



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN MATEMATİKSEL MODELLERİN TAM
ÇÖZÜMLERİNİN ANALİTİK YÖNTEM YARDIMIYLA
ARAŞTIRILMASI**

VOLKAN ÇAKMAK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Volkan ÇAKMAK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

LİNEER OLMAYAN MATEMATİKSEL MODELLERİN TAM ÇÖZÜMLERİNİN ANALİTİK YÖNTEM YARDIMIYLA ARAŞTIRILMASI

VOLKAN ÇAKMAK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 99 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. TOLGA AKTÜRK)

Çözümlerini elde etmek gayet zor olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için Ji-Huan He ve Xu-Hong Wu tarafından 2006 senesinde üstel fonksiyon metodu ortaya konulmuş, yıllar içerisinde birçok denkleme bu metot uygulanarak denklemlerin dalga çözümleri bulunmuştur. Günümüzden görece kısa süre önce de metodun içerdiği kabul fonksiyonunun daha kapsamlı olarak ele alınmasıyla modifiye olmuş son hali yani geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu gün yüzüne çıkmıştır. Bu tez çalışmasında çeşitli bilimsel araştırmalarda karşılaşılan bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere literatürde ilk defa geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu uygulanarak denklemlerin ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca metodun sunduğu çözümlerin fiziksel yapısı da görsellerle sunularak bahsi geçen denklemlere literatürdeki diğer çözüm metotlarının sunduğu çözümler ile benzerlikleri ve farklılıkları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem, Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metot, Dalga Çözümü.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR MATHEMATICAL MODELS BY ANALYTICAL METHOD

VOLKAN ÇAKMAK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 99 PAGES

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. TOLGA AKTÜRK)

The exponential function method was introduced by Ji-Huan He and Xu-Hong Wu in 2006 for nonlinear partial differential equations, whose solutions are very difficult to obtain, and wave solutions of the equations were found by applying this method to many equations over the years. A relatively short time ago, with the acceptance function included in the method being discussed more comprehensively, its final improved form, that is, the modified exponential function method, came to light. In this thesis study, traveling wave solutions of the equations were obtained by applying the modified exponential function method for the first time in the literature to some nonlinear partial differential equations encountered in various scientific research. In addition, the physical structure of the solutions offered by the method is presented with visuals and their similarities and differences with the solutions offered by other solution methods in the literature to the mentioned equations are investigated.

Keywords: Nonlinear Partial Differential Equation, Modified Exponential Function Method, Wave Solution.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalıőmanın yürütölmesi ve yazımı esnasında her türlü bilgi birikimini ve yardımını paylaőan, ziyadesiyle güven aőılayarak manevi desteklerini ve hoőgörüsünü esirgemeyen, iyi niyetini her zaman hissettiğim danıőman hocam Sayın Doç. Dr. Tolga AKTÜRK'e çok teşekkür ederim.

Aynı zamanda desteklerini her zaman hissettiğim bu hayattaki yol arkadaőım, sevgili eőim Nurgöl ÇAKMAK ve varlığıyla ümitleri canlı tutan güneőim, oğlum Yunus Alp ÇAKMAK'a minnettarlığımı belirtmek isterim.

Ayrıca bu tezi, tezin yazım sürecinde aramızdan ayrılan, sevgiyle ve özlemle andığım, melek annem Senem ÇAKMAK'a armağan ederim. Ruhu őad olsun.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VIII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
3. MATERYAL ve YÖNTEM	25
3.1 Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu.....	25
3.2 Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu.....	28
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	30
4.1 Doubly Dispersive Denklemi.....	30
4.1.1 Geliştirilmiş üstel fonksiyon metoduyla çözüm.....	30
4.1.2 Genelleştirilmiş Kudryashov metoduyla çözüm.....	45
4.2 (2+1) Boyutlu İntegro-Differential Jaulent-Miodek Evolution Denklemi.....	55
4.2.1 Geliştirilmiş üstel fonksiyon metoduyla çözüm.....	55
4.2.2 Genelleştirilmiş Kudryashov metoduyla çözüm.....	75
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	82
6. KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	89

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Hareket eden bir araç	7
Şekil 2.2 Eğri altında kalan alan	10
Şekil 2.3 Eğri altında kalan alandaki değişim.....	10
Şekil 2.4 Genel dalga yapısı.....	19
Şekil 2.5 Tekil dalga hareketi	21
Şekil 2.6 Solitonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti	22
Şekil 2.7 Periyodik fonksiyonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti	22
Şekil 2.8 Kink dalganın üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti	23
Şekil 2.9 Peakonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti	23
Şekil 2.10 Cusponun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti.....	23
Şekil 2.11 Compactonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti	24
Şekil 4.1 (4.1.9) çözümünün grafikleri	34
Şekil 4.2 (4.1.10) çözümünün grafikleri	35
Şekil 4.3 (4.1.11) çözümünün grafikleri	36
Şekil 4.4 (4.1.12) çözümünün grafikleri	37
Şekil 4.5 (4.1.13) çözümünün grafikleri	38
Şekil 4.6 (4.1.15) çözümünün grafikleri	40
Şekil 4.7 (4.1.16) çözümünün grafikleri	41
Şekil 4.8 (4.1.17) çözümünün grafikleri	42
Şekil 4.9 (4.1.18) çözümünün grafikleri	43
Şekil 4.10 (4.1.19) çözümünün grafikleri	44
Şekil 4.11 (4.1.24) çözümünün grafikleri	47
Şekil 4.12 (4.1.25) çözümünün grafikleri	48
Şekil 4.13 (4.1.28) çözümünün grafikleri	49
Şekil 4.14 (4.1.29) çözümünün grafikleri	50
Şekil 4.15 (4.1.32) çözümünün grafikleri	51
Şekil 4.16 (4.1.33) çözümünün grafikleri	52
Şekil 4.17 (4.1.36) çözümünün grafikleri	53
Şekil 4.18 (4.1.37) çözümünün grafikleri	54
Şekil 4.19 (4.2.9) çözümünün grafikleri	58
Şekil 4.20 (4.2.10) çözümünün grafikleri	60
Şekil 4.21 (4.2.11) çözümünün grafikleri	61
Şekil 4.22 (4.2.12) çözümünün grafikleri	62
Şekil 4.23 (4.2.13) çözümünün grafikleri	63
Şekil 4.24 (4.2.15) çözümünün grafikleri	65
Şekil 4.25 (4.2.16) çözümünün grafikleri	66
Şekil 4.26 (4.2.17) çözümünün grafikleri	67
Şekil 4.27 (4.2.18) çözümünün grafikleri	68
Şekil 4.28 (4.2.19) çözümünün grafikleri	69
Şekil 4.29 (4.2.21) çözümünün grafikleri	71
Şekil 4.30 (4.2.22) çözümünün grafikleri	72
Şekil 4.31 (4.2.23) çözümünün grafikleri	73
Şekil 4.32 (4.2.24) çözümünün grafikleri	74
Şekil 4.33 (4.2.25) çözümünün grafikleri	75

Şekil 4.34 (4.2.29) çözümünün grafikleri	77
Şekil 4.35 (4.2.30) çözümünün grafikleri	78
Şekil 4.36 (4.2.33) çözümünün grafikleri	80
Şekil 4.37 (4.2.34) çözümünün grafikleri	81

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

Add	:	Adi Diferansiyel Denklem
GKM	:	Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu
GÜFM	:	Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu
JM	:	(2+1) Boyutlu Jaulent ve Miodek Denklemi
Kdd	:	Kısmi Diferansiyel Denklem
KdV	:	Korteweg ve de Vries
Lokdd	:	Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem

1. GİRİŞ

İnsanlık, çevresindeki olaylara, olgulara, varlıklara ve bedeninde olanlara her daim meraklı gözlerle ve sorgulayarak yaklaşmış; evrende ve bilhassa doğada işleyen mekanizmaların yapısını, kurallarını, dengeleri ve örüntüleri anlama ve bunlardan yeni anlamlar çıkarma amacıyla sorular sormuş; bu soruların çözümlerini ararken yeni sorularla karşılaşmış; bu silsileden elde ettiği çıkarımları, yöntemleri ve bilgi birikimini kendi beklentileri ve hayalleri üzerine kullanma gayreti içinde olmuştur. Bu amaç doğrultusunda insan, etrafını sarmalayan fenomenleri daha iyi kavrayabilmek ve farkındalığını artırmak için bazen deneyler ve gözlemlerden elde ettiği veya asırlar içerisinde biriktirdiği verilerden faydalanmış, bazen de doğanın sadece meraklı zihinlere alelade hediye ettiği bilgileri kullanarak tanıdığı yapılara benzetme, kıyaslama ve ölçme ile modelleme yoluna gitmiştir. İnsan bu modellemeyi zihninde daha derli toplu yapabilmek için hem soyut kavramları daha elle tutulur hale getirebilen hem de bilginin gelecek nesillere daha iyi aktarılmasına olanak sağlayan semboller geliştirmiş, nihayetinde evrendeki sistemlerin sarsılmaz kurallarının farkındalığıyla kendisi de içinde sarsılmaz kurallar barındıran bir dili yani matematiği hem icat hem de keşfetmiştir.

Matematik, olayların veya sistemlerin belirli kurallarla korunan düzenini sembollerle modellemeye ve bu modellerden çıkarımlar yapabilmeye imkan sağlar. Bu çıkarımlar sayesinde insan, doğada kendiliğinden var olmayan ama insanın kendi zihin dünyasında suretleri belirenleri gerçek dünyada inşa edebilme veya doğada var olup da kendisinde olmayanları taklit edebilme imkanı bulmuştur. Bu bağlamda matematiksel modelleme; insan büyük bir uzayın belirsizliklerinde kendi yapısal kısıtlarıyla salınırken güven içinde ayağını basabileceği, tutunabileceği, sonraki adımlarını nasıl, ne zaman, nereye, ne kadar atacağı kararını optimum şekilde verebileceği ve günü geldiğinde oradan başka ufuklara sıçramak için üzerine mekiklerini inşa edebileceği bir platform, bir zemin oluşturmaktadır. Ancak bu modellerin kuruluşu her zaman yeterli seviyede tatmin edici ve kolay olmamaktadır. O sebeptendir ki olguları mümkün olan en iyi şekilde görüp, kavrayıp modelleyebilen bilim insanlarının adları hafızalardan silinmemeyi ziyadesiyle hak eder.

Herakleitos'un da dediği gibi değişmeyen tek şey değişimin kendisi olduğu için evrensel olaylar ve olgular da bu değişim nehrinde akıp gitmektedir. Değişimin getirdiği belirsizliklerin doğurduğu kaygılardan sıyrılmak isteyen insanın, her ne kadar olgu ve olayları an ve an inceleyebilmek için zamanı durduramasa, incelediğinin her noktasına her bileşenine hakim olamasa bile bu olayları ve olguları modellemede değişimi hesaba katma zorunluluğu vardır. Bu zorunluluk insanın 'daha iyi' olarak kabullenebileceği sonuçları elde etme arzusundan kaynaklanır. Bu arzunun kaynağı belki *Platon*'un idealarına olan arayışın hala devam ediyor olması, belki de düşünebilme kapasitesi ile kaygı arasındaki *Ouroboros* vari ilişkiden mütevellit garanticilikten vazgeçilememesidir.

Evrensel fenomenleri kavrama niyetiyle bu fenomenlerin değişkenlerinin yanı sıra değişkenlerin anlık değişimleri de hesaba katılarak kurulan matematiksel modeller literatürde diferansiyel denklemler olarak adlandırılır. Her türlü diferansiyel denklemin kurulumu ve çözümü bilim alanlarında büyük bir öneme sahiptir. Kurulan modellerle daha doğru, daha kapsamlı, daha tutarlı sonuçlar ve çıktılar elde etme gayesi, olguyu oluşturan birden fazla etkenin, boyutun, değişkenin hesaba katılmasını gerektirir ki bu gereksinimi karşılayan matematiksel modellere 'kısmi diferansiyel denklem' denir. Kısmi diferansiyel denklemlerin bileşenlerinin derecelerinin 1'den farklı oluşu veya bu bileşenlerin birbirleriyle çarpılması, bölünmesi ve hatta bu bileşenlerin denklem içerisinde bilindik matematiksel fonksiyonlar içinde yer alması lineer olmamayı doğurur. Daha iyiye ulaşma çabası sebebiyle denklemlerin boyutunun ve derecesinin artması çözüme ulaşmayı daha da zorlaştırmaktadır lakin lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem(lokd) denilen bu modellerin çözümlerine ulaşmak, özellikle fizik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde karşımıza çıkan daha kompleks fenomenlerin analizi ve sentezi açısından çok önemli bir yere sahiptir. Bu tezin gayesi de bazı lineer olmayan matematiksel modellere tam çözümler araştırmaktır.

Lokd'lerin hepsini her koşulda çözebilecek kemikleşmiş bir algoritma olmasa da çeşitli yöntemler sayesinde, analitik ve tam çözüm olmak üzere iki temel çözüme ulaşılabilir. Bu bağlamda lokd'lerin çözümlerine ulaşmak için yıllar içerisinde Tanh-fonksiyon metodu (Malfliet, 1992; Wazwaz, 2004), Sine-cosine metodu (Yan, 1996; Wazwaz, 2004), Jacobi eliptik fonksiyon genişleme metodu (Liu ve ark.,2001),

Adomian ayrışma metodu (Adomian, 1988), homotopi pertürbasyon metodu (He, 1999), üstel fonksiyon metodu (He ve Wu, 2006; Javeed, 2020), Kudryashov metodu (Kudryashov, 2012), sine-Gordon genişleme metodu (Yel, 2020), G'/G genişleme metodu (Li ve Zhang, 2010), ilk integral metodu (Matinfar ve ark., 2015), F-genişleme metodu (Zhou ve ark., 2003) gibi birçok metot ortaya konulmuş ve bu metotların çoğu günümüze kadar gelişim süreçlerinden geçmiştir. Bu metotlardan bazıları çözümlere analitik olarak yaklaşmakta, bazılarıysa sayısal olarak yaklaşmaktadır. Günümüzde gelişmiş bilgisayar performansları ve sembolik hesaplama yapan Mathematica, Matlab, Maple vb. gibi yazılımlar sayısal çözümleri analitik çözümlere göre biraz daha kolaylaştırırsa da her iki çözüme de katkıları bulunmaktadır.

Bu metotların bazılarında özellikle içinde titreşim ve dalga barındıran fiziksel, kimyasal, biyolojik, jeolojik, atom altı vs... fenomenlerin daha anlaşılabilir hale gelmesi için dalga kavramından matematiksel model olarak faydalanılır. Bu kavram, denklemin değişkenleri arasında dalga benzeri bir bağıntı olduğunu varsayarak denklemin zorluk derecesini düşürür ve bu sayede de denklemin ilerleyen dalga çözümleri denilen çözümlerin elde edilmesinde kolaylık sağlamış olur.

Bahsedilen metotlardan üstel fonksiyon metodu Ji-Huan He ve Xu-Hong Wu tarafından 2006 yılında ortaya konulmuştur (He ve Wu, 2006). Bu çalışmada ise lokdd'lerin betimlediği olayları kavrama niyetiyle araştırılan dalga çözümlerini ve onların fiziksel yapısını incelemek için kullanılan metot, üstel fonksiyon metodunun kabul ettiği çözüm fonksiyonunun içindeki önemli bir yapının yıllar içerisinde daha geniş kapsamlı versiyonuyla modifiye edilmiş hali olan, geliştirilmiş üstel fonksiyon metodudur. Görece literatürde yeni olan geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu lokdd'i dalga dönüşümü yardımıyla lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürür ve bu denklemin çözümünün belirli alt ailelere sahip üstel bir yapıda olduğunu kabul eder.

Bu çalışmada; lokdd'e örnek olarak bir boyutlu dalga denkleminin genellemesi Cauchy probleminin özel bir hali olan ve lineer olmayan dinamik esneklikteki boyuna dalgalar için lineer olmayan iki yönlü uzun dalga modellerinden türetilmiş Doubly Dispersive denklemi (Manar ve ark., 2022; Ahmed ve ark., 2022) ile enerjiye bağlı Schrödinger potansiyelleri ile ilişkili (2+1) boyutlu İntegro-Differential Jaulent-Miodek Evolution denklemi (Kaewta ve ark.,2020) ele alınmıştır. Doubly Dispersive

denklemler lineer olmayan elastik katılarda dalga yayılımını çalışma açısından önemlidir zira bu denklemler tek gerinim dalgaları, sismoloji, akustik, uzun mesafe enerji transferi, optik fiberler, boru hatları sağlamlığı gibi çalışmalarda kendisine yer bulmaktadır. Jaulent-Miodek denklemlerine ise yoğun madde fiziği, akışkanlar dinamiği ve optik gibi fizik biliminin birçok alt dalında karşılaşılmaktadır.

Birden fazla metotla çözümler sunulmuş bu denklemlere literatür taramasıyla ulaşılabilen açık kaynaklara göre ‘literatürde ilk defa’ bu tezde geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ile tam çözüm araştırması yapılmıştır. Çalışmada her bir denklem için elde edilen ilerleyen dalga çözümlerinin fiziksel yapısını görünür hale getirmek için iki boyutlu, üç boyutlu, dış hat ve yoğunluk grafikleri sunulmuş, dalga tipleri incelenmiş. Metodun kullanılabilirliğini, zorluklarını, geçerliliğini ve başarısını incelemek namına da aynı denklemlerin, Nikolay A. Kudryashov tarafından literatüre kazandırılıp ardından Pandır ve ark., (2015) tarafından geliştirilen, genelleştirilmiş Kudryashov metot yardımıyla ilerleyen dalga çözümleri grafikleriyle birlikte elde edilip sunulmuştur. Sonuç kısmında ise bu çalışmada kullanılan metotların sunduğu çözümler ile literatürdeki diğer metotların sunduğu çözümlerin benzerlikleri ve farklılıkları açığa çıkarılmaya çalışılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Konum ve zaman gibi iki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi belirli koşulları sağlayacak şekilde ortaya koyan matematiksel bağıntıya fonksiyon denir. Misalen bir hareketlinin konumu x için t ; geçen zaman, V ; hareketlinin birim zamanda aldığı yol yani hız olmak üzere $x = V \cdot t$ gibi bir dengeyin olduğu gözlemlenir. Burada fark edilecektir ki zamanda yaşanan en ufak değişim, hız sıfır değilken konumda da bir değişim meydana getirecektir. Yani konum, zaman ve hız arasında birbirini tamamlayan bir ilişki mevcuttur. İşte bu konum ve zaman ilişkisini zaman değişkenine göre modellemek için bu iki değişken arasında $x = f(t) = V \cdot t$ şeklinde bir fonksiyon düşünülebilir.

Doğal bir olgu; bazen olgunun bileşenlerinin birbiriyle ilişkisinin matematiksel işlemlerle birebir örtüşmesi sebebiyle aşikâr olan fonksiyon ile, bazen verilerin analitik olarak ortaya koyduğu görsellere de dayanarak yapılacak nümerik yaklaşımlarla mevcut verileri optimum sağlayan varsayımsal olarak seçilmiş bir fonksiyon ile, bazen de o olgunun bir değişkeninin başka bir değişkenine göre değişimini de hesaba katarak sunan bir matematiksel modelin çözümlenmesiyle elde edilen fonksiyon ile matematiksel olarak tanımlanmaya çalışılır.

İnsanın bir olgunun özündeki düzeni, sistemi, dengeyi tüm kurallarıyla tarif edecek fonksiyona dair arayışının, giriş bölümünde de bahsedildiği gibi insanın olguları anlayabilme, kavrayabilme, öngörebilme ve belki birazda bu dünyada bir iz bırakarak ölümsüzleşme dürtüsüyle alakalı olduğu söylenebilir. *Archimedes*'i katledilme pahasına da olsa çözmeye çalıştığının başından ayrılmasını engelleyen de bütün bu duygu ve düşüncelerdir.

Esasında çoğu olgunun özüne dair pür bilgiye direk sahip olunamadığından veya fiziksel imkânsızlıklardan, olgu maalesef belli bir fonksiyonla modellenememekte yahut model olarak seçilen fonksiyon olguyu tam manasıyla tarif edememektedir. Yine de değişkenler arasındaki ilişki aşikâr olmadığında olgunun bir değişkeninin başka bir değişkenine göre değişimini veya değişkenin büyüklüğünü gözlemleyerek olgunun olası davranışlarına yönelik öngörüler ve yaklaşımlarda bulunabilmektedir. İnsanlık bugüne kadar bu yaklaşımlarla ve öngörülerle bile oldukça fazla kazanım elde etmiştir, edecektir. Yani umut hep vardır, olmalıdır!

Olguların özüne dair ulaşılmazlığı birkaç örnekle tarif etmek gerekirse, mesela bir eğrinin teğetinin eğimini elde etmek için teğeti tam olarak çizmenin fiziksel olarak imkânı yoktur zira boyutsuz olan bir noktayı kalınlığı olmayan bir doğru çizerek isabet ettirmek imkânsızdır. Aynı şekilde önceki sayfadaki eşitlik hız kavramını anlamak için ele alındığında, hız; yer değiştirmenin o esnada geçen zamana oranı olacağından, zamana bağlı hız fonksiyonu $V(t) = \frac{f(t)}{t}$ şeklinde modellenebilir lakin bu modelle hareketlinin hızı konusunda yalnızca ortalama bir hüküm verilebilir. Herhangi bir ‘andaki hız’ için bu hesaplama yetersizlik gösterecektir zira anda geçen bir zaman dilimi yoktur. Bu durum hareket eden bir aracın çekilmiş fotoğrafına bakarak yorum yapmaya çalışmak gibidir. Fotoğraf makinesi bir anın görüntüsünü yakalamıştır ve o görüntüye bakılırsa araç duruyordur yani hızı sıfırdır lakin gelin görün ki aracın hareket ettiği bilgisi yadsınamaz bir gerçektir ve öyleyse her anda da hızı olmalıdır.

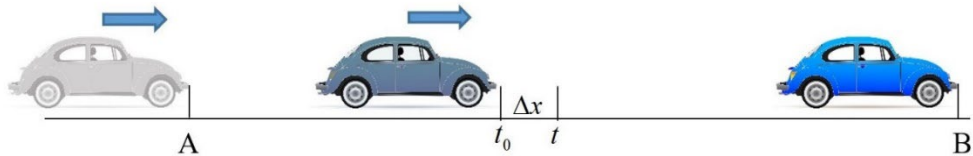
Burada *Elealı Zeno* gibi ‘aslında hareket yani değişim bir illüzyondur’ şeklinde düşünceye kapılırsa kendi gözlem yeteneğimizin, kavramsal birikimlerimizin yetersizliklerinin ve fiziksel kısıtlarımızın arkasına sığınılmış olunur ki buna delil olsun diye saniyede 24 kare olacak şekilde kesikli hareketten ibaret olan video görüntüsünü bile insanın sürekli olarak algıladığı öne sürülebilir. İşin aslı, insan zamanın akışı ve hareket gibi sürekli kavramları zihinsel açıdan tam olarak içselleştiremez. Fakat süreklilik; limit ve sonsuzluk kavramları yardımıyla arzu edilen miktarda ve boyutta seçilebilecek küçük parçalara bölünerek kesiklilikle eş hale getirilebilir ve böylece matematik; *Akhilleus*’un hiçbir zaman kaplumbağayı geçemeyeceğini iddia eden paradoksun zihnimizdeki yolları düğümlemesini engeller. *Zeno* uzay-zamanın sürekli olduğunu yani sonsuza kadar bölünebileceğini varsaymış, mesafeyi ve zamanı sonsuz küçüklükte parçalara bölerse nihayetinde mesafenin sıfır olacağını yani hareketin hiç gerçekleşmeyeceğini, eğer hareket gerçekleşebiliyorsa süreklilik varsayımının hatalı olacağını, bunun da bir çelişki doğuracağını ‘olmayana ergi’(reductio ad absurdum) yaklaşımıyla ileri sürmüştür. Burada *Zeno*’nun hatası mevzuya hız kavramı değil mesafe kavramıyla yaklaşmasıydı ayrıca eklemek gerekir ki olmayana ergi yaklaşımı ‘binary’ yani sadece doğru ya da yanlış hüküm bildiren durumlar için mantıklı bir yaklaşımdır.

Evrende birçok olay ve olgunun fiziksel sınırları vardır. Örneğin ilk gün 100 km hareket edip her gün önceki günün yarısı kadar hareket etme rutiniyle devam eden bir kişi asla 201. km'yi göremeyecektir. Bu tarz durumları algılamamızı sağlayan da, paradoksları etkisizleştiren de 'limit' kavramıdır.

Yine bu değişim aralığını sürekli küçültme, küçük parçalara bölme ve limit kavramı sayesinde önceki sayfada bahsi geçen 'teğetin eğimi' ve 'andaki hız' değerine olabilecek en iyi yaklaşımda bulunabilir. Benzetme yapmak gerekirse bu durum boyutları sabit olan bir ekranın sunduğu görüntüyü gerçeğe en yakın yapmak için piksellerin boyutunu durmadan küçültüp miktarını artırmak gibidir. Belki insan pikselleri fiziksel olarak arzu ettiği kadar küçük inşa edemeyecektir lakin bunu zihinsel olarak gerçekleştirmesinin önünde ise hiçbir engel yoktur. Sonsuz küçük parçalara bölme yaklaşımını ilk Kepler kullanmış, sonsuz küçük bir reel sayı olamayacağı sorununu ortadan kaldırmak isteyen matematikçiler de yine limit kavramından faydalanmıştır.

İnsanın kolayca içselleştiremediği hareket ise evrenin olmazsa olmazıdır ve her şey akar (*Heraklitos*). Zaman da bu her şey kümesine aittir. Hareket varsa değişim kaçınılmazdır çünkü devinimler ve hareket yeni olasılık uzayları doğurur ve bunun yanı sıra tekrar belirtmek gerekir ki değişim zamanın farklı anları arasında gerçekleşir. Bu bağlamda hız için önceki sayfada verilen modelin yetersiz kaldığı durumlardan arınmak elzemdir.

O sebeple hareketi irdelemek namına A noktasında harekete başlayıp B noktasında hareketini bitiren bir araç ele alınsın. A ve B arasındaki mesafe, geçen zamana bölüldüğünde bu yoldaki ortalama hız elde edilir fakat aracın yolculuğu boyunca her an o hızda hareket ettiği söylenemez. Merak uyandıran; 'herhangi bir t_0 anında aracın hızı nedir?' sorusudur.



Şekil 2.1 Hareket eden bir araç

Bu değere olabilecek en iyi yaklaşımı türev yapar. Türev, bağımlı değişkendeki değişimin bağımsız değişkendeki değişime oranını bağımsız değişkendeki değişimi sıfırda değil ama sıfıra sürekli yaklaşırken hesaplar.

Zamana bağlı konum fonksiyonu $f(t) = x$ iken t_0 anı ile keyfi bir t anı arasında katedilen mesafe $f(t) - f(t_0) = \Delta x$, geçen zaman $t - t_0 = \Delta t$ ve bu anlar arasındaki ortalama hız;

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

olarak hesaplanır. Burada Δt ; bağımsız değişkendeki değişimi, Δx ; bağımlı değişkendeki değişimi sembolize eder.

Keyfi değişken t ; t_0 değerine olabildiğince çok yaklaştıkça, Δt aralığının boyutu da küçülecektir ki bu durumda, tıpkı pikselleri daha da küçülterek ekran görüntüsünü gerçeğe en yakın hale getirmek gibi, t_0 anındaki hız hakkındaki bilgi de gerçeğe yakınsayacaktır. O sebeple; aynı devirlerde yaşamış Leibniz ve Newton tarafından birbirlerinden habersiz olarak ortaya konulduğu idda edilen

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

hesabı tam olarak t_0 anındaki hız olmasa da o andaki hız değerini hesaplamak için en iyi yaklaşım olacaktır. Bu yaklaşıma konum fonksiyonunun t_0 noktasındaki(anındaki) birinci türevi denir ve

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0),$$

şeklinde ifade edilir. $t - t_0 = \Delta t$ ve $t \rightarrow t_0$ iken sürekli küçülen zaman aralığında

$\Delta t \rightarrow 0$ ve $\Delta x \rightarrow 0$ olur ve sürekli olarak anlık değişim yaşanacağını belirtmek namına $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ oranı, $\frac{dx}{dt}$ şeklinde ifade edilir. Nihayetinde

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad (*)$$

hareketlinin herhangi bir t anındaki hızını konum fonksiyonu üzerinden mümkün olan en doğru şekilde hesaplamayı sağlayacak aracı sunar.

Bu, aralığı sürekli küçültme mantığı özellikle mühendislik çalışmalarında belirli hata payları çerçevesinde nümerik hesaplamalarla türev hesabı için kullanılabilir. (*) denkleminin türev hesabı ise pür matematiğin kendi evrenindeki teorik hesaplamalar için kullanılır. Bu nümerik ve analitik hesaplamalar arasındaki ilişki, deneysel olasılık değerinin deney sayısı arttıkça teorik olasılık değerine yaklaşması gibidir.

Sonuç olarak konumun zamana göre anlık değişim oranı yani konum fonksiyonunun birinci türevi, zamana bağlı hız fonksiyonunu verir.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t).$$

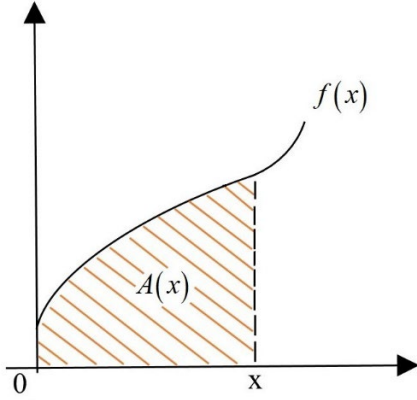
Tıpkı konum gibi hız da zaman içerisinde değişimler göstermektedir. Bu değişimi analiz edebilmek için de benzer mantıkla hız fonksiyonunun zamana göre anlık değişim oranı yani hızın birinci, yolun ikinci türevi alınarak zamana bağlı ivme fonksiyonu elde edilir.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d\left(\frac{df(t)}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} = f''(t).$$

Bu bağlamda ivmesinin a olduğu bilinen bir hareketlinin zamana bağlı yol fonksiyonu elde etmek istenirse $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ denklemini çözmek gerekir ki işte bu tarz değişimin hesaba katıldığı denklemlere bu tezin de membaı olan diferansiyel denklemler denir.

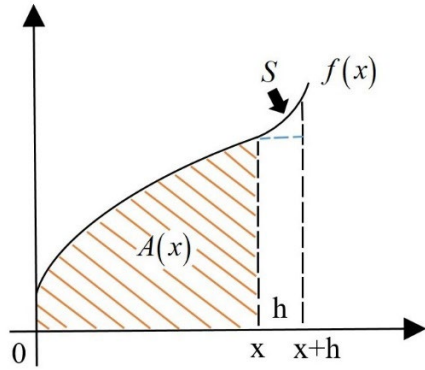
Olguları değişimleriyle birlikte modelleyen bu denklemlerin çözümleri, en başta da anlatıldığı gibi olgunun kendisini tarif eden bir fonksiyon sunar. Çözüm fonksiyonu denilen bu fonksiyonu bulma aşamasında ise ilk akla gelen eğer mümkünse antitürev uygulamaktır.

Burada antitürev için bir parantez açmak gerekir. Antitürev, yani belirsiz integral hesabı $f'(x) = F(x)$ iken $\int F(x)dx = f(x) + c$ şeklindedir. Bu hesaplamamızın mantığını anlamak için bir f eğrisi altında kalan belirli bölgenin alan hesabı ele alınabilir.



$f(x)$ eğrisi altında kalan alan, x değişkenine bağlı $A(x)$ fonksiyonu ile tanımlansın.

Şekil 2.2 Eğri altında kalan alan



Yandaki eğrinin altında kalan alanın x sınırı h kadar ötelendiğinde alanda küçük bir değişim olur.

Şekil 2.3 Eğri altında kalan alandaki değişim

Bu değişim, sağ tarafta oluşan dikdörtgen ile onun üstündeki üçgenimsi S alanının toplamı kadardır. $A(x+h) = A(x) + h \cdot f(x) + S$ olduğundan, alandaki değişim; $A(x+h) - A(x) = h \cdot f(x) + S$ şeklinde tarif edilebilir. Bu denklemin her iki tarafı, alandaki değişimin sınırdaki değişime oranını görünür hale getirmek için $h \neq 0$ 'a bölünürse eşitlik bozulmaz. Değişimi mümkün olabildiğince küçük yapmak için h sifira yaklaştırıldığında;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(x) + S}{h},$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafının $A(x)$ fonksiyonunun türevi olduğu aşikârdır. Sağ tarafta cebirsel işlemler yapıldığıdaysa $A'(x) = f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S}{h}$ elde edilir. Burada $h \rightarrow 0$ iken f eğrisi gitgide bir doğruya benzemeye başlayacağından S alanı da bir dik üçgene dönüşmeye başlar. Bu dik üçgenin alanı;

$$S = \frac{f(x+h) - f(x)}{2} \cdot h,$$

olur. Hâlihazırda

$$A'(x) = f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{2h} \cdot h,$$

olur ki buradan

$$A'(x) = f(x),$$

elde edilir. Böylece anlaşılır ki $f(x)$ fonksiyonu; kendi eğrisi, x -ekseni, y -ekseni ve x değişkeniyle sınırlı bölgenin alan fonksiyonunun türevine eşittir. $f(x)$ eğrisi ve belirli sınırlar arasında kalan alan, o alanın içinde yine istenildiği kadar küçük seçilebilen veya sürekli küçülebilen enlere sahip ve yüksekliği $f(x)$ olan dikdörtgen dilimlerinin alanları toplamı yani belirli integral ile hesaplanabildiğinden $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ eşitliği de geçerli olacaktır. Bu durumda

$$A'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x),$$

elde edilir ki bu 'kalkülüsün temel teoremi'dir. Velhasıl buradan, bir fonksiyona belirsiz integral uygulanarak onun hangi fonksiyonun türevi olduğu bulunabilir yani belirsiz integralin türevi verilmiş bir fonksiyonu bulma işlemi olduğu anlaşılır ki o sebeple de antitürev denir. Ayrıca belirli integralin fonksiyon eğrisi altındaki alan değerini sunarak fonksiyonun büyüklüğü hakkında bilgi sağladığını da belirtmek gerekir.

Nihayetinde bütün bu bilgilerle resmin bütününe bakılacak olursa, fonksiyon, değişkenler arasındaki ilişki olarak kabul edildiğinde, bu ilişkideki değişimi fonksiyonun türevi, ilişkinin büyüklüğünü ise fonksiyonun integrali açığa çıkarır.

Buradan itibaren diferansiyel denklemlere çözüm fonksiyonu arayışında antitürev kullanımına örneklendirmek niyetiyle, yeryüzüne düşen bir nesne deneyi ele

alınabilir. Düşen nesnenin t anındaki ivmesi olan a ; $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ diferansiyel denklemi

ile modellenerek bu denklemin çözümüne geçilecek olunursa denklemin her iki

tarafına bir kez t 'ye göre antitürev (belirsiz integral) $\int adt = \int f''(t)dt$

uygulandığında; $at + c = f'(t)$ yani t anındaki hız fonksiyonu elde edilir zira hızın

türevi ivme olacağına ivmenin belirsiz integrali de hızı verecektir. Burada $t = 0$

anında nesnenin hızı ilk hız olacağından c 'nin nesnenin ilk hızı olduğu düşünülebilir.

Devamında oluşan bu $at + c = f'(t)$ diferansiyel denkleminde tekrar t ye göre antitürev

$\int (at + c)dt = \int f'(t)dt$ uygulanırsa, çözüm olarak $\frac{1}{2}at^2 + ct + b = f(t)$, yani zamana

bağlı konum fonksiyonu elde edilir. Düşen nesne deneyine göre bu denklem nesnenin

t anındaki yerden yüksekliğini verir. Yine $t = 0$ anı ilk yüksekliği vereceğinden b ;

nesnenin düşmeye başladığı yüksekliği sunar. Böylece düşen bir nesnenin herhangi bir

andaki konumunu genel olarak modellemek için $a = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ diferansiyel denkleminin

çözümü olan $\frac{1}{2}at^2 + ct + b = f(t)$ fonksiyonu elde edilmiş olur. Bu çözüm genel

çözümdür. Eğer nesnenin ivmesi, ilk hızı, ilk yüksekliği yani başlangıç koşulları

biliniyor olsa, o şartlar altındaki nesnenin herhangi bir anda yerden ne kadar yüksekte

olduğunu veren fonksiyon yani özel çözüm elde edilmiş olur.

İşte bu tarz denklemlerin ve çözümlerinin insanlığa sunduğu faydaları daha

görünür hale getirmek amacıyla literatürdeki birçok diferansiyel denklemden sadece

biri olan yukarıdaki örnek denkleme daha derinlemesine yaklaşırsa, bu diferansiyel

denklemin sayesinde, hava sürtünmesinin olmadığı bir ortamda yüksekliği ve ilk hızı

bilinen düşen nesne için bir deney düzeneği hazırlanıp nesnenin yere ne kadar zamanda

düştüğü gözlemlenerek dünyanın yerçekimi ivmesi hesaplanabilir. Böylece mesela

uzaya fırlatılan bir mekik veya eğik atışla fırlatılan bir nesne gibi fiziksel olaylarda hız vektörüne her an etki eden bileşen en doğru şekilde elde edilmiş olunur. Bu sayede de birçok kaynak ve zaman harcanarak uzaya gönderilecek uydu yörüngesine kayıpsız varabilir, fırlatılan bir top mermisi zarar vermemesi gereken yerlere düşmez ve bunun gibi hayata dair birçok eylem en verimli şekilde gerçekleştirilebilir. Diferansiyel denklemler insanlık için bu kadar elzem bilgilerin gün yüzüne çıkmasını sağlamada daima başrolü oynar.

Tanım 2.1: Bağımsız değişken ile bu değişkene bağlı $y = f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun bağımsız değişkene göre çeşitli mertebelerden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklemin genel hali $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ile ifade edilir.

Genellikle bir diferansiyel denkleme öncelikle analitik olarak çözüm elde edilerek bu çözüm sayesinde denklemin betimlediği doğa olayını anlama ve çeşitli hesaplar yapma arzusunda olunur fakat bazı tipteki diferansiyel denklemlere her durumda geçerli olacak bir çözüm algoritması yani analitik çözüm bulmak çoğu zaman o kadar kolay değildir. O sebeple de bazı durumlarda analitik çözüm kısmı atlanıp, anlama ve hesaplama kısmına geçilebilir. Örneğin diferansiyel denklemlerle tarif edilmiş bir fiziksel olay için başlangıç şartları, sınır şartları ve deney çıktıları denklemin değişkenlerinin alabileceği değerleri sunar, bu veriler analitik düzlem üzerine yerleştirildiğinde oluşan grafik veya vektör alanları, nümerik yöntemler yardımıyla çözüm fonksiyonu hakkında yorum yapılabilmesine hatta hesaplanabilir hata paylarıyla fonksiyon uydurulmasına olanak sağlar. Nümerik yöntemler ve bilgisayar yazılımları ile diferansiyel denklemlere çözümler elde etme yaklaşımı, mühendislik bilimlerinde oldukça fazla tercih edilir.

Diğer taraftan diferansiyel denklemlere analitik çözümler ve algoritmalar elde etmek için bu denklemler sınıflandırılmıştır ki bir düzen dâhilinde ilerlenebilsin. Bu sınıflar; değişkenlerine göre, mertebesine göre, derecesine göre ve katsayılarına göre olacak şekilde belirlenmiştir.

Değişkenlerine göre diferansiyel denklemler adi ve kısmi olarak ikiye ayrılır.

Tanım 2.2: Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken bir tek bağımsız değişkenin fonksiyonu ise buna adi diferansiyel denklem (add) denir.

Bunlara örnek olarak serbest düşüş, bir sarkacın açısal hızı, cismin soğuması, bileşik faiz, karışım problemleri düşünülebilir. Mesela bir popülasyonun nüfus artış hızı; o popülasyonun büyüklüğüyle orantılı olacağı gerçeğinden yararlanılarak

$$\frac{dp(t)}{dt} = k \cdot p(t)$$

add'i ile modellenir. Add'lerin çözümleri bir eğri ailesine karşılık gelir. Bu eğri ailesine diferansiyel denklemin integral eğrileri denir.

Tanım 2.3: Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken birden fazla bağımsız değişkenin bir fonksiyonu ve bu fonksiyon ile fonksiyonun bağımsız değişkenlerine göre kısmi türevleri denklemde mevcut ise bu denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem (kdd) denir. Örneğin $f(x, y) = z$ iken kdd, $F(x, y, z, z_x, z_y, z_z, z_{xx}, z_{xy}, \dots) = 0$ şeklinde ifade edilir. Bu denklemlerin çözümleri ise bir yüzey ailesine karşılık gelir.

Fizik, mühendislik, biyoloji, kimya, kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği, elektromanyetizma, izafiyet teorisi, aerodinamik, jeofizik, oşinografi, ısı transferi, akustik, optik, elastisite vs. gibi çok fazla alanda birden fazla değişkeni hesaba katan çok çeşitli kdd ortaya konulmuştur. Aşağıdaki denklemler bu tarz denklemlere örnek olarak ele alınabilir.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) ; \text{ 2+1 boyutlu ısı denklemi; kalınlığı ihmal edilen ve}$$

farklı bölgeleri farklı ısılarda olan bir levhanın herhangi bir noktasının herhangi bir andaki ısı değişimini verir. Bu denklem levhanın bir noktasındaki ısının anlık değişiminin o noktaya aynı hızda istenildiği kadar yakın seçilebilecek komşu iki noktayla arasındaki ısı farklarının farkındaki değişimler ile orantılı olduğunu söyler zira herhangi bir noktadaki ısı o noktaya komşu olan noktalardaki ısıların ortalamasına yaklaşma eğilimindedir. Bu bilgiler önemlidir zira bir kdd'in çözüm yöntemini bulmak için denklemin nasıl ortaya çıktığını bilmek de büyük önem arz eder. Ayrıca burada

ikinci türevin fonkiyonun bir noktasındaki değerinin komşularının ortalamasına kıyaslanması için bir ölçü veriyor olduğunu ek bir bilgi olarak not düşmek gerekir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) ; 2+1 \text{ boyutlu dalga denklemi; yatay düzlemde}$$

sabitlemiş bir membranın titreşiminde herhangi bir andaki herhangi bir noktasının yer değiştirme fonksiyonunu verir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{İki boyutlu Laplace denklemi.}$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{İki boyutlu Poisson denklemi.}$$

Bu örneklerden de görülebileceği gibi değişim birden fazla boyutta gerçekleşmektedir. Dahası doğal fenomenleri modellemede fenomene tesir eden unsurların etkileşimlerini daha geniş kapsamda ele alma çabası denklemin mertebesinde ve derecesinde artışlar doğurur.

Bir fiziksel olayın modeli olabilen kısmi diferansiyel denklem, kolaylık sağlaması açısından genellikle ikinci mertebeden ve sabit katsayılı olarak sınıflandırılır, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali;

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

şeklindedir. A, B, C, D, E, F ve G birer sabit ve diskriminant, $\Delta = B^2 - 4AC$ olmak üzere; $\Delta > 0$ ise hiperbolik, $\Delta = 0$ ise parabolik, $\Delta < 0$ ise eliptik denklem olarak ele alınır (Pala, 2006). Örneğin 1+1 boyutlu dalga denklemi hiperbolik, 1+1 boyutlu ısı denklemi parabolik, iki boyutlu Laplace denklemi ve iki boyutlu Poisson denklemi eliptiktir.

Mertebesine göre diferansiyel denklemler birinci mertebeden ve yüksek mertebeden olmak üzere ikiye ayrılır.

Tanım 2.4: Bir diferansiyel denklemde var olan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. En yüksek mertebeli türevin derecesi de diferansiyel denklemin derecesidir. Bir eğri ailesinin kaç tane parametresi varsa bu eğri ailesi parametre sayısına eşit mertebeli bir add'in genel çözümüdür şeklinde düşünülebilir.

Derecesine göre sınıflandırılan diferansiyel denklemler ise doğrusal (linear) ve doğrusal olmayan (linear olmayan) olmak üzere ikiye ayrılır.

Tanım 2.5: Bir diferansiyel denklemde, katsayılar, sabit terim veya bağımsız değişken haricinde bağımlı değişken ve onun çeşitli mertebelerden türevlerinin derecesi 1 olup, bağımlı değişken veya türevleri hiçbir şekilde çarpım, bölüm, üstel, logaritmik veya trigonometrik olarak bulunmuyorsa bu diferansiyel denkleme linear, aksi durumda linear olmayan diferansiyel denklem denir.

Katsayılarına göre diferansiyel denklemler ise sabit katsayılı, kompleks katsayılı ve değişken katsayılı olmak üzere dallandırılabilir. Değişken katsayılı diferansiyel denklemlerde elemanter çözüm yöntemleri her zaman tam olarak yeterli olamamaktadır.

Çözümü elde etme sürecini bir düzene koyma amacıyla denklem tipleri böyle sınıflandırıldıktan sonra bu sınıflar içerisinde kendisine bilimsel araştırmalarda çok defa rastlanılmış ve çözüm yaklaşımları belirlenmiş add tipleri bilim insanları tarafından gün yüzüne çıkarılmıştır. Bunlardan en çok karşılaşılanları; birinci mertebeden diferansiyel denklemler başlığı altındaki değişkenlerine ayrılabilir, homojen ve tam diferansiyel denklemler, linear denklemler ile linear hale getirilebilen Bernoulli tipi, Riccati tipi, Lagrange tipi, Clairaut tipi diferansiyel denklemler ve bunlara ait çözüm metotlarıdır. Ayrıca yüksek mertebeden sabit katsayılı, değişken katsayılı, homojen ya da homojen olmayan Cauchy-Euler diferansiyel denklemi gibi denklemler ve bunlar için belirsiz katsayılar yöntemi, operatör yöntemi, parametrelerin değişimi yöntemi, mertebe düşürme yöntemi gibi nice denklemler ve metotlar literatüre kazandırılmıştır. Bütün bunların yanı sıra bir diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için kuvvet serisi yaklaşımlarından, Laplace transformasyonundan ve konvolüsyon teoreminden de faydalanılmaktadır. Bu bilgi birikimiyle add sistemlerine de sabit katsayılı, değişken katsayılı, homojen ya da homojen olmayan şeklinde gruplandırma yapılarak özdeğer ve özvektörlerin yardımıyla ve mevcut metotlarla çözüm yaklaşımları belirlenmiştir.

Bu denklemlerin çözümlerinin gruplandırılmasıysa; denklemi özdeş olarak sağlayan ve tüm özel çözümleri içeren genel çözüm, başlangıç şartları gibi koşulları sağlayan özel çözüm, genel çözümden elde edilemeyen fakat genel çözümle geometrik

bir ilişkisi olan tekil(singüler) çözüm, hem genel çözümle alakası hem de geometrik bir ilişkisi olmayan izole çözüm şeklindedir. En çok arzu edilen genel çözüm, analitik yaklaşımın yanı sıra bazen süperpozisyon ilkesi gereğince denklemin homojen halinin çözümüyle özel çözümünün toplamı şeklinde elde edilebildiği gibi bazen de denklemi sağladığı bilinen fonksiyonların lineer kombinasyonu şeklinde elde edilebilir.

Kdd'e çözüm her ne kadar çeşitli indirgemeler yapılarak yukarıda bahsedilen add metotlarıyla aransa da her zaman add'le benzeştiği söylenemez. Bir başka bakış açısıyla bir kdd birden fazla denklemin bir sistemi gibidir zira her boyuttaki değişimin hesaba katıldığı denklemlerin hepsini sağlayan çözüm fonksiyonu aranmaktadır. Kdd'in mertebesi, bağımsız değişkenlerin adedi, bağımlı değişkenin derecesi ve çeşitli matematiksel haller içerisinde bulunuşu çözüm aşamasında önem arz eder. Bu denklemlerin hiçbir çözümü olmayabileceği gibi bazen yegâne çözüm, bazen de sonsuz çözümü olabilir. Çoğu zaman özel çözümler elde edilebilir fakat genel çözüm elde edilemez. k . mertebeden add'in genel çözümünde bir tane bağımsız değişkene sahip k tane sabitin var olduğu çözümler elde edilirken, k . mertebeden ve n tane bağımsız değişkeni olan bir kdd'in genel çözümü $n - 1$ tane bağımsız değişkeni olan k tane keyfi fonksiyon içerir.

Tanım 2.6: f fonksiyonunun bağımsız değişkenleri bir $A \subset R^n$ kümesinde bulunsun k . mertebeden kdd'in A kümesindeki bir çözümü, A kümesinin tüm iç noktalarını sağlayan C^k sınıfından bir $f : A \rightarrow R$ fonksiyonudur ve genel çözüm; C^k sınıfına ait k adet keyfi fonksiyon içeren çözümdür.

Add'lerden farklı olarak kdd'lerin sınıflandırmasında denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevli terimler lineer ise denklem yarı lineer olarak adlandırılır ve bu denklemlerde en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise denkleme hemen hemen lineer diferansiyel denklem denir.

Kdd'nin bir sınıfı olan lineer homojen kdd'ler ise değişkenlerine ayrıştırma tekniğiyle çözülebilmekte ve süperpozisyon ilkesi gereği n adet farklı çözümün toplamı da bir çözüm olarak kabul edilmektedir. Homojen olmayan kdd'lerde değişkenlere ayrıştırma yöntemi yetersiz kalsa da kayda değer miktarda homojen olmayan denklem, dik açılımlar yöntemiyle çözülebilmektedir.

Bir diferansiyel denkleme başlangıç ve sınır değerleriyle özel çözüm bulmak uygulamada en sık karşılaşılan durumdur. Örneğin bir kdd olan ısı denkleminin çözüm fonksiyonunun araştırılmasında, çözüm fonksiyonu; denklemin tüm bağımsız değişkenlerinin her birininin farklı fonksiyonlarının çarpımı olarak kabul edildiği değişkenlere ayırıştırma yöntemi kullanılır ve bu kabul fonksiyonunun sınır şartlarını yerine getirmesi sağlatılınca oluşan durumların başlangıç şartlarını da yerine getirmesi gerekir. Bu işlemler esnasında fonksiyonu basit trigonometrik yapı taşlarına ayıran, analiz ve sentez yapmamıza olanak sağlayan Fourier seri dönüşümünden faydalanılır.

Burada Fourier serilerine de bir parantez açmak gerekir. Uygulamalı alanda bir olguyu veya olayı modelleyen fonksiyon için en önemli parametre zamandır. Fourier ise en önemli parametrenin frekans olduğunu öne sürmüş bu bağlamda herhangi bir fonksiyonun; uç uca eklenmiş, kendine has büyüklükte olan ve belirli hızlarla periyodik olarak dönme hareketi yapan, adedi artırıldıkça da daha iyi sonuçlar sunacak vektörlerin toplamıyla elde edilebileceğini ortaya koymuştur.

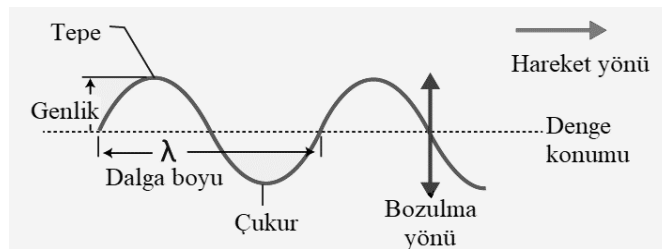
Kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, jeokimya, kimyasal fizik, biyoloji ve fiber optik gibi çeşitli uygulamalı bilim alanlarının ilgilendiği karmaşık lineer olmayan doğa olaylarını açıklamadaysa çoğu zaman lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. Bu denklemler için çözüm yöntemi bulma araştırması lineer olmayan fiziksel olayların bilimi açısından önemli bir rol oynar zira çözümler; titreşimler, solitonlar ve sonlu hıza sahip yayılımlar gibi problemlerin çeşitli doğal olaylarını betimleyebilir. Lokdd'ler için analitik çözüm ve tam çözüm olacak şekilde iki temel tip çözüm vardır. Yaklaşık analitik çözümler için; Homotopi analiz metodu, Adomian ayrışma metodu, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu (Keskin ve Oturanc, 2009) gibi metotlar, fraksiyonel mertebeden kdd'ler de dahil olmak üzere tam çözümler için; genelleştirilmiş Kudryashov metot, üstel fonksiyon metodu, He'nin yarı ters metodu (Zinati ve Manafian, 2017) gibi metotlar ve dahası analitik tam çözümler için sine-cosine metodu, tanh-coth metodu (Wazwaz, 2007), genişletilmiş sech-tanh metodu (Guo ve ark., 2018), sine-Gordon genleşme metodu, G'/G genleşme metodu gibi metotlar kullanılmaktadır.

Lineer kdd'ler için oldukça etkin yöntemler geliştirilmiş olsa da lokdd'ler için aynı şey tam olarak söylenememektedir lakin giriş kısmında ve yukarıda bahsedildiği üzere son yıllarda lineer olmayan doğa olaylarına oldukça fazla odaklanan bilim

insanları tarafından tam çözüm üzerine birçok metot literatüre kazandırılmıştır. Lokdd'ler için tam çözümlerin araştırılmasının avantajı, problemlere uygulanan nümerik çözümlerin meydana getirdiği gibi bir hata terimi doğurmamasıdır.

Görüldüğü üzere evreni anlama macerasında insan karşısına çıkan zorlukları her aştığında yeni bir zorlukla karşılaşmakta ve belki önceden aşılamamış engellerle tekrar yüz yüze gelmektedir lakin yine de önceki zorluklardan elde edilen tecrübeler ile merak, yolculuğun devam edebilmesini sağlamaktadır. Bu yolculuk esnasında insan anlama çabası içerisinde örüntülerden, dengelerden ve tecrübelerden faydalandığı kadar benzetme yeteneğinden de faydalanmaktadır. Aynı şekilde belirgin bir çözüm yöntemi olmayan lokdd'lerin daha anlaşılır bir forma sokmak ve tam çözümlerine ulaşmayı kolaylaştırılmak niyetiyle 'dalga olayı'na benzetimden oldukça fazla faydalanılır. Konumuz bağlamında bu tezde ele alınacak olan modifiye edilmiş üstel fonksiyon metodunu ve geliştirilmiş Kudryashov metodunu uygulamada gerek duyulacak dalga dönüşümü ile ilgili temel kavramlara değinmek gerekmektedir. O sebeple buradan itibaren dalga kavramı hakkında bilgilendirme yapılacaktır.

Boşlukta veya bir ortamda enerji taşınmasını sağlayan titreşimlere genel olarak dalga denir. Akışkanların yüzey dalgaları, ses dalgaları, foton hareketleri ve jeolojik sarsıntılar gibi birçok doğal fenomen dalga örneklerindedir. Herhangi bir ortamda dalganın yayılımı o ortamı oluşturan özelliklerle alakalı olup bir dalga, ortam değişikliğiyle karşılaştığında bundan etkilenir. Dalgalar, var olmak için bir ortama ihtiyaç duyan ses ve akışkan yüzey dalgaları gibi mekanik dalgalar olarak ve ortama ihtiyaç duymayan foton, radyo dalgaları ve elektromanyetik dalgalar olarak iki şekilde gruplandırılır. Dalgayı karakterize eden, genliği, frekansı (f) ve dalga boyudur (λ). Dalga salınımının şiddeti; genlik, birim zamandaki salınım sayısı yani sıklığı; frekans ve peşpeşe iki tepesi veya çukuru arasındaki uzaklık; dalga boyu olarak tanımlanır. Frekans ile dalga boyu ters orantılıdır ve dalganın hızı $v = f \cdot \lambda$ şeklinde hesaplanır.



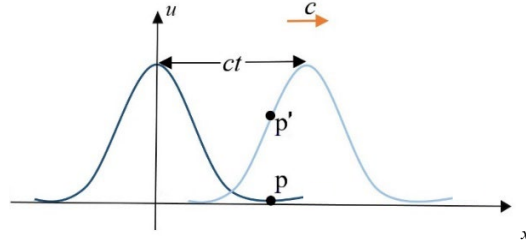
Şekil 2.4 Genel dalga yapısı

Bir dalgada titreşimler genellikle belli bir frekansa ve dalga boyuna göre periyodik hareket eder. Periyodik veya periyodik olmama durumuna göre gruplandırılan dalga hareketi için çellodan çıkan nota sesi periyodik, patlama sesi ise periyodik olmayan dalga olarak kabul edilir. Dalgalar, duran ve ilerleyen olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Duran dalgalar ya ortamın hareketine ters hareket ettiği için ya da birbirlerine zıt yönde hareket eden dalgalar birleşince sabit bir şekilde pozisyonunu koruduğu için hareketsiz dalgalardır. İlerleyen dalgalar ise herhangi iki nokta arasında madde taşınımı olmadan ortamdaki enerjinin yayılımıyla meydana gelen hareketli dalgalardır. Bir ucu bir yere sabitlenerek gerilmiş bir ipin diğer ucunun ani olarak hareket ettirilmesiyle oluşan ve sabit hızla ipin sabitlendiği yere doğru hareket eden dalga veya stadyumlarda seyircilerin görsellik olması için meydana getirdiği ‘Meksika dalgası’ ilerleyen dalgaya örnek olarak alınabilir. Bu tip bir durumda ipin her noktası veya stadyumdaki her bir insan dalga hareketine dik olarak titreşir veya hareket eder.

1844’te İskoç John Scott Russell solitary dalgaları gözlemleyen ilk insan olmuştur. Bir su kanalı boyunca gözlemlediği bir dalga orijinal yapısını ve hızını koruyarak uzun bir zaman periyodu içerisinde ilerleyebilmektedir. Bu şekildeki tekli dalga tümseklerine günümüzde solitary dalga veya soliton denilmektedir. 1895’te Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries bir lokdd olan ve solitary dalgaları parçacığimsı özelliklerle karakterize eden soliton çözümleri sunan KdV denklemini analitik olarak türetebilmiştir. Lineer olmayan terimler içeren KdV denklemi, dağılım ortamında küçük fakat sonlu genliğe sahip uzun dalgaların yayılımını açıklar. KdV denkleminin basit bir formu $u_t + auu_x + u_{xxx} = 0$ şeklindedir (Wazwaz, 2009). Kayda değer bir keşif olan tekil dalgaların herhangi bir bozulmaya uğramamaları bunun yanı sıra da parçacık gibi davranan bir yapıda olmaları bilim insanlarını bu dalgalara ‘soliton’ ismini vermeye teşvik etmiştir. Farklı ya da aynı genliğe sahip iki solitonun karşılaşması durumunda solitonlar hızlarını ve şekillerini koruyarak yollarına devam etmektedir. Tekil dalgalar da çarpışmadan sonra özelliklerini korumaya çalıştığından solitonumsu dalgalar olarak adlandırılabilir. Normal dalgalar, çarpıştıktan sonra birbirini farklılaştırır hatta sönümlerken normal dalgaların aksine tekil dalgalar asla birleşmez. Gözlemler sonucunda, bu dalgaların lineer olmayan özellikler taşıdığına tespiti; lineer olmayan fiziksel olayların

oluşturduğu sistemlerin çözümleri için ve özellikle de lokdd'lerin çözümleri için uygulama alanı sağlamaktadır. Dünya genelinde farklı bilimsel branşların birçok aktif araştırmasında soliton konsepti kullanılmaktadır. Velhasıl solitonlar, lineer olmayan fiziksel olaylarda örneğin akışkanlar mekaniğinde, parçacık fiziğinde, astrofizikte, sinir sistemindeki nöronların gönderdiği sinyallerde, plazma fiziğinde, süperiletkenlik fiziğinde, mıknatısların oluşturduğu manyetik hareketlerde, telekomünikasyon optik ışınlarının ilerlemesinde ve biyolojik sistemlerde, modelleme, buluş ve kavrama açısından katkı sağladıkları gibi teknolojinin ilerlemesiyle kendilerine birçok uygulama alanı bulmuştur.

Tanım 2.7: Lokdd'lerin çözümleri dalga(titreşim) gibi fiziksel olguları modellediğinde, dalgaların hem periyodik yapısından hem de sabit bir hızla hareket eden dalganın zaman geçtikçe şeklini muhafaza etmesi sebebiyle (tekil dalgalar ve solitonlar) $u(x) = u(x - ct)$ ötelemesini kullanmak çözümü elde etmede kolaylık sağlayabilir. Bu sebeple c ; hız, t ; zaman, x ; konum, k ; frekans, u ; genlik olmak üzere $u(x,t)$ çözüm fonksiyonu için x ile t arasında $\xi = k(x - ct)$ gibi bir bağıntı olduğu kabul edilirse çözüm fonksiyonuna bir dönüşüm uygulanmış olunur ki bu dönüşüme dalga dönüşümü denir.

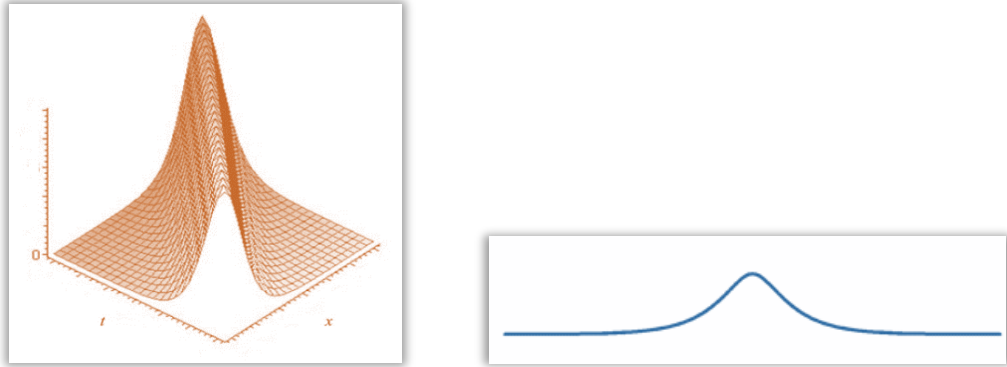


Şekil 2.5 Tekil dalga hareketi

Bu yöntem lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürerek denklemin ilerleyen dalga çözümlerinin elde edilmesinde oldukça faydalı olur.

İlerleyen dalga çözümü sabit bir hızla hareket eden ve formu değişmeyen bir çözümdür ve genellikle KdV denklemi gibi lineer olmayan evölüsyon denklemlerinin dalga dönüşümü yardımıyla add'e indirgenmesiyle elde edilir. Bu dalga çözümlerin tipleri Wazwaz (2009)'da şu şekilde adlandırılmıştır;

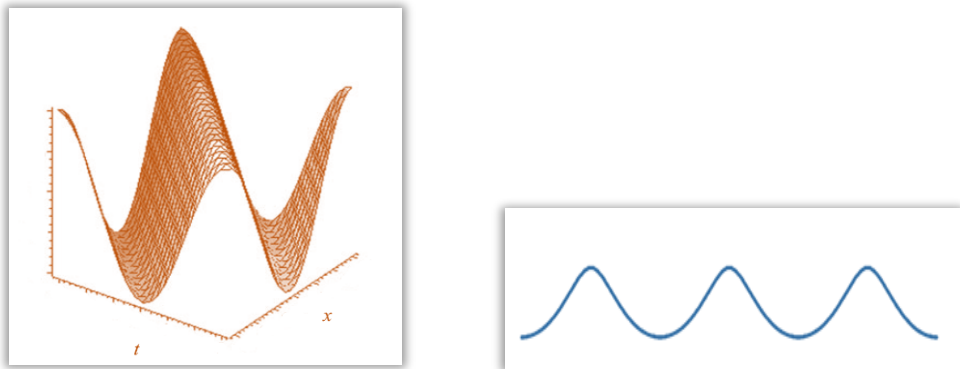
- 1) Solitary dalgalar ve solitonlar: Solitary dalgalar, geniş mesafelerde düşünüldüğünde asimptotik olarak sıfır olan idealize olmuş dalgalardır. Zirvesi geri planına göre yüksek yoğunlukta olanlara parlak(*bright*) solitary dalga, düşük yoğunlukta olanlaraysa karanlık(*dark*) solitary dalga denir. Solitonlar, solitary dalgaların özel bir halidir ve mekansal olarak lokalize olmuş çözümlerdir o sebeple $\xi \rightarrow \pm\infty$ iken $u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi) \rightarrow 0$ olur.



Şekil 2.6 Solitonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti (Wazwaz, 2009; Lenells, 2005)

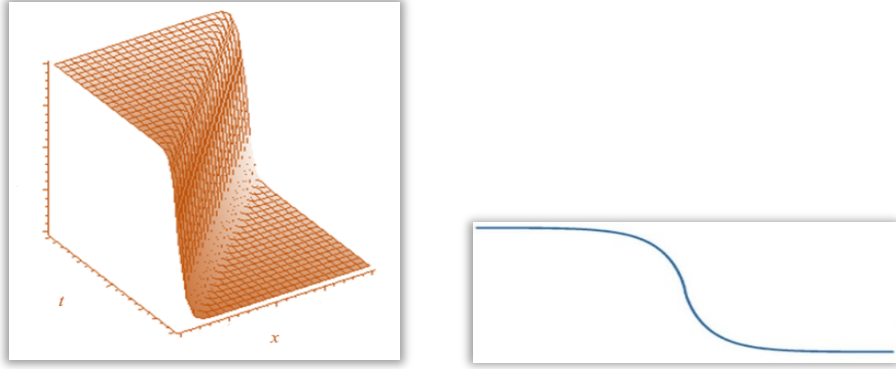
- 2) Periyodik çözümler: Belirli aralıklarda kendisini tekrar eden $\cos(x-t)$, $\sin(x-t)$ gibi periyodik fonksiyonlardır.

Tanım 2.8: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $T \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x+T) = f(x)$ eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir T de f fonksiyonunun periyodudur.



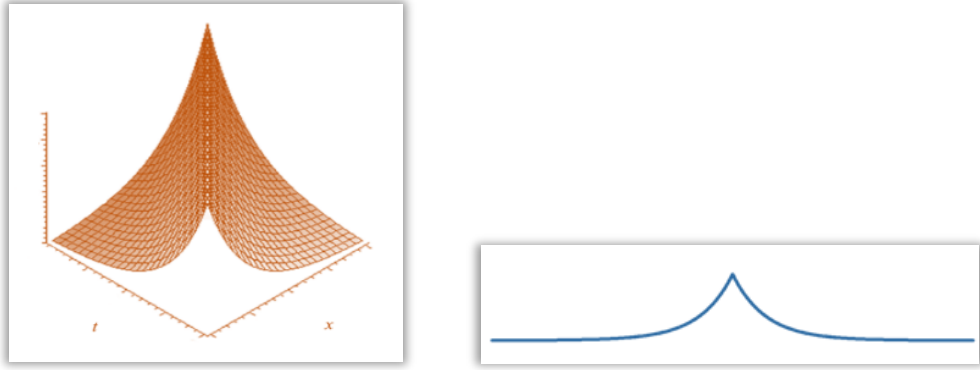
Şekil 2.7 Periyodik fonksiyonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti (Wazwaz,2009; Lenells, 2005)

- 3) Bükülme (Kink) dalgalar: Asimptotik bir durumdan diğer bir asimptotik duruma doğru artan ya da azalan dalgalardır.



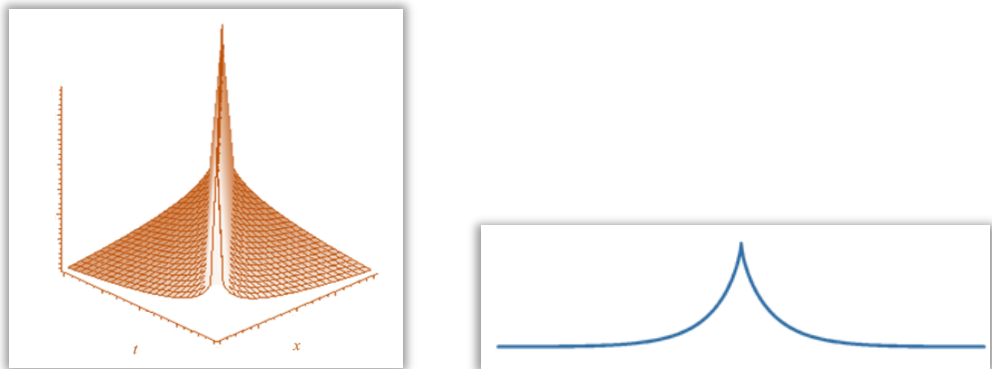
Şekil 2.8 Kink dalganın üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti (Wazwaz, 2009; Lenells, 2005)

- 4) Peakonlar (Zirveler): En yüksek kısmında kırılma dışında pürüzsüz ilerleyen dalgalardır. Zirve kısımlarında türev işaret değiştirir.



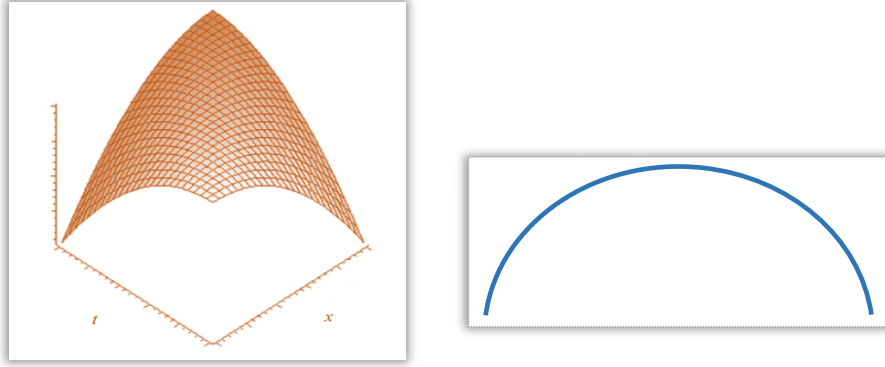
Şekil 2.9 Peakonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti (Wazwaz, 2009; Lenells, 2005)

- 5) Cusponlar: Peakonlar gibi zirve kısımlarında kırılma olur fakat buralardaki türevleri ıraksar.



Şekil 2.10 Cusponun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti (Wazwaz, 2009; Lenells, 2005)

- 6) Compactonlar: Kompakt destekli solitary dalgalardır. Sonlu dalga boyuna sahip, eksponansiyel kuyruklardan bağımsız, sonsuz kanatların olmadığı solitonlardır. Compactonlar da diğer compactonlarla çarpıştıktan sonra şeklini muhafaza eder. Solitonlarda dalganın genliği arttıkça genişlik daralırken bir compactonun genişliği dalganın genliğinden bağımsızdır.



Şekil 2.11 Compactonun üç boyutlu yapısı ve iki boyutlu kesiti (Wazwaz, 2009; Lenells, 2005)

Tanım 2.9: Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden

lineer olan terim $\frac{\partial^p u}{\partial \xi^p}$ ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim $u^s \left(\frac{\partial^q u}{\partial \xi^q} \right)^r$ ise

D dengeleme terimi olmak üzere $D + p = Ds + r(D + q)$ ile dengeleme terimi bulunur. Buna dengeleme prosedürü (prensibi) denir.

Tanım 2.10: $y = f(t)$ ve $t = g(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de $\frac{dy}{dt}$ ve $\frac{dt}{dx}$

türevlerine sahipse $y = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu da türeve sahiptir ve

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ 'dir. Buna zincir kuralı denir. (Akdeniz ve ark., 1997)

Buraya kadar bu araştırmada ihtiyaç duyulacak temel bilgiler bir düzen dâhilinde sunulmaya çalışılmıştır, sonraki bölümlerde tezde kullanılacak metotlar ile ilgili bilgilendirme yapılacak ardından da örnek olarak seçilmiş lokdd'lerin bu metotlar yardımıyla elde edilen ilerleyen dalga çözümleri kapsamlı olarak sunulacaktır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde geliştirilmiş üstel fonksiyon metodunun ve genelleştirilmiş Kudryashov metodunun algoritması sunulacaktır.

3.1 Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu

Metodu açıklamak adına örnek olarak bir $u = u(x, y, t)$ üç değişkenli fonksiyonu ele alınırsa bu fonksiyonu ve kısmi türevlerini içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel hali aşağıdaki gibi olacaktır;

$$P(u, (u_x)^n, u_y, u_t, \dots, u_{xx}, u_{xt}, u_{xy}, u_{xxx}, \dots) = 0. \quad (3.1.1)$$

(3.1.1) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerinin araştırılmasında öncelikle bu denklemi adi diferansiyel denkleme indirmek gerekmektedir. Bu amaç doğrultusunda u fonksiyonuna denklemin içerdiği bağımsız değişkenler de dikkate alınarak $\xi \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki dalga dönüşümü uygulanır:

$$\xi = k(x + y - ct), \quad u(x, y, t) = u(\xi). \quad (3.1.2)$$

(3.1.1) lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemindeki u fonksiyonunun (3.1.2)'deki dalga dönüşümü dikkate alınarak dönüştürülmesiyle meydana gelecek hali için kısmi türevler zincir kuralı yardımıyla ξ 'ye bağlı olacak şekilde elde edilip (3.1.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$N(u, u_\xi, (u_\xi)^2, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0, \quad (3.1.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemin genel formu elde edilmektedir.

Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodunda (3.1.3) denkleminin u çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibi kabul edilir. (Attaullah ve ark., 2022; Aktürk, 2021).

$$u(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n A_i [e^{-g(\xi)}]^i}{\sum_{j=0}^m B_j [e^{-g(\xi)}]^j} = \frac{A_0 + A_1 e^{-g} + \dots + A_n e^{-ng}}{B_0 + B_1 e^{-g} + \dots + B_m e^{-mg}}. \quad (3.1.4)$$

$A_n \neq 0, B_m \neq 0$ olmak üzere (3.1.4) çözüm fonksiyonunu netleştirmek için A_i, B_j ($0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, i, j \in \mathbb{N}$) katsayılarını bulmak gereklidir. Bu amaç doğrultusunda öncelikle (3.1.3) denkleminde en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en büyük dereceli lineer olmayan terime dengeleme prosedürü uygulanarak m ve

n arasındaki ilişki bulunur. Bu ilişkiye göre m ve n pozitif tamsayıları seçilerek (3.1.4)'teki u çözüm kabulünün sınırları belirlenmiş olur ki böylece çözümün iskeleti ortaya çıkar.

He ve Wu'nun 2006 'da ortaya koyduğu üstel fonksiyon metodundaki u çözüm fonksiyonunda Euler sabitinin kuvvetleri ξ 'nin katları şeklindeyken, geliştirilmiş üstel fonksiyon metodunda, özellikleri yazının devamında detaylı olarak belirtilecek olan ξ 'ye bağlı bir $\mathcal{G}(\xi)$ fonksiyonunun katları şeklinde modifiye edilmiştir.

Dengeleme prensibi ile genel çerçevesi belirlenen (3.1.4)'teki u çözüm fonksiyonu ve onun bölümün türevi yaklaşımıyla hesaplanan türevleri Mathematica programı yardımıyla (3.1.3) denkleminde yerine yazıldığında üstel çarpanlara sahip bir denklem elde edilir. Bu denklem $e^{\mathcal{G}(\xi)}$, nın aynı kuvvetlerine göre paranteze alınarak gruplandırıldığında üstel çarpanların katsayılarının sıfıra eşit olması gerekeceğinden, çözüm fonksiyonunun katsayıları için bir denklem sistemi oluşacaktır. Oluşan denklem sisteminin $A_i, B_j, c, \mu, \lambda$ katsayılarının farklı kombinasyonlarına göre çözümlenmesi ile bu katsayıların birbirleriyle oluşturdukları bağıntılar elde edilir. Sistemin çözümlenmesi aşamasında katsayıların çeşitli kombinasyonları birçok farklı 'durum' sunar. Katsayılar arasındaki bağıntıları veren bu durumlar arasından ileride bahsedilecek çözüm ailelerine uyumlu ve Mathematica programının çözüm sunabileceği şekilde seçim yapılır. Seçilen duruma ait katsayılar arasındaki bağıntılar (3.1.4)'teki artık sınırları da belirlenmiş çözüm kabulüyle birlikte (3.1.3) denkleminde yerine yazılarak Mathematica programı tekrar işletildiğinde seçilen durumun sunduğu u çözüm fonksiyonunun ham hali yani $\mathcal{G}(\xi)$ 'ya bağlı hali ortaya çıkar. Bu aşamada elde edilen çözüm fonksiyonu $\mathcal{G}(\xi)$ 'nin kabul şartlarını yerine getirmek durumundadır. $\mathcal{G}(\xi)$ fonksiyonu için kabul şartı (3.1.5)'teki gibidir;

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(\xi) &= e^{-\mathcal{G}(\xi)} + \mu e^{\mathcal{G}(\xi)} + \lambda, & (3.1.5) \\ \mathcal{G}'(\xi) &= \frac{1}{e^{\mathcal{G}(\xi)}} + \mu e^{\mathcal{G}(\xi)} + \lambda \\ &= \frac{\mu e^{2\mathcal{G}(\xi)} + \lambda e^{\mathcal{G}(\xi)} + 1}{e^{\mathcal{G}(\xi)}} \end{aligned}$$

$$= e^{-g(\xi)} (\mu e^{2g(\xi)} + \lambda e^{g(\xi)} + 1).$$

(3.1.5) denklemi düzenlendiğinde yukarıda görüldüğü gibi ikinci dereceden bir denklem meydana gelir. (3.1.5) denklemine $e^{g(\xi)} = y$ olarak düşünüldüğünde Riccati tipi bir diferansiyel denklem olduğu görülmektedir. Bu diferansiyel denklem ikinci dereceden denklemin köklerini de bir çözüm olarak alabileceğinden uygun bir dönüşümle Bernoulli tipi diferansiyel denkleme dönüşür. Bernoulli tipi denklemin tekrardan uygun bir dönüşümle birinci mertebeden diferansiyel denkleme dönüştürülmesiyle $g(\xi)$ fonksiyonları elde edilebilmektedir. İkinci dereceden denklemin kökleri için diskriminantın olası halleri ve kabul şartının parametrelerinden μ ' nün sıfır olma ihtimalinin hesaba katılması sebebiyle ortaya çıkan senaryolar farklı $g(\xi)$ fonksiyonları ortaya koymaktadır. (3.1.3) denkleminin u çözümleri ise bu olası senaryolar sayesinde ortaya çıkan beş farklı aile içerisinde netleştirilir.

Aile 1: $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$,

$$g(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right). \quad (3.1.6)$$

Aile 2: $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$,

$$g(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right). \quad (3.1.7)$$

Aile 3: $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$,

$$g(\xi) = -\ln \left(\frac{\lambda}{e^{\lambda(EE+\xi)} - 1} \right). \quad (3.1.8)$$

Aile 4: $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$,

$$g(\xi) = \ln \left(-\frac{2\lambda(EE + \xi) + 4}{\lambda^2(EE + \xi)} \right). \quad (3.1.9)$$

Aile 5: $\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$,

$$g(\xi) = \ln(EE + \xi). \quad (3.1.10)$$

Her bir aileye göre elde edilen çözümler (3.1.2) ile ξ değişkenine bağlı olmaktan çıkarılıp tekrardan (3.1.1) denkleminin değişkenlerine (x , y , t vb.) bağlı hale getirilir akabinde ilerleyen dalga çözümleri olarak kabul edilecek bu çözümlerin

Mathematica programı yardımıyla lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Eğer sağladığı teyit edilemezse baştaki katsayılar için oluşan denklem sisteminden farklı bir katsayı kombinasyonu ile yeni bir durum oluşturularak çözüm arayışına devam edilir. (3.1.1) denklemini sağladığı tespit edilen çözüm fonksiyonlarının parametrelerine metottaki aile ve diskriminant şartlarını da sağlayacak şekilde uygun değerler atanarak çözüm fonksiyonlarının fiziksel yapısını ve davranışlarını temsil eden grafikler yine Mathematica programı yardımıyla belirlenir. Bu sayede (3.1.1) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini analiz etme ve dalga tiplerini belirleme imkânı bulunur.

3.2 Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu

Tıpkı modifiye edilmiş üstel fonksiyon metodundaki gibi, ele alınan (3.1.1) denklemi dalga dönüşümü vasıtasıyla ilgili türevlerle birlikte (3.1.3) lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenir. Bu metotta $Q'_\xi = Q^2 - Q$ Bernoulli tipi diferansiyel denkleminin bir çözümü olan $Q(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ kabul şartı ile $a_i (i = 0, \dots, N)$, $b_j (j = 0, \dots, M)$ sonradan elde edilecek sabitler olmak üzere (3.1.3) denkleminin çözüm fonksiyonu;

$$u(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Q^i(\xi)}{\sum_{j=0}^M b_j Q^j(\xi)} = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + \dots + a_N Q^N}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2 + \dots + b_M Q^M} = \frac{A[Q(\xi)]}{B[Q(\xi)]}, \quad (3.2.1)$$

şeklinde kabul edilir. (3.2.1) çözüm kabulünde görüldüğü üzere bu fonksiyon Q 'nun polinomlarının rasyonel bir ifadesi şeklindedir. (3.2.1) çözüm kabulünde yer alan N ve M sınırlarını belirlemek için (3.1.3) denkleme göre dengeleme prosedüründen faydalanılır. Ardından sınırları belirlenmiş (3.2.1) çözüm fonksiyonu için (3.1.3) diferansiyel denkleminde bulunan ilgili türevler

$$u'(\xi) = \frac{A'Q'B - AB'Q'}{B^2} = (Q^2 - Q) \frac{A'B - AB'}{B^2},$$

$$u''(\xi) = \frac{Q^2 - Q}{B^2} \left[(2Q - 1)(A'B - AB') + \frac{Q^2 - Q}{B} (B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2AB'^2) \right],$$

$$\begin{aligned}
u'''(\xi) &= (Q^2 - Q)^3 \left[\frac{(A'''B - AB''' - 3A''B' - 3B''A')B + 6B(AB'' + B'A')}{B^3} \right] \\
&+ 3(Q^2 - Q)^2 (2Q - 1) \left[\frac{B(A''B - AB'') - 2B'A'B + 2AB'^2}{B^3} \right] \\
&+ (Q^2 - Q)(6Q^2 - 6Q + 1) \left[\frac{A'B - AB'}{B^2} \right] \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

şablonlarıyla hesaplanabilir. Fakat bu çalışmada ilgili türevler, (3.2.2) formülleri yerine geliştirilmiş üstel fonksiyon metodunu uygularken kullanılan bölümün türevi yaklaşımıyla ve $Q'_\xi = Q^2 - Q$ koşulu dikkate alınarak Mathematica programında hesaplatılmıştır.

Sınırları belirlenmiş (3.2.1) çözüm fonksiyonu ve hesaplatılmış türevler Mathematica programı yardımıyla (3.1.3) denkleminde yerine yazıldığında Q fonksiyonuna bağlı sıfır polinomu bulunur. Bu polinom, Q 'nun kuvvetlerine göre düzenlendiğinde mevcut olan katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle tıpkı geliştirilmiş üstel fonksiyon metodunda olduğu gibi bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Mathematica programı yardımıyla yine farklı katsayıların kombinasyonlarına göre çözümlenmesi $a_i (i = 0, \dots, N)$, $b_j (j = 0, \dots, M)$ ve k, c gibi katsayıların arasındaki bağıntıları sunar. Elde edilen bu bağıntılarla birlikte kabul edilen (3.2.1) çözüm fonksiyonu ve ilgili türevler adi diferansiyel denklemde Mathematica programıyla denendiğinde çözüm fonksiyonunun Q 'ya bağlı hali gün

yüzüne çıkar. Bu metodun kabulü olan $Q(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ için $Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ve

$Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\xi}{2}\right)$ eşitlikleri kullanılarak iki farklı ailede çözümler aranır.

Bulunan $u(\xi)$ çözüm fonksiyonlarına (3.1.2) ifadesinde yer alan dalga dönüşümü tersine uygulanarak $u(x, y, t)$ belirlenir. Nihayetinde netleşen u fonksiyonu, (3.1.1) denklemini sağlıyorsa ki bu yine Mathematica programıyla kontrol edilir, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin ilerleyen dalga çözümleri ve bu çözümlerin fiziksel yapısını ortaya koyan grafikler elde edilmiş olunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Doubly Dispersive Denklemi

Bu bölümde, bir boyutlu dalga denkleminin genellemesi Cauchy probleminin özel bir hali olan Doubly Dispersive denkleminin dalga çözümleri öncelikle geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılarak ardından da geliştirilmiş Kudryashov metot kullanılarak araştırılmıştır. Lineer olmayan elastik katılarda dalga yayılımını incelerken karşılaşılan bu denklem aşağıdaki gibidir (Silambarasan ve ark., 2019):

$$u_{tt} - \left(\frac{1}{\rho}(\sigma u)_x\right)_x = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{\rho}(d\beta u^2 + dv^2 u_{tt} - (b\alpha v^2 u_x)_x)_x\right)_x, \quad (4.1.1)$$

$$d = \frac{J}{\sigma}, \quad b = \frac{L}{\sigma} < 1.$$

4.1.1 Geliştirilmiş üstel fonksiyon metoduyla çözüm

(4.1.1) denkleminde bazı cebirsel düzenlemeler yapılırsa,

$$2\rho u_{tt} - 2\sigma u_{xx} - \epsilon d \beta (u^2)_{xx} - \epsilon dv^2 u_{ttt} + \epsilon b \alpha v^2 u_{xxxx} = 0, \quad (4.1.2)$$

elde edilir. Bu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için mevcut bağımsız değişkenlere istinaden aşağıdaki dalga dönüşümü uygulanmıştır.

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct). \quad (4.1.3)$$

(4.1.2) denkleminde gerekli olan kısmi türevli terimler için u çözüm fonksiyonunun (4.1.3) dalga dönüşümüne uğramış halinin türevleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = u' \quad \text{olmak üzere,}$$

$$u_x = k \cdot u', \quad u_t = -c \cdot k \cdot u', \quad u_{xx} = k^2 \cdot u'', \quad u_{tt} = c^2 \cdot k^2 \cdot u'', \quad u_{ttt} = c^2 \cdot k^4 \cdot u^{iv}, \\ u_{xxxx} = k^4 \cdot u^{iv}, \quad (u^2)_{xx} = 2 \cdot k^2 \cdot (u \cdot u')'. \quad (4.1.4)$$

(4.1.4)'te bulunan türevler, (4.1.2) denkleminde yerlerine yazılarak aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilmiştir.

$$2\rho c^2 k^2 u'' - 2\sigma k^2 u'' - \epsilon d \beta 2k^2 (uu')' - \epsilon dv^2 c^2 k^4 u^{iv} + \epsilon b \alpha v^2 k^4 u^{iv} = 0.$$

Burada sadeleştirmek niyetiyle denklemin her tarafı k^2 ile bölündükten sonra paranteze alma işlemleri uygulayarak,

$$2(\sigma - \rho c^2)u'' + \epsilon d \beta 2(u.u')' + \epsilon v^2 k^2 (dc^2 - b\alpha)u'' = 0, \quad (4.1.5)$$

elde edilmiş, (4.1.5) denkleminin ξ 'ya göre bir kez belirsiz integrali alınarak

$$2(\sigma - \rho c^2)u' + \epsilon d \beta 2(u.u') + \epsilon v^2 k^2 (dc^2 - b\alpha)u''' = \zeta,$$

bulunmuştur. Bu denklemi de indirgemek adına denklemin bir kez daha ξ 'ya göre integrali alınıp,

$$2(\sigma - \rho c^2)u + \epsilon d \beta u^2 + \epsilon v^2 k^2 (dc^2 - b\alpha)u'' = \zeta \cdot \xi + \gamma,$$

bulunmuş, ζ ve γ integral sabitleri işlem kolaylığı açısından en baştan itibaren sıfır alınarak

$$2(\sigma - \rho c^2)u + \epsilon d \beta u^2 + \epsilon v^2 k^2 (dc^2 - b\alpha)u'' = 0, \quad (4.1.6)$$

elde edilmiştir.

Bu sadeleştirmeler ve indirgemelerden sonra (4.1.6) denkleminin çözümü olacak $u(\xi)$ 'nun (3.1.4) kabulünün sınırlarını elde etmek için en yüksek mertebeden türev içeren terimin mertebesi ile en büyük dereceli lineer olmayan terimin derecesinin bir dengede olması gerektiğini öne süren dengeleme prensibi aşağıdaki şekilde uygulanmıştır. Bu sayede m ve n sınırları arasındaki bağıntı bulunmuştur.

$$\begin{aligned} u'' &\approx u^2 \\ e^{m-n-2} &\approx (e^{m-n})^2 \\ m-n-2 &\approx 2m-2n \\ m=1 &\text{ için } n=3 \end{aligned}$$

Bu sınırlar (3.1.4)'te yerine yazılarak $u(\xi)$ 'nin genel çerçevesi aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

$$u = \frac{A_0 + A_1 e^{-\xi} + A_2 e^{-2\xi} + A_3 e^{-3\xi}}{B_0 + B_1 e^{-\xi}}. \quad (4.1.7)$$

Buradan itibaren (4.1.6) denkleminin çözüm fonksiyonu arayışına Mathematica programıyla devam edilmiştir. (4.1.7)'deki çözüm fonksiyonunun (4.1.6) denklemindeki mertebelere göre türevlerinin hesaplanmasını kolaylaştırmak için

$$\Upsilon = A_0 + A_1 e^{-g} + A_2 e^{-2g} + A_3 e^{-3g}, \quad \Psi = B_0 + B_1 e^{-g} \quad \text{alınarak} \quad u(\xi) = \frac{\Upsilon}{\Psi} \quad \text{şeklinde}$$

düzenlenmiştir. GÜFM'nin gerek şartı olan $g'(\xi) = e^{-g(\xi)} + \mu e^{g(\xi)} + \lambda$ eşitliği hesaba katılarak elde edilen bölümün birinci ve ikinci türevi formülleri ile $u(\xi)$ fonksiyonu ve $g'(\xi)$, (4.2.6) denkleminde yerine yazılarak üstel çarpanlara sahip bir denklem elde edilmiştir. Bu denklemin üstel çarpanlarının kuvvetlerine göre paranteze alınmasından sonra aynı kuvvete sahip üstel çarpanların katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle meydana gelen cebirsel denklem sisteminin çözüm kümesi araştırılmış, böylece u çözüm fonksiyonunun katsayıları arasındaki bağıntılar elde edilebilmiştir. Üstel çarpanların katsayılarının oluşturduğu denklem sisteminin; dalga dönüşümündeki, (4.1.6) denklemindeki, (4.1.7) fonksiyonundaki ve $g'(\xi)$ kabulündeki katsayıların farklı kombinasyonlarına göre çözülüşü birçok farklı 'durum' ortaya koymuştur. Bu çalışmada (4.1.2) denklemi için (4.1.6) denklemi üzerinden GÜFM'nin çözüm ailelerinin şartlarına da uygun düşecek şekilde üç farklı duruma göre çözüm araştırması yapılmıştır.

1.Durum:

$$A_0 = \frac{3B_0 k^2 \mu v^2 (\alpha(-b)k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{2\beta\rho},$$

$$A_1 = A_3 \mu - \frac{3B_0 k^2 \lambda v^2 (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma)}{2\beta\rho},$$

$$A_2 = A_3 \lambda - \frac{3B_0 k^2 v^2 (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma)}{2\beta\rho},$$

$$B_1 = -\frac{2A_3 \beta\rho}{3\alpha b k^4 v^4 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) + 6k^2 \sigma v^2},$$

$$d = \frac{4\alpha b \rho}{\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma},$$

$$c = -\frac{\sqrt{\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma}}{\sqrt{2}\sqrt{\rho}}.$$

Bu durumdaki katsayılarla birlikte gerekli türevler ve (4.1.7), Mathematica programı yardımıyla (4.1.6) denkleminde yerine yazılıp denklemi sağladığının kontrolü yapılarak

$$u_1(\xi) = -\frac{3k^2v^2e^{-2\theta} \left(e^\theta (\lambda + \mu e^\theta) + 1 \right) (\alpha bk^2v^2\epsilon (\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma)}{2\beta\rho}, \quad (4.1.8)$$

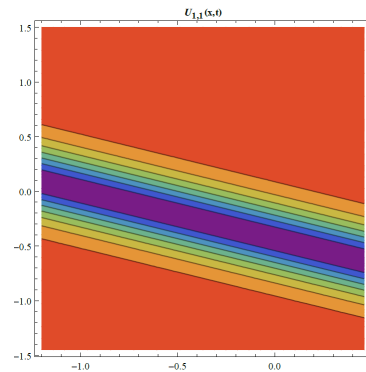
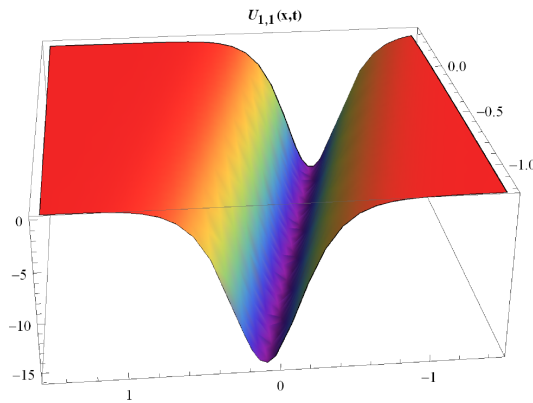
çözüm fonksiyonu $\mathcal{G}(\xi)$ ya bağlı olarak elde edilmiştir. Bu çözüm fonksiyonunun GÜFM'nin çözüm ailelerine göre halleri, dalga dönüşümü tersine uygulanarak ξ değişkenine bağlı olmaktan çıkarılıp tekrardan x ve t değişkenlerine bağlı hale getirilip (4.1.2) denklemini sağlayıp sağlamadığı Mathematica ile kontrol edilmiş ve bulunan fonksiyonun (4.1.2) matematiksel modelini sağladığı teyit edilmiştir. Böylece her bir ailede lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem için birer adet ilerleyen dalga çözümü elde edilmiştir. Bulunan çözüm fonksiyonlarındaki parametrelere ailelerin şartlarına uygun değerler verilerek grafikleri belirlenmiş ve böylece çözümlerin dalga yapıları hakkında yorumlar yapılabilmektedir.

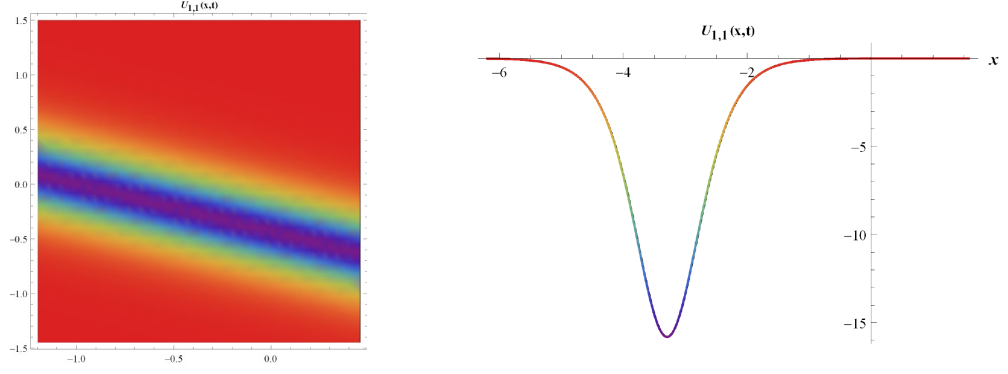
Doubly Dispersive Denkleminin seçilen 1. duruma göre çözüm aileleri aşağıdaki şekildedir.

Çözüm Ailesi 1

$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ koşuluyla anti fanus biçimli smooth(pürüzsüz) dark(karanlık) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,1} = \frac{3k^2\mu v^2 (\lambda^2 - 4\mu) (\alpha bk^2v^2\epsilon (\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (k(x - ct) + EE) \right)}{2\beta\rho \left(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (k(x - ct) + EE) \right) + \lambda \right)^2}. \quad (4.1.9)$$



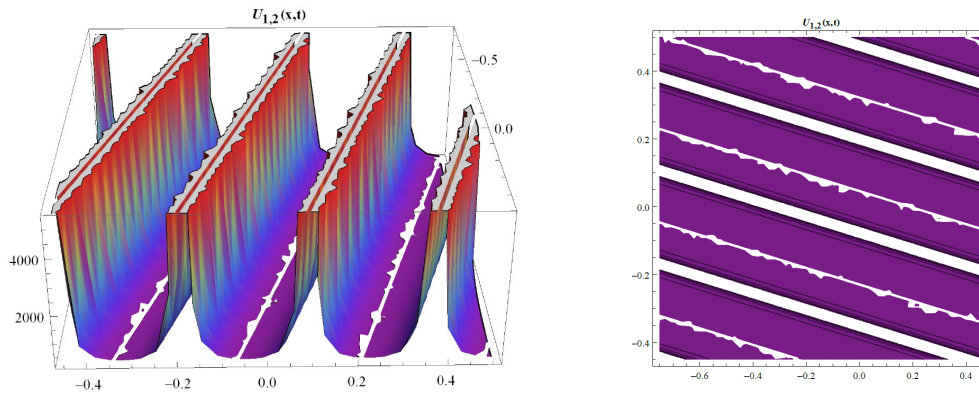


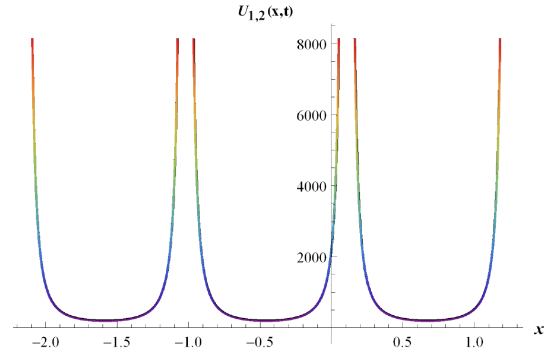
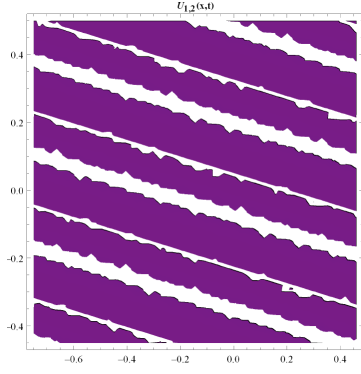
Şekil 4.1 (4.1.9) çözümünün $\mu = 0.5, \lambda = 2, k = 2, \nu = 1, b = 0.5, \alpha = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, \sigma = -3, EE = 0.82, c = -2.29565, d = 0.189753$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2

$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ koşuluyla fanus biçimli periyodik singular(tekil) bright(parlak) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,2} = \frac{3k^2\mu\nu^2(\lambda^2 - 4\mu)(\alpha bk^2\nu^2\epsilon(\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma)\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(k(x - ct) + EE)\right)}{2\beta\rho\left(\lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}(k(x - ct) + EE)\right)\right)^2}. \quad (4.1.10)$$



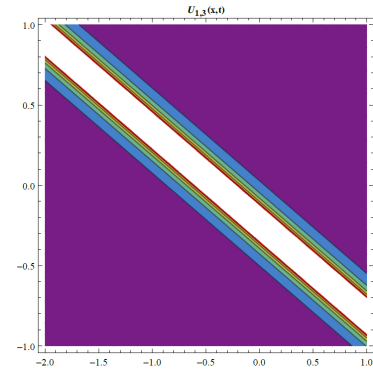
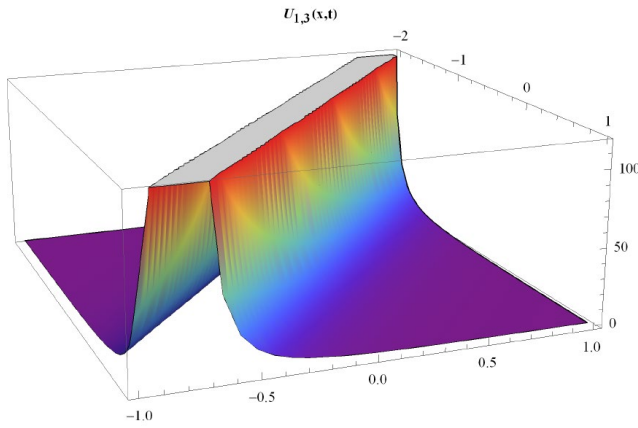


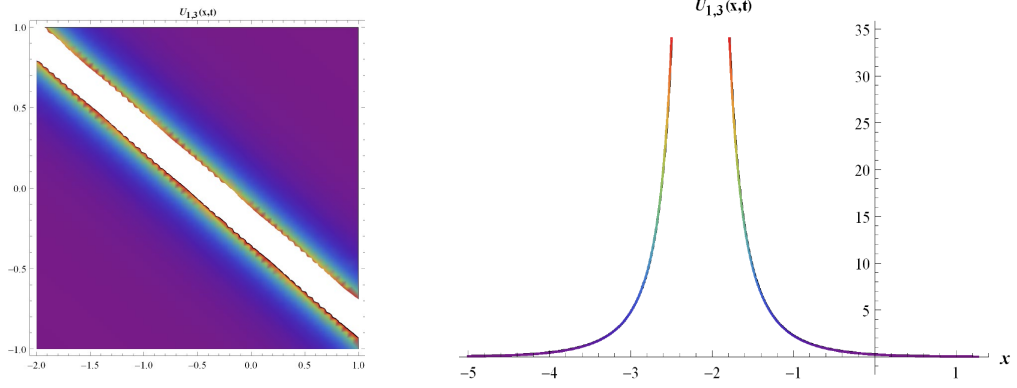
Şekil 4.2 (4.1.10) çözümünün $\mu = 2, \lambda = 0.5, k = 2, v = 1, b = -0.5, \alpha = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, \sigma = 3, c = -4.09512, d = -0.0596303, EE = 0.75$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 3

$\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ koşuluyla fanus biçimli bright(parlak) singular(tekil) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,3} = \frac{3\alpha b k^4 \lambda^4 v^4 \epsilon + 6k^2 \lambda^2 \sigma v^2}{4\beta\rho - 4\beta\rho \cosh(k\lambda(x - ct) + EE\lambda)}. \quad (4.1.11)$$





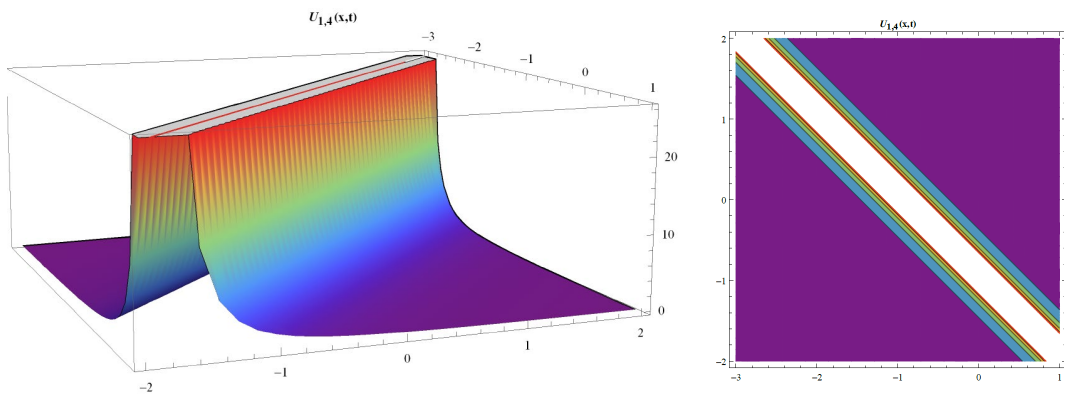
Şekil 4.3 (4.1.11) çözümünün $\mu = 0, \lambda = 1, \sigma = 1, k = 2, v = 1, b = 0.5, \alpha = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, c = -1.7320508, d = 0.\bar{3}, EE = 0.82$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

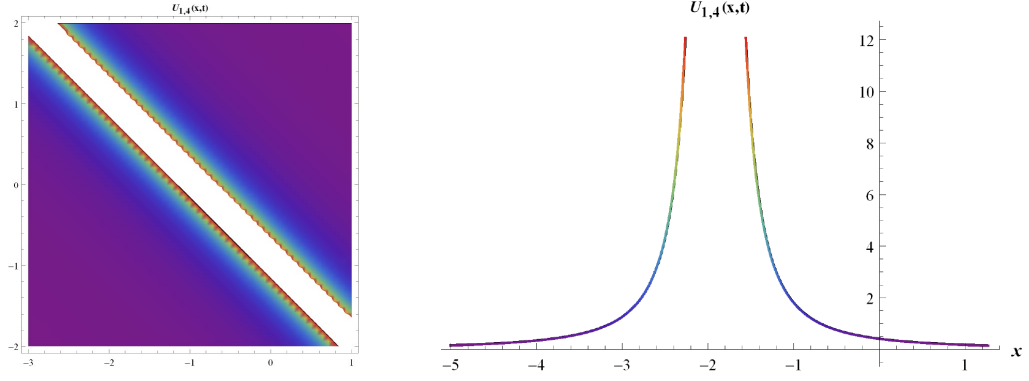
Çözüm Ailesi 4

$\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ koşuluyla fanus biçimli bright(parlak) singular(tekil) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,4} = \frac{3k^2v^2 \left((\lambda^2 - 4\mu)m(m+4) - 16\mu \right) \left(\alpha bk^2v^2\epsilon(\lambda^2 - 4\mu) + 2\sigma \right)}{8\beta\rho(m+2)^2}, \quad (4.1.12)$$

$$(m = k\lambda(x - ct) + EE\lambda).$$



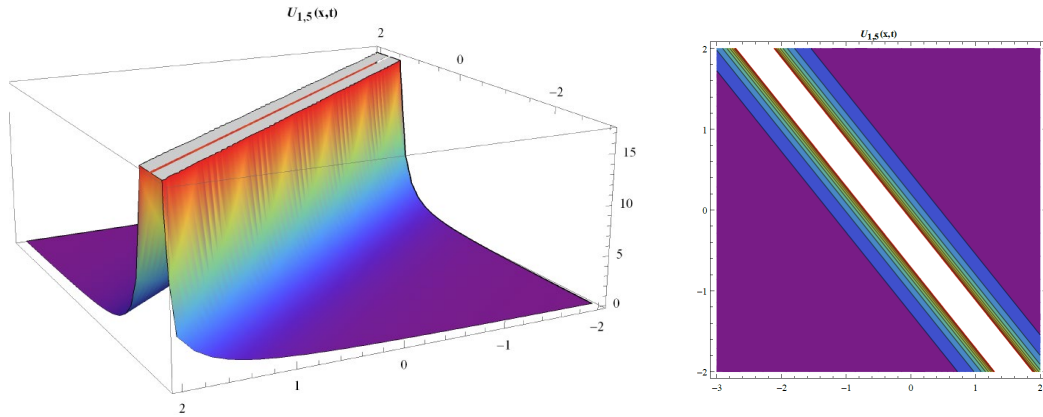


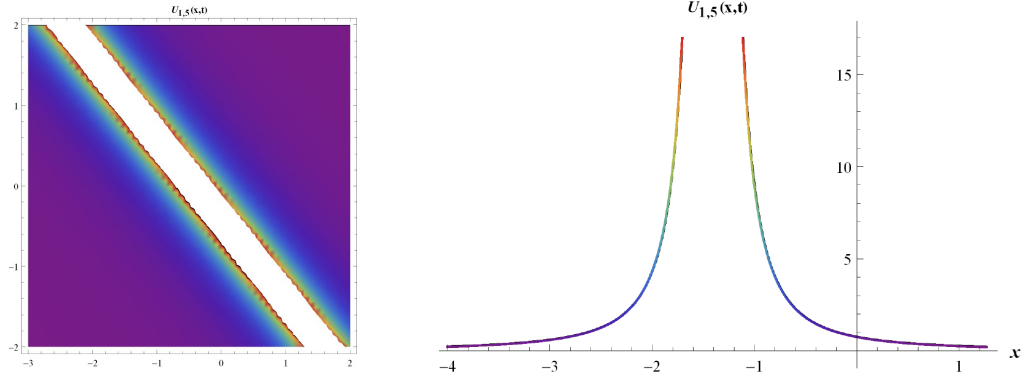
Şekil 4.4 (4.1.12) çözümünün $\mu = 1, \lambda = 2, k = 2, \nu = 1, b = 0.5, \alpha = 1, \sigma = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, c = -1, d = 1, EE = 0.82$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 5

$\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ koşuluyla fanus biçimli bright(parlak) singular(tekil) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,5} = -\frac{3k^2\sigma\nu^2}{\beta\rho(k(x-ct) + EE)^2}. \quad (4.1.13)$$





Şekil 4.5 (4.1.13) çözümünün $\mu = 0, \lambda = 0, k = 2, v = 1, b = 0.5, \alpha = 1, \sigma = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, c = -1, d = 1, EE = 0.82$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

2.Durum:

$$A_0 = \frac{B_0 k^2 v^2 (\lambda^2 + 2\mu) (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{4\beta\rho},$$

$$A_1 = \frac{1}{6} \left(A_3 (\lambda^2 + 2\mu) + \frac{9B_0 k^2 \lambda v^2 (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{\beta\rho} \right),$$

$$A_2 = A_3 \lambda + \frac{3B_0 k^2 v^2 (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{2\beta\rho},$$

$$B_1 = \frac{2A_3 \beta\rho}{3\alpha b k^4 v^4 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 6k^2 \sigma v^2},$$

$$d = -\frac{4\alpha b \rho}{\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma},$$

$$c = -\frac{\sqrt{2\sigma - \alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{2}\sqrt{\rho}}.$$

Bu katsayılara göre,

$$u_2(\xi) = \frac{k^2 v^2 e^{-2\xi} (e^{2\xi} (\lambda^2 + 2\mu) + 6\lambda e^\xi + 6) (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{4\beta\rho}, \quad (4.1.14)$$

çözüm fonksiyonu $\mathcal{G}(\xi)$ ya bağlı olarak elde edilmiştir. Bu çözüm fonksiyonunun GÜFM'nun çözüm ailelerine göre halleri, dalga dönüşümü tersine uygulanarak ξ değişkenine bağlı olmaktan çıkarılıp tekrardan x ve t değişkenlerine bağlı hale

getirilip (4.1.2) denklemini sağlayıp sağlamadığı Mathematica ile kontrol edilmiş ve bulunan fonksiyonun (4.1.2) matematiksel modelini sağladığı teyit edilmiştir. Böylece her bir ailede lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem için birer adet ilerleyen dalga çözümü elde edilmiştir. Bulunan çözüm fonksiyonlarındaki parametrelere ailelerin şartlarına uygun değerler verilerek grafikleri belirlenmiş ve böylece çözümlerin dalga yapıları hakkında yorumlar yapılabilmektedir.

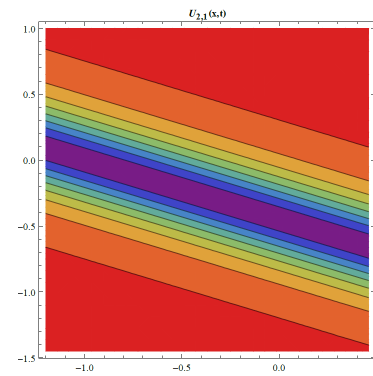
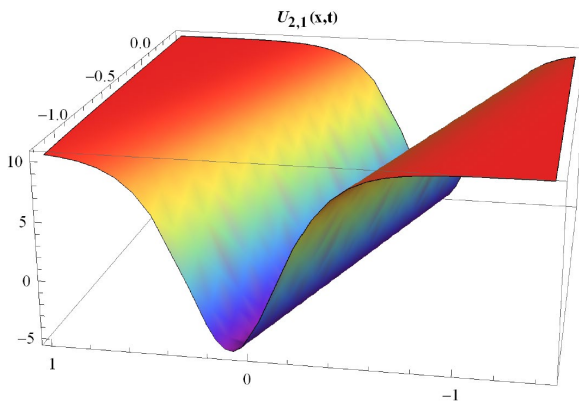
Doubly Dispersive Denkleminin seçilen 2. duruma göre çözüm aileleri aşağıdaki şekildedir.

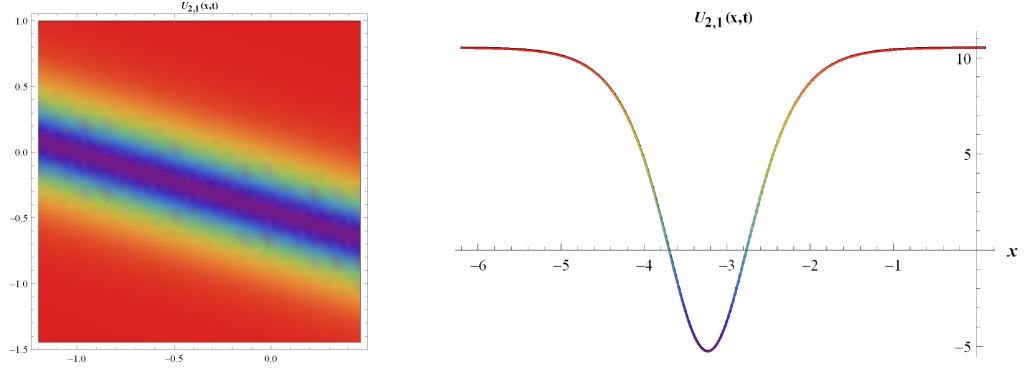
Çözüm Ailesi 1

$\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$ koşuluyla anti-fanus biçimli smooth(pürüzsüz) dark(karanlık) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,1} = \frac{k^2 v^2 \eta (\alpha b k^2 v^2 \epsilon \eta - 2\sigma) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\omega\right) \left(\lambda \eta \sinh(\omega) + (\lambda^2 - 2\mu) \cosh(\omega) - 4\mu\right)}{\left(4\beta\rho \left(\sqrt{\eta} \tanh\left(\frac{1}{2}\omega\right) + \lambda\right)\right)^2},$$

$$\left(\eta = \lambda^2 - 4\mu, \omega = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (k(x - ct) + EE)\right). \quad (4.1.15)$$





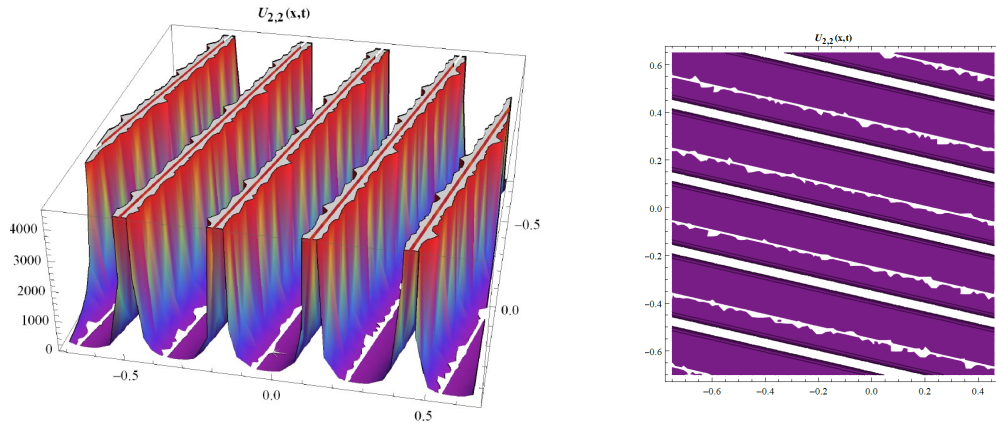
Şekil 4.6 (4.1.15) çözümünün $\mu = 0.5$, $\lambda = 2$, $k = 2$, $\nu = 1$, $b = 0.5$, $\alpha = -1$, $\epsilon = 2$, $\rho = 1$, $\beta = -2$, $\sigma = 1.27$, $c = -2.23607$, $d = -0.2$, $EE = 0.75$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

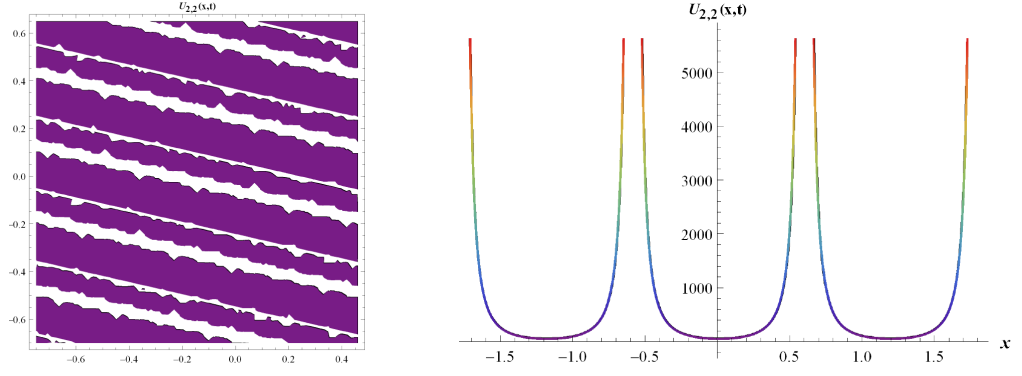
Çözüm Ailesi 2

$\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$ koşuluyla periyodik fanus biçimli singular(tekil) bright(parlak) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,2} = \frac{k^2 \nu^2 \eta (\alpha b k^2 \nu^2 \epsilon \eta - 2\sigma) \sec^2\left(\frac{1}{2}\tau\right) \left(-\lambda \sqrt{-\eta} \sin(\tau) + (\lambda^2 - 2\mu) \cos(\tau) - 4\mu\right)}{4\beta\rho \left(\lambda - \sqrt{-\eta} \tan\left(\frac{1}{2}\tau\right)\right)^2},$$

$$\left(\eta = \lambda^2 - 4\mu, \tau = \sqrt{4\mu - \lambda^2} (k(x - ct) + EE)\right). \quad (4.1.16)$$



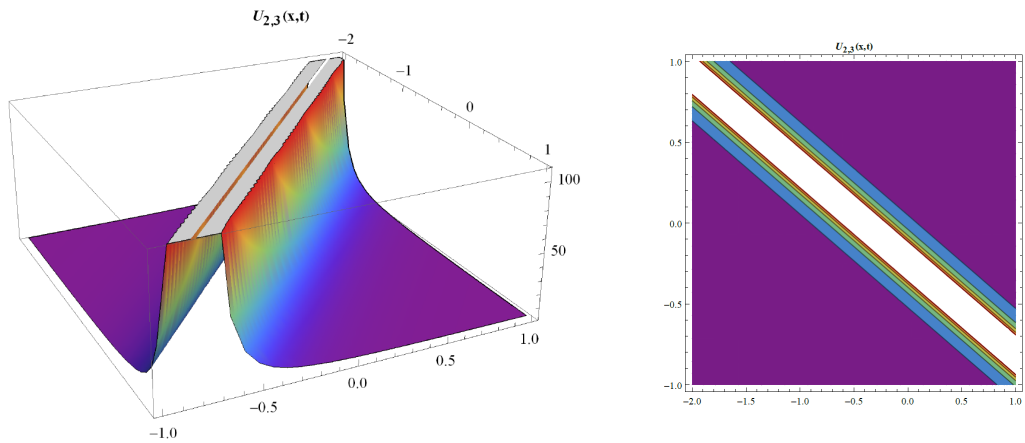


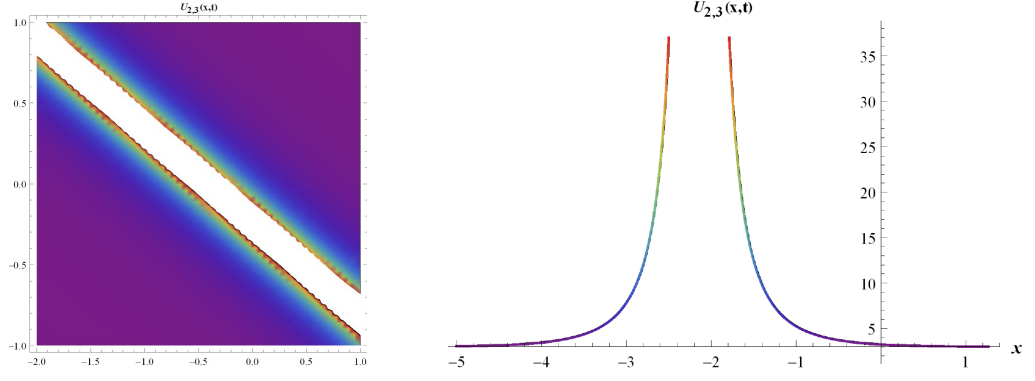
Şekil 4.7 (4.1.16) çözümünün $\mu = 2, \lambda = 1, k = 2, v = 1, b = 0.5, \alpha = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, \sigma = 1.27, c = -3.90768, d = 0.065488, EE = 0.75$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 3

$\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ koşuluyla fanus biçimli bright(parlak) singular(tekil) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,3} = \frac{k^2 \lambda^2 v^2 \left(\alpha b k^2 \lambda^2 v^2 \epsilon - 2\sigma \right) \left(\cosh(\lambda(k(x-ct) + EE)) + 2 \right) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{1}{2} \lambda(k(x-ct) + EE) \right)}{8\beta\rho}. \quad (4.1.17)$$





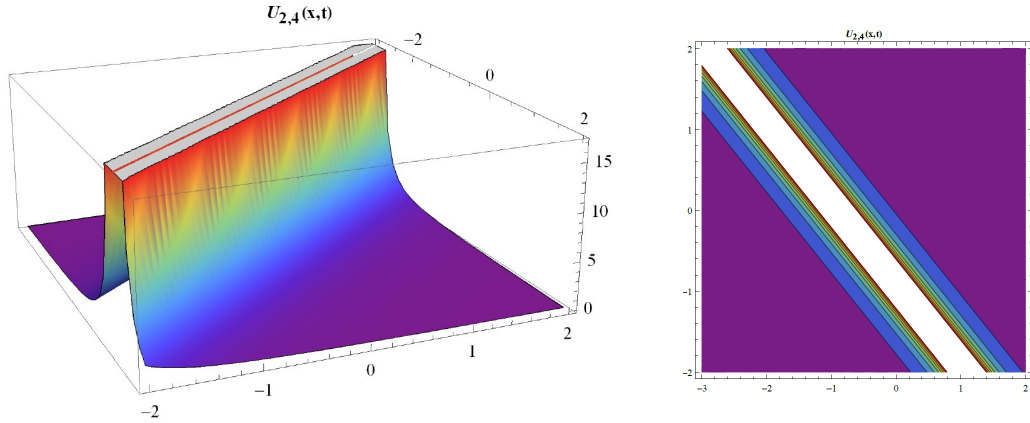
Şekil 4.8 (4.1.17) çözümünün $\mu = 0, \lambda = 1, k = 2, v = 1, b = 0.5, \alpha = -1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, \sigma = 1, c = -1.73205, d = -0.3, EE = 0.82$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

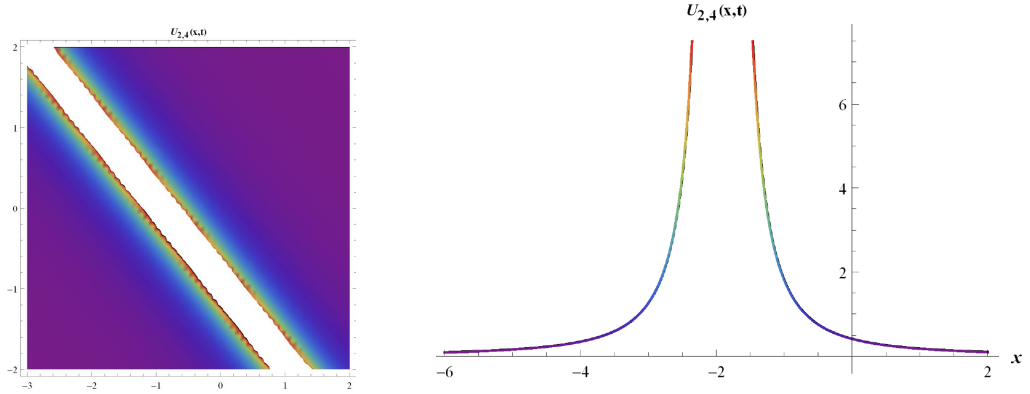
Çözüm Ailesi 4

$\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ koşuluyla fanus biçimli bright(parlak) singular(tekil) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,4} = -\frac{k^2 v^2 (\lambda^2 \omega(\omega + 4) - 8) - 4\mu(\omega + 2)^2 (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{8\beta\rho(\omega + 2)^2},$$

$$(\omega = k\lambda(x - ct) + EE\lambda). \quad (4.1.18)$$



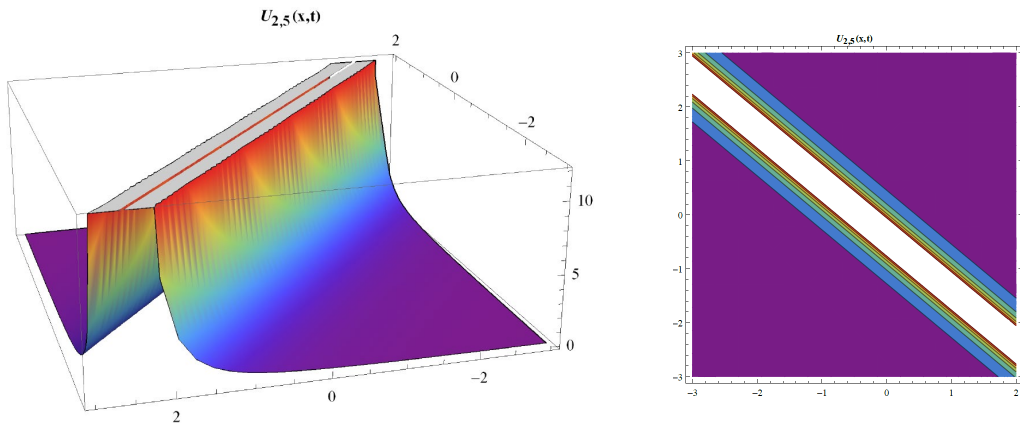


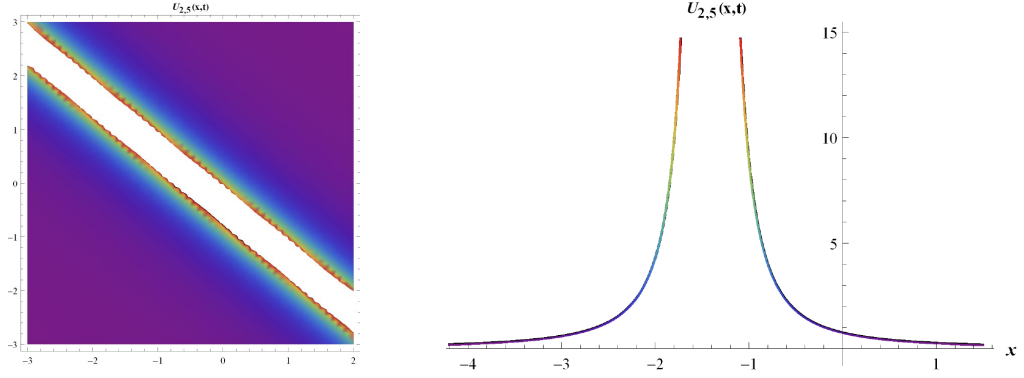
Şekil 4.9 (4.1.18) çözümünün $\mu = 1, \lambda = 2, k = 2, v = 1, b = 0.5, \alpha = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, \sigma = 1, c = -1, d = 1, EE = 0.82$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 5

$\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ koşuluyla fanus biçimli bright(parlak) singular(tekil) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,5} = -\frac{3k^2\sigma v^2}{\beta\rho(k(x-ct) + EE)^2}. \quad (4.1.19)$$





Şekil 4.10 (4.1.19) çözümünün $\mu = 0, \lambda = 0, k = 2, v = 1, b = 0.5, \alpha = 1, \epsilon = 2, \rho = 1, \beta = -2, \sigma = 1, c = -1, d = 1, EE = 0.82$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

3.Durum:

$$A_0 = \frac{B_0 k^2 v^2 (\lambda^2 + 2\mu) (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{4\beta\rho},$$

$$A_1 = \frac{1}{6} \left(A_3 (\lambda^2 + 2\mu) + \frac{9B_0 k^2 \lambda v^2 (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{\beta\rho} \right),$$

$$A_2 = A_3 \lambda + \frac{3B_0 k^2 v^2 (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{2\beta\rho},$$

$$B_1 = \frac{2A_3 \beta\rho}{3\alpha b k^4 v^4 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 6k^2 \sigma v^2},$$

$$d = -\frac{4\alpha b \rho}{\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma},$$

$$c = \frac{\sqrt{2\sigma - \alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu)}}{\sqrt{2}\sqrt{\rho}}.$$

Bu katsayılar göre,

$$u_3 = \frac{k^2 v^2 e^{-2g} (e^{2g} (\lambda^2 + 2\mu) + 6\lambda e^g + 6) (\alpha b k^2 v^2 \epsilon (\lambda^2 - 4\mu) - 2\sigma)}{4\beta\rho}. \quad (4.1.20)$$

Sonuç olarak durum 2'deki çözüm fonksiyonu ile aynı fonksiyon olduğu gözlemlenmiştir.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem olan Doubly dispersive denkleminde modifiye edilmiş üstel fonksiyon metodu ile elde edilen ilerleyen dalga

çözümleri bu şekilde iken buradan itibaren genelleştirilmiş Kudryasov metot yardımıyla tam çözümler araştırılmıştır.

4.1.2 Genelleştirilmiş Kudryashov metotla çözüm

GÜFM ile çözümün başlangıcında dalga dönüşümüyle elde edilen (4.1.6) denkleminin çözüm kabulü bu metotta (3.2.1) olarak alınır. Yine dengeleme prensibi uygulanırsa

$$u'' \approx u^2$$

$$M - N - 2 \approx 2M - 2N$$

$$M = 1 \quad \text{için} \quad N = 3$$

olur ve bu sınırlar (3.2.1)'de yerine yazılarak aşağıdaki $u(\xi)$ oluşturulmuştur:

$$u(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3}{b_0 + b_1 Q}. \quad (4.1.21)$$

Bu çalışmada (4.1.21) çözüm kabulü $Y = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3$, $\Psi = b_0 + b_1 Q$ olacak şekilde $u(\xi) = \frac{Y}{\Psi}$ olarak düzenlenip $Q'_\xi = Q^2 - Q$ ve $Q(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ eşitlikleri de hesaba katılarak elde edilen türevler ve metodun çözüm kabulü $u(\xi) = \frac{Y}{\Psi}$ çözüm fonksiyonu Mathematica paket programı yardımıyla (4.1.6)'da yerine yazılıp Q fonksiyonuna bağlı sıfır polinomu elde edilmiştir. Bu polinomdaki aynı dereceden terimlerin, kuvvetlerine göre paranteze alınıp katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle meydana gelecek cebirsel denklem sisteminin farklı katsayı kombinasyonlarına göre çözülüşü katsayılar arasındaki bağıntılar için bir çok farklı opsiyon sunmuştur. Bu opsiyonlar arasından seçilmiş olanları farklı durumlar olarak ele alınmış, bu durumlardaki katsayı bağıntılarından faydalanılarak farklı u ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir.

Bu bölümde (4.1.2) denklemini için GKM ile dört farklı duruma göre elde edilen çözüm fonksiyonları ve grafikleri şu şekildedir.

1. Durum:

$$\begin{aligned}A_0 &= 0, \\A_1 &= \frac{B_1(\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d^2 \epsilon}, \\A_2 &= \frac{6B_1(d \sigma - \alpha b \rho)}{\beta d^2 \epsilon}, \\A_3 &= \frac{6B_1(\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d^2 \epsilon}, \\B_0 &= 0, \\c &= \frac{\sqrt{\alpha b \rho + d \sigma}}{\sqrt{2} \sqrt{d} \sqrt{\rho}}, \\k &= \frac{\sqrt{2} \sqrt{\rho}}{\sqrt{d} v \sqrt{\epsilon}},\end{aligned}\tag{4.1.22}$$

katsayılarına göre (4.1.6) denklemini için (4.1.21) çözüm fonksiyonu;

$$u_1(\xi) = \frac{(6(Q(\xi) - 1)Q(\xi) + 1)(\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d^2 \epsilon},\tag{4.1.23}$$

şeklinde ortaya çıkmaktadır. Akabinde (4.1.23) çözüm fonksiyonu için $Q'_\xi = Q^2 - Q$

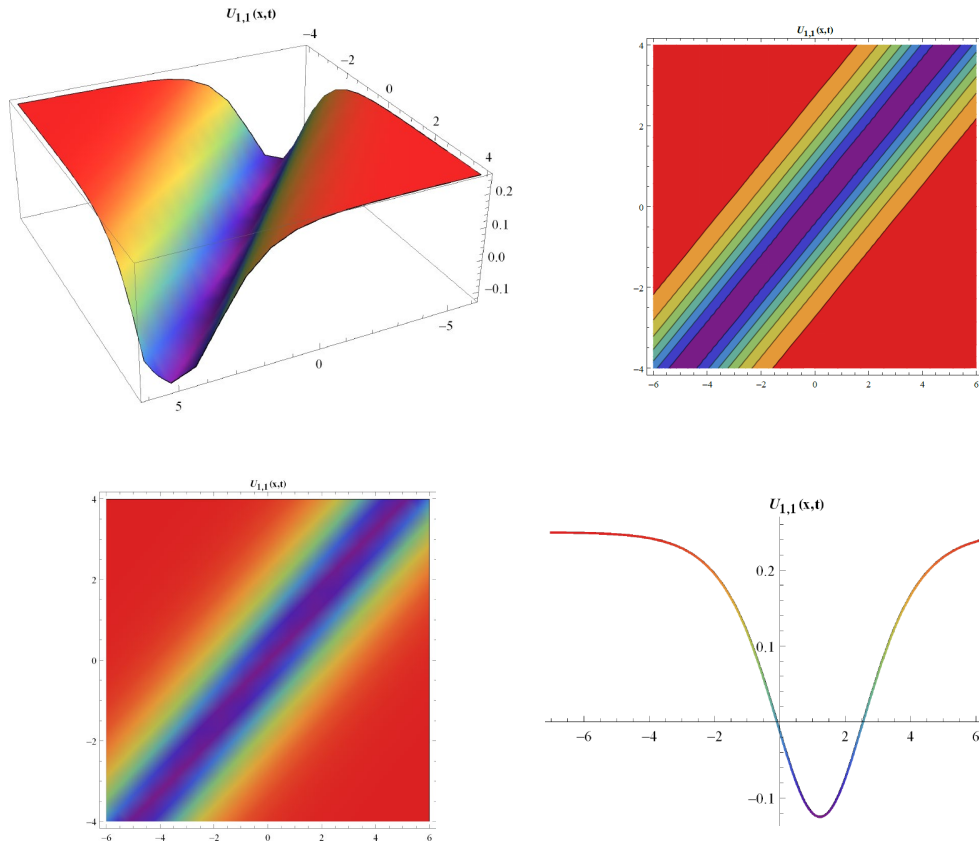
denkleminde elde edilen $Q(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ fonksiyonu, $Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ve

$Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\xi}{2}\right)$ şeklinde alınır iki farklı çözüm ailesi elde edilir. (4.1.23)

fonksiyonu her iki aileye göre baştaki dalga dönüşümü de dikkate alınarak revize edilip ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiş, bulunan çözümlerin (4.1.2) denklemini sağladığı Mathematica programı yardımıyla teyit edilmiştir.

Çözüm Ailesi 1 için anti-fanus biçimli smooth(pürüzsüz) dark(karanlık) soliton çözüm;

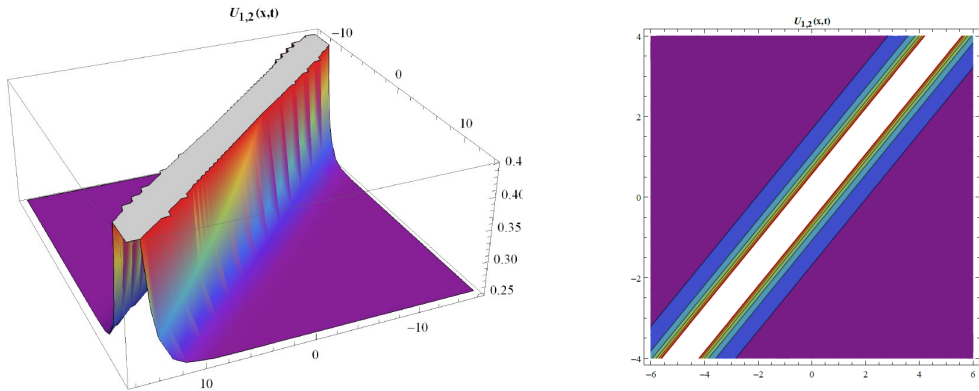
$$u_{1,1}(x, t) = \frac{(\alpha b \rho - d \sigma)(\cosh(k(x - ct)) - 2)}{\beta d^2 \epsilon (\cosh(k(x - ct)) + 1)}.\tag{4.1.24}$$

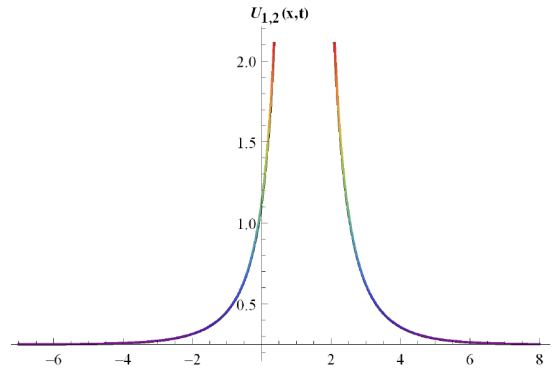
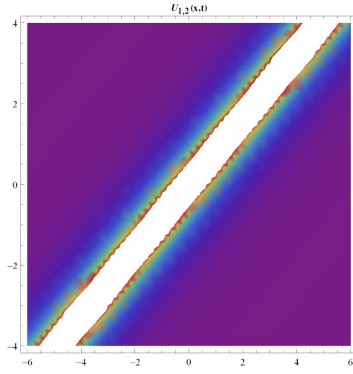


Şekil 4.11 (4.1.24) çözümünün $\alpha = 1, b = 1, \beta = -2, c = \sqrt{\frac{3}{2}}, d = 1, EE = 0.85, k = 1, \rho = 1,$
 $\sigma = 2, \nu = 1, \epsilon = 2$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$
için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2 için fanus biçimli bright(parlak) singular(tekil) soliton çözüm;

$$u_{1,2}(x,t) = \frac{(ab\rho - d\sigma)(\cosh(k(x-ct)) + 2)}{\beta d^2 \epsilon (\cosh(k(x-ct)) - 1)}. \quad (4.1.25)$$





Şekil 4.12 (4.1.25) çözümünün $\alpha = 1$, $b = 1$, $\beta = -2$, $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $d = 1$, $EE = 0.85$, $k = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\epsilon = 2$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

2. Durum:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 0, \\
 A_1 &= 0, \\
 A_2 &= \frac{6B_1(\alpha b \rho - d\sigma)}{\beta d^2 \epsilon}, \\
 A_3 &= \frac{6B_1(d\sigma - \alpha b \rho)}{\beta d^2 \epsilon}, \\
 B_0 &= 0, \\
 c &= \frac{\sqrt{\alpha b \rho + d\sigma}}{\sqrt{2}\sqrt{d}\sqrt{\rho}}, \\
 k &= -\frac{i\sqrt{2}\sqrt{\rho}}{\sqrt{d\nu}\sqrt{\epsilon}},
 \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

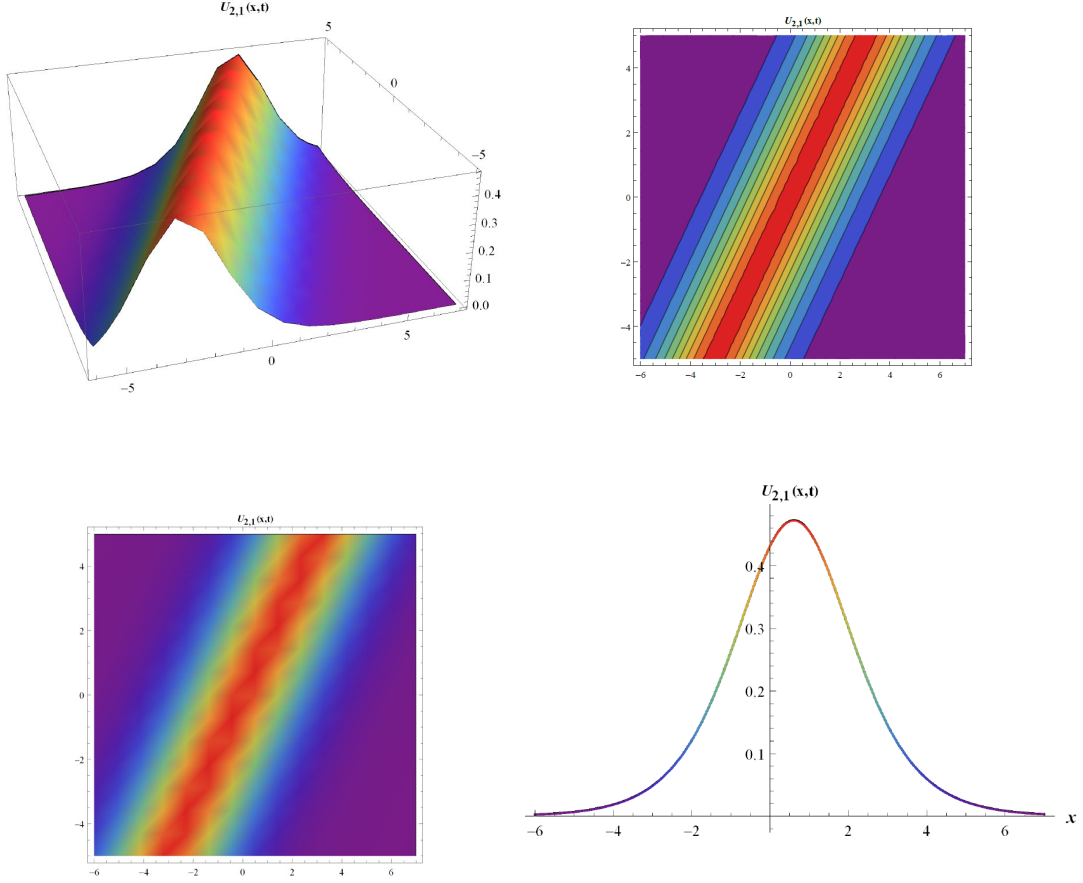
katsayılarına göre (4.1.6) denklemi için (4.1.21) çözüm fonksiyonu;

$$u_2(\xi) = \frac{6(Q(\xi) - 1)Q(\xi)(d\sigma - \alpha b \rho)}{\beta d^2 \epsilon}, \tag{4.1.27}$$

şeklindedir. (4.1.27) fonksiyonu için iki farklı çözüm ailesine göre (4.1.2) denklemini sağladığı teyit edilen ilerleyen dalga çözümleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

Çözüm Ailesi 1 için fanus biçimli smooth(pürüzsüz) bright(parlak) soliton çözüm;

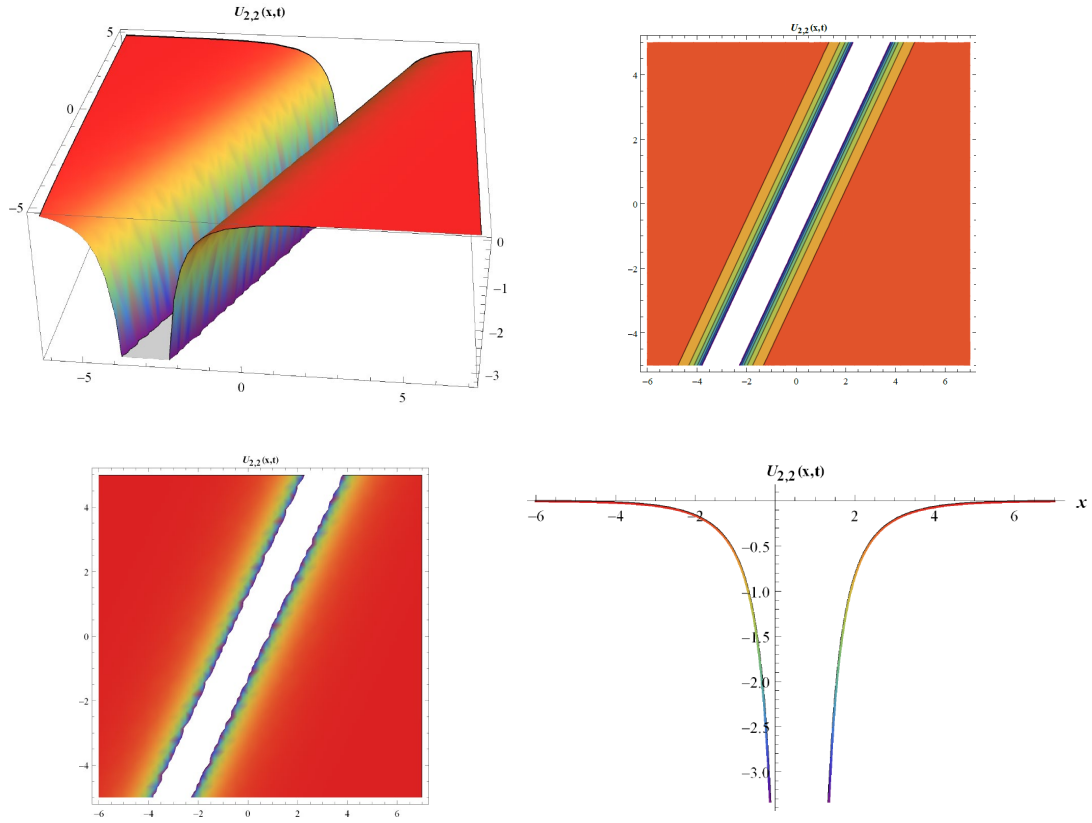
$$u_{2,1}(x,t) = \frac{3(\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d^2 \epsilon (\cosh(k(x-ct)) + 1)}. \quad (4.1.28)$$



Şekil 4.13 (4.1.28) çözümünün $\alpha = 1, b = 0.5, \beta = -2, c = 0.608276, d = 1, k = 1, \rho = -1, \sigma = 0.76, \nu = 1, \epsilon = 2, EE = 0.85$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2 için anti fanus biçimli dark(karanlık) singular(tekil) soliton çözüm;

$$u_{2,2}(x,t) = \frac{3(\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d^2 \epsilon (1 - \cosh(k(x-ct)))}. \quad (4.1.29)$$



Şekil 4.14 (4.1.29) çözümünün $\alpha = 1, b = 0.5, \beta = -2, c = 0.608276, d = 1, k = 1, \rho = -1, \sigma = 0.76, v = 1, \epsilon = 2, EE = 0.85$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

3. Durum:

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \frac{12B_0k^2v^2(ab\rho - d\sigma)}{\beta d(dk^2v^2\epsilon - 2\rho)}, \quad A_2 = \frac{12(B_0 - B_1)k^2v^2(d\sigma - ab\rho)}{\beta d(dk^2v^2\epsilon - 2\rho)},$$

$$A_3 = \frac{12B_1k^2v^2(d\sigma - ab\rho)}{\beta d(dk^2v^2\epsilon - 2\rho)}, \quad c = -\frac{\sqrt{abk^2v^2\epsilon - 2\sigma}}{\sqrt{dk^2v^2\epsilon - 2\rho}},$$
(4.1.30)

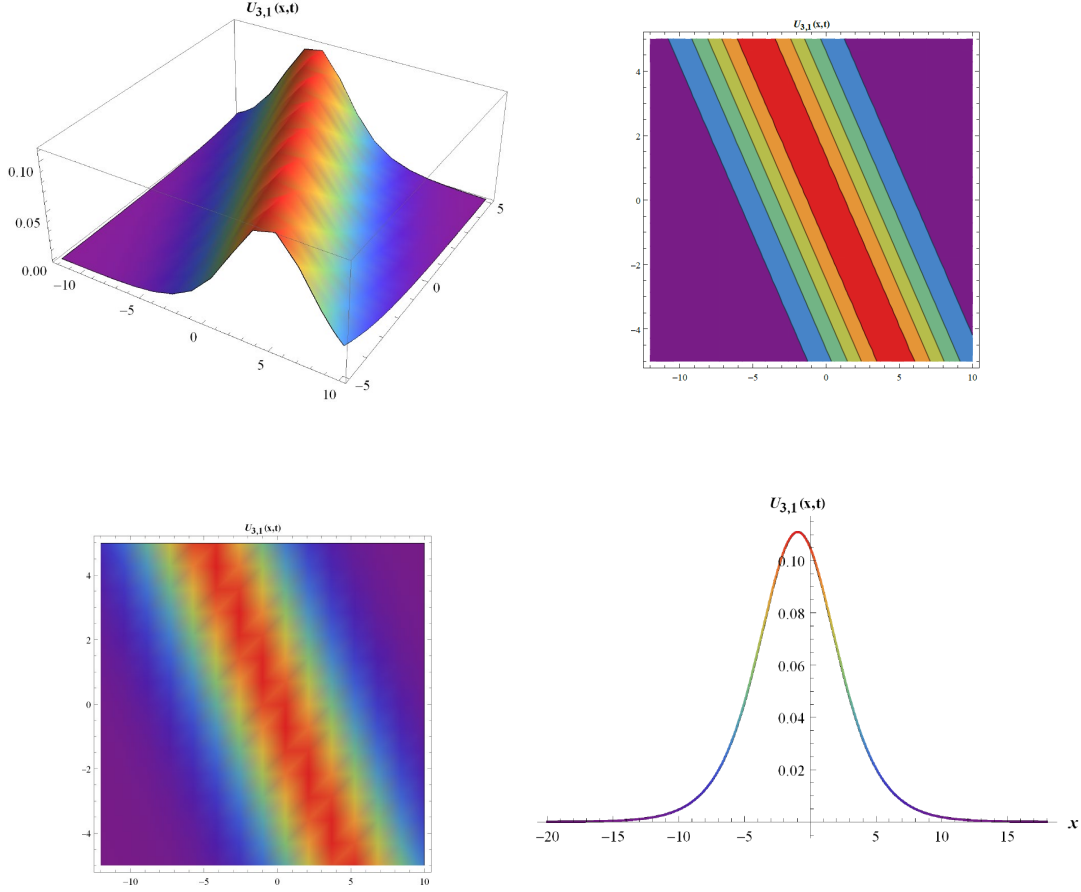
katsayılarına göre (4.1.6) denklemi için (4.1.21) çözüm fonksiyonu;

$$u_3(\xi) = \frac{12k^2v^2(Q(\xi) - 1)Q(\xi)(d\sigma - ab\rho)}{\beta d(dk^2v^2\epsilon - 2\rho)},$$
(4.1.31)

şeklindedir. (4.1.31) fonksiyonu için iki farklı çözüm ailesine göre (4.1.2) denklemini sağladığı teyit edilen ilerleyen dalga çözümleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

Çözüm Ailesi 1 için fanus biçimli smooth(pürüzsüz) bright(parlak) soliton çözüm;

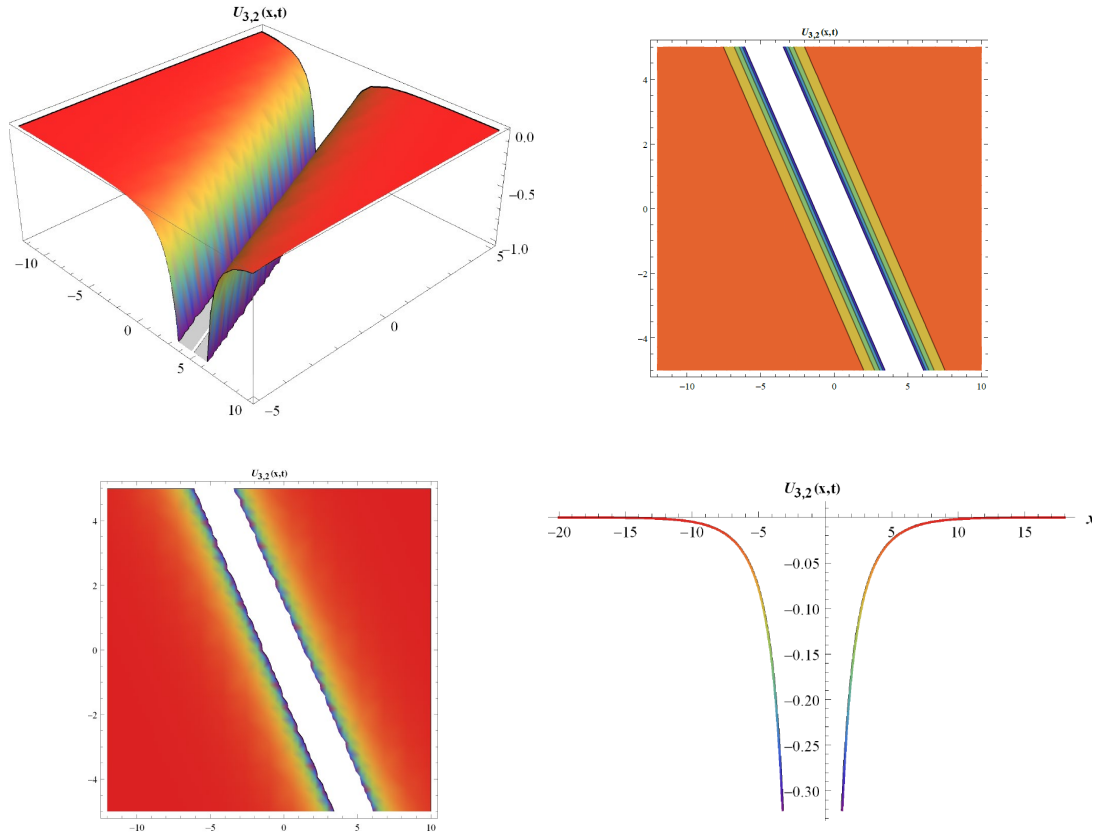
$$u_{3,1}(x,t) = \frac{6k^2v^2(\alpha b\rho - d\sigma)}{\beta d(\cosh(k(x-ct)) + 1)(dk^2v^2\epsilon - 2\rho)}. \quad (4.1.32)$$



Şekil 4.15 (4.1.32) çözümünün $\alpha = 1, b = 1.5, \beta = -2, c = -0.95289, d = 1, k = 0.5, \rho = -1, \sigma = -0.76, v = 1, \epsilon = 2, EE = 0.85$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2 için anti fanus biçimli dark(karanlık) singular(tekil) soliton çözüm;

$$u_{3,2}(x,t) = \frac{3k^2v^2(d\sigma - \alpha b\rho)\operatorname{csch}^2\left(\frac{1}{2}k(x-ct)\right)}{\beta d(dk^2v^2\epsilon - 2\rho)}. \quad (4.1.33)$$



Şekil 4.16 (4.1.33) çözümünün $\alpha = 1, b = 1.5, \beta = -2, c = -0.95289, d = 1, k = 0.5,$
 $\rho = -1, \sigma = -0.76, \nu = 1, \epsilon = 2, EE = 0.85$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat,
yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

4. Durum:

$$A_0 = \frac{2B_0 k^2 v^2 (\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d (dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho)}, A_1 = -\frac{2(B_1 - 6B_0) k^2 v^2 (d\sigma - \alpha b \rho)}{\beta d (dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho)}, A_2 = \frac{12(B_1 - B_0) k^2 v^2 (d\sigma - \alpha b \rho)}{\beta d (dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho)},$$

$$A_3 = \frac{12B_1 k^2 v^2 (\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d (dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho)}, c = -\frac{\sqrt{\alpha b k^2 v^2 \epsilon + 2\sigma}}{\sqrt{dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho}}, \quad (4.1.34)$$

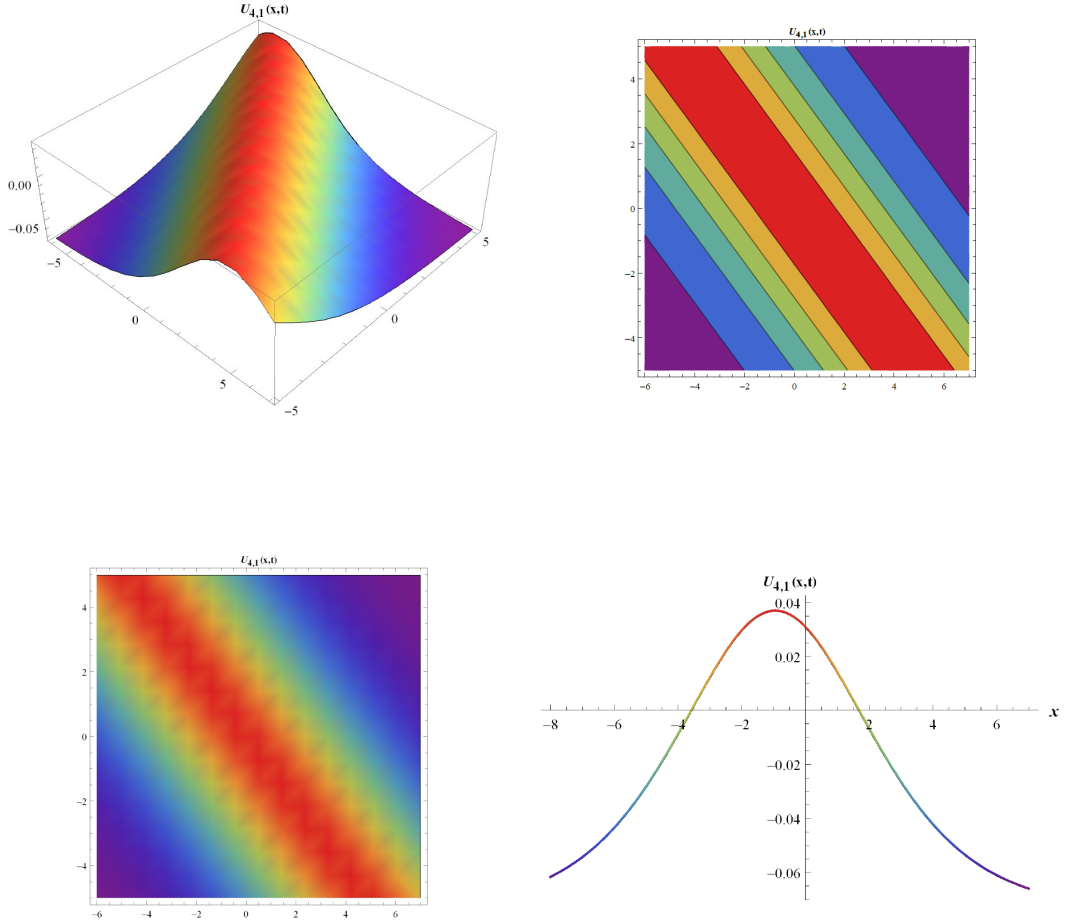
katsayılarına göre (4.1.6) denklemi için (4.1.21) çözüm fonksiyonu;

$$u_4(\xi) = \frac{2k^2 v^2 (6(Q(\xi) - 1)Q(\xi) + 1)(\alpha b \rho - d \sigma)}{\beta d (dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho)}, \quad (4.1.35)$$

şeklindedir. (4.1.35) fonksiyonu için iki farklı çözüm ailesine göre (4.1.2) denklemini sağladığı teyit edilen ilerleyen dalga çözümleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

Çözüm Ailesi 1 için fanus biçimli smooth(pürüzsüz) bright(parlak) soliton çözüm;

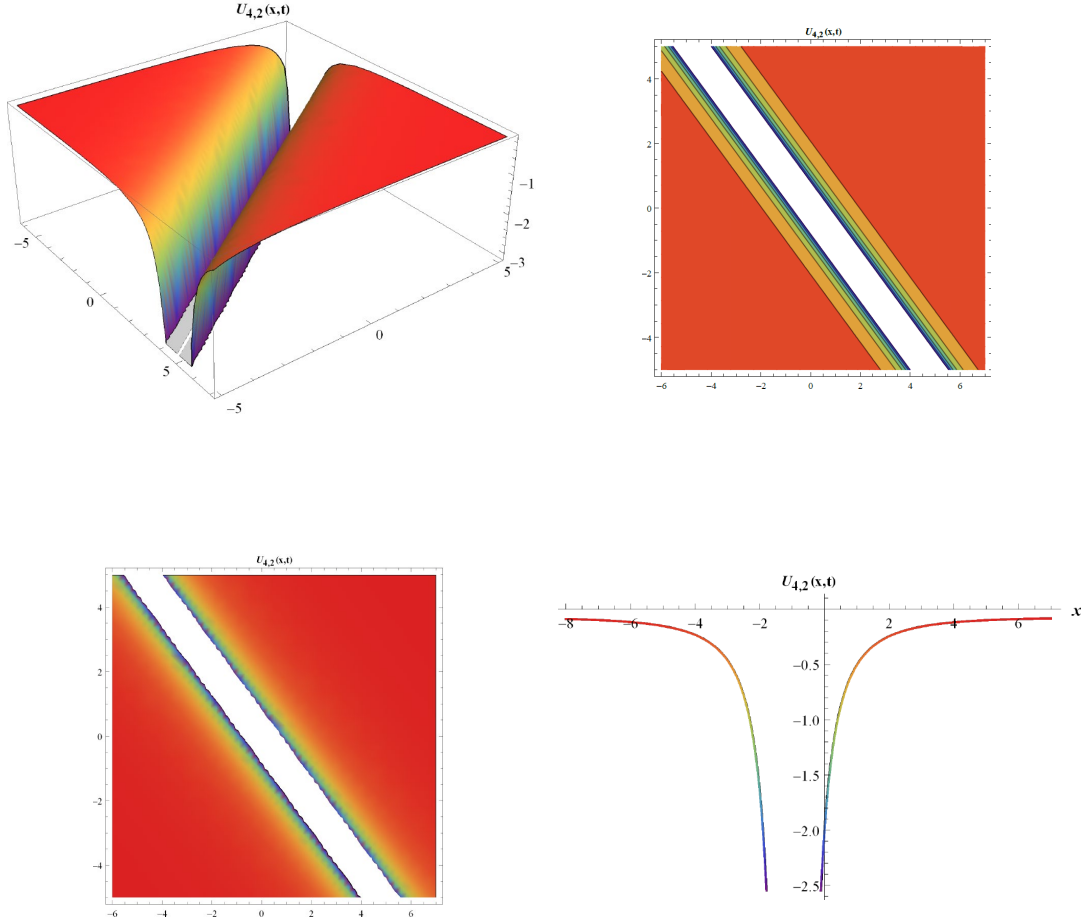
$$u_{4,1}(x,t) = \frac{k^2 v^2 (\alpha b \rho - d \sigma) (\cosh(k(x-ct)) - 2) \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}k(x-ct)\right)}{\beta d (dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho)}. \quad (4.1.36)$$



Şekil 4.17 (4.1.36) çözümünün $\alpha = 1, b = 1.5, \beta = -2, c = -0.95289, d = 1, k = 0.5, \rho = 1, \sigma = 0.76, v = 1, \epsilon = 2, EE = 0.85$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2 için anti fanus biçimli dark(karanlık) singular(tekil) soliton çözüm;

$$u_{4,2}(x,t) = \frac{k^2 v^2 (\alpha b \rho - d \sigma) (\cosh(k(x-ct)) + 2) \operatorname{csch}^2\left(\frac{1}{2}k(x-ct)\right)}{\beta d (dk^2 v^2 \epsilon + 2\rho)}. \quad (4.1.37)$$



Şekil 4.18 (4.1.37) çözümünün $\alpha = 1, b = 1.5, \beta = -2, c = -0.95289, d = 1, k = 0.5, \rho = 1, \sigma = 0.76, v = 1, \epsilon = 2, EE = 0.85$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t=1$ için iki boyutlu grafiği

4.2 (2+1) Boyutlu İntegro-Differential Jaulent-Miodek Evolution Denklemi

Bu bölümde, enerjiye bağlı Schrödinger potansiyelleri ile ilişkili (2+1) boyutlu İntegro-Differential Jaulent-Miodek Evolution denkleminin dalga çözümleri öncelikle geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılarak ardından da genelleştirilmiş Kudryashov metot kullanılarak araştırılmıştır. Yoğun madde fiziği, akışkanlar dinamiği, optik gibi branşlarda karşılaşılan bu denklem aşağıdaki gibidir (Kaewta ve ark., 2020):

$$d_1 u_{xt} + d_2 (u_x)^2 u_{xx} - u_{xxxx} - d_3 u_y u_{xx} - d_4 u_x u_{xy} + d_5 u_{yy} = 0. \quad (4.2.1)$$

4.2.1 Geliştirilmiş üstel fonksiyon metoduyla çözüm

(4.2.1) lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürmek için mevcut bağımsız değişkenlere istinaden aşağıdaki dalga dönüşümü uygulanmıştır.

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x + y - ct). \quad (4.2.2)$$

(4.2.1) denkleminde gerekli olan kısmi türevli terimler için u çözüm fonksiyonunun (4.2.2) dalga dönüşümüne uğramış halinin türevleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = u' \quad \text{olmak üzere,} \\ u_x &= k \cdot u', \quad u_y = k \cdot u', \quad u_t = -c \cdot k \cdot u', \quad u_{xx} = k^2 \cdot u'', \quad u_{xy} = k^2 \cdot u'', \\ u_{xt} &= -c \cdot k^2 \cdot u'', \quad u_{yy} = k^2 \cdot u'', \quad u_{xxxx} = k^4 \cdot u^{iv}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

(4.2.3)'te bulunan türevler, (4.2.1) denkleminde yerlerine yazılarak aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilmiştir.

$$d_1 (-c) k^2 u'' + d_2 k^4 (u')^2 u'' - k^4 u^{iv} - d_3 k^3 u' u'' - d_4 k^3 u' u'' + d_5 k^2 u'' = 0,$$

uygun sadeleştirme ve düzenlemelerle,

$$-k^2 u^{iv} + d_2 k^2 (u')^2 u'' - (d_3 + d_4) k u' u'' + (d_5 - d_1 c) u'' = 0, \quad (4.2.4)$$

denklemini elde edilmiştir. (4.2.4) denkleminin ξ 'ye göre bir kez belirsiz integrali alınarak

$$-k^2 u''' + d_2 k^2 \frac{(u')^3}{3} - (d_4 + d_3) k \frac{(u')^2}{2} + (d_5 - d_1 c) u' = \zeta, \quad (4.2.5)$$

denklemini bulunmuş, $u' = v$ olarak alınarak (4.2.5)'te yerine yazılmış ve

$$-k^2 v'' + d_2 k^2 \frac{v^3}{3} - (d_4 + d_3)k \frac{v^2}{2} + (d_5 - d_1 c)v = \zeta, \quad (4.2.6)$$

elde edilmiştir. (ζ integral sabiti ve işlem kolaylığı açısından sıfır alınmıştır.)

Bu sadeleştirmeler ve indirgemelerden sonra (4.2.6) denkleminin çözümü olacak $v(\xi)$ 'nin (3.1.4) kabulünün sınırlarını elde etmek için en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en büyük dereceli lineer olmayan terime aşağıdaki şekilde dengeleme prensibi uygulanmış ve

$$\begin{aligned} v'' &\approx v^3 \\ e^{m-n-2} &\approx (e^{m-n})^3 \\ m-n-2 &\approx 3m-3n \\ m=1 \text{ için } n &= 2 \end{aligned}$$

bulunmuştur. Bu sınırlar (3.1.4)'de yerine yazılarak $v(\xi)$ 'nin genel çerçevesi aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

$$v = \frac{A_0 + A_1 e^{-g} + A_2 e^{-2g}}{B_0 + B_1 e^{-g}}. \quad (4.2.7)$$

Buradan itibaren (4.2.6) denkleminin çözüm fonksiyonu arayışına Mathematica programı yardımıyla devam edilmiştir.

(4.2.7)'deki $v(\xi)$ çözüm fonksiyonunun (4.2.6) denklemindeki mertebelere göre türevlerinin hesaplanmasını kolaylaştırmak için $\Upsilon = A_0 + A_1 e^{-g} + A_2 e^{-2g}$,

$\Psi = B_0 + B_1 e^{-g}$ alınarak $v(\xi) = \frac{\Upsilon}{\Psi}$ şeklinde düzenlenmiştir. GÜFM'nin gerek şartı

olan $\mathcal{G}'(\xi) = e^{-g(\xi)} + \mu e^{g(\xi)} + \lambda$ eşitliği hesaba katılarak elde edilen bölümün birinci

ve ikinci türevi formülleri ile $u(\xi)$ fonksiyonu ve $\mathcal{G}'(\xi)$, (4.2.6) denkleminde yerine yazılarak üstel çarpanlara sahip bir denklem elde edilmiştir. Bu denklemin üstel çarpanlarının kuvvetlerine göre paranteze alınmasından sonra aynı kuvvete sahip üstel çarpanların katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle meydana gelen cebirsel denklem sisteminin çözüm kümesi araştırılmış, böylece v çözüm fonksiyonunun katsayıları

arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Üstel çarpanların katsayılarının oluşturduğu denklem sisteminin; dalga dönüşümündeki, (4.2.6) denklemdeki, (4.2.7) fonksiyonundaki ve $\mathcal{G}'(\xi)$ kabulündeki katsayıların farklı kombinasyonlarına göre çözülüşü birçok farklı ‘durum’ ortaya koymuştur. Bu çalışmada (4.2.1) denklemi için (4.2.6) denklemi üzerinden GÜFM’nin çözüm ailelerinin şartlarına da uygun düşecek şekilde üç farklı duruma göre çözüm araştırması yapılmıştır.

1. Durum:

$$A_0 = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{B_0^2 d_2 (\lambda^2 - 4\mu)} + B_0 \sqrt{d_2} \lambda \right)}{d_2},$$

$$A_1 = \frac{1}{2} A_2 \left(\frac{\sqrt{B_0^2 d_2 (\lambda^2 - 4\mu)}}{B_0 \sqrt{d_2}} + \lambda \right) + \frac{\sqrt{6} B_0}{\sqrt{d_2}},$$

$$B_1 = \frac{A_2 \sqrt{d_2}}{\sqrt{6}}, \quad d_4 = \frac{\sqrt{6} k \sqrt{B_0^2 d_2 (\lambda^2 - 4\mu)}}{B_0} - d_3, \quad c = \frac{d_5 - k^2 (\lambda^2 - 4\mu)}{d_1}.$$

Bu durumdaki katsayılarla birlikte gerekli türevler ve (4.2.7), Mathematica programı yardımıyla (4.2.6) denklemde yerine yazılıp,

$$v_1 = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} e^{-g} \left(e^g \sqrt{B_0^2 d_2 (\lambda^2 - 4\mu)} + B_0 \sqrt{d_2} (\lambda e^g + 2) \right)}{B_0 d_2}, \quad (4.2.8)$$

çözüm fonksiyonu $\mathcal{G}(\xi)$ ’ya bağlı olarak elde edilmiştir. Bu çözüm fonksiyonunun GÜFM’nin çözüm ailelerine göre hallerinin Mathematica yardımıyla ξ ‘ye göre bir kez integrali alınarak u çözüm fonksiyonu elde edilmiştir. Bu u çözüm fonksiyonuna dalga dönüşümü tersine uygulanarak ξ değişkenine bağlı olmaktan çıkarılıp tekrardan x, y ve t değişkenlerine bağlı hale getirilerek (4.2.1) lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini sağlayıp sağlamadığı Mathematica ile kontrol edilmiş ve bulunan fonksiyonun (4.2.1) matematiksel modelini sağladığı teyit edilmiştir. Böylece her bir ailede lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem için birer adet ilerleyen dalga çözümü elde edilmiştir. Bulunan çözüm fonksiyonlarındaki

parametrelere ve katsayılara ailelerin şartlarına uygun değerler verilerek grafikleri belirlenmiş ve böylece çözümlerin dalga yapıları hakkında yorumlar yapılabilmektedir.

JM denkleminin seçilen 1. duruma göre çözüm aileleri aşağıdaki şekildedir.

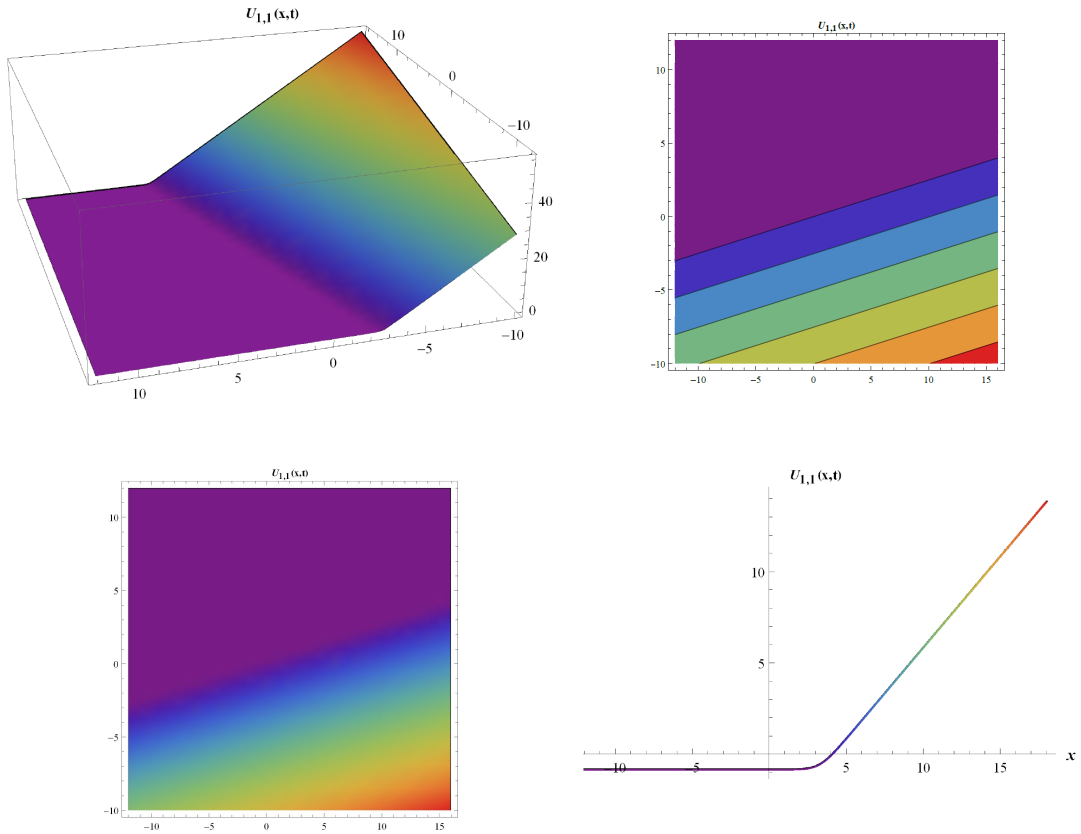
Çözüm Ailesi 1

$$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0, \mathcal{G}(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right)$$

koşuluyla çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(2B_0 \log \left(\sqrt{\tau} \sinh \left(\frac{1}{2} \omega \right) + \lambda \cosh \left(\frac{1}{2} \omega \right) \right) + k \sqrt{B_0^2 \tau} (x + y - ct) \right)}{B_0 \sqrt{d_2}},$$

$$\left(\omega = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (k(x + y - ct) + EE), \tau = \lambda^2 - 4\mu \right). \quad (4.2.9)$$



Şekil 4.19 (4.2.9) çözümünün $c = 4, k = 1, d_1 = -1, d_2 = 30, d_3 = 9, d_4 = 21, d_5 = 1, y = -1, \lambda = 3, \mu = 1, B_0 = 1, EE = 0.82,$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

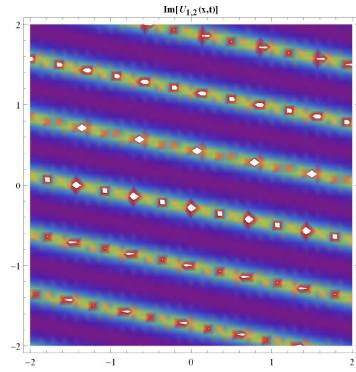
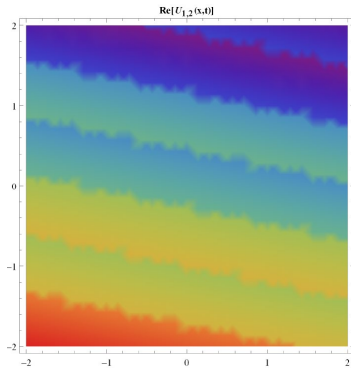
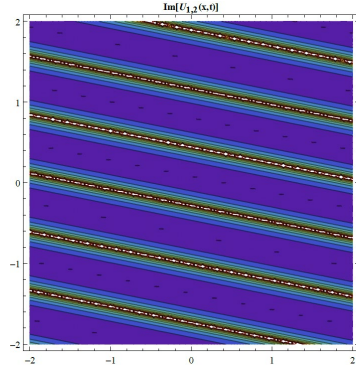
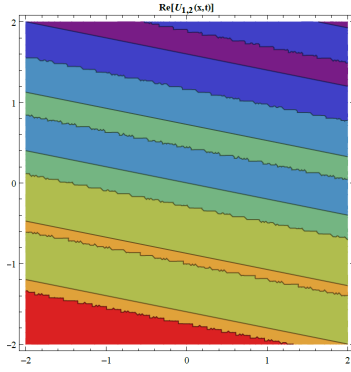
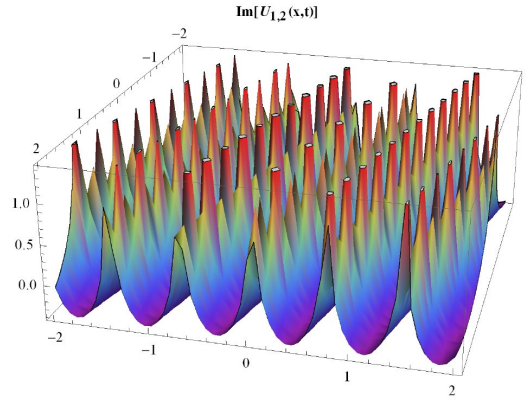
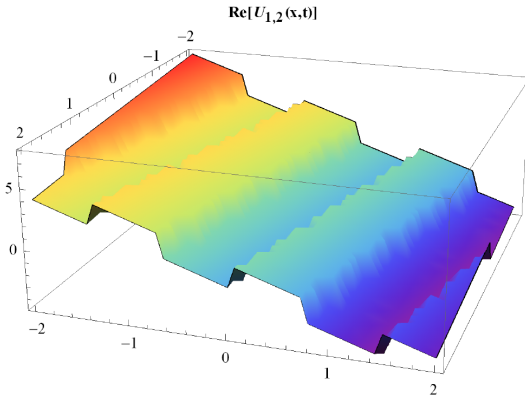
Çözüm Ailesi 2

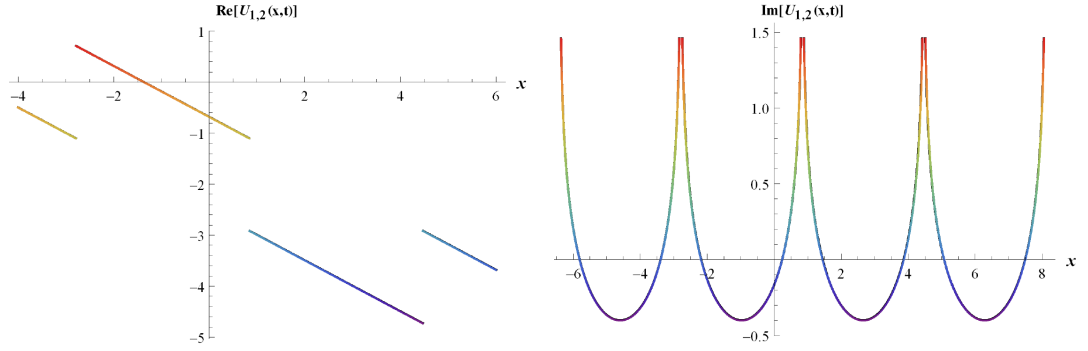
$$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0, \mathcal{G}(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right)$$

koşuluyla periyodik soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(2B_0 \log \left(\sqrt{-\tau} \sin \left(\frac{1}{2} \omega \right) - \lambda \cos \left(\frac{1}{2} \omega \right) \right) + k \sqrt{B_0^2 \tau} (x + y - ct) \right)}{B_0 \sqrt{d_2}},$$

$$\left(\omega = EE + (k(x + y - ct)) \sqrt{4\mu - \lambda^2}, \tau = \lambda^2 - 4\mu \right). \quad (4.2.10)$$





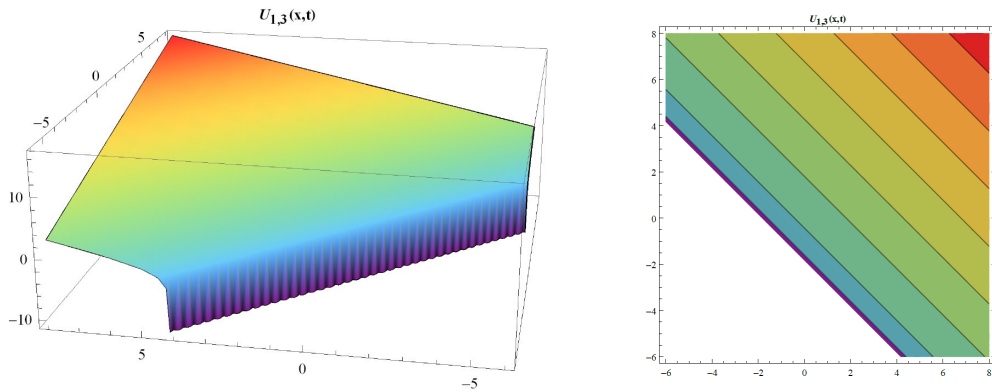
Şekil 4.20 (4.2.10) çözümünün reel ve imajiner kısımlarının $c = -5$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = -18$, $d_3 = 12$, $d_4 = 6$, $d_5 = 2$, $B_0 = 1$, $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $EE = 0.82$, $y = -0.01$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

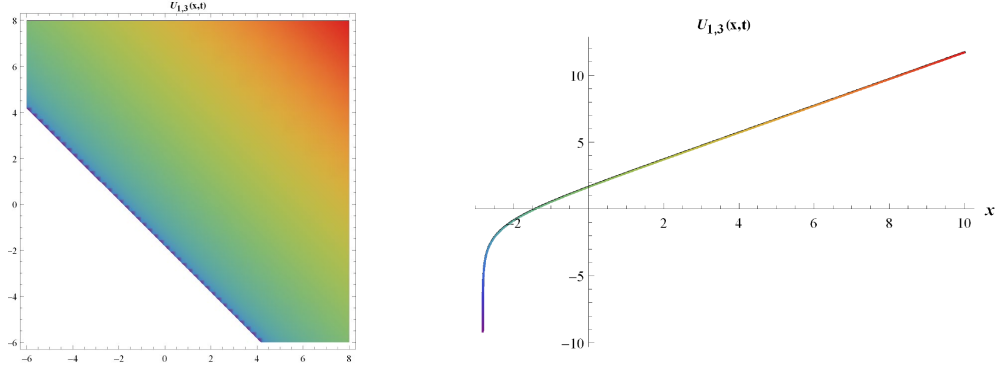
Çözüm Ailesi 3

$$\mu = 0, \lambda \neq 0 \text{ ve } \lambda^2 - 4\mu > 0, \quad \vartheta(\xi) = -\ln\left(\frac{\lambda}{e^{\lambda(\xi)+EE} - 1}\right) \quad \text{koşuluyla}$$

bükülme(kink) solitonu çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,3} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(2B_0 \left(\log \left(\sinh \left(\frac{1}{2} \lambda (k(x+y-ct) + EE) \right) \right) \right) + k\sqrt{B_0^2 \lambda^2} (x+y-ct) \right)}{B_0 \sqrt{d_2}}. \quad (4.2.11)$$





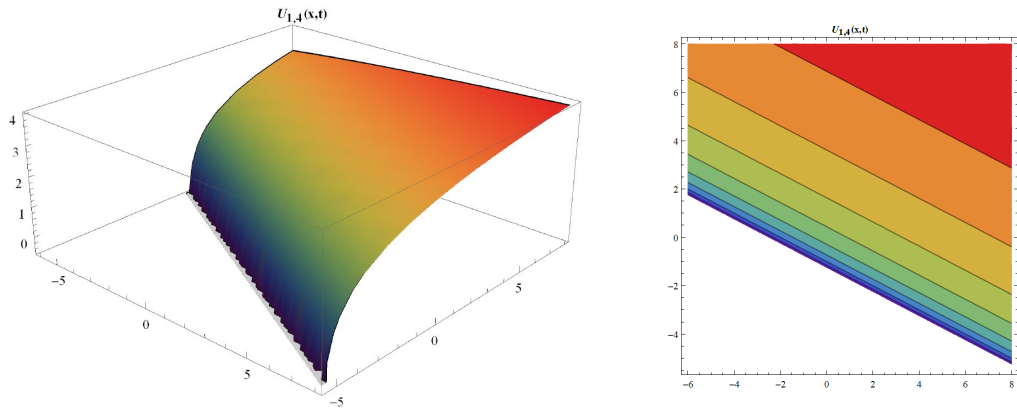
Şekil 4.21 (4.2.11) çözümünün $c = -1, k = 1, d_1 = -1, d_2 = 6, d_3 = 3, d_4 = 3, d_5 = 2, B_0 = 1, \lambda = 1, \mu = 0, EE = 0.82, y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

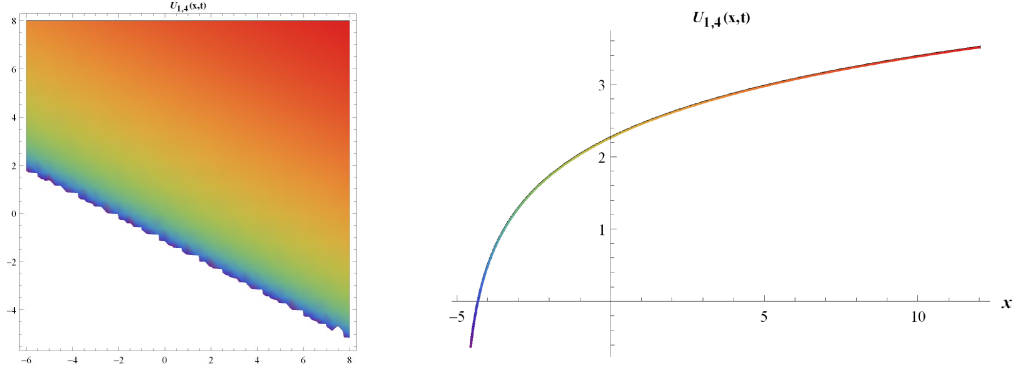
Çözüm Ailesi 4

$$\mu \neq 0, \lambda \neq 0 \text{ ve } \lambda^2 - 4\mu = 0, \quad \mathcal{G}(\xi) = \ln \left(-\frac{2\lambda(EE + \xi) + 4}{\lambda^2(EE + \xi)} \right) \quad \text{koşuluyla}$$

bükülme(kink) solitonu çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,4} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{k\sqrt{B_0^2(\lambda^2 - 4\mu)}(x + y - ct)}{B_0} + 2 \log[k\lambda(x + y - ct) + EE\lambda + 2] \right)}{\sqrt{d_2}}. \quad (4.2.12)$$



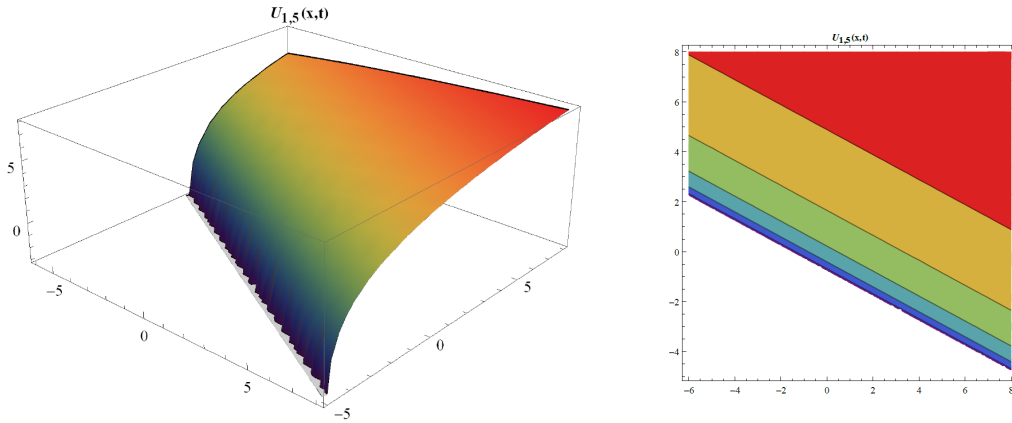


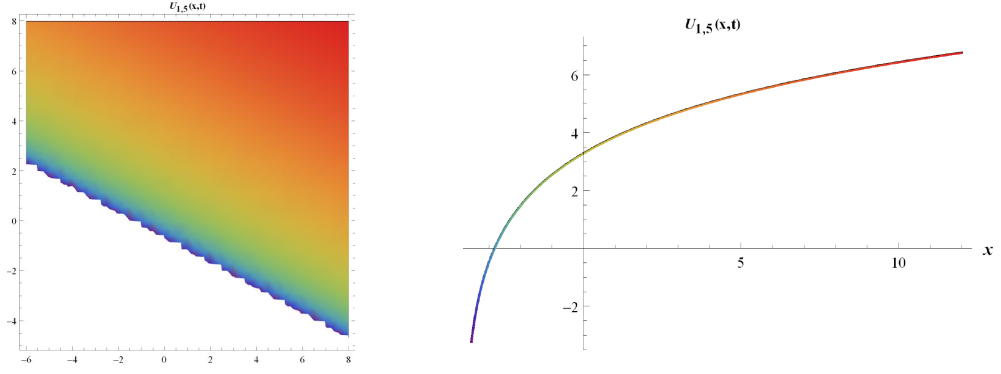
Şekil 4.22 (4.2.12) çözümünün $c = -2$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 6$, $d_3 = 3$, $d_4 = -3$, $d_5 = 2$, $B_0 = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $EE = 0.82$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 5

$\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$, $\mathcal{G}(\xi) = \ln(EE + \xi)$ koşuluyla bükülme(kink) solitonu çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,5} = \frac{\sqrt{6} \log(k(x + y - ct) + EE)}{\sqrt{d_2}}. \quad (4.2.13)$$





Şekil 4.23 (4.2.13) çözümünün $c = -2$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 4$, $d_4 = -4$, $d_5 = 2$, $B_0 = 1$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $EE = 0.82$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

2.Durum:

$$A_0 = -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}B_0\lambda}{\sqrt{d_2}},$$

$$A_1 = \frac{A_2\lambda}{2} - \frac{\sqrt{6}B_0}{\sqrt{d_2}},$$

$$B_1 = -\frac{A_2\sqrt{d_2}}{\sqrt{6}},$$

$$d_4 = -d_3, \quad c = \frac{2d_5 + k^2(\lambda^2 - 4\mu)}{2d_1}.$$

Bu durumdaki katsayılarla birlikte gerekli türevler ve (4.2.7), Mathematica programı yardımıyla (4.2.6) denkleminde yerine yazılıp

$$v_2 = -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\vartheta}(\lambda e^{\vartheta} + 2)}{\sqrt{d_2}}, \quad (4.2.14)$$

çözüm fonksiyonu $\mathcal{G}(\xi)$ 'ya bağlı olarak elde edilmiştir. Bu (4.2.14) çözüm fonksiyonunun GÜFM'nin her bir çözüm ailesine göre hallerinin ξ 'ye göre belirsiz integrali Mathematica yardımıyla alınarak u çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Bu u çözüm fonksiyonlarına dalga dönüşümü tersine uygulanarak ξ değişkenine bağlı olmaktan çıkarılıp tekrardan x , y ve t değişkenlerine bağlı hale getirilmiş hallerinin

lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini sağlayıp sağlamadığı Mathematica ile kontrol edilmiş ve bulunan fonksiyonun (4.2.1) matematiksel modelini sağladığı teyit edilmiştir.

Böylece her bir ailede lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem için birer adet ilerleyen dalga çözümü elde edilmiştir. Bulunan çözüm fonksiyonlarındaki parametrelere, ailelerin şartlarına uygun değerler verilerek grafikleri belirlenmiş ve böylece çözümlerin dalga yapıları hakkında yorumlar yapılabilmektedir.

JM denkleminin seçilen 2. duruma göre çözüm aileleri aşağıdaki şekildedir.

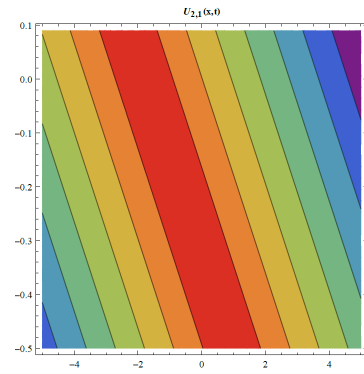
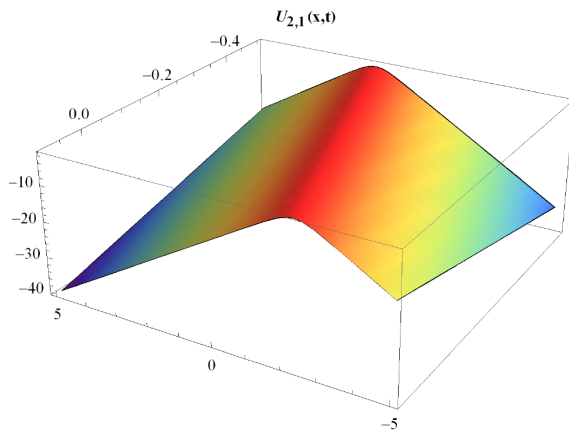
Çözüm Ailesi 1

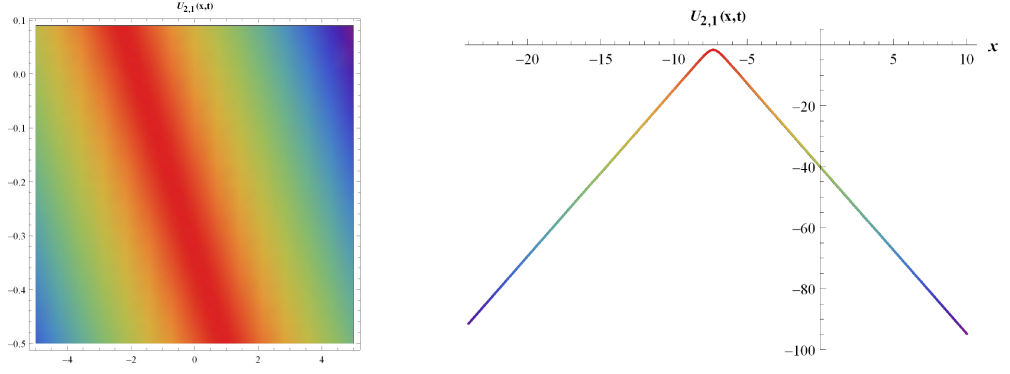
$$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0, \mathcal{G}(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right)$$

koşuluyla çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,1} = - \frac{\sqrt{6} \log \left(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \sinh \left(\frac{1}{2} \omega \right) + \lambda \cosh \left(\frac{1}{2} \omega \right) \right)}{\sqrt{d_2}}, \quad (4.2.15)$$

$$\left(\omega = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (k(x + y - ct) + EE) \right).$$





Şekil 4.24 (4.2.15) çözümünün $c = -2$, $k = 2$, $d_1 = -2$, $d_2 = 1$, $d_3 = 0.3$, $d_4 = -0.3$, $d_5 = 1$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $EE = 0.75$, $B_0 = 0.25$, $A_2 = 0.5$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

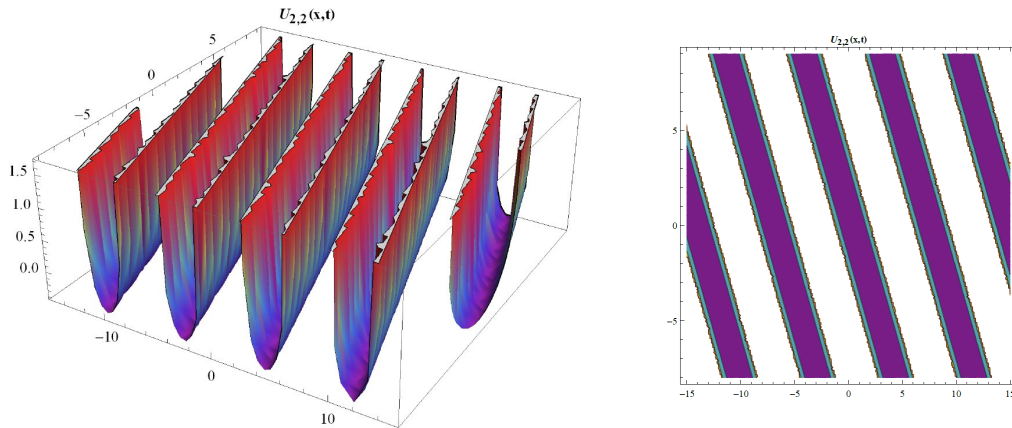
Çözüm Ailesi 2

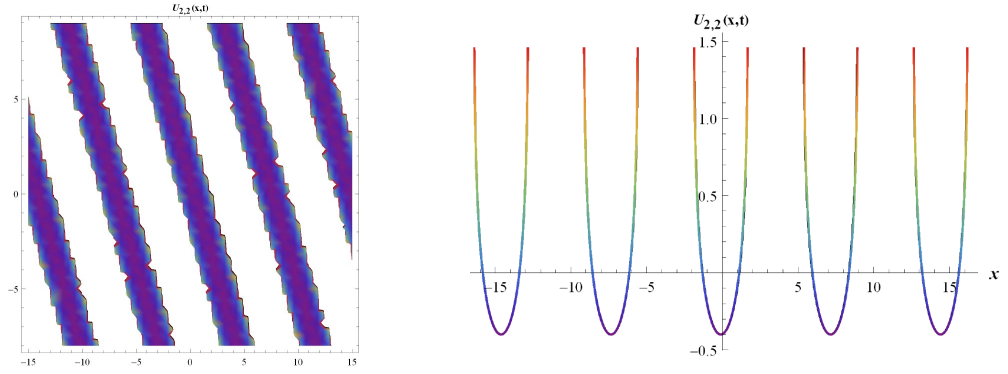
$$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0, \mathcal{G}(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right)$$

koşuluyla fanus biçimli periyodik singular(tekil) bright(parlak) soliton çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,2} = - \frac{\sqrt{6} \log \left(\sqrt{4\mu - \lambda^2} \sin \left(\frac{1}{2} \omega \right) - \lambda \cos \left(\frac{1}{2} \omega \right) \right)}{\sqrt{d_2}},$$

$$(4.2.16) \left(\omega = \sqrt{4\mu - \lambda^2} (k(x + y - ct) + EE) \right).$$





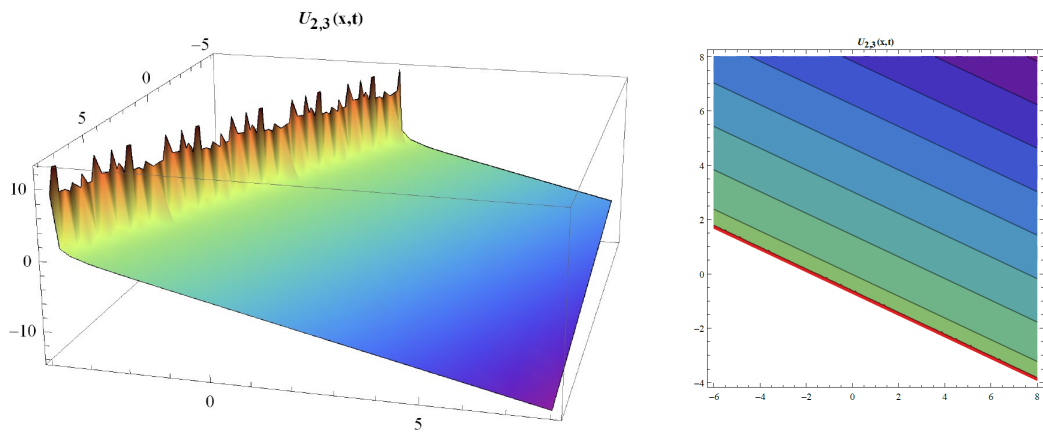
Şekil 4.25 (4.2.16) çözümünün $c = -0.5$, $k = 2$, $d_1 = -1$, $d_2 = 18$, $d_3 = 12$, $d_4 = -12$, $d_5 = 2$, $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $EE = 0.82$, $B_0 = 1$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

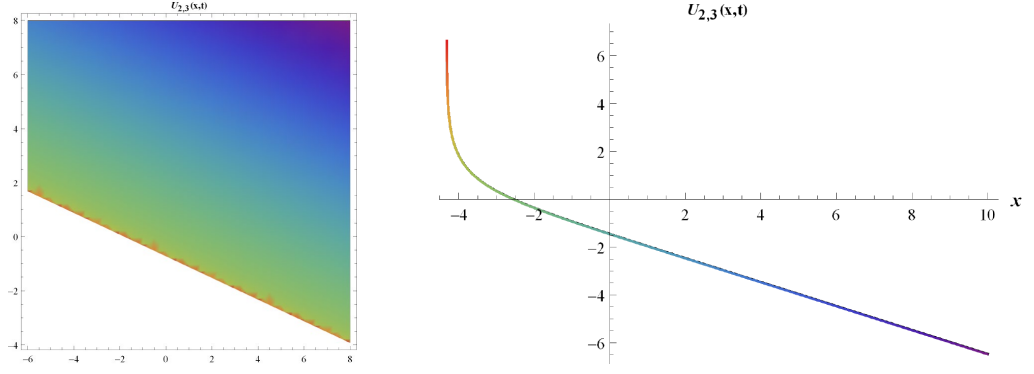
Çözüm Ailesi 3

$$\mu = 0, \lambda \neq 0 \text{ ve } \lambda^2 - 4\mu > 0, \mathcal{G}(\xi) = -\ln\left(\frac{\lambda}{e^{\lambda(\xi) + EE} - 1}\right) \text{ koşuluyla çözüm}$$

fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,3} = \frac{\sqrt{6} \left(\log \left(\sinh \left(\frac{1}{2} (\lambda(k(x+y-ct) + EE)) \right) \right) \right)}{\sqrt{d_2}}. \quad (4.2.17)$$





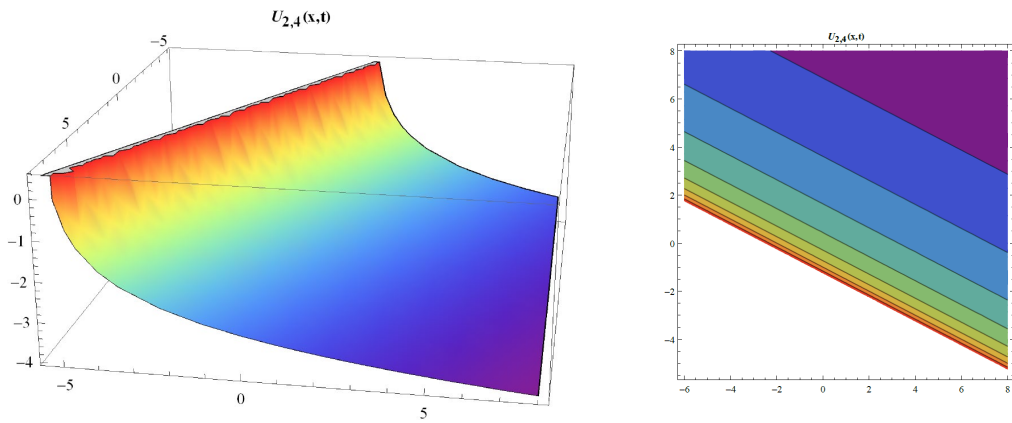
Şekil 4.26 (4.2.17) çözümünün $c = -2.5$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 6$, $d_3 = 3$, $d_4 = -3$, $d_5 = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $EE = 0.82$, $B_0 = 1$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

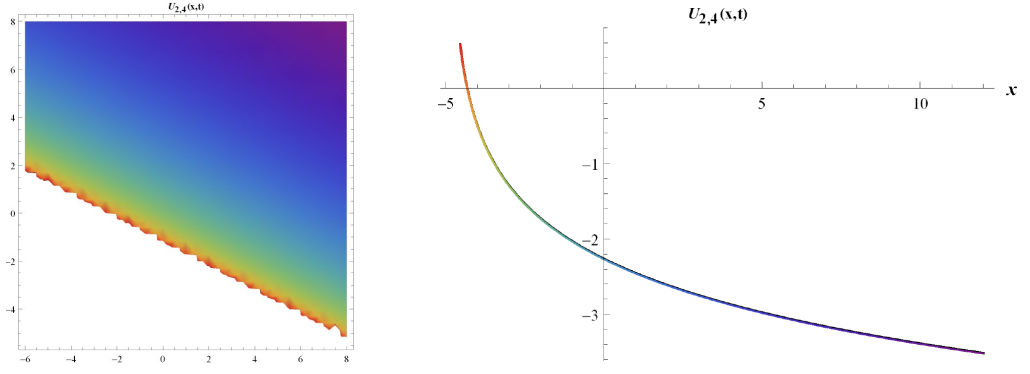
Çözüm Ailesi 4

$$\mu \neq 0, \lambda \neq 0 \text{ ve } \lambda^2 - 4\mu = 0, \quad \vartheta(\xi) = \ln \left(-\frac{2\lambda(EE + \xi) + 4}{\lambda^2(EE + \xi)} \right) \quad \text{koşuluyla}$$

bükülme(kink) solitonu çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,4} = -\frac{\sqrt{6} \log(k\lambda(x + y - ct) + EE\lambda + 2)}{\sqrt{d_2}}. \quad (4.2.18)$$





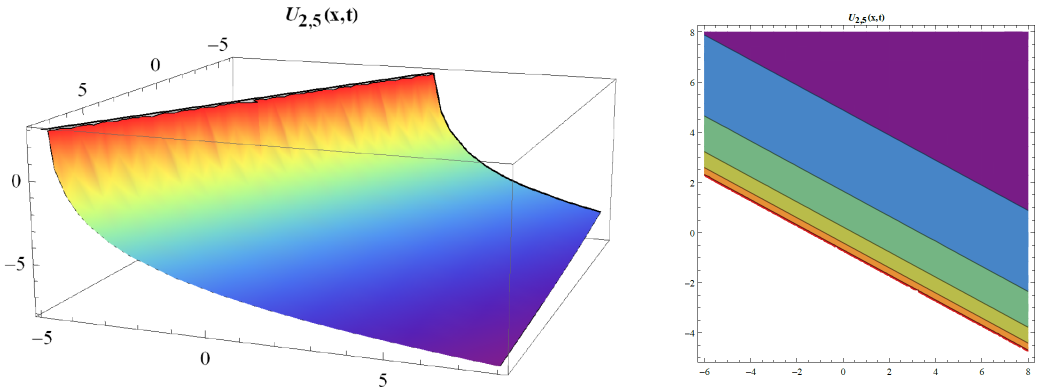
Şekil 4.27 (4.2.18) çözümünün $c = -2$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 6$, $d_3 = 3$, $d_4 = -3$, $d_5 = 2$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $EE = 0.82$, $B_0 = 1$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

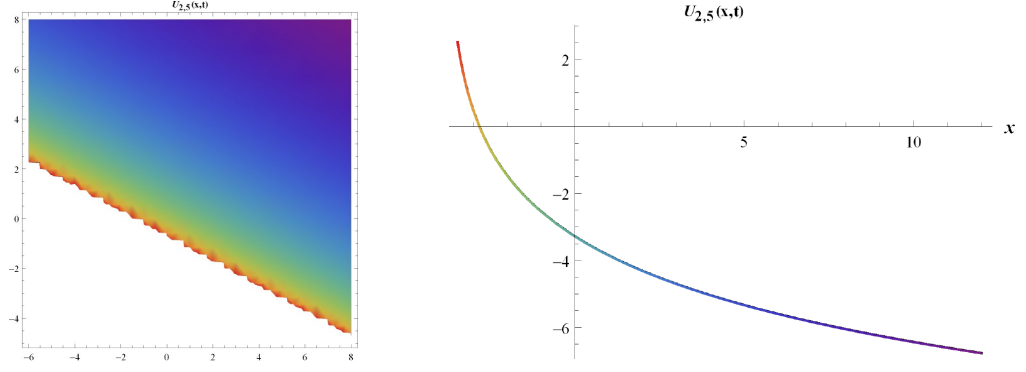
Çözüm Ailesi 5

$\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$, $\mathcal{G}(\xi) = \ln(EE + \xi)$ koşuluyla bükülme(kink)

solitonu çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,5} = -\frac{\sqrt{6} \log(k(x + y - ct) + EE)}{\sqrt{d_2}}. \quad (4.2.19)$$





Şekil 4.28 (4.2.19) çözümünün $c = -2$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 4$, $d_4 = -4$, $d_5 = 2$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $EE = 0.82$, $B_0 = 1$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

3.Durum:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A_2 \mu, \\
 A_1 &= A_2 \lambda, \\
 B_1 &= \frac{A_2 \sqrt{d_2}}{\sqrt{6}}, \\
 d_4 &= -\frac{12B_0 k}{A_2} + \sqrt{6} \sqrt{d_2} k \lambda - d_3, \\
 c &= \frac{d_5 - k^2 (\lambda^2 - 4\mu)}{d_1}.
 \end{aligned}$$

Bu durumdaki katsayılarla birlikte gerekli türevler ve (4.2.7), Mathematica programı yardımıyla (4.2.6) denkleminde yerine yazılıp

$$v_3 = \frac{6A_2 e^{-g} (e^g (\lambda + \mu e^g) + 1)}{\sqrt{6} A_2 \sqrt{d_2} + 6B_0 e^g}, \quad (4.2.20)$$

çözüm fonksiyonu, $\mathcal{G}(\xi)$ 'ya bağlı olarak elde edilmiştir. Bu (4.2.20) çözüm fonksiyonunun GÜFM'nin her bir çözüm ailesine göre hallerinin ξ 'ye göre belirsiz integrali Mathematica yardımıyla alınarak u çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Bu u çözüm fonksiyonlarına dalga dönüşümü tersine uygulanarak ξ değişkenine bağlı olmaktan çıkarılıp tekrardan x, y ve t değişkenlerine bağlı hale getirilip lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini sağlayıp sağlamadığı Mathematica ile kontrol

edilmiş ve bulunan fonksiyonun (4.2.1) matematiksel modelini sağladığı teyit edilmiştir.

Böylece her bir ailede lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem için birer adet ilerleyen dalga çözümü elde edilmiştir. Bulunan çözüm fonksiyonlarındaki parametrelere, ailelerin şartlarına uygun değerler verilerek grafikleri belirlenmiş ve böylece çözümlerin dalga yapıları hakkında yorumlar yapılabilmektedir.

JM denkleminin seçilen 3. duruma göre çözüm aileleri şu şekildedir.

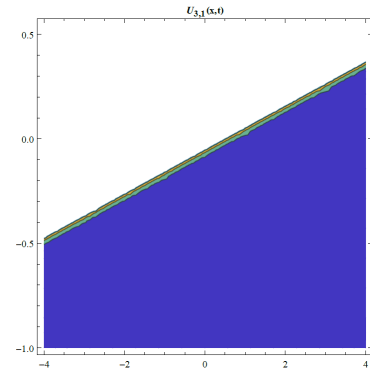
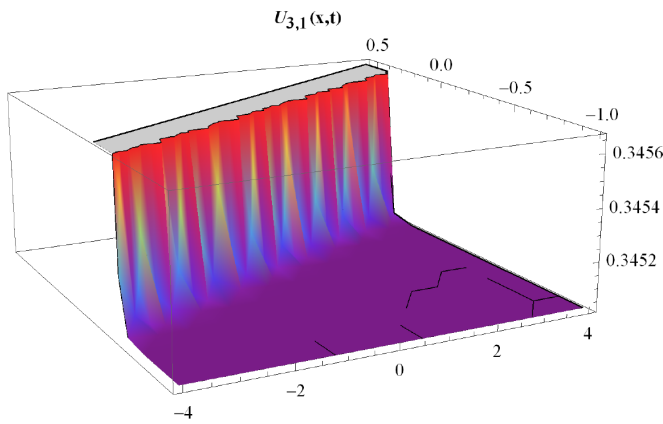
Çözüm Ailesi 1

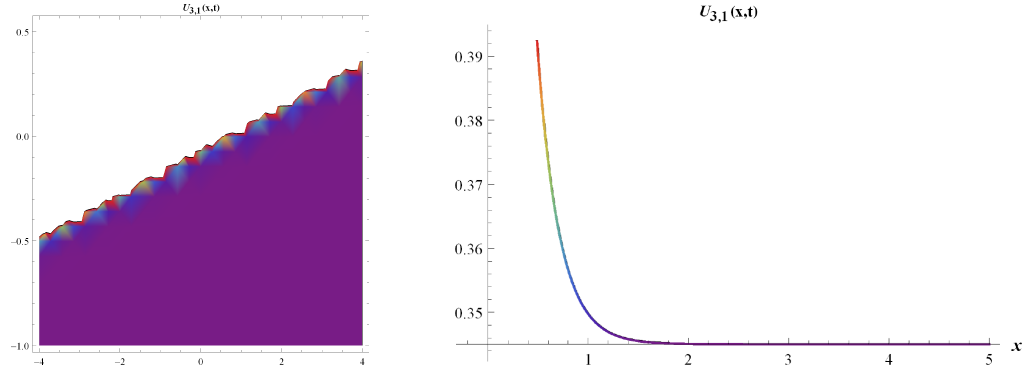
$$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0, \vartheta(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right)$$

koşuluyla çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{3,1} = \frac{\sqrt{6} \left(\log \left(\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \omega + \lambda \tau \right) - \log \left(\left(3B_0 \lambda - \sqrt{6} A_2 \sqrt{d_2} \mu \right) \tau + 3B_0 \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \omega \right) \right)}{\sqrt{d_2}},$$

$$\left(\omega = \sinh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (k(x + y - ct) + EE) \right), \tau = \cosh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (k(x + y - ct) + EE) \right) \right). \quad (4.2.21)$$





Şekil 4.29 (4.2.21) çözümünün $c = 9.5$, $k = 2$, $d_1 = -2$, $d_2 = 6$, $d_3 = 3$, $d_4 = 21$, $d_5 = 1$, $\lambda = 3$, $\mu = 1$, $EE = 0.75$, $B_0 = 1$, $A_2 = 2$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

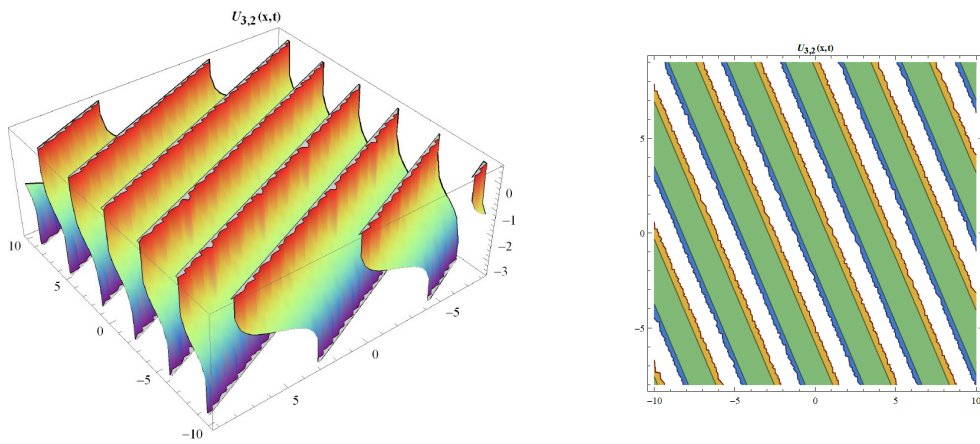
Çözüm Ailesi 2

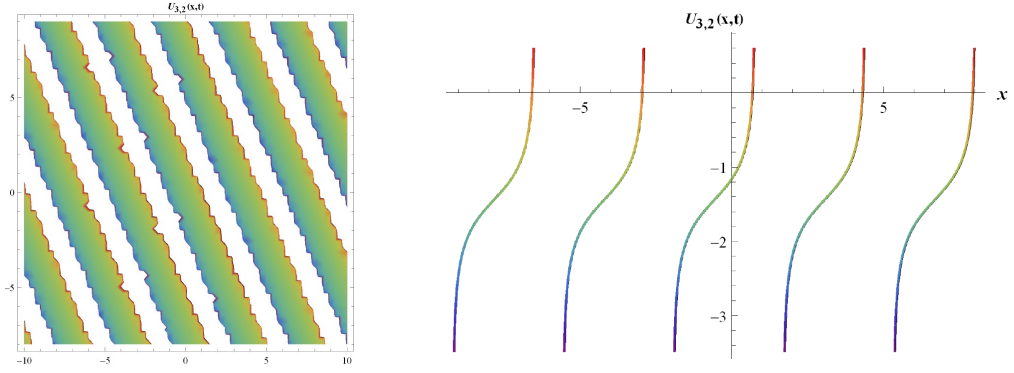
$$\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0, \mathcal{G}(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right)$$

koşuluyla periyodik çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{3,2} = \frac{\sqrt{6} \left(\log \left(\sqrt{4\mu - \lambda^2} \omega - \lambda \tau \right) - \log \left(\left(\sqrt{6} A_2 \sqrt{d_2} \mu - 3B_0 \lambda \right) \tau + 3B_0 \sqrt{4\mu - \lambda^2} \omega \right) \right)}{\sqrt{d_2}},$$

$$\left(\omega = \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (k(x + y - ct) + EE) \right), \tau = \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} (k(x + y - ct) + EE) \right) \right). \quad (4.2.22)$$





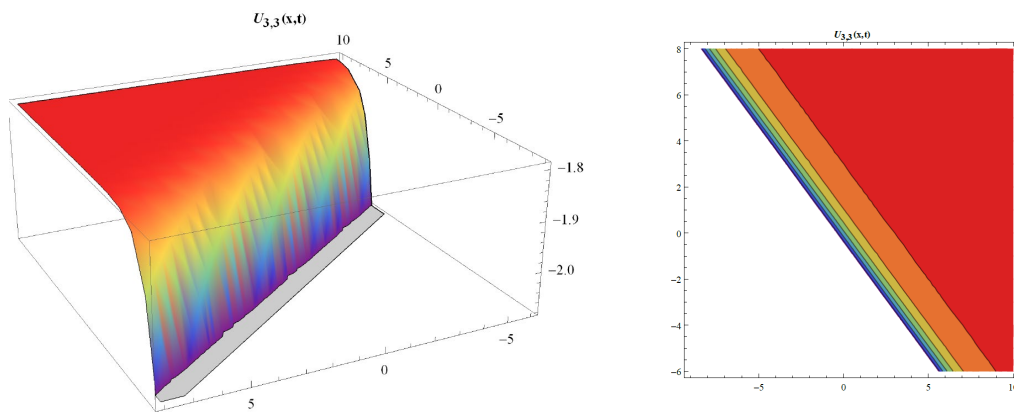
Şekil 4.30 (4.2.22) çözümünün $c = -0.5$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 18$, $d_3 = 12$, $d_4 = -12$, $d_5 = 2$, $\lambda = -1$, $\mu = 1$, $EE = 0.82$, $B_0 = 1$, $A_2 = 2$, $y = -0.01$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ iki boyutlu grafikleri

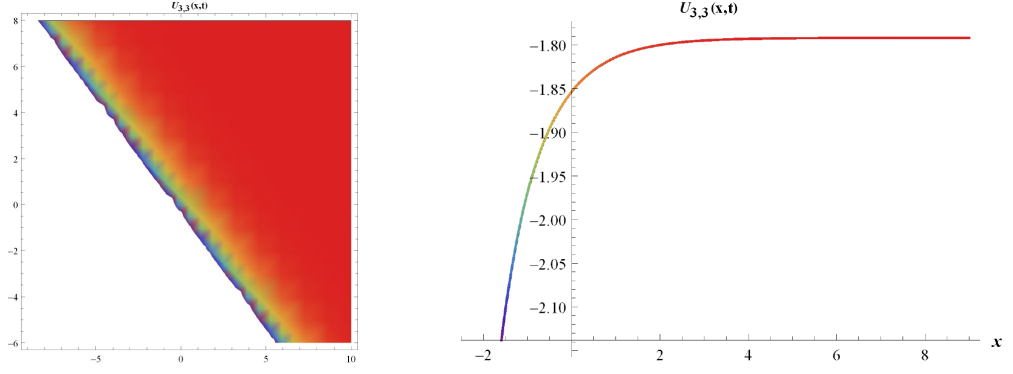
Çözüm Ailesi 3

$$\mu = 0, \lambda \neq 0 \text{ ve } \lambda^2 - 4\mu > 0, \mathcal{G}(\xi) = -\ln\left(\frac{\lambda}{e^{\lambda(\xi)+EE} - 1}\right) \quad \text{koşuluyla}$$

bükülme(kink) solitonu çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{3,3} = \frac{\sqrt{6} \left(\log(1 - e^{\lambda(k(x+y-ct)+EE)}) - \log(-\sqrt{6}A_2\sqrt{d_2}\lambda - 6B_0(e^{\lambda(k(x+y-ct)+EE)} - 1)) \right)}{\sqrt{d_2}}. \quad (4.2.23)$$





Şekil 4.31 (4.2.23) çözümünün $c = -1$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 6$, $d_3 = 3$, $d_4 = -9$, $d_5 = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $EE = 0.82$, $B_0 = 1$, $A_2 = 1$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

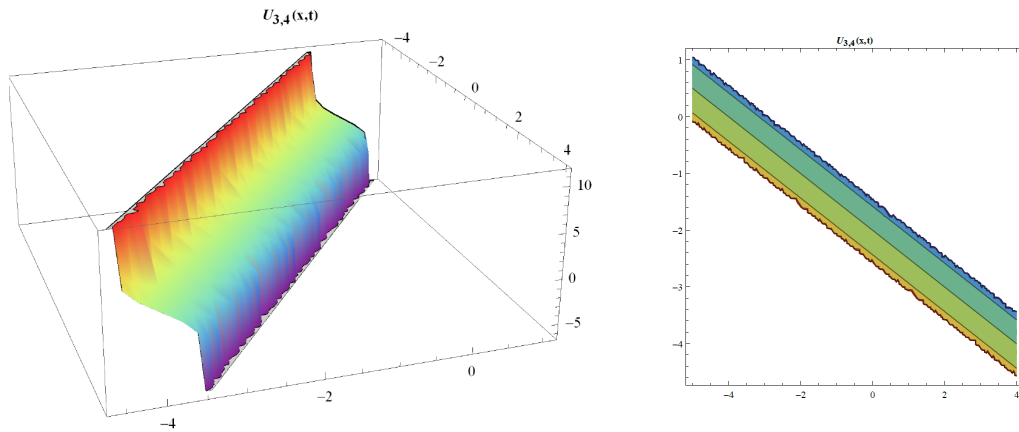
Çözüm Ailesi 4

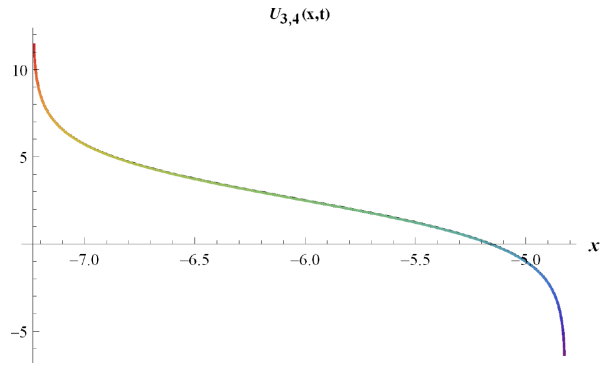
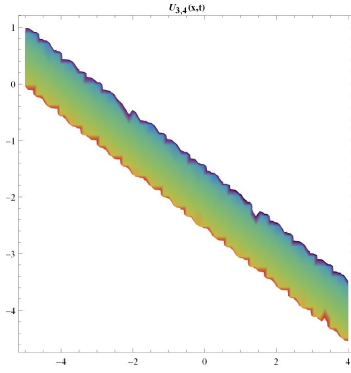
$$\mu \neq 0, \lambda \neq 0 \text{ ve } \lambda^2 - 4\mu = 0, \mathcal{G}(\xi) = \ln \left(-\frac{2\lambda(EE + \xi) + 4}{\lambda^2(EE + \xi)} \right) \text{ koşuluyla çözüm}$$

fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{3,4} = -\frac{4(-6A_2^3B_0d_2^{3/2}\lambda(\lambda^2 - 4\mu) + 6\sqrt{6}A_2^2B_0^2d_2(4\mu - 3\lambda^2) + \sqrt{6}A_2^4d_2^2\lambda^2\mu + 144\sqrt{6}B_0^4) \log \left(\frac{\sqrt{6}A_2\sqrt{d_2}\lambda\omega - 12B_0(\omega + 2)}{A_2\sqrt{d_2}(\sqrt{6}A_2\sqrt{d_2}\lambda - 12B_0)^2} \right)}{\sqrt{d_2}(A_2^2d_2\lambda^2 - 24B_0^2)^2} + \frac{A_2(\lambda^2 - 4\mu)(\sqrt{6}A_2\sqrt{d_2}\lambda + 12B_0)(\omega + 2)}{2A_2^2d_2\lambda^3 - 48B_0^2\lambda} + \frac{\sqrt{6} \log(\omega + 2)}{\sqrt{d_2}},$$

$$(\omega = k\lambda(x + y - ct) + EE\lambda). \quad (4.2.24)$$





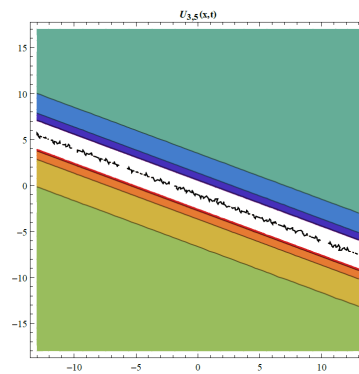
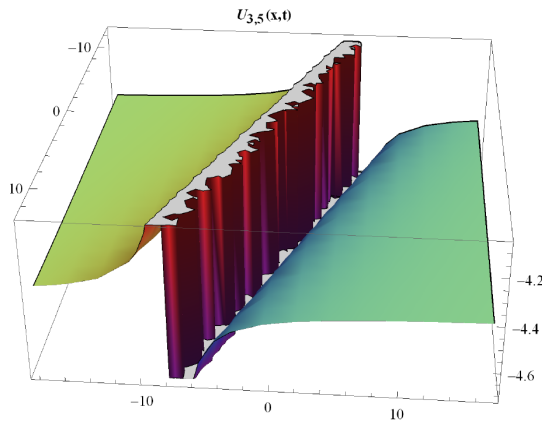
Şekil 4.32 (4.2.24) çözümünün $c = -2, k = 1, d_1 = -1, d_2 = 3, d_3 = 3, d_4 = 6\sqrt{2} - 15, d_5 = 2, \lambda = 2, \mu = 1, EE = 0.82, B_0 = 1, A_2 = 1, y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

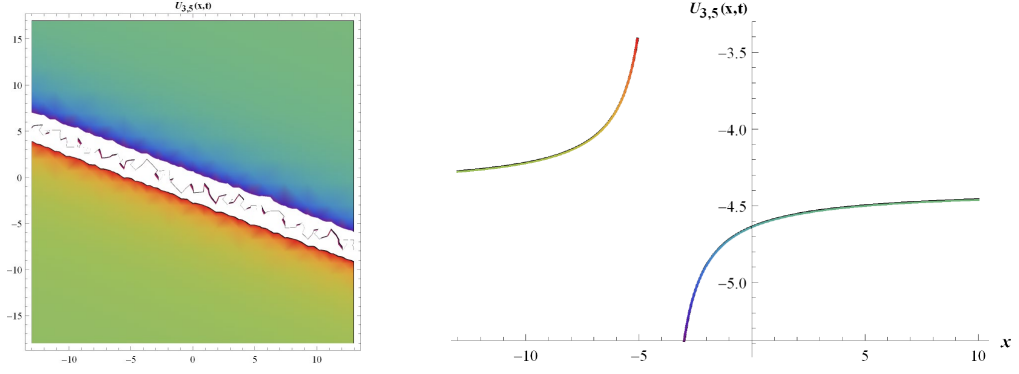
Çözüm Ailesi 5

$\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0, \mathcal{G}(\xi) = \ln(EE + \xi)$ koşuluyla singular(tekil)

bükülme(kink) solitonu çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{3,5} = \frac{\sqrt{6} \left(\log(k(x + y - ct) + EE) - \log\left(\sqrt{6}A_2\sqrt{d_2} + 6B_0(k(x + y - ct) + EE)\right) \right)}{\sqrt{d_2}}. \quad (4.2.25)$$





Şekil 4.33 (4.2.25) çözümünün $c = -2$, $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 4$, $d_4 = -16$, $d_5 = 2$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $EE = 0.82$, $B_0 = 1$, $A_2 = 1$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafikleri ve $t = 1$ için iki boyutlu grafikleri

4.2.2 Genelleştirilmiş Kudryashov metotla çözüm

Sağ tarafı sıfır kabul edilecek (4.2.6) denkleminde (3.2.1) kabulü kullanılarak dengeleme prensibi uygulanmış,

$$v'' \approx v^3$$

$$M - N - 2 \approx 3M - 3N$$

$$M = 1 \quad \text{için} \quad N = 2$$

bulunmuş ve bu sınırlar (3.2.1) de yerine yazılarak $v(\xi)$ aşağıda görüldüğü gibi oluşturulmuştur;

$$v(\xi) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q}. \quad (4.2.26)$$

Burada (4.1.26) çözüm kabulü $\Upsilon = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2$, $\Psi = b_0 + b_1 Q$ olacak şekilde $v(\xi) = \frac{\Upsilon}{\Psi}$ olarak düzenlenip $Q'_\xi = Q^2 - Q$ ve $Q(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ eşitlikleri de hesaba katılarak elde edilen türevler ve metodun kabul ettiği v fonksiyonu Mathematica paket programı yardımıyla (4.2.6)'da yerine yazılıp Q fonksiyonuna bağlı sıfır polinomu elde edilmiştir. Bu polinomdaki aynı dereceden terimlerin kuvvetlerine göre paranteze alınıp katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle meydana gelecek cebirsel denklem sisteminin farklı katsayı kombinasyonları ve onun sunduğu opsiyonlara göre çözülüşü v çözüm fonksiyonunun katsayıları arasındaki bağıntılar

için birçok farklı ‘durum’ sunmuştur. Bu katsayılar Mathematica yardımıyla denklemden yerlerine yazıldıktan sonra oluşan v ’ye bir kez ξ ‘ye göre antitürev uygulandığında u ilerleyen dalga çözümleri iki aile çatısı altında elde edilecektir.

Katsayılarla ilgili olarak meydana gelen durumlara göre JM için GKM ile çözüm fonksiyonları ve grafikleri şu şekildedir.

1. Durum:

$$A_0 = -\frac{6B_0\sqrt{d_5 - cd_1}}{d_3 + d_4}, A_1 = \frac{6(B_0 - B_1)\sqrt{d_5 - cd_1}}{d_3 + d_4}, A_2 = \frac{6B_1\sqrt{d_5 - cd_1}}{d_3 + d_4}, d_2 = \frac{(d_3 + d_4)^2}{6(d_5 - cd_1)},$$

$$k = -\sqrt{d_5 - cd_1}, \quad (4.2.27)$$

bulunan katsayıları için (4.2.26) çözüm fonksiyonu;

$$v_1 = \frac{6(Q-1)\sqrt{d_5 - cd_1}}{d_3 + d_4}, \quad (4.2.28)$$

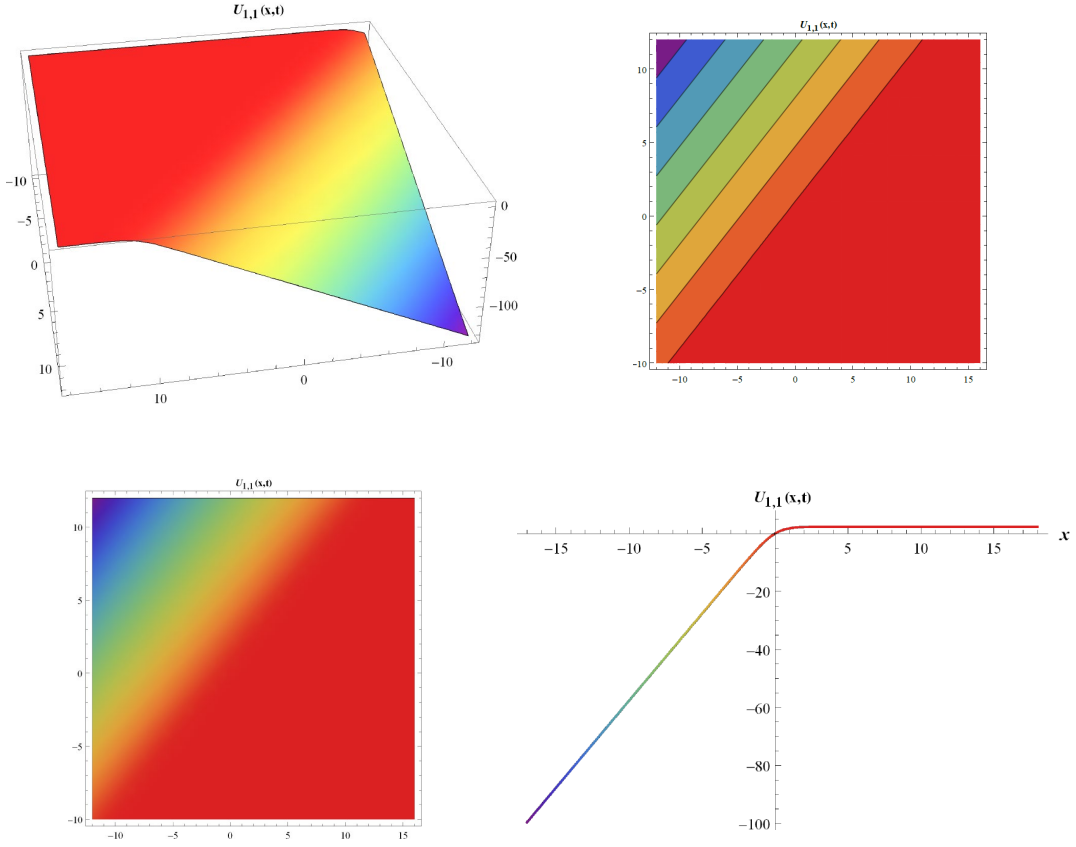
şeklinindedir. Ayrıca (4.2.28) çözüm fonksiyonu için $Q'_\xi = Q^2 - Q$ denkleminde elde

edilen $Q(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ fonksiyonu, $Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ve $Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\xi}{2}\right)$

olarak alınır iki farklı çözüm ailesi elde edilir. (4.2.28)’in çözüm ailelerine göre hallerine ξ ‘ye göre bir kez antitürev uygulanıp u ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Dalga dönüşümü geri alınarak oluşan u çözümleri lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi sağladığı teyit edilerek aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

Çözüm Ailesi 1 için çözüm fonksiyonu;

$$u_{1,1}(x, y, t) = -\frac{3\sqrt{d_5 - cd_1} \left(k(x + y - ct) + 2 \log \left(\cosh \left(\frac{1}{2} k(x + y - ct) \right) \right) \right)}{d_3 + d_4}. \quad (4.2.29)$$

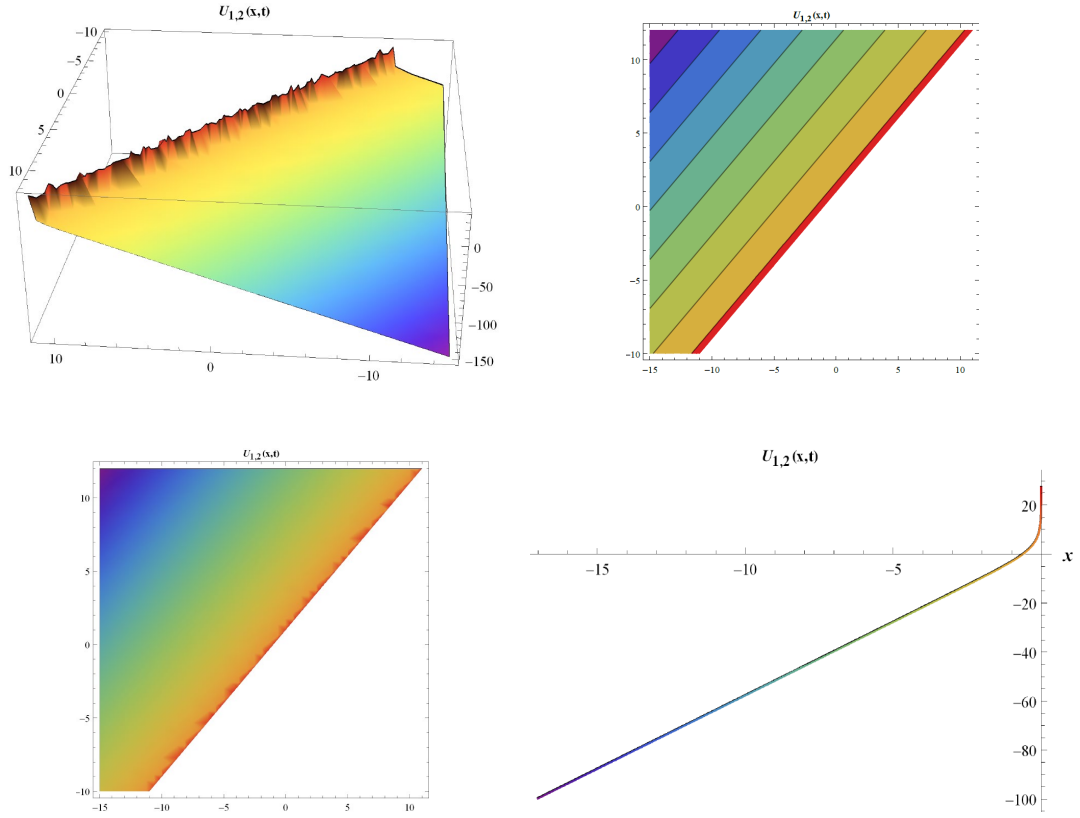


Şekil 4.34 (4.2.29) çözümünün $c = 1$, $d_1 = -1$, $d_4 = 1$, $d_3 = 2$, $d_5 = 2$, $d_2 = 0.5$, $EE = 0.82$, $k = -\sqrt{3}$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2 için çözüm fonksiyonu;

$$u_{1,2}(x, y, t) = -\frac{3\sqrt{d_5 - cd_1} \left(\omega + 2 \left(\log \left(\tanh \left(\frac{1}{2} \omega \right) \right) + \log \left(\cosh \left(\frac{1}{2} \omega \right) \right) \right) \right)}{d_3 + d_4},$$

$$(\omega = k(x + y - ct)). \quad (4.2.30)$$



Şekil 4.35 (4.2.30) çözümünün $c = 1$, $d_1 = -1$, $d_4 = 1$, $d_3 = 2$, $d_5 = 2$, $d_2 = 0.5$, $EE = 0.82$, $k = -\sqrt{3}$, $y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

2. Durum:

$$A_0 = \frac{3B_0(B_0 - B_1)(d_3 + d_4)\sqrt{d_5 - cd_1} - 3\sqrt{-B_0^2(B_0 + B_1)^2(d_3 + d_4)^2(cd_1 - d_5)}}{B_1(d_3 + d_4)^2},$$

$$A_1 = \frac{6B_0\sqrt{d_5 - cd_1}}{d_3 + d_4}, \quad A_2 = 0, \quad k = -\sqrt{d_5 - cd_1},$$

$$d_2 = \frac{\omega\left(-2B_0^3\omega\alpha + 3B_1B_0^2\omega\alpha + B_0\left(B_1^2\omega\alpha + 2\sqrt{-\alpha}\sqrt{-B_0^2(B_0 + B_1)^2\omega^2\alpha}\right) + B_1\sqrt{-\alpha}\sqrt{-B_0^2(B_0 + B_1)^2\omega^2\alpha}\right)}{24B_0^3(-\alpha)^2}.$$

$$(\alpha = (cd_1 - d_5), \omega = (d_3 + d_4)). \quad (4.2.31)$$

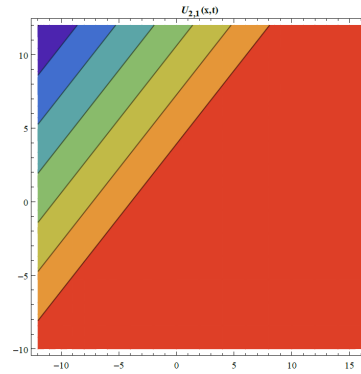
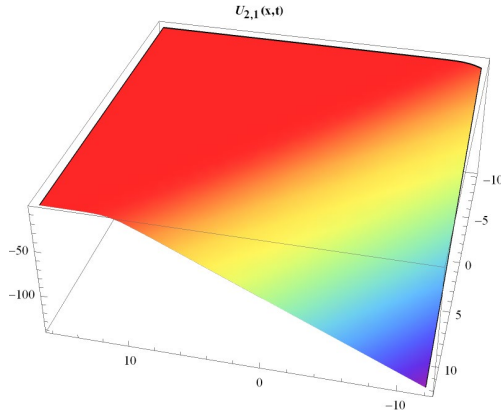
katsayıları için (4.2.26) çözüm fonksiyonu;

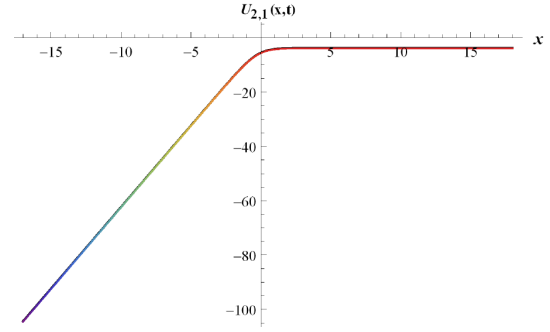
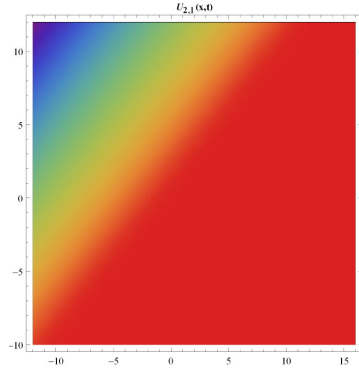
$$v_2 = \frac{3B_0(d_3 + d_4)(B_1(2Q - 1) + B_0)\sqrt{d_5 - cd_1} - 3\sqrt{-B_0^2(B_0 + B_1)^2(d_3 + d_4)^2(cd_1 - d_5)}}{B_1(d_3 + d_4)^2(B_1Q + B_0)}, \quad (4.2.32)$$

şeklindedir. Ayrıca (4.2.32) çözüm fonksiyonu için $Q'_\xi = Q^2 - Q$ denkleminde elde edilen $Q(\xi) = \frac{1}{1 \pm e^\xi}$ fonksiyonu $Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi}{2}\right)$ ve $Q(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\xi}{2}\right)$ olarak alınırsa iki farklı çözüm ailesi elde edilir. (4.2.32)'nin çözüm ailelerine göre hallerine ξ 'ye göre bir kez antitürev uygulanıp u ilerleyen dalga çözümleri elde edilmiştir. Dalga dönüşümü geri alınarak elde edilen u çözümleri lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini sağladığı teyit edilerek aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

Çözüm Ailesi 1 için çözüm fonksiyonu;

$$u_{2,1}(x, y, t) = \frac{1}{2B_0B_1(B_0 + B_1)\omega^2} \left[6B_0^3\omega k\sqrt{-\alpha}\beta + 3B_1B_0^2\omega\sqrt{-\alpha}(k\beta - \tau) \dots \right. \\ \left. - 3B_0 \left(2k\sqrt{-B_0^2(B_0 + B_1)^2\omega^2\alpha\beta + B_1^2\omega\sqrt{-\alpha}(\tau + k\beta)} \right) - 3B_1\sqrt{-B_0^2(B_0 + B_1)^2\omega^2\alpha(\tau + k\beta)} \right], \\ \left(\alpha = (cd_1 - d_3), \omega = (d_3 + d_4), \beta = (x + y - ct), \tau = 2 \log \left(e^{\frac{1}{2}k\beta} (B_0(e^{k\beta} + 1) + B_1) \right) \right). \quad (4.2.33)$$

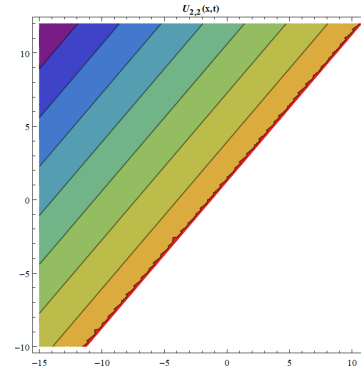
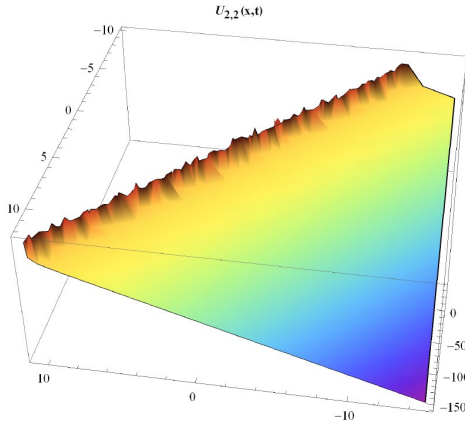


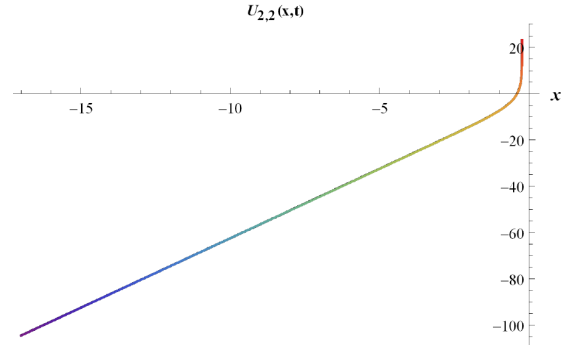
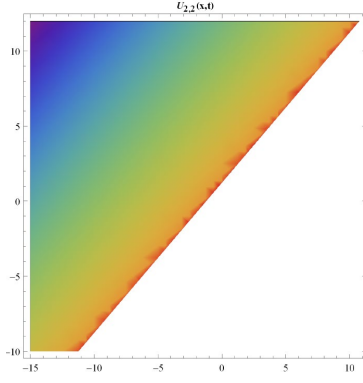


Şekil 4.36 (4.2.33) çözümünün $c = 1, d_1 = -1, d_4 = 1, d_3 = 2, d_5 = 2, d_2 = 0.5,$
 $EE = 0.82, k = -\sqrt{3}, y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği
ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2 için çözüm fonksiyonu;

$$u_{2,2}(x, y, t) = \frac{1}{2B_0 B_1 (B_0 + B_1) \omega^2} \left[6B_0^3 \omega k \sqrt{-\alpha} \beta + 3B_1 B_0^2 \omega \sqrt{-\alpha} (k\beta - \tau) \dots \right. \\
\left. - 3B_0 \left(2k \sqrt{-B_0^2 (B_0 + B_1)^2 \omega^2 \alpha \beta + B_1^2 \omega \sqrt{-\alpha} (\tau + k\beta)} \right) - 3B_1 \sqrt{-B_0^2 (B_0 + B_1)^2 \omega^2 \alpha} (\tau + k\beta) \right], \\
\left(\alpha = (cd_1 - d_5), \omega = (d_3 + d_4), \beta = (x + y - ct), \tau = 2 \log \left(2B_0 \sinh \left(\frac{1}{2} k\beta \right) - B_1 e^{-\frac{1}{2} k\beta} \right) \right). \quad (4.2.34)$$





Şekil 4.37 (4.2.34) çözümünün $c = 1, d_1 = -1, d_4 = 1, d_3 = 2, d_5 = 2, d_2 = 0.5,$
 $EE = 0.82, k = -\sqrt{3}, y = 1$ parametrelerine göre üç boyutlu, dış hat, yoğunluk grafiği
ve $t = 1$ için iki boyutlu grafiği

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler başlığı altında kendisine yer bulan ‘doubly dispersive’ ve ‘2+1 boyutlu integro-diferrential Jaulent-Miodek’ denklemlerinin ilerleyen dalga çözümleri, geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu ile araştırılmış ve bu çözümleri karşılaştırmak için aynı denklemlere genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile çözümler bulunmuştur. Bu diferansiyel denklemlere literatürde GKM de dahil olmak üzere birçok farklı metot yardımıyla birçok tam çözüm gün yüzüne çıkarılmıştır lakin açık kaynaklardan ulaşılabildiği kadarıyla bu denklemlere GÜFM ile tam çözüm araştırması literatürde ilk defa bu tez çalışmasında yapılmıştır, bu da tezin kayda değer katkısı olarak düşünülebilir.

Tezin sunumunda uygulamalara geçmeden önce araştırma konusu açısından gerekli temel kavramların sebep sonuç ilişkisine dayanan ve birbirini tetikleyen olgular olduklarının altını çizen bir mantık silsilesi dâhilinde konu bütünlüğüyle örneklendirilerek sunulmasına ve ardından da faydalanılacak metotların uygulanış şeklinin öğretici nitelikte aktarılmasına özen gösterilmiştir. Metotlar sayesinde elde edilen ilerleyen dalga çözümlerinin iki ve üç boyutlu grafikleri sunularak çözüm fonksiyonlarının fiziksel yapısını yorumlama fırsatı bulunmuş ve bu fonksiyonların tezin temel kavramlar bölümünde belirtilmiş kalıplara göre hangi dalga tipinde olduğu saptanmıştır.

Bahsi geçen denklemlerin çözümlerine biri literatürde hiç denenmemiş, diğeri denenmiş ve sonuç elde edilmiş farklı iki metotla yaklaşarak hem metotları ve sunduklarını karşılaştırma hem de birbirlerini teyit ettirme amaçlanmıştır. İki metot arasında makul bir karşılaştırma yapabilme gayesiyle, metot gereği ortaya çıkan katsayı kombinasyonlarının sunduğu ‘durumlar’da her iki metot için de aynı katsayıların seçilmesine özen gösterilmiş lakin gerek GÜFM’nin kendine has parametrelerinin varlığı, gerekse de metotların çözüm kabullerinin farklı karakterde fonksiyonları temel alması ortak bir katsayı kombinasyonu ile çözüm arayışına pek imkân tanımamıştır. Bu sebeple birbirine en çok benzeyen katsayı kombinasyonlarına göre çözüm arayışına girilmiştir, bu girişim de bazen Mathematica programının çözüm sunamayışıyla sonuçlanmıştır. Yine de her arayan bulamaz ama bulan hep arayanlar olur (*Bâyezid-i Bistâmî*) düsturuyla olabilecek en benzer ve bu metotlarla çözüm

fonksiyonu sağlayabilen durumlarla arayışa devam edilmiş ve birçok farklı dalga çözümü bu metotlar yardımıyla literatüre kazandırılmıştır. İki de nitelikli metotlar olan GÜFM ile GKM arasında küçük bir kıyas yapmak gerekirse; her iki denkleme de uygulandıklarında GÜFM, GKM'nin sunduğu çözümlere fiziksel olarak benzer çözümleri sunabildiği gibi metottaki çözüm ailelerinin çeşitliliği sebebiyle daha fazla adette ve farklı dalga çözümlerini gün yüzüne çıkarmıştır. Lakin nadir durumlarda GÜFM'nin aile şartlarını yerine getirebilmek için bazı katsayıları baştan belirlemek gerekebilmektedir. Ayrıca GÜFM'nin kendine has parametrelerinin GKM'ye nispeten fazla oluşunun Mathematica programıyla hesaplamalarda daha fazla zorluğa sebebiyet verdiği de öne sürülebilir. Bütün bunlardan yola çıkılarak akıllara gelebilecek 'Parametre adedindeki artış daha farklı dalga çözümleri ortaya çıkarır mı?' sorusu da başka bir araştırmanın konusu olabilir.

Literatürdeki diğer araştırmalar da incelendiğinde birçok bilim insanının bu diferansiyel denklemlere farklı metotlarla çözüm araştırmasına girip birçok dalga çözümü sunduğu gözlemlenmiştir. Bu çözümler ile bu tezde elde edilen çözümler yan yana getirilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Doubly dispersive denklemi için Silambarasan ve ark.'nın (2019) Jacobi eliptik fonksiyon metodu ve F-genleşme metodu ile, Yel'in (2020) Sine Gordon genleşme metodu ile, Manar ve ark.'nın (2022) genişletilmiş tanh fonksiyon metodu ile, Younas ve ark.'nın (2022) GKM ile çözüm araştırmaları literatürdeki çalışmalara bir kaç örnektir. Bu tezde bilhassa GÜFM ile yukarıda bahsedilen araştırmalarda bu denklem için elde edilen çözümlerden farklı birçok çözüm fonksiyonu elde edilmiştir. Diğer taraftan bu tezde bu denkleme uygulanan GKM de yukarıdaki araştırmalarda elde edilen çözümlere benzer birkaç çözüm fonksiyonu dışında birçok farklı çözüm fonksiyonu sunmuştur. Doubly dispersive denkleme GÜFM'nin sunduğu (4.1.11) ve (4.1.17) çözümleri ile yine bu tezde uygulanan GKM'nin sunduğu (4.1.32) ve (4.1.37) çözümleri sırasıyla benzeşmektedir. Younas ve ark.'nın (2022) makalesinde GKM ile elde ettikleri çözümlerden biri ile bu tezde GKM ile bulunan (4.1.36) aynıdır. Manar ve ark.'nın (2022) makalesinde genişletilmiş tanh fonksiyon metodu kullanılarak elde ettikleri çözüm bu tezde GKM ile bulunan (4.1.33) ile benzeşmektedir.

JM denklemi için ise Akkilic ve ark.'nın (2023) Sine cosine metodu ile, Matinfar ve ark.'nın (2015) ilk integral metodu ile, Hu ve Qi'nin (2021) tanh fonksiyon metodu ve $\exp(-\phi(z))$ -genleşme metodu ile, Cakicioglu ve ark.'nın (2023) GKM ile çözüm araştırmaları literatürdeki çalışmalarından bazı örneklerdir. Bu tezde ise GÜFM ve GKM ile yukarıda bahsedilen araştırmalardan farklı birçok çözüm fonksiyonu elde edilmiştir. Benzerliklere değinmek gerekirse GÜFM ile elde edilen (4.2.11) çözümü ile bu tezde uygulanan GKM'nin sunduğu (4.2.30) çözümü benzeşmektedir. Diğer taraftan JM denklemine bu tezde GÜFM ile bulunan (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.12) ile Kaewta ve ark.'nın (2020) Jacobi eliptik fonksiyon metodu ve G'/G^2 genleşme metodu ile sunduğu bazı çözümler benzeşmektedir.

Ayrıca belirtmek gerekir ki, tez çalışmasında bu denklemler için her iki metodla elde edilen çözümler, literatürdeki farklı metodlarla elde edilmiş çözümlerden farklılıklar gösterse de ilerleyen dalga çözümleri olmaları münasebetiyle fiziksel yapı olarak oldukça fazla benzeşmektedir.

Tıpkı birçok araştırmacı bilim insanının bahsi geçen denklemler için literatüre kazandırdığı çözüm fonksiyonları gibi, umulur ki; bu çalışmada kullanılan metotların ileri sürdüğu çözüm fonksiyonları da teorik ve uygulamalı fizik veya mühendislik bilimlerinde kullanım alanları bulup olguların iç yüzünü anlama açısından yardımcı olarak yeni ufuklara imkân sağlasın ve cürmümüz kadar olsa da insanlığa bir faydası olsun.

Nihayetinde büyük resme bakılırsa görülmektedir ki insanlık tarihinde merakla ve sabırla düşünen zihinlerin insanlığa sundukları sayesinde bu tez ve bunun gibi niceleri gün yüzüne çıkabilmiştir. İkinci bölümde de bahsedildiği üzere, mükemmele ulaşma dürtüsüyle gözün gördüğü netlikte bir görüntüyü kendi ürettiklerinde elde etmeyi arzulayan insan belki pikselleri fiziksel olarak arzu ettiği kadar küçük inşa edemeyecektir lakin bu ve bunun gibi imkânsızlıkları zihinsel olarak da olsa gerçeğe dönüştürmesinin önünde hiçbir engel yoktur. O sebeple de umut hep vardır. Bununla birlikte *Socrates*'in dile getirdiği gibi insanın hiçbir şeyi tam olarak bilemeyeceğini bilmesi düşünmesine, hayal etmesine, denemesine bir engel teşkil etmez aksine bu durum daha çok araştırmaya, irdelemeye ve durmaksızın sorgulamaya sebep olmalıdır zira 'ben oldum' demek gaflettir. Gerçek bilim tenkit edilebilendir ve bilim bu

zihniyetle geliŒecektir. Aksi takdirde nimetlerinden ziyadesiyle faydalandığımız bilim pıramidine taşıyıcı taşları kendi elleri ile koyan *Pythagoras*'lar bile nice *Hippasus*'ları 'rasyonelliği' ayaklar altına alan bir bağnazlıkla boğdurur. Oysa insan olmak; kendisi cismen teleskop ile mikroskop arasına sıkışıp kalmış olsa da hiç olmazsa zihinsel olarak kısıtlarını aşma çabası içerisinde olmayı, her daim sorgulayarak merakla, sabırla, umutla ve korkusuzca fikri hür, vicdanı hür, irfanı hür (*Atatürk*) olmayı ve yeri geldiğinde de doğru bildiğinin yanlışlığını kabullenebiliyor olmayı gerektirir. Bu tez, bu duygu ve düşüncelerin etkisinden ayrılmadan gün yüzüne çıkarılmaya çalışılarak insanlığa bilimi miras bırakan tüm meraklı, sabırlı ve cesur zihinlere olan saygı ve minnettarlığımız belirtilmek istenmiştir.

6. KAYNAKLAR

- Adomian, G. (1988). A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 135, 501-544.
- Ahmed, MS., Zaghrou, AA. & Ahmed, HM. (2022). Travelling wave solutions for the doubly dispersive equation using improved modified extended tanh-function method. *Alexandria Engineering Journal*, 61(10), 7987-7994.
- Akdeniz, F., Ünlü, Y. & Dönmez, D. (1997). Analize Giriş. Çukurova Üniversitesi basımevi, 01, Adana, 447s.
- Akkilic, AN., Tukur, AS., Azad, PS., Hajar, FI., Bulut, H., Nehad, AS. & Mohamed, RA. (2023). Jaulent–Miodek evolution equation: Analytical methods and various solutions. *Results in Physics*, 47, 1-7.
- Aktürk, T. (2021). Modified exponential function method for nonlinear mathematical models with Atangana conformable derivative. *Revista mexicana de física*, 67(4), *Epub14 de marzo de 2022*, doi:10.31349/revmexfis.67.040704.
- Attaullah, Shakeel M., Shah, NA. & Chung, JD. (2022). Modified Exp-Function Method to Find Exact Solutions of Ionic Currents along Microtubules. *Mathematics*, 10(6), 851, doi:10.3390/math10060851.
- Cakicioglu, H., Ozisik, M., Secer, A. & Bayram, M. (2023). Kink Soliton Dynamic of the (2+1)-Dimensional Integro-Differential Jaulent–Miodek Equation via a Couple of Integration Techniques. *Symmetry*, 15, 1090.
- Guo, M., Dong, H., Liu, J. & Yang, H. (2018). The time-fractional mZK equation for gravity solitary waves and solutions using sech-tanh and radial basic function method. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 24(1), 1–19.
- He, JH. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178, 257-262.
- He, JH. & Wu, XH. (2006). Exponential function method for non-linear wave equations. *Chaos Solitons Fractals*, 30(3), 700-708.
- He, JH. & Wu, XH. (2006). Construction of solitary solution and compacton-like solution by variational iteration method. *Chaos Solitons Fractals*, 29(1), 108–113.
- He, JH. & Abdou, MA. (2007). New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method. *Chaos Solitons Fractals*, 34, 1421–1429.
- He, Y., Li, S. & Long, Y. (2012). Exact Solutions of the Klein-Gordon Equation by Modified Exp-Function Method. *International Mathematical Forum*, 7(4), 175 – 182.
- Hu, J. & Qi, J. (2021). Further Results about Seeking for the Exact Solutions of the Nonlinear -Dimensional Jaulent-Miodek Equation. *Advances in Mathematical Physics*, 2021,1-14.

- Javeed, S., Alimgeer, K.S., Nawaz, S., Waheed, A., Suleman, M., Baleanu, D. & Atif, M. (2020). Soliton solutions of mathematical physics models using the exponential function technique. *Symmetry*, 12(1), 176.
- Kaewta, S., Sirisubtawee, S. & Khansai, N. (2020). Explicit Exact Solutions of the (2+1)-Dimensional Integro-Differential Jaulent–Miodek Evolution Equation Using the Reliable Methods. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2020, 19.
- Keskin, Y. & Oturanc, G. (2009). Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(6), 741-750.
- Kudryashov, NA. (2005). Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos Solitons Fractals*, 24 (5), 1217-1231.
- Kudryashov, NA. & Loguinova, NB. (2008). Extended simplest equation method for nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 205(1), 396-402.
- Kudryashov, NA. (2012). One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 17(6), 2248-2253.
- Lenells, J. (2005). Traveling wave solutions of the Degasperis–Procesi equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 306, 72–82.
- Li, J. & Zhang, S. (2010). The (G'/G)-expansion method for solving nonlinear partial differential equations with variable coefficients. *J Math Anal Appl*, 368(1), 64-74.
- Liu, S., Fu, Z., Liu, S. & Zhao, Q. (2001). Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Physics Letters A*, 289, 69–74.
- Malfliet, W. (1992). Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. *American Journal of Physics*, 60, 650.
- Manar, SA, Afaf, ASZ. & Hamdy, MA. (2022). Travelling wave solutions for the doubly dispersive equation using improved modified extended tanh-function method. *Alexandria Engineering Journal*, 61(10), 7987-7994.
- Matinfar, M., Eslami, M. & Roshanddel, S. (2015). The first integral method to study the (2+1)-dimensional Jaulent–Miodek equations. *Pramana - J Phys*, 85, 593–603.
- Pala, Y. (2006). Modern Uygulamalı Diferensiyel Denklemler. Nobel basımevi, 950, Ankara, 706s.
- Pandir, Y., Sonmezoglu, A., Duzgun, HH. & Turhan, N. (2015). Exact solutions of nonlinear Schrödinger's equation by using generalized Kudryashov method. *AIP Conf. Proc.*, 1648, 1-5.
- Shakeel, M., Attaullah, Shah, NA. & Chung, JD. (2023). Modified Exp-Function Method to Find Exact Solutions of Microtubules Nonlinear Dynamics Models. *Symmetry*, 15(2), 360.

- Sharma, M. & Gupta, RK. (2024). Exact Solutions of Benjamin-Bona-Mahoney-Burgers Equation with Dual Power-Law Nonlinearity by Modified Exp-Function Method. *Contemp. Math.*,5(1),199-208.
- Silambarasan, R., Baskonus, HM. & Bulut, H. (2019). Jacobi elliptic function solutions of the double dispersive equation in the Murnaghan's rod. *Eur. Phys. J. Plus*,134, 125.
- Wazwaz, AM. (2004). The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 154(3), 713–723.
- Wazwaz, AM. (2004). A Sine-Cosine Method for Handling Nonlinear Wave Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 40, 499-508.
- Wazwaz, AM. (2007). The tanh-coth and the sech methods for exact solutions of the Jaulent-Miodek equation. *Phys Lett A*, 366 (1-2), 85-90.
- Wazwaz, AM. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 740.
- Wu, XHB. & He, JH. (2007). Solitary solutions, periodic solutions and compacton-like solutions using the exponential function method. *Comput Math Appl*, 54 (7–8), 966-986.
- Wu, XHB. & He, JH. (2008). Exp-function method and its application to nonlinear equations. *Chaos Solitons Fractals*, 38 (3), 903-910.
- Yan, C. (1996). A simple transformation for nonlinear waves. *Physics Letters A*, 224, 77-84.
- Yel, G. (2020). New wave patterns to the doubly dispersive equation in nonlinear dynamic elasticity. *Pramana - J Phys*, 94, 79.
- Younas, U., Bilal, M. & Sulaiman, TA. (2022). On the exact soliton solutions and different wave structures to the double dispersive equation. *Opt Quant Electron*, 54, 71.
- Zhou, YB., Wang, ML. & Wang, YM. (2003). Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients. *Phys Lett A*, 308, 31-36.
- Zhou, YB., Wang, ML. & Miao, TD. (2004). The periodic wave solutions and solitary wave solutions for a class of nonlinear partial differential equations. *Phys Lett A*, 323, 77-88.
- Zinati, R.F. & Manafian, J. (2017). Applications of He's semi-inverse method, ITEM and GGM to the Davey-Stewartson equation. *Eur. Phys. J. Plus*, 132(4), 155.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Volkan ÇAKMAK
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Çukurova Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	20.06.2003
Yüksek Lisans	
Üniversite	Giresun Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	06.07.2018
Doktora	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	
Yayımlar	
<p>Akturk, T. and Cakmak, V., “Investigation of Nonlinear Wave Solutions for Fusion and Fission Phenomenas”, Türk Doğa ve Fen Dergisi, 11(1), 11-18, (2022).</p> <p>Akturk, T. and Cakmak, V., “Wave Solution Analysis of a Nonlinear Mathematical Model on Fluid Mechanics”, Adıyaman University Journal of Science, 12(2), 162-176, (2022).</p>	