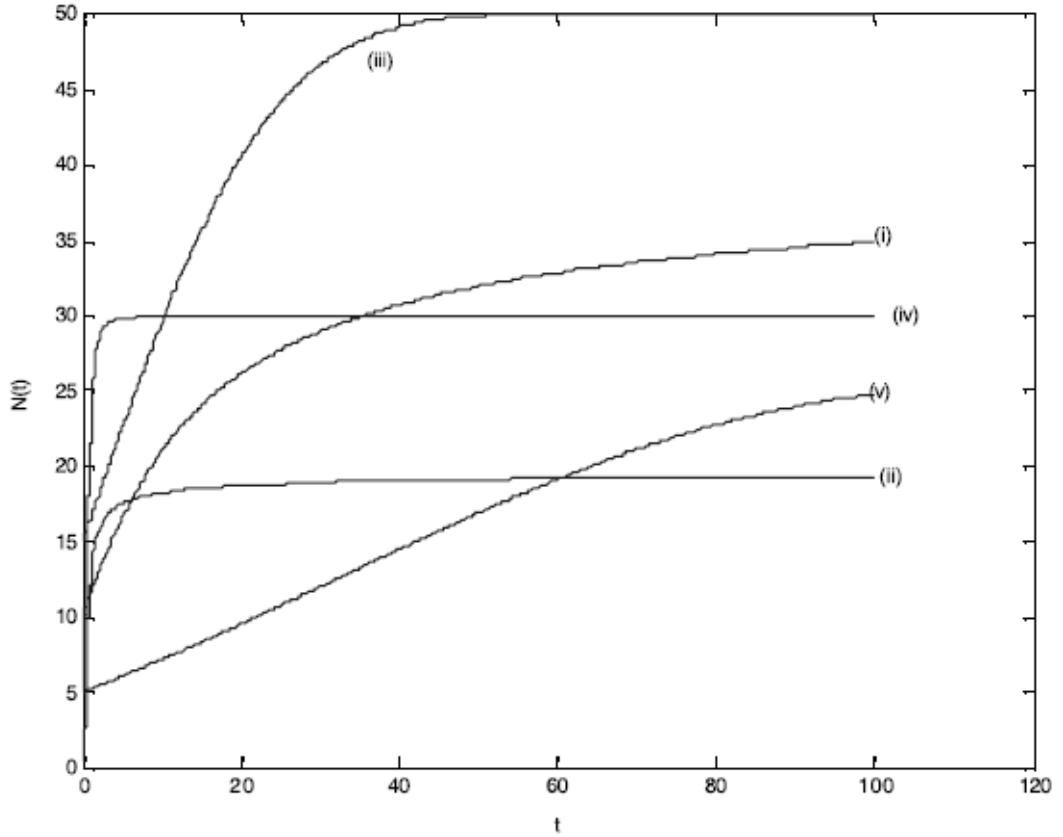
$$N^* = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \gamma} K \quad (2.38)$$

dir.

Denklem (2.38) de  $\alpha > 1$  ve  $N^* > N_0$  sağlanır, aksi halde artan  $N$ , doğrusal olmayan bir şekilde azalır.

Şekil 2.15 ve 2.16, sırasıyla  $\alpha$  ve  $\gamma$  parametrelerinin birkaç değeri için sırasıyla popülasyon büyüklüğünü ve zamanın bir fonksiyonu olarak popülasyon büyüklüğüyle büyüme oranındaki değişimi göstermektedir. Parametre değerleri:

- i.  $r = 1, N_0 = 10, K = 40, \alpha = 0.5, \beta = 1, \gamma = 2.5$
- ii.  $r = 5, N_0 = 0.5, K = 20, \alpha = 1.5, \beta = 1, \gamma = 3.5$
- iii.  $r = 0.5, N_0 = 15, K = 50, \alpha = 0.5, \beta = 1, \gamma = 0.8$
- iv.  $r = 1, N_0 = 5, K = 30, \alpha = 1.5, \beta = 1, \gamma = 1.5$
- v.  $r = 0.1, N_0 = 5, K = 25, \alpha = 0.5, \beta = 1, \gamma = 0.5$



Şekil 2.15 Üstteki parametreler için Blumberg büyümesi

Dönüm noktası, alttaki şartlar altında gerçekleşir:

- i.  $N_{inf} = 6.66 < N_0 = 10$  (Dönüm noktası yoktur)
- ii.  $N_{inf} = 6$
- iii.  $N_{inf} \approx 19.23$
- iv.  $N_{inf} = 15$
- v.  $N_{inf} = 12.5$

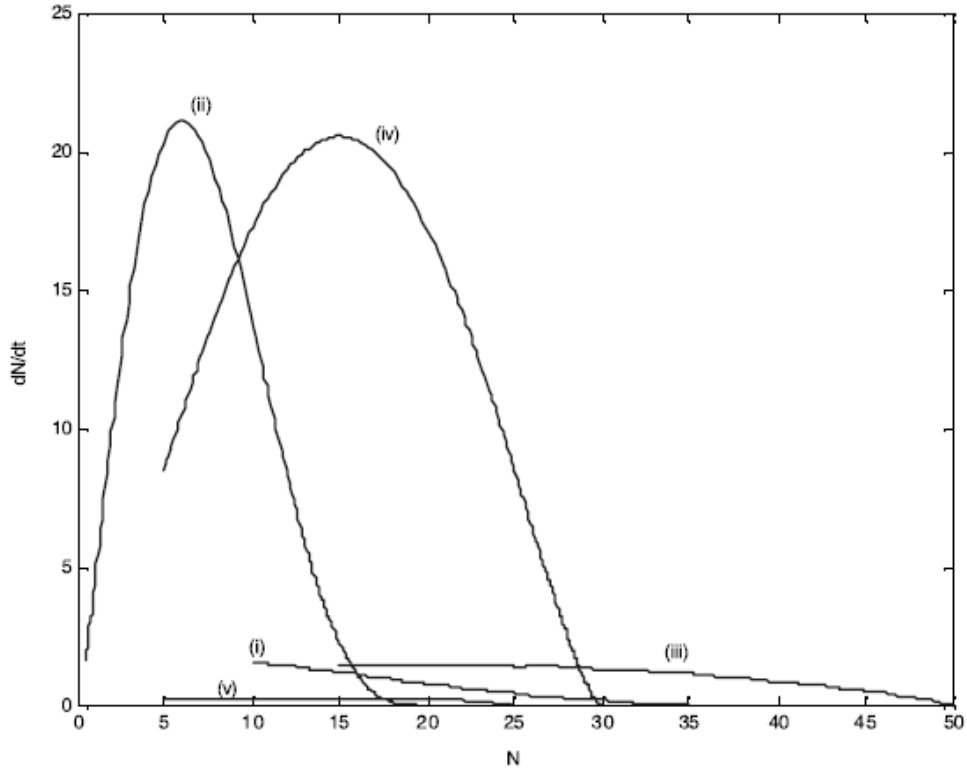
Blumberg tipinde bir büyüme şekli, rejeneratif gelişim için hiperbolik formdur [21].

Bu sigmoid eğrisi ile temsil edilir.

$$N(t) = \frac{K(t+a)^n}{b+(t+a)^n} \quad (2.39)$$

dir.

Burada  $N(t)$  ağırlık veya miktardır,  $K$  son değerdir ve denklem (2.39)'deki  $a, b, n$  pozitif parametrelerdir.



Şekil 2.16 Altaki parametrelerle Blumberg eğrisi için büyüme oranının boyutu



- i.  $r = 1, N_0 = 10, K = 40, \alpha = 0.5, \beta = 1, \gamma = 2.5$
- ii.  $r = 5, N_0 = 0.5, K = 20, \alpha = 1.5, \beta = 1, \gamma = 3.5$
- iii.  $r = 0.5, N_0 = 15, K = 50, \alpha = 0.5, \beta = 1, \gamma = 0.8$
- iv.  $r = 1, N_0 = 5, K = 30, \alpha = 1.5, \beta = 1, \gamma = 1.5$
- v.  $r = 0.1, N_0 = 5, K = 25, \alpha = 0.5, \beta = 1, \gamma = 0.5$

$$\frac{dN}{dt} = rN^{1-(1/n)} \left(1 - \frac{N}{K}\right)^{1+(1/n)} \quad (2.40)$$

dir.

Burada;

$$r = n \left(\frac{K}{b}\right)^{1/n}$$

şeklindedir.

Denklem (2.39)  $\alpha = 1 - (1/n), \beta = 1, \gamma = 1 - (1/n)$  ile (2.6)'dan türemiştir. Eğilim değeri (2.9)'da belirlenmiştir.

$$N_{inf} = \frac{(n-1)}{2n} K \quad (2.41)$$

$n > 1$  olduğunda ve (2.15) 'ten kırılma zamanı:

$$t_{inf} = b^{1/n} \left[ \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{1/n} - \left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)^{1/n} \right] \quad (2.42)$$

dir.

$$N_0 = Ka^n / (b + a^n)$$

şeklindedir.

Nispi büyüme oranı,  $N^* - n < 0$  tanımsız olduğu için artan  $N$  ile doğrusal olmayan bir şekilde azalır.

### 2.3.6 Jenerik Büyüme Fonksiyonu

Turner ve ortak yazarlar [17], jenerik büyüme fonksiyonu olarak adlandırdıkları değiştirilmiş bir Verhulst lojistik denklemi önermiştir.

Bu diferansiyel denklem:

$$\frac{dN}{dt} = rN^{1+\beta(1-\gamma)} \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\beta \right]^\gamma, \quad (2.43)$$

şeklindedir.

Buradaki  $\beta$ ,  $\gamma$  pozitif üs ve  $\gamma < 1 + \frac{1}{\beta}$  dir. (2.43)'e göre çözüm, şu kesin analitik biçime sahiptir (Yalnızca parametrelerin makul seçimi ile mümkündür):

$$N(t) = \frac{K}{\left[ 1 + \left[ (\gamma - 1)\beta r K^{\beta(1-\gamma)} t + \left[ \left( \frac{K}{N_0} \right)^\beta - 1 \right]^{1-\gamma} \right]^{1/(1-\gamma)} \right]^{1/\beta}} \quad (2.44)$$

şeklindedir.

Toplanma noktasındaki nüfus ( $N_{inf}$ ), şu şekilde verilmiştir:

$$N_{inf} = \left( 1 - \frac{\beta\gamma}{1+\beta} \right)^{1/\beta} K \quad (2.45)$$

dir.

Ve maksimum nispi büyüme oranındaki nüfus altta verilmiştir:

$$N^* = (1 - \gamma)^{1/\beta} \quad (2.46)$$

şeklindedir.

Hem  $N_{inf}$  hem de  $N^*$  'ın varlığı  $\gamma < 1$  koşulu ile sağlanır.  $\beta = \gamma = 1$  ile  $N_{inf}$  için Verhulst lojistik denklemi (2.4)'e uygun bir şekilde indirgenir.  $\alpha = \gamma = 1$  için Richards denklemine (2.20),  $\alpha = 2 - \gamma$  ve  $\beta = 1(\gamma < 2)$  için ise Blumberg formuna indirgenir. Ancak Von Bertalanffy'nin formu (2.17), (2.43) den elde edilemez, çünkü  $\alpha = 2/3$ ,  $\beta = 1/3$ ,  $\gamma = 1$  değerleri, Turner tarafından öngörülen  $\alpha = 1 + \beta(1 - \gamma)$  koşullarını sağlamaz.

Maksimum büyüme oranı şu şekilde verilmiştir:

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{max} = rK^{1+\beta(1-\gamma)} \frac{(1 + \beta - \beta\gamma)^{(1-\gamma)+(1/\beta)} (\beta\gamma)^\gamma}{(1 + \beta)^{1+(1/\beta)}} \quad (2.47)$$

dir.

Ve maksimum bağıl büyüme oranı alttaki gibi verilmiştir:

$$\left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right)_{max} = rK^{\beta(1-\gamma)}(1-\gamma)^{1-\gamma}\gamma^{\gamma} \quad (2.48)$$

dir.

Ekstrem  $\beta$  ve  $\gamma$  değerleri ve  $N_{inf}$  için aşağıdaki limitlerini elde ediyoruz:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} N_{inf} = Ke^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < \infty$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} N_{inf} = K, \quad 0 < \gamma < \infty$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} N_{inf} = K, \quad 0 < \beta < \infty$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} N_{inf} = K, \quad \beta \rightarrow 0$$

dir.

Bükülme zamanı (2.15) 'deki formülden elde edilir:

$$t_{inf} = \frac{1}{\beta(\gamma-1)rK^{\beta(\gamma-1)}} \left[ \left( \frac{\beta\gamma}{1+\beta-\beta\gamma} \right)^{1-\gamma} - \left( \left( \frac{K}{N_0} \right)^{\beta} - 1 \right)^{1-\gamma} \right]$$

şeklindedir.

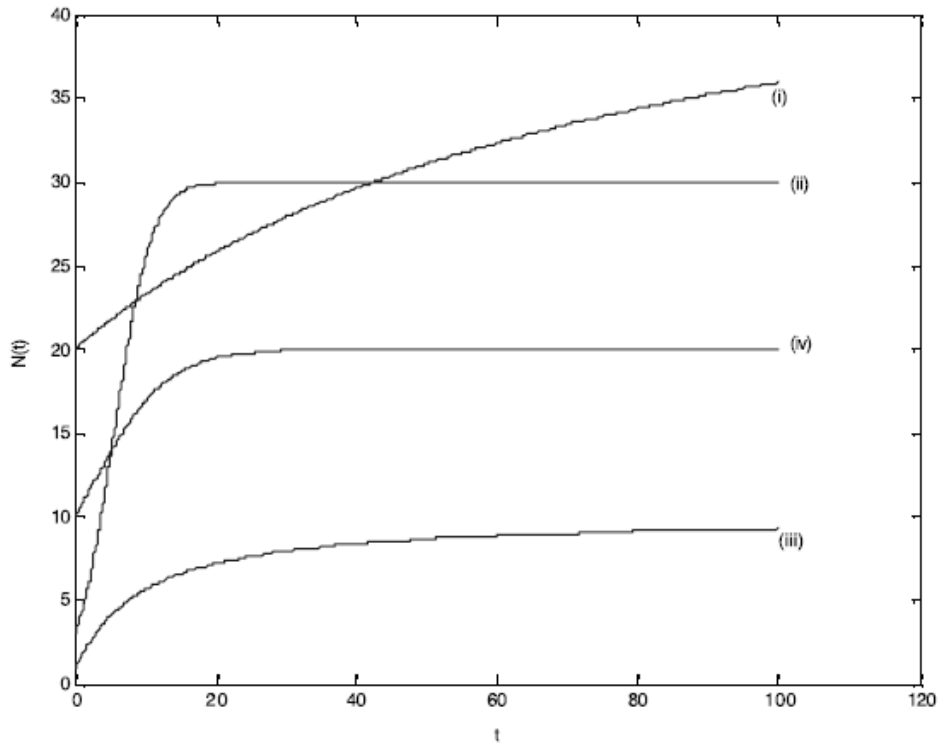
Şekil 2.17,  $t$  zamanında gelişen birçok genel büyüme eğrisini gösterir ve Şekil

2.18, aşağıdaki parametreler için büyüme oranına karşı zaman gelişimini gösterir:

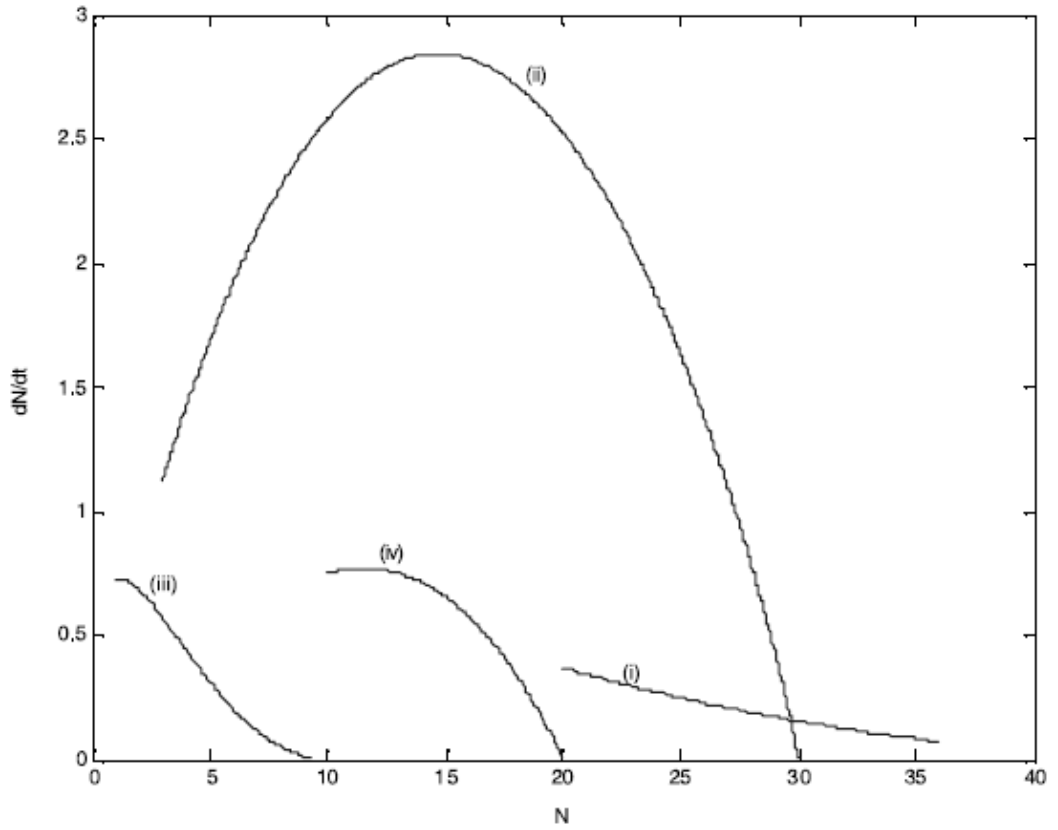
- i.  $r = 8, \quad N_0 = 20, \quad K = 50, \quad \alpha = 0.6, \quad \beta = 0.1, \quad \gamma = 2$
- ii.  $r = 0.5, \quad N_0 = 3, \quad K = 30, \quad \alpha = 1.5, \quad \beta = 0.5, \quad \gamma = 0.9$
- iii.  $r = 2.5, \quad N_0 = 1, \quad K = 10, \quad \alpha = 2/3, \quad \beta = 1/3, \quad \gamma = 2$
- iv.  $r = 0.1, \quad N_0 = 10, \quad K = 20, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1$

Eğilme değerleri:

- i.  $N_{inf} \approx 5.50 < N_0 = 20$  (Bükülme yok)
- ii.  $N_{inf} = 14.7$



Şekil 2.17 Yukarıdaki parametreler için Jenerik büyüme oran eğrisi



Şekil 2.18 Yukarıdaki parametreler için Jenerik büyüme oran eğrisi

iii.  $N_{inf} = 1.25$  ( $N_0 = 1$  yakınlarında)

iv.  $N_{inf} = 11.574$  ( $N_0 = 10$  yakınlarında)

### 2.3.7 Schnute Denklemi

1981 tarihli makalesinde Schnute [22], göreceli büyüme oranının, ilgi miktarı olarak kullanılmasını önermiştir.  $Z = (1/N)(dN/dt)$ , nispi büyüme oranı ise,  $(1/Z)(dZ/dt)$ , nispi büyüme oranının nispi büyüme hızıdır. Schnute'un varsayımı,  $(1/Z)(dZ/dt)$  değerinin  $Z$ 'nin doğrusal bir fonksiyon olduğunu varsaymak olmuştur:

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = -(a + bZ) \quad (2.49)$$

dir.

$a, b$ 'nin pozitif, negatif veya sıfır sabitleri olduğu ve sağ taraftaki eksi işareti, büyüme hızının tipik olarak azaldığını gösterir.  $a, b$ 'nin uygun değerleri için bazı büyüme modelleri (2.49) den elde edilebilir.

Aksine, genelleştirilmiş lojistik için (2.6),  $(1/Z)(dZ/dt)$  aşağıdaki forma sahiptir:

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = Z[(\alpha + \beta\gamma - 1) - \beta\gamma r^{1/\gamma} N^{(\alpha-1)/\gamma} Z^{-(1/\gamma)}] \quad (2.50)$$

şeklindedir.

Açıkçası (2.50),  $Z$ 'nin doğrusal bir fonksiyonu değil, lojistik formun bir fonksiyonudur.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = aZ + b(N)Z^c$$

Burada;

$a = \alpha + \beta\gamma - 1$  Sabittir,  $b$  bir  $N$  fonksiyonudur ve  $c$  bir sabittir. (2.50) 'den

$\alpha = \beta = \gamma = 1$  ile Verhulst lojistik büyüme formunu elde ederiz.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = Z \left(1 - \frac{r}{Z}\right) = Z - r$$

$\alpha = \gamma = 1$  için Richards büyüme formunu elde ederiz.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = Z \left( \beta - \frac{\beta r}{Z} \right) = \beta(Z - r)$$

Yukarıdaki gibi  $\beta$ 'yi türetirsek ve  $\beta$ 'nın 0'a yaklaşmasına izin verirsek Gompertz büyüme elde ederiz.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = \lim_{\beta \rightarrow 0} (Z - r) = -r$$

Burada

$\alpha = 0$  ve  $\gamma = 0$  için doğrusal büyüme elde ederiz.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = -Z$$

Burada

$\alpha = 1$  ve  $\gamma = 0$  için üstel büyüme elde ederiz.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = 0$$

ve  $\alpha = 1/2$ ,  $\gamma = 0$  ikinci dereceden büyüme elde ederiz.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = -\frac{Z}{2}$$

Schnute'un tanımını (2.49) kabul eden bir başka büyüme şekli,  $\beta = 1 - \alpha$ ,  $\gamma = 1$  ile özel bir (2.6) örneği olan genelleştirilmiş Von Bertalanffy şeklindedir:

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^{1-\alpha} \right]$$

Genelleştirilmiş Von Bertalanffy formu da (2.50) yi takip eder.

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = (\alpha - 1)rK^{\alpha-1} + (\alpha - 1)Z$$

şeklindedir.

(2.49) 'de öngörülen formüle göre ifade edilemeyen bir form, Smith'in formudur (2.28), göreceli büyüme oranının nispi büyüme oranı  $(1 + c(N/K))^{-1}$  faktörü ile ölçeklenen Verhulst lojistik büyüme formu tarafından verilir. (Bakınız Bölüm 2.3.4):

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = \frac{Z - r}{1 + \frac{N}{K}}$$

$\gamma = 0$  için Smith'in formu, beklendiği gibi Verhulst lojistik büyüme formuna indirgeniyor. Zeide [23], Schnute'in lineer varsayımını sorguladı, belki de balık yetiştiriciliği (Schnute'in araştırma alanı) için uygun, ancak örneğin ağaç büyümesi için uygun değildi. Zeide'nin araştırması bir güç yasasının  $(1/Z)(dZ/dt) = aZ^b$  daha uygun olabileceğini belirtiyor. Aslında, (2.50), Schnute'in lineer yasasının hangi büyüme modelini tahmin edemediğini açıkça ortaya koymaktadır. Elbette  $\gamma = 0$  olduğunda elbette  $\gamma \neq 1$  dir, bu durumda  $\beta$  parametresi önemli değildir.  $\gamma = 1$  için (2.50) alttaki gibi yazılır;

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = -\beta r N^{\alpha-1} + Z(\alpha + \beta - 1) = -\frac{\beta r}{K^\beta} N^{\alpha+\beta-1} + (\alpha - 1)Z$$

dir.

Şimdi eğer  $\alpha = 1$  Richard'ın formunu takip ederse,  $\alpha = \beta = 1$  ise lojistik formu takip eder ve  $\alpha + \beta = 1$  ise genelleştirilmiş Von Bertalanffy formunu takip eder. Ancak  $\alpha + \beta \neq 1$  ise, yukarıdaki form  $Z$ 'de doğrusal değildir.

### 2.3.8 Birch'in Richards Denkleminin Genellemesi

Yakın tarihli bir yayında Birch [24], Smith denklemini (2.28) Richards denkleminin (2.20) bir genelleştirmesi olarak yeniden ortaya koydu. Birch, (i) simülasyonu olarak Richards'ın eğrisinin avantajlarını gösterdi. Düşük  $N$  değerlerinde üssel büyüme ve (ii) esnek bükülme noktası değerlerine sahiptir. Denklem (2.30)'un dönüm noktası için,  $N_{inf}$ 'in  $-1 < c < \infty$  aralığı için herhangi bir değer alabileceği görülebilir. (2.9) ve  $\alpha = \beta = 1$  için, genelleştirilmiş lojistik dönüm değerinin  $N_{inf} = K/(1 + \gamma)$  olduğunu ve herhangi bir pozitif  $\gamma$  için herhangi bir değer alabildiğini görüyoruz (aynı şekilde,  $\beta = \gamma = 1$  için bükülme değeri  $N_{inf} = (\alpha/(\alpha + 1))K$  da  $\alpha > 0$  için herhangi bir değeri alabilir). Ayrıca küçük popülasyon nüfusları ( $N$ ) için, (2.6) üstel büyümeyi simüle eder. Şekil 2.19, düşük  $N$  değerlerinde üssel büyümeyi gösterir. İlk büyüme oranı  $(dN/dt)_{N_0} \approx 0.05$  (neredeyse sıfır düşük asimptot) ve bükülme değerleri sırasıyla şu şekildedir:

i.  $N_{inf} \approx 33.33$

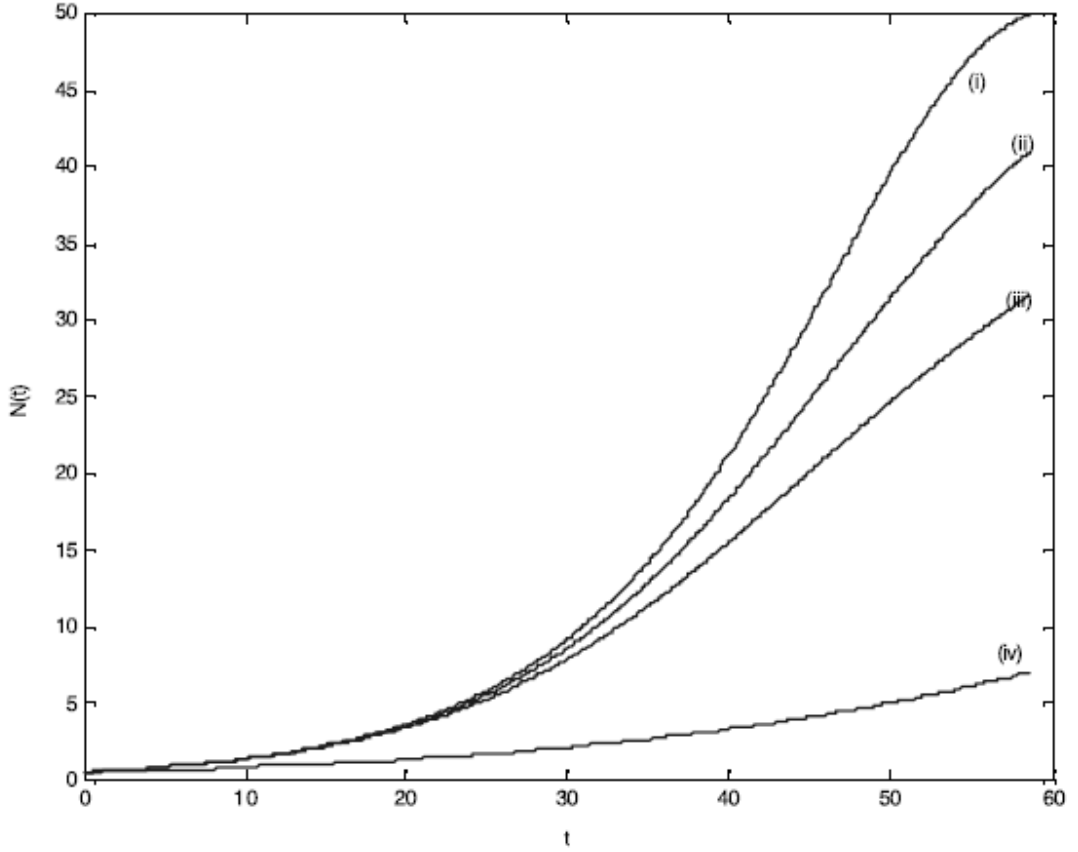
- ii.  $N_{inf} \approx 26.31$
- iii.  $N_{inf} = 20$
- iv.  $N_{inf} \approx 16.66$

### 2.3.9 Üstel Polinom Büyüme

Bu bölümde, genelleştirilmiş lojistik formun sınırlayıcı bir durumundan üssel polinom büyümesi elde edilmiştir. Denklem (2.6)'da  $\alpha = 1$  ve sağ tarafı  $\beta^\gamma$  ile bölüp, sonra limiti  $\beta \rightarrow 0$  olarak alırsak aşağıdaki şu denklem elde edilir:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{rN}{K^{\beta\gamma}} \left( \frac{K^\beta - N^\beta}{\beta} \right)^\gamma = rN \left[ \ln \left( \frac{K}{N} \right) \right]^\gamma \quad (2.51)$$

şeklinde olur.



**Şekil 2.19** Küçük N için üssel büyüme gösteren genelleştirilmiş lojistik eğriler

- i.  $r = 0.1, N_0 = 0.5, K = 50, \gamma = 0.5$
- ii.  $r = 0.1, N_0 = 0.5, K = 50, \gamma = 0.9$
- iii.  $r = 0.1, N_0 = 0.5, K = 50, \gamma = 1.5$
- iv.  $r = 0.05, N_0 = 0.5, K = 50, \gamma = 2$



Turner [17] Hiper Gompertz adını (2.51) veya basitçe genelleştirilmiş Gompertz fonksiyonunu tanımlar. Bunun için de  $\gamma = 1$  için, (2.50) çözümde iyi bilinen Gompertz büyüme fonksiyonu haline gelir:

$$N(t) = K \left( \frac{N_0}{K} \right)^{e^{-rt}} \quad (2.52)$$

dir.

$\gamma \neq 1$  için (2.51);

$$N(t) = K \exp \left[ - \left\{ (\gamma - 1)rt + \left[ \ln \left( \frac{K}{N_0} \right) \right]^{1-\gamma} \right\}^{1/(1-\gamma)} \right] \quad (2.53)$$

şeklindedir.

$1/(1 - \gamma)$ 'nin pozitif tamsayı değerleri için (2.53), formun genel üssel polinom büyümesini temsil eder.

$$N(t) = \exp(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)$$

$\gamma = 1/2$  için (2.53) ikinci dereceden üstel polinom olur

$$N(t) = K \exp \left[ - \left\{ \left( -\frac{rt}{2} \right) + \left[ \ln \left( \frac{K}{N_0} \right) \right]^{1/2} \right\}^2 \right] = \exp[a_0 + a_1t + a_2t^2],$$

ki burada

$$a_0 = \ln N_0$$

$$a_1 = r \sqrt{\ln \left( \frac{K}{N_0} \right)} > 0$$

$$a_2 = -\frac{r^2}{4} < 0$$

dır.

Dönüm noktası (2.9) 'dan  $\alpha = 1$  ve  $\beta \rightarrow 0$  ile belirlenir.

$$N_{inf} = Ke^{-\gamma}$$

şeklindedir.

Dönüm zamanı şu şekilde verilmiştir:

$$t_{inf} = \frac{2 \sqrt{\ln \left( \frac{K}{N_0} \right)} - \sqrt{2}}{r}.$$

Heinen [25], üstel polinom büyümesini,  $N(t) = e^{a+bt+ct^2}$  formunu baştan alarak ve ardından fonksiyonel forma (2.51) ulaşarak analiz eder.

### 3. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, özel durumlar olarak iyi bilinen birkaç büyüme formunun kapsadığı görülen bir büyüme eğrisi (2.6) tanıtılmıştır. Spesifik olarak, (2.6) 'nın aşağıdakileri içerdiğini gösterdik.

**Çizelge 3.1** Özel Durumlar Olarak İyi Bilinen Birkaç Büyüme Formunun Kapsadığı Görülen Bir Büyüme Eğrisi

Üstel Büyüme	$\alpha = 1$	$\beta = 1$	$\gamma = 1$
Mitscherlich veya Monomoleküler Büyüme	$\alpha = 0$	$\beta = 1$	$\gamma = 1$
Güç Büyümesi	$\alpha > 1$	$\beta$	$\gamma = 0$
Genelleştirilmiş Von Bertalanffy Büyüme	$\alpha$	$\beta = 1 - \alpha$	$\gamma = 1$
Özelleşmiş Von Bertalanffy büyüme	$\alpha = \frac{2}{3}$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\gamma = 1$
Richards Büyüme	$\alpha = 1$	$\beta = 1$	$\gamma = 1$
Smith Büyümesi	$\alpha = 0.473$	$\beta = 1$	$\gamma = 1$
Blumberg Büyüme	$\alpha$	$\beta = 1$	$\gamma$
Abartılı Büyüme	$\alpha = 1 - \frac{1}{n}$	$\beta = 1$	$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$
Jenerik Büyüme	$\alpha = 1 + \beta(1 - \gamma)$	$\beta$	$\gamma$
Genelleştirilmiş Gompertz Büyüme	$\alpha = 1$	$\beta \rightarrow 0$	$\gamma$
Gompertz Büyüme	$\alpha = 1$	$\beta \rightarrow 0$	$\gamma = 1$
İkinci Dereceden Üssel Polinom	$\alpha = 1$	$\beta \rightarrow 0$	$\gamma = \frac{1}{3}$

Girilen büyüme formu için (i) maksimum nispi büyüme hızı,  $((1/N)(dN/dt))_{max}$  ve gerçekleştiği yerde  $N^*$  (ii) dönüm değeri,  $N_{inf}$  ve (iii) dönüm zamanı  $t_{inf}$  üretilmiştir. Ayrıca, bu formüllerin türetilmiş büyüme modelleri için gerekli değerleri öngördüğü görülmektedir. Bu çalışmada ele alınan tüm modeller,

Smith'in (2.28) (ve sonuç olarak Birch'in genelleştirilmesi) ve Schnute'nin (2.49) formunda (bağımlı) göreceli büyüme oranı,  $Z$  ile doğrusal bir diferansiyel denklem olan (2.49) hariç doğal olarak değişken takip eder. Smith'in formu, Smith tarafından sağlanan orijinal verileri kullanarak, (2.6) 'de yerine yazıldığında (2.28)'le mükemmel bir uyum sağlayan  $r$ ,  $\alpha$  ve  $\gamma$  parametrelerine uygun sayısal değerler atamak için türetilmiştir. Birch'in Richards formunu (2.20) genellemesi, aslında Smith'in bir ifadesidir ve Richards formunda bulunan bükülme değerinin sıfıra düşük asimptot ve bükülmezlik yokluğunu gidermek için yeniden incelendi. Genelleştirilmiş form (2.6) ayrıca sıfıra yakın bir asimptot üretme kabiliyetine sahipken aynı zamanda,  $\alpha$  veya  $\gamma$  ( $\beta = 1$ ) 'in sadece bir parametresi durumunda dönüm noktası bir esneklik sergiler. Schnute'in formu (2.48),  $\gamma = 0$  olan tüm sigmoid olmayan büyüme formlarını ve  $\gamma = 1$  ve  $\alpha$ ,  $\beta$  'nın belirli değerleri almakla sınırlı kaldığı, ancak başka herhangi bir şey içermediği tüm temel sigmoid büyüme formlarını içerir. Çalışmada daha önce belirtildiği gibi, Zeide [23] Schnute'in doğrusal varsayımını gerekçesiz ve ağaç büyümesi için uygun olmadığını tespit etti. Aynı makalede [23] Zeide, genelleşmiş forma (2.6) uygun görünen ve bunun için  $\gamma$ 'nın 1 olmadığı çok iyi bilinen birkaç büyüme modelini belirtmektedir. Örneğin Hossfeld formu

$$N(t) = \frac{t^c}{b + \frac{t^c}{a}}$$

$t$ 'ye göre türevi alındığında;

$$\frac{dN}{dt} = \frac{bct^{c-1}}{\left(b + \frac{t^c}{a}\right)^2}$$

olur.

Denklem (2.6)'in genelleştirilmiş hali olarak elde edilir ki

$$r = cb^{-(1/c)}$$

$$K = a$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{c}$$

$$\beta = 1$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{c}$$

dir.

Ayrıca Levakovic formu;

$$N(t) = a \left( \frac{t^d}{b + t^d} \right)^c$$

$t$  ye göre türevi alındığında;

$$\frac{dN}{dt} = bcd \frac{N}{t(b + t^d)}$$

olur.

Form (2.6)'nın genelleştirilmiş hali olarak açıklanabilir:

$$\frac{dN}{dt} = (cda^{1/cd}b^{-(1/d)})N^{1-(1/cd)} \left[ 1 - \left( \frac{N}{a} \right)^{1/c} \right]^{(1/d)+1}$$

olur ki burada,

$$r = cda^{(1/cd)}b^{-(1/d)}$$

$$K = a$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{cd}$$

$$\beta = \frac{1}{c}$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{d}$$

dir.

Son olarakta aynı referanstan [23] Korf'un formu;

$$\frac{dN}{dt} = a \exp(-bt^{-c}),$$

$$\frac{dN}{dt} = bcNt^{-(c+1)}$$

şeklindedir.

(2.51) 'de verilen formun genelleştirilmiş bir Gompertz fonksiyonudur:

$$\frac{dN}{dt} = (cb^{-(1/c)})N \left[ \ln \left( \frac{K}{a} \right) \right]^{1+(1/c)},$$

olur ki burada,

$$r = cb^{-(1/c)}$$

$$a = K$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{c}$$

dir.

Heinen [25], üstel, monomoleküler, lojistik, Gompertz, Richards ve ikinci dereceden üstel polinomun temel özellikleri hakkında çok kapsamlı bir derleme sunmuştur. Heinen, çalışmasında, ikinci dereceden üstel polinom hariç yukarıda belirtilen tüm modellere uyan bir model olduğu sonucuna varmıştır. Onun genellemesi şu şekildedir:

$$Y(N(t)) = A(K) + B(N_0, K)C(r)^t, \quad (2.54)$$

Üssel büyüme için  $C(r) = e^r$  olur ve geri kalanı için de  $C(r) = e^{-r}$  olur.

Heinen'in genelleme formatının en büyük dezavantajı,  $Y(N(t))$ ,  $A(K)$ ,  $B(N_0, K)$  fonksiyonlarının sabit bir matematik formuna sahip olmamaları, listeye her yeni model eklendiğinde buna göre ayarlanmasıdır. Başka bir form eklenecekse Heinen'in formatının artırılması gerekir. Schnute'in modeli gibi Heinen'in tek bir modeli de tüm yaklaşımlara uyar,  $\gamma = 0$  veya  $\gamma = 1$  olan büyüme modelleri için uyum sağlar ve  $\alpha$  veya  $\beta$  mevcut ama ikisi birlikte bulunmaz. İkinci dereceden üssel polinomun Heinen'in planına uymamasının nedeni,  $\gamma = 1/2$  olmasıdır. Bir dizi makalede [26,27] Savageau, karmaşık bir sistemin bileşen parçaları arasındaki değişikliklerin, bir bütün olarak sistemin büyüme hızından çok daha hızlı gerçekleştiğini savundu. Matematiksel olarak, sistemin zamansal davranışı en yavaş olgular tarafından yönetilir; diğer tüm modellerin daha kararlı bir duruma ulaştığı varsayılmaktadır.  $N_1(t)$ , bir tek zamansal baskın bir süreç olduğunda, temel büyüme denklemi genel forma sahiptir;

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1^{g_1} - b_1 N_1^{h_1}. \quad (2.55)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki denklemden Savageau,  $a_1, b_1, g_1, h_1$  parametrelerini bu eğrilerin parametreleriyle ilişkilendirerek doğrusal, üstel, monomoleküler, lojistik ve Von Bertalanffy büyüme formlarını türetmiştir. Aslında Savageau'nun genel formu (2.6)

$\gamma = 1$  ile karşılaştırılabilir:

Eğer  $r = a_1, r/K^\beta = b_1, \alpha = g_1, \alpha + \beta = h_1$  ise;

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\beta \right] = rN^\alpha - \frac{r}{K^\beta} N^{\alpha+\beta}, \quad (2.56)$$

dir.

Aynı makalelerde Savageau, geçici olarak baskın iki süreç olan  $N_1(t)$  ve  $N_2(t)$ 'yi temel varsayım yaparak Gompertz büyüme denklemini (2.52) ve hiperbolik büyüme denklemini (2.39) ilişkilendirdi. Zeide [23], Savageau'nun genel büyüme denklemlerindeki çıkarma işleminin bazı yararları olduğunu, ancak büyümenin biyolojik olayların çoğunun altında yatan uygun bir alternatif olduğunu belirtiyor. Ancak yukarıda gösterdiğimiz gibi, çıkarma çarpma olarak ifade edilebilir, bu nedenle iki yaklaşımın denkliği, en azından geçici olarak baskın bir işlem varlığında sağlanır. Örneğin; Gompertz ve hiperbolik büyüme ile geçici olarak baskın iki sürecin ortaya çıkmasıdır. Gompertz diferansiyel formunun logaritmik bir terimi var,  $\ln(N/K)$  ve hiperbolik büyümenin bir üssü var ve  $\gamma$  dır. Savageau'nun genel büyüme denklemlerindeki zorluk, bu iki formu tek bir işlem olarak benimseyen matematiksel formlarına dayanıyor;

$$\frac{dN_i}{dt} = a_i \prod_{j=1}^k N_j^{g_{ij}} - b_i \prod_{j=1}^k N_j^{h_{ij}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (2.57)$$

dir.

$k$ , geçici olarak baskın olan süreçlerin sayısıdır. Yukarıdaki denklemler sadece iki çarpımsal terim halinde ele alınabilir.

$$\frac{dN_i}{dt} = a_i \prod_{j=1}^k N_j^{g_{ij}} \left( 1 - \frac{b_i}{a_i} \prod_{j=1}^k \frac{N_j^{h_{ij}}}{N_j^{g_{ij}}} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

şeklinindedir.

Yukarıdaki çarpımsal form, daha fazla terim içerecek şekilde genişletilmediği sürece  $i = 1$  için Gompertz ve hiperbolik büyüme formlarını üretmez:

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1^{g_1} - a_2 N_1^{g_2} - a_3 N_1^{g_3} - \dots$$

dir.

Parametreler belirli değerleri kabul ettiğinde genişletilmiş form iki çarpımsal terim halinde daraltılabilir. Aslında bu form binom genişlemesi üzerine genelleştirilmiş lojistik formuna (2.6) benzer:

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha - \frac{r\gamma}{K^\beta} N^{\alpha+\beta} + \frac{r\gamma(\gamma-1)}{2K^{2\beta}} N^{\alpha+2\beta} - \dots$$

dir.

Belki de genelleştirilmiş lojistik büyümenin (2.6) tek dezavantajı,  $N(t)$  için analitik bir çözüm sunmak için entegre edilememesidir. Ancak, Brich [24] makalesinde büyüme denklemlerinin neredeyse tüm uygulamalarının sayısal olduğunu kabul eder, bu yüzden bu küçük bir problemdir. Bununla birlikte, analitik bir çözüm bulunmaması, gerçek verilerin eğri uydurma görevini son derece zorlaştırmaktadır. Bazı sigmoidal büyüme modellerinin eğri uydurulması Ratkowsky'in çalışmasında yoğun olarak ele alınmıştır [28], ancak dikkate alınan tüm modellerin analitik çözümleri vardır.  $t$ 'nin,  $N$ 'nin bir fonksiyonu olarak varlığı pek kullanışlı değildir ve fonksiyonu olarak kullanmak son derece zordur. Diferansiyel denklemin (2.6) kendisini veri analizi için bir ön çerçeve olarak benimsemek daha tercih edilir görünmektedir. Sonlu farklar yöntemini kullanarak  $dN/dt$  türevini  $\Delta N/\Delta t$  ile yaklaşık olarak hesaplar ve logaritmasını alırsak:

$$\ln\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right) \approx \ln r + \alpha \ln N + \gamma \ln\left[\left(1 - \frac{N}{K}\right)^\beta\right] \quad (2.58)$$

olarak elde edilir.

Küçük  $N/K$  değerleri için şöyle alınır;

$$\ln\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right) \approx \ln r + \alpha \ln N \quad (2.59)$$

olur..

Yukarıdakiler  $\alpha$  ve  $r$  parametrelerinde en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilebilecek doğrusal bir regresyon modelidir. İhmal edilemez  $N/K$  için daha kesin bir ilişkiye sahiptir.

$$\ln\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right) \approx \ln r + \alpha \ln N - \gamma \left[ \left(\frac{N}{K}\right)^\beta + \frac{1}{2} \left(\frac{N}{K}\right)^{2\beta} + \frac{1}{3} \left(\frac{N}{K}\right)^{3\beta} + \dots \right] \quad (2.60)$$



şeklindedir.

Yukarıdakiler, örneğin Gauss-Newton algoritması kullanılarak tahmin edilmesi gereken  $\beta, \gamma, K$  parametrelerinde doğrusal olmayan bir regresyon modelidir.

Öncelikle çok ayrıntılı olmayan bir modelin, başlangıç parametresi tahminlerini elde etmenin hızlı bir yolu olduğu ve (2.6) 'in eğri uydurmasının nasıl yapılacağına dair ayrıntılı bir taslak olmadığı vurgulanmalı ve belirtilmelidir. Parametrelerin büyüklükleri belirlendiğinde, bükülme değeri, bükülme süresi ve bağlı büyüme hızının maksimum değerine ulaştığı  $N$  değeri (bu sadece  $\alpha > 1$  olduğunda belirlenebilir ve zıt olabilir) mevcut olabilecek gerçek veriler ile karşılaştırılmalıdır. Her ne kadar aynı sapma değeri teorik olarak örneğin  $\gamma/\alpha$  oranının sabitliğinden ortaya çıksa da sapma zamanı, bu özelliği paylaşan herhangi bir sayıdaki büyüme eğrisi için belirgin şekilde farklı olacaktır. Bu nedenle, hangi parametre değerinin seçileceği konusunda bir karışıklık meydana gelmemelidir.  $\alpha < 1$ ,  $\beta > 0$  (pozitif  $\beta$ , sigmoid büyüme eğrileri için kesin bir şeydir) ve  $\gamma < 1$ , (2.6) 'ya göre olan çözüm, kapsamlı bir şekilde Pearson [29] tarafından tablanmıştır. Tablolar, aşağıdaki ilk parametre tahminleri için bir doğrulama aracı olarak kullanılabilir:

(2.13)'ten

$$\frac{1}{\beta r K^{\alpha-1}} [B_{x_1}(p, q) - B_{x_0}(p, q)] = t \quad (2.61)$$

elde edilir.

Burada  $t$ , popülasyonun, başlangıçtaki  $N_0 = N(0)$  (veya bu konuda başka herhangi bir boyuta) ait belirli bir büyüklüğe ( $N(t)$ ) ulaşması için geçen zamandır ve  $B_{x_1}(p, q)$ ,  $B_{x_0}(p, q)$  tablolarda bulunur. Daha sonra (2.61) 'in sol tarafı, tablo okumaları ile karşılaştırılabilir. Denklem (2.14) yerine kullanılan beta fonksiyon tablolarıyla aynı amaç için kullanılabilir. Bu çalışmada amacımız, birçok önemli büyüme formunu kapsayabilecek bir büyüme formu (2.6) sunmaktır. Birkaç sigmoidal büyüme modelinin ve birkaç temel sigmoidal olmayan modelin üzerinde durduğunu gösterdik. Ayrıca, büyüme oranındaki artışın, daha geleneksel büyüme modelleri tarafından paylaşılmayan bir özellik olan, nüfusun kendisindeki artışı aşan  $\alpha > 1$  değerine sahip bir genelleştirilmiş modeller sınıfı belirledik. Kuşkusuz, literatür de göz önünde bulundurulması gereken büyüme modelleriyle doludur [23]. Burada

sunulmayan ön araştırmalar, Weibull dağılımının [30] alternatif olarak genelleştirilmiş bir lojistik eğri olarak da temsil edilebileceğini gstermiştir. Son olarak, eğer genelleştirilmişse, gerçek verilerin detaylı eğri uydurmalarının yapılması gerekir. Lojistik form uygulanabilir bir modelleme aracı olarak benimsenmelidir.

#### 4. KAYNAKLAR

- [1] Verhulst, PF. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Communications in Mathematical Physics*, 10, 113-126.
- [2] Carlson, T. (1913). Über geschwindigkeit und grösse der hefevermehrung in wärze. *Biochem Z*, 57 313.
- [3] Pearl, R. (1927). The growth of populations. *The Quarterly Review of Biology*, 2(1) 532.
- [4] Pearl, R. (1930). *Introduction of medical biometry and statistics*. Saunders, Philadelphia.
- [5] Morgan, BJT. (1976). Stochastic models of groupings changes. *Advances in Applied Probability*, 8(1) 30.
- [6] Krebs, CJ. (1985). *The Experimental Analysis of Distribution and Abundance*. New York: Harper and Row.
- [7] Fisher, T. C., ve Fry, R. H. (1971). Technical forecasting soc. *Changes*, 3, 75.
- [8] Marchetti, C. ve Nakicenovic, N. (1980). *The dynamics of energy systems and the logistic substitution model*. International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.
- [9] Montroll, EW (1978). Toplumsal dinamikler ve toplumsal güçlerin niceliği. *Ulusal Bilimler Akademisi Bildirileri*, 75(10), 4633-4637.
- [10] Nelder, JA. (1961). The fitting of a generalization of the logistic curve. *Biometrics*, 1, 17 89.
- [11] Abramowitz, M. ve Stegun, IM. (1965). *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover.
- [12] Pearl, R. ve Reed, LJ (1920). 1790'dan beri Amerika Birleşik Devletleri nüfusunun büyüme oranı ve matematiksel temsili hakkında. *Amerika Birleşik Devletleri Ulusal Bilimler Akademisi Bildirileri*, 6(6), 275.
- [13] Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of experimental Botany*, 10(2), 290-301.
- [14] Von Bertalanffy, L. (1938). Organik büyüme için nicel bir teori (büyüme yasaları üzerine araştırmalar. II). *İnsan Biyolojisi*, 10(2), 181-213.
- [15] A.A. Blumberg, Logistic growth rate functions, *J. Theor. Biol.* 21 (1968) 42.
- [16] M.E. Turner, B.A. Blumenstein, J.L. Sebaugh, A generalization of the logistic law of growth, *Biometrics*, 25(1969), 577.
- [17] Turner, ME., Bradley, E., ve Kirk Pruitt, KK. (1976). A theory of growth. *Mathematical Biosciences*, (1), 367.
- [18] Buis, R. (1991). On the generalization of the logistic law of growth. *Acta Biotheoretica*, 39, 185.
- [19] Smith, FE. (1963). Population dynamics in *Daphnia Magna* and a new model for population growth. *Ecology*, 44(4), 651.

- [20] Lotka, AJ. (1956). *Elements of mathematical biology*. New York: Dover.
- [21] Spencer, RP., ve Coulombe, MJ. (1966). Quantitation of hepatic growth and regeneration. *Growth*, 30(3), 277.
- [22] Schnute, J. (1981). A versatile growth model with statistically stable parameters. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 38(9), 1128-1140.
- [23] Zeide, B. (1993). Analysis of growth equations. *Forest Science*, 39(3), 594.
- [24] Birch, C. P. (1999). A new generalized logistic sigmoid growth equation compared with the Richards growth equation. *Annals of Botany*, 83(6), 713-723.
- [25] Heinen, M. (1999). Analytical growth equations and their Genstat 5 equivalents. *NJAS Wageningen Journal of Life Sciences*, 47(1), 67-89.
- [26] Savageau, MA. (1979). Growth of complex systems can be related to the properties of their underlying determinants. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 76(11), 5413-5417.
- [27] Savageau, MA. (1980). Growth equations: A general equation and a survey of special cases. *Mathematical Biosciences*, 48(3-4), 267-278.
- [28] Ratkowsky, D. (1983). *Non-linear regression modeling: a unified practical approach*. New York: Marcel Dekker.
- [29] Pearson, K. (1968). *Tables of the incomplete beta function*. Library Binding, Lubrecht and Cramer.
- [30] Banks, RB. (1994). *Growth and diffusion phenomena*. Berlin: Springer.
- [31] Haefner, JW. (1996). *Modeling biological systems*. ITP.
- [32] McCallum, H. (2000). *Population parameters: Estimation for ecological models*. UK: Blackwell Science.

## ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	İsmail KAYA
Doğum Yeri	Niksar
Doğum Tarihi	09.12.1992
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	05427802321
E-Posta Adresi	ismail.kaya.adu@gmail.com
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Adnan Menderes Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	26.01.2016