



T.C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FLC ÇATISINDAN ÜRETİLEN DAİRESEL YÜZEYLERİN
GEOMETRİSİ

KEBİRE HİLAL AYVACI

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

KEBİRE HİLAL AYVACI

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

FLC ÇATISINDAN ÜRETİLEN DAİRESEL YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

KEBİRE HİLAL AYVACI

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 92 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT)

Çalışmamız beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın temel amacına, yapılan çalışmalara yer verildi ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Materyal ve Yöntem bölümünde Öklid uzayı, polinom eğrileri, Flc çatı formülleri, Flc çatısına ait temel kavramlar ve bunlara ait teoriler özetlendi. Üçüncü bölümde ise bu çalışmanın temel amacı olan Öklid uzayında Flc çatısı ile verilen bir tüp yüzeyin geometrik özellikleri incelendi. Bu yüzey üzerinde yatan parametre eğrilerinin geodezik eğri, asimptotik eğri ve eğrilik çizgisi olma koşulları araştırıldı. Sonrasında bu tüp yüzeylerin fokal yüzeyleri, paralel yüzeyleri ele alınarak bu yüzeylerin geometrik özellikleri incelendi. Elde edilen yüzeylerin geometrik özellikleri bulunarak, yüzey üzerinde yatan parametre eğrilerinin özel eğriler olması durumu araştırıldı. Daha sonra Roller coaster yüzeyler Flc çatısına göre ifade edilerek regle yüzeyler ile arasındaki ilişki verildi. Roller coaster yüzeylerin açılabilir ve minimal olma koşulları araştırıldı. Bu yüzeyin singüler noktalarının geometrik yeri bulunarak striksiyon eğrileri elde edildi. Elde edilen tüm yüzeylerin görsel ifadeleri verildi. Sonuç ve öneriler dördüncü bölümde verilirken, son bölümde ise kullanılan kaynaklara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Flc Çatısı, Fokal Yüzeyler, Paralel Yüzeyler, Roller Coaster Yüzeyler.

ABSTRACT

CIRCULAR SURFACES PRODUCED FROM FLC FRAME GEOMETRY

KEBİRE HİLAL AYVACI

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 92 PAGES

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. SÜLEYMAN ŞENYURT)

Our study is organized in five sections. In the introduction section, the main purpose of the study, the studies carried out were included and the reason for addressing the subject was discussed. In the Materials and Methods section, Euclidean space, polynomial curves, Flc frame formulas, basic concepts of the Flc frame and their theories are summarized. In the third chapter, the geometric properties of a tube surface given by the Flc frame in Euclidean space, which is the main purpose of this study, were examined. The conditions for the parameter curves lying on this surface to be geodesic curves, asymptotic curves and curvature lines were investigated. Afterwards, the focal surfaces and parallel surfaces of these tube surfaces were examined and the geometric properties of these surfaces were examined. By finding the geometric properties of the obtained surfaces, it was investigated whether the parameter curves lying on the surface were special curves. Then, Roller coaster surfaces were expressed according to the Flc frame and the relationship between them and ruled surfaces was given. The conditions for Roller coaster surfaces to be developable and minimal were investigated. Striction curves were obtained by finding the geometric location of the singular points of this surface. Visual expressions of all obtained surfaces were given. While the results and recommendations are given in the fourth section, the sources used are included in the last section.

Keywords: Flc Frame, Focal Surface, Parallel Surface, Roller Coaster Surface.

TEŞEKKÜR

Tez alıőmam boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT'a ve Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü hocalarına en samimi duygularım ile teőekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda doktora sürecimde ve hayatımın her anında maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Doktora süreci boyunca çalıőmalarımı "2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı" ile destekleyen TÜBİTAK'a en içten teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL ve YÖNTEM	15
2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....	15
2.2 Flc Çatısı ile İlgili Genel Bilgiler.....	26
3. BULGULAR ve TARTIŞMA	34
3.1 Flc Çatılı Tüp Yüzeylerin Karakterizasyonları.....	34
3.2 Flc Çatısı ile Verilen Tüp Yüzeylerin Fokal Yüzeyleri.....	41
3.3 Flc Çatısı ile Verilen Tüp Yüzeylerin Paralel Yüzeyleri.....	61
3.4 Flc Çatısı ile Verilen Roller Coaster Yüzeyler.....	71
4. SONUÇ ve ÖNERİLER	78
5. KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	83

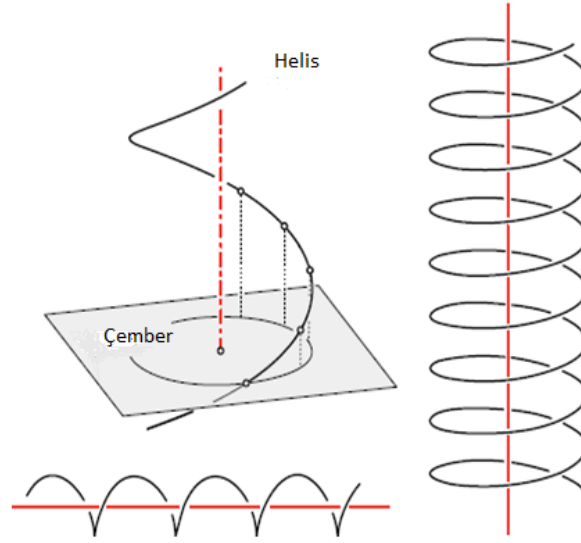
ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 Helis Eğrisi ve Mimaride Kullanımı	1
Şekil 1.2 The Spline Chair by Unto This Last ve The Ben Pimlott Building.....	2
Şekil 1.3 I Aralığının Bir Düzleme veya Üç Boyutlu Uzaya Dönüştürülmesi	3
Şekil 1.4 Kübik Eğri	4
Şekil 1.5 Yüzeyin Parametrik Gösterimi	5
Şekil 1.6 Parametre Çizgileri Olan ve Olmayan Aynı Yüzey	5
Şekil 1.7 King's College Chapel, Cambridge	6
Şekil 1.8 Mimaride Regle Yüzey Örnekleri	7
Şekil 1.9 The Walt Disney Concert Hall	8
Şekil 1.10 Guggenheim Müzesi, Bilbao, İspanya.....	8
Şekil 1.11 Costa Minimal Yüzeyi.....	9
Şekil 1.12 İki Uç Nokta ile Aynı Spine Eğrisine Giden Çeşitli Tüp Yüzeyleri.....	10
Şekil 1.13 Shoal Uçuş Kamusal Sanatı.....	10
Şekil 1.14 Yüzey ve Onun Fokal Yüzeyi	11
Şekil 1.15 Noktasal Bir Yükün Etrafında Oluşan Elektrik Alan.....	12
Şekil 1.16 Paralel Levhalar Arasında Oluşan Elektrik Alan.....	13
Şekil 1.17 Les Montagnes Russes de Belleville	14
Şekil 1.18 Roller Coaster Pisti	14
Şekil 2.1 Oskülatör Çember	18
Şekil 2.2 Oskülatör Küre	19
Şekil 2.3 γ Eğrisi ve C_γ Fokal Eğrisi.....	20
Şekil 2.4 Helisel Polinom Uzay Eğrisi	27
Şekil 2.5 Düzlemsel Polinom Eğrisi.....	29
Şekil 3.1 $M(t)=(t,t^4,t^9)$ Polinom Eğrisi ile Verilen $K(t,\theta)$ Tüp Yüzeyi	41
Şekil 3.2 $M(t)=(t,t^2,t^3)$ Polinom Eğrisi ile Verilen $K(t,\theta)$ Tüp Yüzeyi	55
Şekil 3.3 $K^*(t,\theta)$ Fokal Yüzeyi.....	57
Şekil 3.4 $K(t,\theta)$ Tüp Yüzeyi ve Onun Paralel Yüzeyi	66
Şekil 3.5 F-Roller Coaster Gösterimi.....	67
Şekil 3.6 $K_F(t,\theta)$ Roller Coaster Yüzeyi	77

1. GİRİŞ

Geometri, mimari tasarım sürecinin merkezinde yer alır. Yüzeyin ilk formunun bulunması aşamasından fiili inşaatına kadar her yerde mevcuttur. Eğriler ise yüzeyleri oluşturmak için profil olarak kullanılabilir (Şekil 1.1-a). Çoğu durumda profil eğrisinin şekli, ortaya çıkan yüzeyin nihai şeklini büyük ölçüde etkiler. Örneğin helis uzaysal eğrisi mimaride silindirik sütunlarda bulunabilir (Şekil 1.1-b).



a) Helis Eğrisi



b) Karlskirche veya Saint Charles Borromeo Kilisesi, Viyana

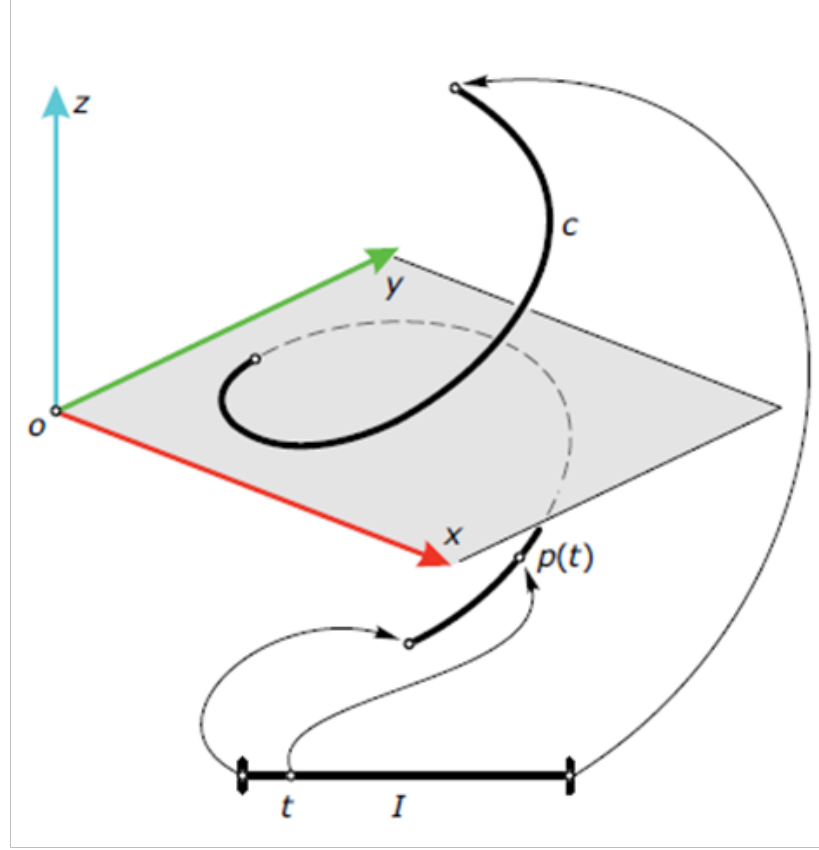
Şekil 1.1 Helis Eğrisi ve Mimaride Kullanımı (Potmann ve ark., 2007)

Eğriler ve yüzeyler sanat, mimari ve tasarım da dahil olmak üzere çeşitli uygulamalarda ortaya çıkar (Şekil 1.2). Geleneksel geometrik yöntemlerle işlenebilecek şekillerin çeşitliliği oldukça sınırlıyken, modern bilgisayar teknolojileri geometride bir devrimine yol açmıştır.



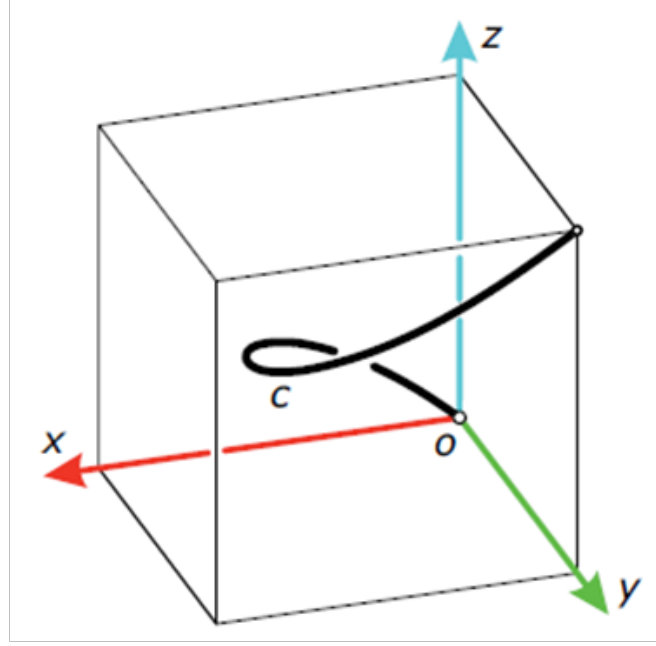
Şekil 1.2 The Spline Chair by Unto This Last ve The Ben Pimlott Building (Potmann ve ark., 2007)

Bir eğriyi tek boyutlu bağlantılı noktalar dizisi olarak düşünebiliriz. Parametrik bir c eğrisinin bir p noktasının koordinatları, bir t değişkeninin fonksiyonları olarak ifade edilir. Bu, bir uzaysal eğri c 'nin $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ile temsil edilebileceği anlamına gelir; burada " t ", bir I aralığındaki tüm değerleri varsayan bir parametredir. Böylece her " t " parametresi bir $p(t)$ eğri noktasına eşlenir. Yani bir eğriyi sürekli haritalamanın sonucu olarak düşünebiliriz. Zaman olması gerekmeseydi, t 'yi zaman olarak düşünmek çoğu zaman faydalıdır. $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonlarına koordinat fonksiyonları denir ve $c(t)$, c 'nin bir parametreleştirmesidir. Bir I aralığı, üç boyutlu uzayda bir c eğrisine eşlenir (Şekil 1.3).



Şekil 1.3 I Aralığının Bir Düzleme veya Üç Boyutlu Uzaya Dönüştürülmesi
(Potmann ve ark., 2007)

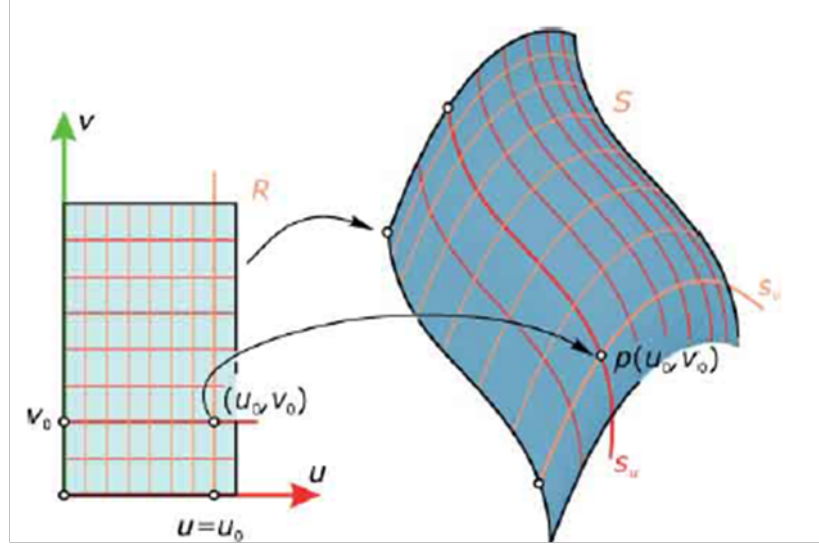
Polinom fonksiyonları tarafından tanımlanan parametrik bir eğriye polinom eğrisi adı verilir. Üç koordinat fonksiyonundan herhangi birindeki “ t ” parametresinin en yüksek derecesine polinom eğrisinin derecesi denir. Bir uzaysal c eğrisi $[0, 1]$ aralığında $x(t) = 12t - 12t^2$, $y(t) = 6t - 6t^2 + 4t^3$ ve $z(t) = 12t - 24t^2 + 16t^3$ koordinat fonksiyonları ile tanımlanırsa, küpün içinde yer alan eğri parçasını elde ederiz (Şekil 1.4). t parametresinin en yüksek derecesi 3 olduğundan 3. dereceden bir polinom eğrimiz olur. 3. derecedeki tüm polinom eğrileri kübik eğriler adı altında toplanır.



Şekil 1.4 Kübik Eğri (Potmann ve ark., 2007)

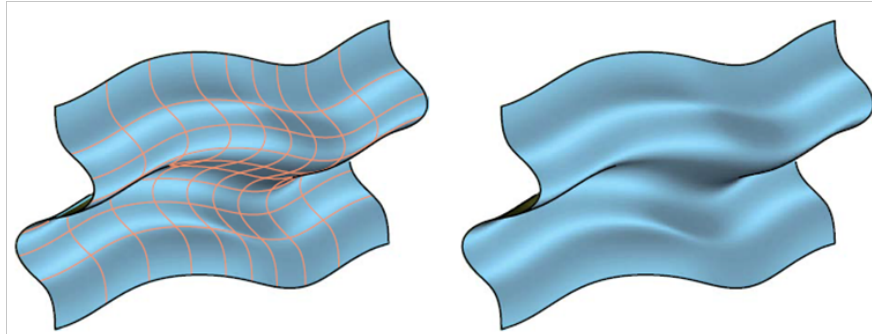
Bir eğrinin koordinat fonksiyonları $\frac{p(t)}{q(t)}$ biçimindeyse ($p(t)$ ve $q(t)$ polinom fonksiyonlardır), bu durumda eğriye “rasyonel eğri” denir. Bu eğri ailesinin derecesini, herhangi bir koordinat fonksiyonunun payında veya paydasında yer alan t değişkeninin en yüksek derecesi olarak tanımlarız. $c(t) = \left(\frac{4t^2-1}{3t^2+1}, \frac{4t^3-t}{3t^2+1}\right)$ eğrisi 3. derece düzlemsel rasyonel eğrinin parametrik gösterimidir. “ t ” parametresinin en yüksek derecesi 3 olup yalnızca $y(t)$ koordinat fonksiyonunun payında oluştuğuna dikkat edin.

Eğrilerin tersine, bir yüzey noktasının koordinatları u ve v olmak üzere iki farklı parametreye bağlıdır. Böylece, bir parametrik yüzey S ile gösterilirse $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ile temsil edilebilir; burada u ve v parametreleri, iki boyutlu bir R bölgesindeki tüm değerleri alır (Şekil 1.5). Tek boyutlu bir I aralığını uzaya eşlemek yerine (eğri durumu), artık iki boyutlu bir R bölgesinin uzaya sürekli bir eşlemesine sahibiz. Parametrik gösterim, (u, v) -parametre düzleminin bir R bölgesinden üç boyutlu uzayda bir yüzey parçası S' ye bir eşlemeyi tanımlar.



Şekil 1.5 Yüzeyin Parametrik Gösterimi (Potmann ve ark., 2007)

R bölgesindeki bir (u, v) noktasını tanımlayan her u ve v parametre çifti, bir $p(u, v)$ yüzey noktasına eşlenir. Eğrilere benzer şekilde, $x(u, v)$, $y(u, v)$ ve $z(u, v)$ koordinat fonksiyonları ve $p(u, v)$ fonksiyonlarına S 'nin bir parametreleştirmesi diyoruz. $u = u_0$ parametresini sabitlediğimizde yüzeyde bir v -parametre eğrisi elde ederiz. Öte yandan, $v = v_0$ alınıp v parametresini sabitlediğimizde S yüzeyinde bir u -parametre eğrisi oluşturulur. Parametre çizgilerinin çizimi genellikle bir yüzeyin uzaysal yapısının görselleştirilmesinde faydalıdır. Böylece mimari bir araç olarak kullanılabilirler. Parametre çizgileri yüzeylerin mekansal izlenimini destekler (Şekil 1.6).



Şekil 1.6 Parametre Çizgileri Olan ve Olmayan Aynı Yüzey (Potmann ve ark., 2007)

Parametre çizgilerinin mimaride kullanımı ise şu şekilde gösterilmiştir (Şekil 1.7):

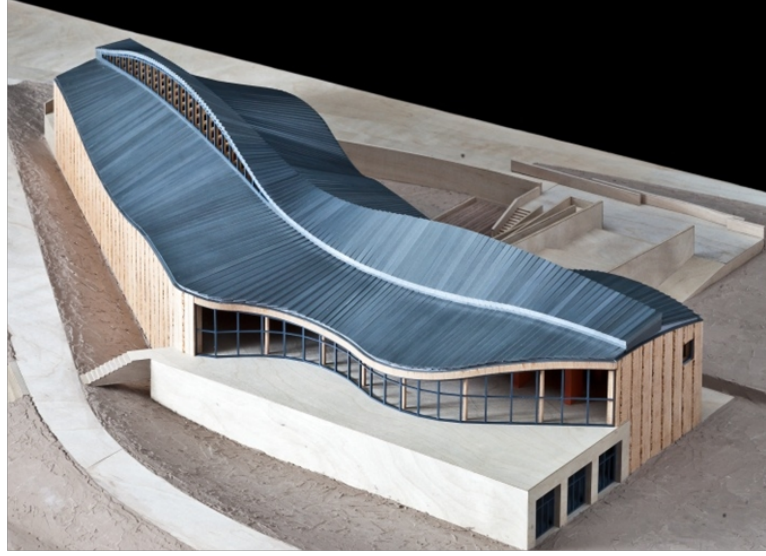


Şekil 1.7 King's College Chapel, Cambridge (Potmann ve ark., 2007)

Yüzeylerin bir alt sınıfı olan Regle yüzeyler ilk kez Monge tarafından tanımlanmıştır ve Hlavaty (1945) ve Hoschek (1973) gibi bilim insanları tarafından da incelenmiştir. Bu yüzeyler, bir doğrunun bir eğri boyunca hareket etmesi sonucu meydana gelir. Regle yüzeyler oldukça estetikler ve fiziksel olarak inşa edilebilmeleri kolaydır. Metal levha, gemi veya uçak tasarımında stabilite, akışkan dinamiği ve titreşim açısından iyi bir yapı sunarlar. Aynı zamanda estetik binalar ve heykeller de inşa edilebilir. Regle yüzeylerin özel bir görünüme sahip olması ve nispeten kolay inşa edilebilmesi nedeniyle çağdaş mimaride giderek daha fazla kullanılmaktadır. Ayrıca mühendislik, bilgisayar programlama ve mimari gibi birçok alanda geniş bir uygulama yelpazesi sunar (Şekil 1.8).



a) The New State Gallery

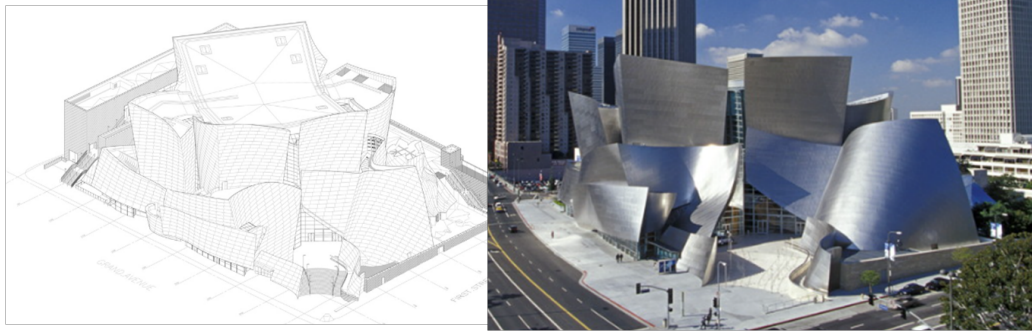


b) The Japanese Art and Technology Center

Şekil 1.8 Mimaride Regle Yüzey Örnekleri (Potmann ve ark., 2007)

Açılabilir yüzeyler, Gauss eğriliği sıfıra eşit olan yüzeylerdir. Bu nedenle düzlem üzerine haritalandırılabilirler; böylece yüzey üzerine çizilen herhangi bir eğrinin uzunluğu aynı kalır. Bu yüzeyler çağdaş mimarlar tarafından sıklıkla kullanılmakta ve onlara yeni formlar tasarlama olanağı sağlanmaktadır. Açılabilir yüzeylerin metal levha ile kolaylıkla kaplanabilmesi mimari açıdan büyük bir avantajdır. Böyle bir

yüzeyi inşa etmek için metal levhaların açılması yeterli olacaktır. Bu yüzeyler bir dizi düz çizgi taşır ve bu da onların yapımını kolaylaştırır. Bu özelliklerin tümü mimari açıdan oldukça ilgi çekicidir ve bu nedenle birçok önemli mimari projede açılabilir yüzeyler tercih edilir. Özellikle Frank O. Gehry bu yüzeyleri oldukça yaygın bir şekilde kullanmaktadır (Şekil 1.9).



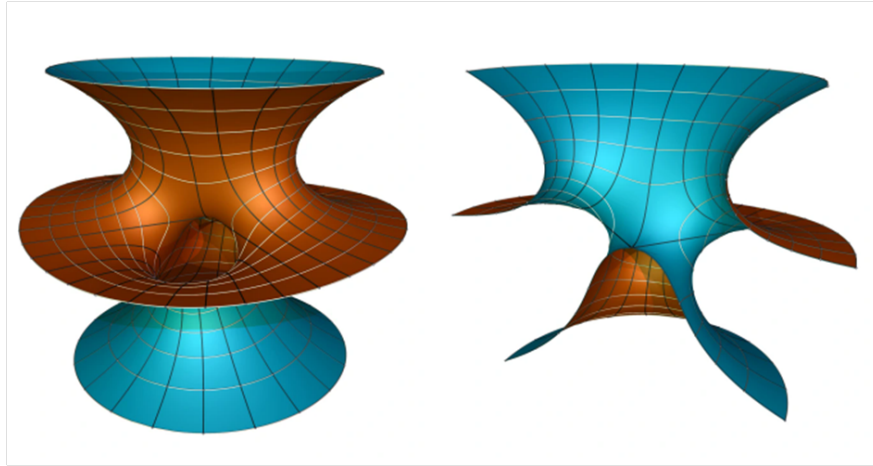
Şekil 1.9 The Walt Disney Concert Hall (Potmann ve ark., 2007)

Açılabilir yüzeylerin dikkate değer bir özelliği de yansımalarla ilgilidir. Yansıyan tüm ışınlar yeniden açılabilir yüzeyi geri sarar. Aynı şey bu yüzeylerdeki kırılmalar için de geçerlidir Hem yansımalar hem de kırılmalar düzlemlerde ilginç fokal eğrileri oluşturur. Bilbao'daki Guggenheim Müzesi, Kanadalı mimar Frank O. Gehry'nin cam, titanyum ve kireçtaşından yaptığı bu yapı fokal eğrilerinin en iyi örneğidir (Şekil 1.10).



Şekil 1.10 Guggenheim Müzesi, Bilbao, İspanya (Potmann ve ark., 2007)

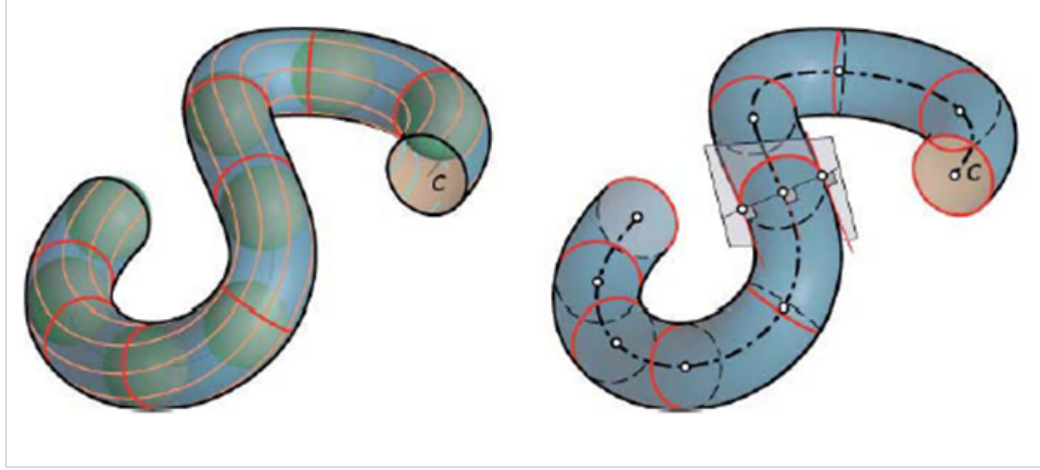
Minimal yüzeyler, herhangi bir noktadaki ortalama eğrilikleri sıfır olan yüzeylerdir. Ortalama eğrilik, bir yüzeyin her noktasında bulunan iki ana eğrilik (maksimum ve minimum eğrilik) arasındaki ortalama değerdir. Minimal yüzeylerde bu ortalama eğrilik değeri her zaman sıfırdır. Minimal yüzeylerin, farklı matematiksel tekniklerle karakterize edilen ve sınıflandırılan çeşitli örnekleri vardır (Şekil 1.11). Örneğin, düzlemsel minimal yüzeyler, eğrilerle parametrelendirilmiş yüzeylerdir ve minimal yüzeylerin temel yapı taşlarıdır. Bunlar, Laplace denklemi gibi diferansiyel denklemlerin çözümleriyle ifade edilebilir. Minimal yüzeylerin önemi, fizikten mühendisliğe kadar birçok alanda uygulama alanı bulmasıdır. Örneğin, sabun köpüğü, minimal yüzeylerin fiziksel örneklerindendir ve sabun köpüğünün oluşumu ve stabilitesi gibi konularda araştırmalarda kullanılır. Ayrıca, minimal yüzeylerin yapısal mühendislikte ve malzeme biliminde, özellikle de yüzey gerilimi ve malzeme dayanıklılığı gibi konularda önemli uygulamaları vardır. Dolayısıyla, minimal yüzeylerin çalışılması, hem matematiksel teoreminin gelişimi hem de pratik uygulamalar açısından büyük öneme sahiptir.



Şekil 1.11 Costa Minimal Yüzeyi (Potmann ve ark., 2007)

Bir tüp yüzeyi, merkezleri spine eğrisi veya merkezi eğri olarak adlandırılan bir c eğrisi üzerinde yer alan eşit r yarıçaplı kürelerden oluşan bir zarftır. Basit özel durumlar, dönele silindir (omurga eğrisi olarak düz bir çizgi için ortaya çıkan) ve dairesel bir omurgaya ait olan torustur. Tüp yüzeyi spine eğrisi ve yarıçapı r

ile tanımlanır. Aynı zamanda, c uzaysal eğrisinin normal düzlemlerinde yer alan ve merkezleri c üzerinde olan, r yarıçaplı bir daire ailesi olarak da oluşturulabilir (Şekil 1.12).



Şekil 1.12 İki Uç Nokta ile Aynı Spine Eğrisine Giden Çeşitli Tüp Yüzeyleri (Potmann ve ark., 2007)

Mimaride eğri benzeri yapılar inşa etmek için belirli bir kalınlığa sahip olmaları gerekir. Kalınlık bir boru yüzeyinin yarıçapı ile ifade edilebilir. Bu tarz bir yapıyı "Shoal uçuş" kamusal sanatında görmek mümkündür (Şekil 1.13).



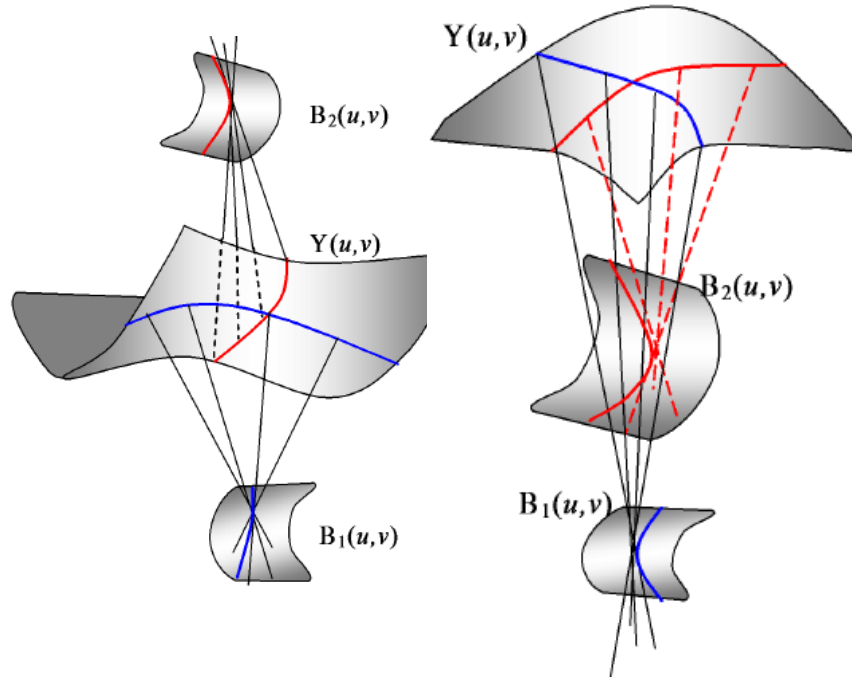
Şekil 1.13 Shoal Uçuş Kamusal Sanatı (Potmann ve ark., 2007)

3 boyutlu Öklid uzayında düzgün bir X yüzeyi üzerindeki bir noktada dik kesit eğrilerinin eğrilik merkezleri, normal vektörün belli bir parçasına karşılık gelir. Bu parçaların maksimum ve minimum değerleri iki eğrilik çizgisinin eğrilik merkezleridir. Bu iki noktaya bu noktadaki normalin fokal noktaları denir. Bu noktalar yüzeyin (asal) eğrilik merkezleri olarak da isimlendirilir. Fokal yüzey ya da X yüzeyinin evölütü fokal noktaların veya asal eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olarak tanımlanır. Bu yüzeye merkezlerin yüzeyi ya da X yüzeyinin merkezci yüzeyi de denir. Genellikle iki parçadan (maks. ve min. noktalara bağlı olarak) oluşur. Y , X yüzeyinin lokal bir parametrizasyonu, k ve k^* yüzeyin asal eğrilikleri ve n yüzeyin birim normali olmak üzere yüzeyin umbilik noktaları dışında fokal yüzeylerin parametrik denklemleri

$$B_1(u, v) = Y(u, v) + \frac{1}{k}n(u, v)$$

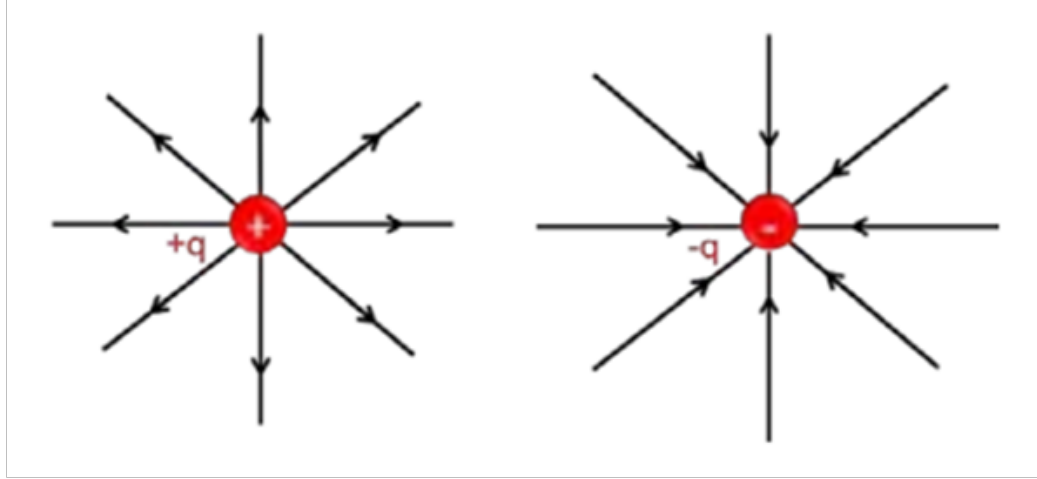
$$B_2(u, v) = Y(u, v) + \frac{1}{k^*}n(u, v)$$

şeklindedir (Şekil 1.14).



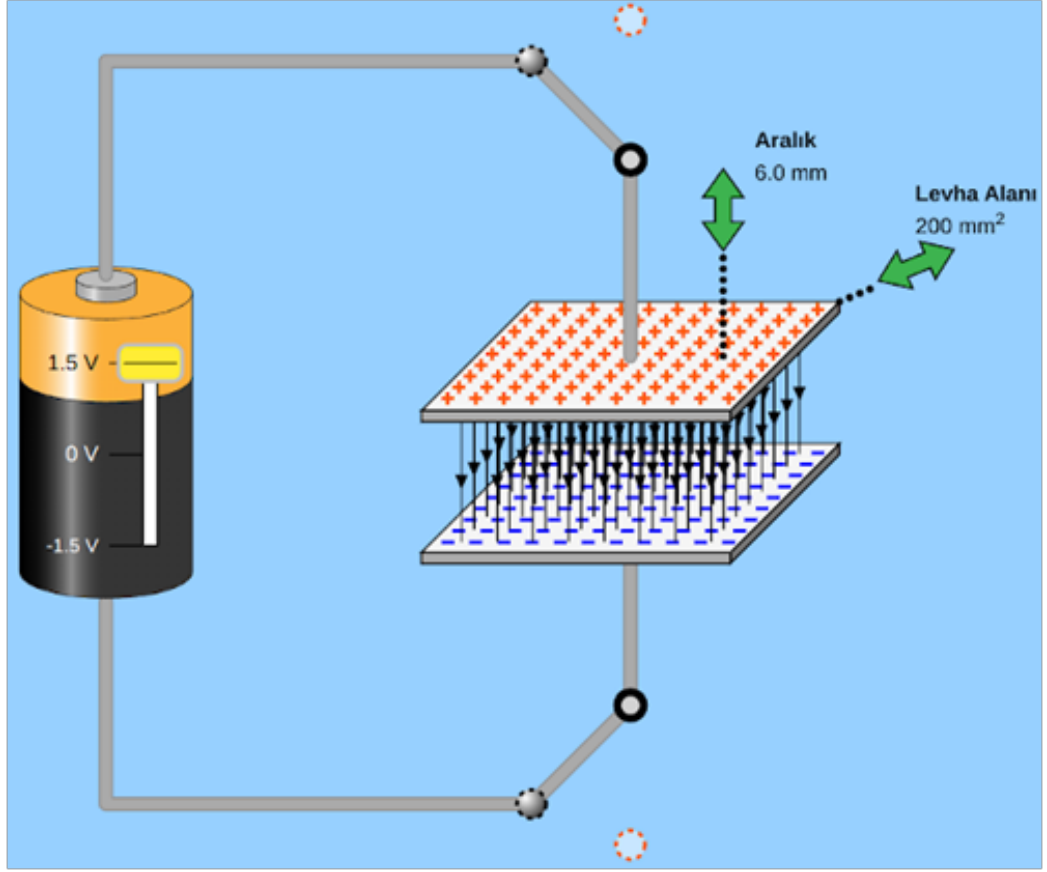
Şekil 1.14 Yüzey ve Onun Fokal Yüzeyi (Şimşek, 2016)

Noktasal bir yükün etrafında oluşan elektrik alan her noktada farklı yön ya da doğrultuda olabildiği için düzgün bir elektrik alan oluşturmaz. Noktasal yüklerde yükten uzaklaştığında elektrik alan çizgileri seyrelir ve bunun sonucu olarak elektrik alan şiddeti azalır (Şekil 1.15).



Şekil 1.15 Noktasal Bir Yükün Etrafında Oluşan Elektrik Alan (OGM Materyal, 2024)

Paralel levhalar arasında oluşan elektrik alanında ise düzgün bir elektrik alan oluşur (Şekil 1.16). Yani, bu iki levha arasında oluşan elektrik alanın büyüklüğü ve yönü her noktada aynıdır. Radar ekranları ve osiloskop gibi bilimsel aletlerde, bu tür aygıtlar kullanılır. Bir levhaya eşit uzaklıkta olan noktalar aynı elektriksel potansiyele sahiptir. Elektriksel potansiyelleri eşit olan bu noktaların oluşturduğu yüzeyler paralel levhalar arasındaki eş potansiyel yüzeylerdir. Paralel levhalar bir üretece bağlanırsa levhaların potansiyel farkının sabit kalması sağlanır. Eş potansiyel yüzeyler, potansiyel enerji açısından homojen bir alan yaratır ve bu yüzeyler boyunca bir parçacığın hareket etmesi durumunda potansiyel enerji değişmez. Elektriksel sistemlerin tasarımında ve analizinde, eş potansiyel yüzeylerin belirlenmesi, sistemlerin güvenliği ve verimliliği açısından kritiktir.



Şekil 1.16 Paralel Levhalar Arasında Oluşan Elektrik Alan (Anonim, 2024)

Roller coaster icadının kökeni 18. yüzyıl civarlarında Rusya’da eğlence için özel olarak inşa edilmiş ve “Rus Dağları” olarak adlandırılmış buz tepelerine dayanır. 19. yüzyılın başlarına gelindiğinde ise Ruslardan ilham alan Fransızlar, rayların üzerinde tekerleklerle ilerleyen araçlara sahip ilk hız trenini yaptılar. Bilinen en eski Roller coaster “Les Montagnes Russes Belleville” ve "Promenades Aériennes” 1817 yılında Paris’te inşa edilmiştir (Şekil 1.17). Aynı yıllarda Amerika’nın Pennsylvania eyaletinde bir kömür madeninde ilkel bir Roller coaster türü icat edildi. Mauch Chunk kasabasının yakınlarında Pisgah Dağı’nın tepesinde bulunan bir madenden çıkarılan kömürlerin aşağıya taşınması için bir ray sistemi kuruldu. Bu ray sistemi sayesinde kömür araca yüklendikten sonra raylardan aşağı bırakılarak ve hızla kanala kadar ulaşması sağlandı.



Şekil 1.17 Les Montagnes Russes de Belleville (Anonim, 2024)

Dairesel yüzeylerin özel bir tipi olan Roller coaster yüzeyler trenin; virajların, halkaların, tepelerin ve vadilerin etrafında hareket ederken kinetik ve potansiyel enerjinin etkileşimi ile klasik enerji dönüşümlerine örnektirler (Şekil 1.18). Bir Roller coaster pisti, uzayda hareket eden bir parçacığın uzayda verilen bir eğri üzerinde kalacaktır.



Şekil 1.18 Roller Coaster Pisti (Anonim, 2024)

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Bu bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan Öklid uzayı ile ilgili bazı temel tanımlar, teoremler ve kavramlardan söz edilecektir.

Tanım 2.1.1 V, \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in V$ için

$$\langle, \rangle: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu (simetrik, bilinear ve pozitif tanımlı) tanımlanabilirse, bu vektör uzayına bir reel iç çarpım uzayı denir (Spivak 1999).

Tanım 2.1.2 V , n -boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olsun. V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir A afin uzayına Öklid uzayı adı verilir ve \mathbb{E}^n ile gösterilir (Spivak 1999).

Tanım 2.1.3 \mathbb{E}^n , n -boyutlu Öklid uzayı olsun. $\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{E}^n$ için

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona standart Öklid iç çarpım fonksiyonu ya da standart iç çarpım adı verilir (Spivak 1999).

Tanım 2.1.4 \mathbb{E}^n , n -boyutlu Öklid uzayı'nın $\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ elemanı için

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona u nun normu adı verilir (Millman vd. 1977).

Tanım 2.1.5 \mathbb{E}^3 , 3-boyutlu Öklid uzayı olsun. Bu durumda $\forall u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}^3$ için, bu vektörlerin Öklid vektörel çarpımları

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

şeklinde tanımlanır (Millman vd. 1977).

Tanım 2.1.6 \mathbb{R} gerçel sayı doğrusunun bir $I = (a, b)$ açık aralığından \mathbb{E}^n uzayına tanımlı düzgün bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ dönüşümüne \mathbb{E}^n uzayı içinde bir eğri denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.7 \mathbb{R} gerçel sayı doğrusunun bir $I = (a, b)$ açık aralığından \mathbb{E}^n uzayına, türevlenebilir bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ fonksiyonuna türevlenebilir parametrik eğri adı verilir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n, t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ şeklinde bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha(t) \in \mathbb{E}^n$ noktasında

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$$

biçiminde tanımlanan ifadeye α eğrisinin t noktasındaki hız vektörü denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.9 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ Öklid uzayı'nda bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna α eğrisinin skaler hız fonksiyonu ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı denir. Eğer $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri, $t \in I$ parametresine de eğrisinin yay parametresi denir. Birim hızlı eğriler genellikle s yay parametresi ile ifade edilir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.10 Bir α eğrisinin her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise bu eğriye regüler eğri denir, (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.11 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $T = \alpha'$ ifadesine α eğrisinin birim teğet vektör alanı, $\kappa(s) = \|T'(s)\|, \forall s \in I$ ifadesine α eğrisinin eğrilik fonksiyonu, $\kappa \neq 0$ olmak üzere $N = T'/\kappa$ ifadesine α eğrisinin asli normal vektör alanı, $B = T \times N$ ifadesine α eğrisinin binormal vektör alanı ve $\{T, N, B\}$ ye ise α eğrisinin Frenet çatısı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.12 $\kappa > 0$ olmak üzere $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda T, N, B vektör alanları birim vektör alanlarıdır ve birbirine diktir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.13 Birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere,

$$\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = - \langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.14 $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olan, s yay uzunluğu parametresi ile verilen birim hızlı bir eğri olmak üzere α eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.15 $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\forall t \in I$ için $T(t), N(t), B(t)$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması κ ve τ olsun. $\|\alpha'\| = \nu$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} T'(t) &= \nu(t)\kappa N(t), \\ N'(t) &= \nu(t)(-\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t)), \\ B'(t) &= -\nu(t)\tau(t)N(t) \end{aligned}$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.16 $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun. Eğer $t \in I$ yay parametresi değilse α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet elemanları

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad N(t) = \frac{B(t) \wedge T(t)}{\|B(t) \wedge T(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|},$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

şeklinde bulunur (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.17 Bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ regüler eğrisi ile $\gamma : J \rightarrow \mathbb{E}^n$ regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s_0) = \gamma(t_0)$ aynı noktayı göstermek üzere,

$$\alpha(s_0) = \gamma(t_0), \quad \alpha'(s_0) \neq \gamma'(t_0)$$

ise α ve γ eğrileri sıfıncı mertebeden değişiyor denir.

$$\alpha(s_0) = \gamma(t_0), \quad \alpha'(s_0) = \gamma'(t_0), \quad \alpha''(s_0) \neq \gamma''(t_0)$$

ise α ve γ eğrileri birinci mertebeden değişiyor denir.

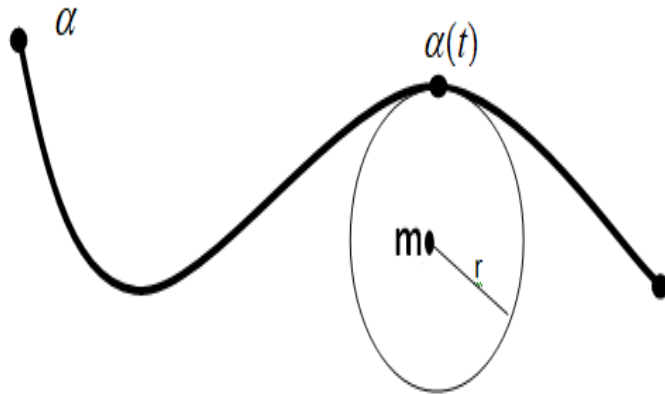
$$\alpha(s_0) = \gamma(t_0), \quad \alpha'(s_0) = \gamma'(t_0), \quad \alpha''(s_0) = \gamma''(t_0), \quad \alpha'''(s_0) \neq \gamma'''(t_0)$$

ise α ve γ eğrileri ikinci mertebeden değişiyor(sonsuz yakın üç ortak noktası vardır) denir. En genel halde

$$\alpha(s_0) = \gamma(t_0), \quad \dots, \quad \alpha^{(k)}(s_0) = \gamma^{(k)}(t_0), \quad \alpha^{(k+1)}(s_0) \neq \gamma^{(k+1)}(t_0)$$

ise α ve γ eğrileri k-ıncı mertebeden değişiyor(sonsuz yakın k+1 ortak noktası vardır) denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.18 \mathbb{E}^3 uzayında, bir α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasında, eğriye en az ikinci mertebeden değen (sonsuz yakın üç ortak noktası olan) çembere, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki oskülör çemberi denir (O'Neill 1966).



Şekil 2.1 Oskülör Çember

Teorem 2.1.19 α, \mathbb{E}^3 de regüler bir eğri, $\kappa(t)$ eğrinin eğrilik fonksiyonu ve $N(t)$ eğrinin normal vektör alanı olsun. α eğrisinin, $\alpha(t)$ noktasındaki oskülatör çemberinin $m(t)$ merkezi ve $r(t)$ yarıçapı

$$m(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) \quad \text{ve} \quad r(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

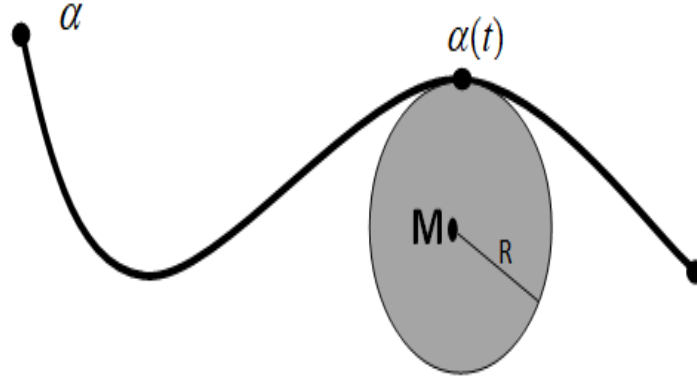
eşitlikleri ile bellidir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.20 Eğriliği her noktada sıfırdan farklı olan regüler bir γ eğrisinin eğriliği κ , normal vektör alanı N olmak üzere,

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$$

biçiminde tanımlanan γ^* eğrisine, γ eğrisinin evolüt eğrisi denir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.21 \mathbb{E}^3 uzayında, bir α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasında, eğriye en az üçüncü mertebeden değen (sonsuz yakın dört ortak noktası olan) küreye, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki oskülatör küresi denir (Do Carmo 1976).



Şekil 2.2 Oskülatör Küre

Teorem 2.1.22 \mathbb{E}^3 de regüler bir α eğrisi, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ve sırasıyla $\kappa(t), \tau(t)$ eğrilik, burulma fonksiyonları ile verilsin. $\nu = \|\alpha'(t)\|$ olmak üzere α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki oskütöre küresinin merkezi $M(t)$ ve $R(t)$ yarıçapı

$$M(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa}N(t) + \frac{1}{\nu\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'B(t),$$

$$R(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right)^2}$$

eşitlikleri ile bellidir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.23 Uzayda bir γ eğrisinin evolütü γ^* ise $c \in \mathbb{R}$ ve $\phi(t) = \int_0^t \tau(u)du$ olmak üzere

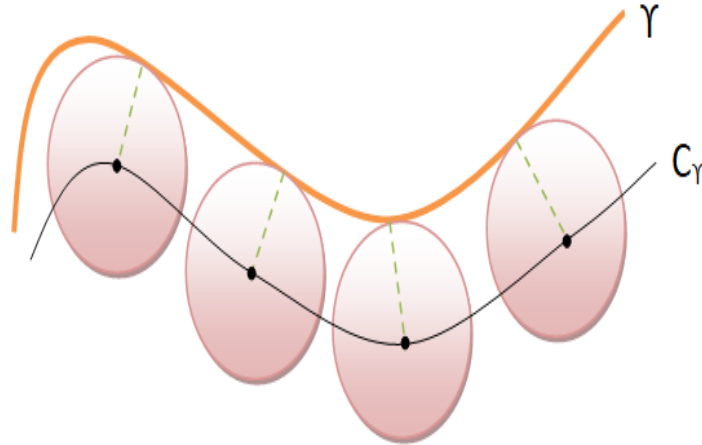
$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \rho(t)N(t) - \rho(t)\tan[\phi(t) + c]B(t)$$

dir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.24 Uzayda bir γ eğrisinin oskütör kürelerinin merkezleri γ eğrisinin $C_\gamma(t)$ fokal eğrisi oluşturur ve bu eğriler

$$C_\gamma(t) = \gamma(t) + \sum_{i=1}^2 m_i N_i(t)$$

şeklinde ifade edilir. Burada m_i -ler i -inci fokal eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılır (Do Carmo 1976).



Şekil 2.3 γ Eğrisi ve C_γ Fokal Eğrisi

Tanım 2.1.25 Bir $M \subset \mathbb{E}^3$ kümesi verilsin. $\forall P \in M$ noktası için, görüntüsü P noktasının M deki komşuluğunu kapsayan ve $D \subset \mathbb{E}^2$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir $X \rightarrow M$ dönüşümü birebir, regüler ve tersi de sürekli olacak şekilde bulunabiliyorsa, M kümesine \mathbb{E}^3 de bir yüzey denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.26 M, \mathbb{E}^3 de bir yüzey, $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \rightarrow M$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna M yüzeyi üzerinde bir eğri denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.27 M, \mathbb{E}^3 de bir yüzey olsun. $\vec{V}_p \in T_{\mathbb{E}^3}(P)$ tanjant vektörü P noktasından geçen ve yüzey üzerinde kalan bir eğrinin hız vektörü oluyorsa, \vec{V}_p tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasındaki teğet vektörü denir. Yüzeyin $P \in M$ noktasındaki bütün teğet vektörlerinin kümesi M yüzeyinin P noktasındaki teğet düzlemi olarak adlandırılır ve $T_M(P)$ ile gösterilir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.28 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir V vektör alanı verilsin. $\forall P \in M$ noktasına bir $V(P) = \vec{V}_p$ teğet vektörü karşılık getiren V vektör alanına M yüzeyi boyunca bir teğet vektör alanı denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.29 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir yüzey ve $P \in M$ bir nokta olsun. P noktasındaki $T_M(P)$ teğet düzlemine dik olan bir U_P tanjant vektörüne M yüzeyinin P noktasındaki normal vektörü denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.30 $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyi boyunca bir U vektör alanı verilsin. $\forall P \in M$ için elde edilen $U(P) = \vec{U}_p$ tanjant vektörü M yüzeyinin bir normal vektörü oluyorsa, U vektör alanına M yüzeyi boyunca bir normal vektör alanı denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.31 M yüzeyi üzerinde bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir yönlendirme, üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan yüzeye de yönlendirilebilir yüzey denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.32 U, \mathbb{E}^2 de bir açık alt cümle olmak üzere $M : U \rightarrow \mathbb{E}^3$

$$M(u, v) = (m_1(u, v), m_2(u, v), m_3(u, v))$$

biçiminde tanımlanan diferansiyellenebilir dönüşümüne \mathbb{E}^3 de bir yama, lokal yüzey ya da iki parametrelili yüzey denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.33 $M : U \rightarrow M(U) \subset \mathbb{E}^3$ bir lokal yüzey ve $(u_0, v_0) \in U$ sabit olsun. $u \rightarrow M(u, v_0)$ ve $v \rightarrow M(u_0, v)$ eğrilerine sırasıyla M 'nin u - parametre ve v - parametre eğrileri denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.34 Bir $M : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ yaması için $(u, v) \in U$ noktalarında birim normal vektör alanı veya yüzeyin normali,

$$N(u, v) = \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}(u, v)$$

eşitliği ile tanımlanır (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.35 $M : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir lokal yüzey olsun.

$$E = \langle M_u, M_u \rangle, \quad F = \langle M_u, M_v \rangle, \quad G = \langle M_v, M_v \rangle$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ifadesine M nin Riemann metriği ya da birinci temel formu denir. E, F, G fonksiyonlarına ise M in birinci temel formunun katsayıları denir.

$$e = \langle M_{uu}, N(u, v) \rangle, \quad f = \langle M_{uv}, N(u, v) \rangle, \quad g = \langle M_{vv}, N(u, v) \rangle$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ ifadesine M nin ikinci temel formu denir. e, f, g fonksiyonlarına ise M nin ikinci temel formunun katsayıları denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.36 M bir regüler yüzey ve M nin $P \in M$ noktasındaki yüzey normali N olsun. \vec{v}_P ile M nin P noktasındaki tanjant vektörü gösterilmek üzere

$$S(\vec{v}_P) = -D_N(\vec{v}_P)$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M yüzeyinin şekil operatörü denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.37 $M : U \rightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir yama olsun. O zaman M nin S şekil operatörü $\{M_u, M_v\}$ bazı cinsinden,

$$\begin{cases} S(M_u) = -N_u = \frac{eG-fF}{EG-F^2} M_u + \frac{fE-eF}{EG-F^2} M_v \\ S(M_v) = -N_v = \frac{fG-gF}{EG-F^2} M_u + \frac{gE-fF}{EG-F^2} M_v \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. M yüzeyinin şekil operatörünün matrisi S ile gösterilirse

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} eG - fF & fE - eF \\ fG - gF & gE - fF \end{vmatrix}$$

şeklindedir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.38 M, \mathbb{E}^3 de bir yüzey ve M yüzeyi üzerinde bir eğri α olmak üzere, α eğrisinin teğet vektör alanı T ve M yüzeyinin şekil operatörü S olsun. Eğer T teğet vektör alanı α eğrisi boyunca S 'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisi denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.39 M, \mathbb{E}^3 de bir yüzey olsun. $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S_P olmak üzere,

1. $S_P = \lambda I_{n-1}$ ise $P \in M$ noktasına M 'nin umbilik noktası denir,
2. $S_P = 0$ ise $P \in M$ noktasına M üzerinde düzlemsel(flat) nokta denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.40 M, \mathbb{E}^3 de bir yüzey ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S_P olsun. $\forall X(P), Y(P) \in T_M(P)$ için $\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$ ise bu iki tanjant vektörüne eşleniktir denir. Bir $X_P \neq \vec{0}$ tanjant vektörü için, $\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$ ise X_P doğrultusuna, M 'nin P noktasındaki bir asimptotik doğrultusu ve X_P yi, $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde asimptotik çizgi denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.41 \mathbb{E}^3 de bir hiperyüzey M ve M nin P noktasındaki şekil operatörü $S|_P$ olmak üzere,

$$K : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longrightarrow K(P) = \det S(P)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longrightarrow H(P) = \frac{1}{2}iz(S(P))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M yüzeyinin ortalama eğriliği denir (O'Neill 1966).

Teorem 2.1.42 Öklid uzayında her noktada Gauss eğrilik fonksiyonu olan yüzeylere açılabilir yüzey, ortalama eğrilik fonksiyonu olan yüzeylere minimal yüzey denir. Bir başka ifadeyle aynı sınırlara sahip olan yüzeyler arasında en küçük alanlı yüzeylere minimal yüzey denir (O'Neill 1966).

Teorem 2.1.43 $M : U \longrightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir yama olsun. M in Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla (O'Neill 1966).

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{ve} \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

Tanım 2.1.44 \mathbb{E}^3 de bir hiperyüzey M ve M nin P noktasındaki şekil operatörü S olsun. M yüzeyinin bir P noktasına karşılık gelen $S|_P$ nin karakteristik değerleri M yüzeyinin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır (O'Neill 1966).

Teorem 2.1.45 $M : U \longrightarrow \mathbb{E}^3$ regüler bir yama olsun. M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere (O'Neill 1966).

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{ve} \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Teorem 2.1.46 \mathbb{E}^3 de yönlendirilmiş bir yüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun.

$$\eta : M \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{E}^3$$

$$P \longrightarrow \eta(P) = \vec{N}(P) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(P) \frac{\partial}{\partial Y_i} \Big|_P$$

biçiminde tanımlanan diferansiyellenebilir η dönüşümüne Gauss dönüşümü denir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.47 $M \subset \mathbb{E}^3$ bir regüler yüzey olsun. M yüzeyine ε uzaklıkta paralel olan yüzey

$$M_p = \{q \in \mathbb{E}^3 : d(q, M) = \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlanır (Gray 1993).

Tanım 2.1.48 M regüler yüzeyinin birim normal vektörü $N(t, \theta)$ olsun. M nın paralel yüzeyi

$$M_p(t, \theta) = M(t, \theta) + \varepsilon N(t, \theta)$$

şeklinde tanımlanır, (Görgülü 1989, Gray 1993).

Tanım 2.1.49 $X(t)$ regüler bir eğri ve bu eğri üzerinde tanımlanan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu çatı yardımıyla tanımlanan $M(t, \theta)$ tüp yüzeyi

$$M(t, \theta) = X(t) + r [\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)] \quad (2.1.1)$$

şeklinde verilir. Burada $r \in \mathbb{R}^+$ tüp yüzeyin yarıçapı, $X(t)$ merkez(spine) eğrisi, $\theta \in [0, 2\pi)$ dir (Izumiya 2007).

Tanım 2.1.50 $M(t, \theta)$ regüler yüzeyinin fokal yüzeyleri $M_i^*(t, \theta)$ ile gösterilirse bu yüzeylerin denklemi

$$M_i^*(t, \theta) = M(t, \theta) + \frac{1}{k_i} N(t, \theta), \quad i = 1, 2 \quad (2.1.2)$$

şeklinde verilir. Burada $N(t, \theta)$, yüzeyin birim normali, k_1 ve k_2 yüzeyin birinci ve ikinci asli eğrilikleridir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.1.51 $X(t)$ regüler eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu çatıya göre Roller coaster yüzeyi $M_F(t, \theta)$ ile gösterilir ve denklemi

$$M_F(t, \theta) = X(t) + r \left(\cos \theta T + \sin \theta \left(\cos \phi(t) N + \sin \phi(t) B \right) \right) \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\phi(t)$ açısı $\phi' = -\int \tau dt$ bağıntısından bulunur (Izumiya 2007).

2.2 Flc Çatısı İle İlgili Genel Bilgiler

Bu bölümde Dede M. (2019) tarafından yayınlanan "Why Flc Frame is better than Frenet Frame?" ve "A new representation of Tubular Surfaces" isimli çalışmaya yer verilerek tez içerisinde faydalanılacak olan gerekli ön bilgiler sunulmuştur.

Tanım 2.2.1 $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0 \leq i \leq n$,

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t^1 + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

biçimindeki "t" değişkenine bağlı fonksiyona n . dereceden bir polinom denir (Larson,2012).

Tanım 2.2.2 $\alpha : [a, b] \rightarrow E^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ eğrisinin $1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i(t)$ değerleri bir polinom ise $\alpha(t) \in \mathbb{R}[t]$ eğrisine n -boyutlu polinom eğrisi denir (Farouki,2007).

Tanım 2.2.3 $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ n -boyutlu polinom eğrisi için,

$$\deg(\alpha(t)) = \max \{ \deg(\alpha_1(t)), \deg(\alpha_2(t)), \dots, \deg(\alpha_n(t)) \}$$

değerine α polinom eğrisinin derecesi denir (Larson,2012).

Tanım 2.2.4 n . dereceden regüler polinom uzay eğrisi α olsun. α eğrisi üzerinde

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad D_1(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)\|}, \quad D_2(t) = D_1(t) \wedge T(t) \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlı $\{T, D_2, D_1\}$ çatısı Frenet benzeri çatı veya Flc çatısı olarak isimlendirilir. Burada T teğet vektör, D_2 asli normal benzeri vektör ve D_1 binormal benzeri vektördür. Bu çatıya göre Frenet benzeri eğrilikler d_1, d_2, d_3 ile gösterilirse

$$d_1 = \frac{\langle T', D_2 \rangle}{\nu}, \quad d_2 = \frac{\langle T', D_1 \rangle}{\nu}, \quad d_3 = \frac{\langle D_2', D_1 \rangle}{\nu} \quad (2.2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\|\alpha'\| = \nu$ dır. (Dede,2019).

Örnek 2.2.5 $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ helisel polinom uzay eğrisi olsun. Bu eğrinin Frenet elemanları hesaplanırsa

$$T(t) = \left(\frac{2}{t^2+2}, \frac{2t}{t^2+2}, \frac{t^2}{t^2+2} \right), \quad N(t) = \left(-\frac{2t}{t^2+2}, -\frac{t^2-2}{t^2+2}, \frac{2t}{t^2+2} \right),$$

$$B(t) = \left(\frac{t^2}{t^2+2}, -\frac{2t}{t^2+2}, \frac{2}{t^2+2} \right), \quad \kappa(t) = \frac{2}{3(t^2+2)^2}, \quad \tau(t) = \frac{2}{3(t^2+2)^2}$$

bulunur. Buradan $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit olduğundan α polinom eğrisi bir helistir. Bu eğrinin Flc çatı vektörleri ve eğrilikleri hesaplanırsa

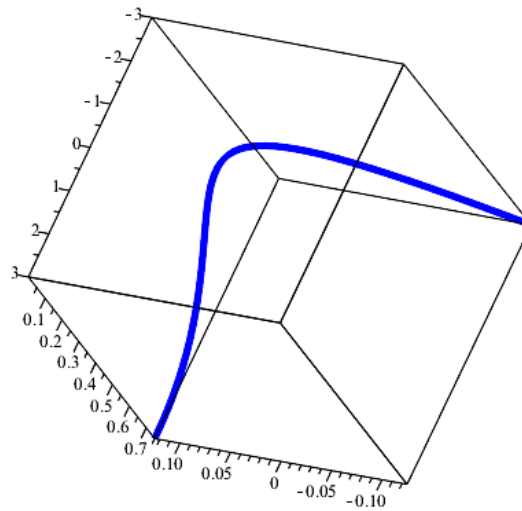
$$T(t) = \left(\frac{2}{t^2+2}, \frac{2t}{t^2+2}, \frac{t^2}{t^2+2} \right),$$

$$D_1(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}, 0 \right),$$

$$D_2(t) = \left(-\frac{t^2}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}, -\frac{t^3}{(t^2+2)\sqrt{t^2+1}}, \frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2+2} \right),$$

$$d_1(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad d_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \quad d_3(t) = \frac{t^2}{2(t^2+1)}$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2.4 Helisel Polinom Uzay Eğrisi

Teorem 2.2.6

- i. α , polinom uzay eğrisinin doğrusal olması için gerek ve yeter şart $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ olmasıdır.
- ii. $d_1 \neq 0$ eğriliği ile verilen α polinom eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter şart $d_2 = d_3 = 0$ olmasıdır. (Dede,2019).

Sonuç 2.2.1. α polinom uzay eğrisi 2.dereceden bir eğri ise Flc eğrilikleri ile Frenet eğrilikleri arasında

$$d_1 = \kappa, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = \tau$$

bağıntısı vardır (Dede,2019).

Örnek 2.2.7 $\alpha(t) = (t, t, t^4)$ polinom eğrisi olsun. Bu eğrinin Frenet elemanları hesaplanırsa

$$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{16t^6 + 2}}, \frac{1}{\sqrt{16t^6 + 2}}, \frac{4t^3}{\sqrt{16t^6 + 2}} \right),$$

$$N(t) = \left(-\frac{2t^3\sqrt{2}}{\sqrt{16t^6 + 2}}, -\frac{2t^3\sqrt{2}}{\sqrt{16t^6 + 2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16t^6 + 2}} \right),$$

$$B(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad \kappa(t) = \frac{6t^2}{(8t^6 + 1)^{3/2}}, \quad \tau(t) = 0$$

bulunur. Burada $\tau(t) = 0$ olduğundan α eğrisi düzlemseldir. Bu eğrinin Flc çatı vektörleri ve eğrilikleri hesaplanırsa

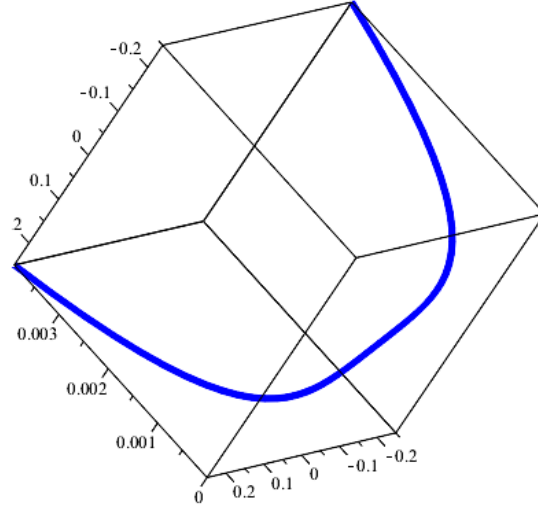
$$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{16t^6 + 2}}, \frac{1}{\sqrt{16t^6 + 2}}, \frac{4t^3}{\sqrt{16t^6 + 2}} \right),$$

$$D_1(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right),$$

$$D_2(t) = \left(-\frac{2t^3\sqrt{2}}{\sqrt{16t^6 + 2}}, -\frac{2t^3\sqrt{2}}{\sqrt{16t^6 + 2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16t^6 + 2}} \right),$$

$$d_1(t) = 1, \quad d_2(t) = 0, \quad d_3(t) = 0$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2.5 Düzlemsel Polinom Eğrisi

Teorem 2.2.8 n . dereceden polinom uzay eğrisi α olsun. Flc türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T'(t) \\ D_2'(t) \\ D_1'(t) \end{bmatrix} = \nu(t) \begin{bmatrix} 0 & d_1(t) & d_2(t) \\ -d_1(t) & 0 & d_3(t) \\ -d_2(t) & -d_3(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ D_2(t) \\ D_1(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir, (Dede,2019).

İspat 2.2.9 α eğrisinin N normal vektörü ile D_2 normal benzeri vektörü arasındaki açı θ olsun. Bu durumda D_2 ve D_1 vektörleri

$$D_2(t) = \cos\theta N(t) + \sin\theta B(t), \quad (2.2.3)$$

$$D_1(t) = -\sin\theta N(t) + \cos\theta B(t) \quad (2.2.4)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ ifadelerinde (2.2.1) denklemi kullanılırsa,

$$\cos\theta = \langle D_1(t), B(t) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)\|}, \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \right\rangle$$

$$= \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)\| \cdot \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}, \quad (2.2.5)$$

$$\sin\theta = \langle D_2(t), B(t) \rangle$$

$$= \langle D_1(t) \wedge T(t), B(t) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)\|} \wedge \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \right\rangle$$

$$= \frac{\langle (\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)) \wedge \alpha'(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\| \cdot \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

$$= \frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha^{(n)}(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle - \langle \alpha'(t), \alpha^{(n)}(t) \rangle \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\| \cdot \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

$$= \frac{\|\alpha'(t)\| \det(\alpha^{(n)}(t), \alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| \|\alpha'(t) \wedge \alpha^{(n)}(t)\|} \quad (2.2.6)$$

şeklinde bulunur. (2.2.3) denkleminin θ ya göre türevi alınır ve (2.1.15) bağıntısı dikkate alınırsa D_2' türevi

$$\begin{aligned} D_2'(t) &= -\sin\theta d\theta N(t) + \cos\theta N'(t) + \cos\theta d\theta B(t) + \sin\theta B'(t) \\ &= -\sin\theta d\theta N(t) + \cos\theta(-\nu(t)\kappa(t)T(t) + \nu(t)\tau(t)B(t)) \\ &\quad + \cos\theta d\theta B(t) + \sin\theta(-\nu(t)\tau(t)N(t)) \\ &= -(\nu(t)\kappa(t)\cos\theta)T(t) + (d\theta + \nu(t)\tau(t))D_1(t) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

şeklinde bulunur. (2.1.15), (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.4) denklemleri kullanılırsa d_1, d_2, d_3

eğrilikleri

$$\begin{aligned}
 d_1(t) &= \frac{\langle T'(t), D_2(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \frac{\langle \nu(t)\kappa(t)N(t), \cos\theta N(t) + \sin\theta B(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \frac{\nu(t)\kappa(t)\cos\theta \langle N(t), N(t) \rangle + \nu(t)\kappa(t)\sin\theta \langle N(t), B(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \kappa(t)\cos\theta, \tag{2.2.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_2(t) &= \frac{\langle T'(t), D_1(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \frac{\langle \nu(t)\kappa(t)N(t), -\sin\theta N(t) + \cos\theta B(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \frac{-\nu(t)\kappa(t)\sin\theta \langle N(t), N(t) \rangle + \nu(t)\kappa(t)\cos\theta \langle N(t), B(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= -\kappa(t)\sin\theta, \tag{2.2.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_3(t) &= \frac{\langle D_2'(t), D_1(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \frac{\langle -(\nu(t)\kappa(t)\cos\theta)T(t) + (d\theta + \nu(t)\tau(t))D_1(t), D_1(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \frac{-\nu(t)\kappa(t)\cos\theta \langle T(t), D_1(t) \rangle + (d\theta + \nu(t)\tau(t)) \langle D_1(t), D_1(t) \rangle}{\nu(t)} \\
 &= \frac{d\theta}{\nu(t)} + \tau(t) \tag{2.2.10}
 \end{aligned}$$

olur. Bulunan bu eğrilikler (2.2.7) denkleminde yerine yazılırsa D'_2 vektörü

$$\begin{aligned} D'_2(t) &= -(\nu(t)\kappa(t)\cos\theta)T(t) + (d\theta + \nu(t)\tau(t))D_1(t) \\ &= -\nu(t)(d_1(t)T(t) + d_3(t)D_1(t)) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (2.2.4) denkleminin θ ya göre türevi alınır ve (2.1.15) bağıntısı kullanırsa D'_1 vektörü

$$\begin{aligned} D'_1(t) &= -\cos\theta d\theta N(t) - \sin\theta N'(t) - \sin\theta d\theta B(t) + \cos\theta B'(t) \\ &= -\cos\theta d\theta N(t) - \sin\theta(-\nu(t)\kappa(t)T(t) + \nu(t)\tau(t)B(t)) \\ &\quad - \sin\theta d\theta B(t) + \cos\theta(-\nu(t)\tau(t)N(t)) \\ &= -\nu(d_2T + d_3D_2) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.10 Flc çatısının Darboux vektörü W_F ile gösterilirse aşağıdaki formda verilir: (Dede,2019).

$$W_F = \nu(d_3T - d_2D_2 + d_1D_1).$$

İspat 2.2.11 W_F vektörünün $\{T, D_2, D_1\}$ çatısına göre ifadesi

$$W_F = xT + yD_2 + zD_1$$

şeklinde yazılır. Darboux vektör tanımından,

$$\begin{aligned} W_F \wedge D_2 &= D'_2 \Rightarrow (xT + yD_2 + zD_1) \wedge D_2 = D'_2 \\ &\Rightarrow x(T \wedge D_2) + y(D_2 \wedge D_2) + z(D_1 \wedge D_2) = \nu(-d_1T + d_3D_1) \\ &\Rightarrow xD_1 - zT = \nu(-d_1T + d_3D_1) \\ &\Rightarrow x = \nu d_3 \quad \text{ve} \quad z = \nu d_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_F \wedge D_1 &= D'_1 \Rightarrow (xT + yD_2 + zD_1) \wedge D_1 = D'_1 \\ &\Rightarrow x(T \wedge D_1) + y(D_2 \wedge D_1) + z(D_1 \wedge D_1) = -\nu(d_2T + d_3D_2) \\ &\Rightarrow -xD_2 + yT = -\nu(d_2T + d_3D_2) \\ &\Rightarrow x = \nu d_3 \quad \text{ve} \quad y = -\nu d_2 \end{aligned}$$

olur. x, y, z ifadesi W_F ifadesinde yerine yazılırsa W_F Darboux vektörü

$$W_F = \nu(d_3T - d_2D_2 + d_1D_1).$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.2.12 n . dereceden bir polinom uzay eğrisi α olsun. α eğrisi üzerinde tanımlanan Flc çatısı, Frenet çatısından daha az singüler noktaya sahiptir, (Dede,2019).

İspat 2.2.13 Frenet çatısı gibi analitik çatılarda α' ve α'' gibi iki vektörün birbirine paralel olduğu durumlarda $\|\alpha' \wedge \alpha''\| = 0$ olup singüler noktalar meydana gelecektir. α , n . dereceden bir polinom uzay eğrisi olduğunda, $\alpha' \wedge \alpha^{(n)}$ derecesinin maksimum değeri $(n-1)+(n-2)$ olup Frenet çatısı maksimum $(n-1)+(n-2)$ noktada singüler noktaya sahip olacaktır. Benzer şekilde Flc çatısı $\|\alpha' \wedge \alpha^{(n)}\| = 0$ olduğu yerlerde singüler nokta içerir. Fakat $\alpha' \wedge \alpha^{(n)}$ nin derecesinin maksimum değeri sadece $(n-1)$ 'dir. Bu yüzden Flc çatısı en fazla $(n-1)$ singüler noktaya sahiptir. Böylece Flc çatısının singüler noktalarının sayısı Frenet çatısının singüler noktalarının sayısından daha azdır.

Önerme 2.2.14 n . dereceden bir polinom uzay eğrisi α olsun. Flc çatısının eğrilikleri Öklid dönüşümü altında değişmezdir, (Dede,2019).

İspat 2.2.15 $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x) = Ax + B$, ($A \in O_3$ ve $B \in \mathbb{R}^3$) dönüşümü ve γ eğrisi $\gamma(t) = (F \circ \alpha)(t)$ şeklinde verilsin. Bu eğrinin eğrilikleri κ^* , τ^* , d_1^* , d_2^* , d_3^* ile gösterilsin.

$$\gamma(t) = (F \circ \alpha)(t) \Rightarrow \gamma(t) = A\alpha(t) + F(0) \quad (2.2.11)$$

şeklinde yazılır. (2.2.11) denkleminin 1.2. ve n . mertebeden türevleri alınırsa,

$$\gamma'(t) = A\alpha'(t)$$

$$\gamma''(t) = A\alpha''(t)$$

$$\gamma^{(n)}(t) = A\alpha^{(n)}(t)$$

bulunur. (2.2.5) bağıntısından,

$$\begin{aligned} \cos\theta^* &= \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma^{(n)}, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma^{(n)}\| \cdot \|\gamma' \wedge \gamma''\|} \\ &= \frac{\langle A\alpha' \wedge A\alpha^{(n)}, A\alpha' \wedge A\alpha'' \rangle}{\|A\alpha' \wedge A\alpha^{(n)}\| \cdot \|A\alpha' \wedge A\alpha''\|} \end{aligned}$$

burada θ^* , n^* asli normal vektörü ile γ eğrisinin normal benzeri D_2^* vektörü arasındaki Öklid açısıdır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\|A\alpha' \wedge A\alpha''\| &= \|A^2\| \cdot \|\alpha' \wedge \alpha''\| \\ &= \|\alpha' \wedge \alpha''\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|A\alpha' \wedge A\alpha^{(n)}\| &= \|A^2\| \cdot \|\alpha' \wedge \alpha^{(n)}\| \\ &= \|\alpha' \wedge \alpha^{(n)}\|\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler $\cos\theta^*$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\cos\theta^* &= \frac{\langle A\alpha' \wedge A\alpha^{(n)}, A\alpha' \wedge A\alpha'' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha^{(n)}\| \cdot \|\alpha' \wedge \alpha''\|} \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

bulunur. (2.2.8) ifadesine benzer olarak $d_1^* = \kappa^* \cos\theta^*$ olur. Eğrilikler F dönüşümü altında korunduğundan $\kappa^* = \kappa$ ve $\cos\theta^* = \cos\theta$ olduğundan $d_1^* = d_1$ bulunur. Diğer eğrilikler de $d_2^* = d_2$ ve $d_3^* = d_3$ benzer yöntem kullanılarak elde edilir.

Teorem 2.2.16 n . dereceden bir polinom uzay eğrisi α olsun. α eğrisi üzerinde tanımlanan Flc çatısı, tanjant vektör etrafında ani dönüşünü azaltır. (Dede,2019).

İspat 2.2.17 Frenet çatısının normal düzlem vektörlerinin teğet vektör etrafında dönme hareketi sergilemesinin iki nedeni vardır: Bunlardan birincisi Frenet çatısının normal düzlem vektörleri $\|\alpha' \wedge \alpha''\| = 0$ tekil noktalarından geçerken, teğet vektörün etrafında yaklaşık 180° lik anlık bir dönüş sergiler. Flc çatısı Frenet çatısından daha az singüler noktaya sahip olduğundan Flc çatısının normal düzlem vektörleri Frenet çatısından daha az radikal bir bükülme sergiler. İkinci nedeni ise, eğrinin ikinci türevi çok küçük olduğunda, Frenet çatısının normal düzlem vektörleri eğrinin teğet vektörü etrafında dönmeye başlayacaktır. Bununla birlikte Flc çatısının eğrinin küçük ve büyük sayılar arasında değişebilen ikinci türevi yerine, sabit olan eğrinin en yüksek dereceli türevini kullanarak yapılandırılması nedeniyle Flc çatısının davranışı, Frenet çatısının davranışından daha karardır.

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1 Flc Çatılı Tüp Yüzeylerin Karakterizasyonları

Bu bölümde Flc çatısına göre tanımlanan tüp yüzeylerin geometrik özellikleri incelenerek açılabilir veya minimal olma koşulları belirlenmiştir. Daha sonra yüzey üzerinde yatan parametre eğrilerinin geodezik eğriler, asimptotik eğriler ve eğrilik çizgisi olma koşulları araştırıldı.

Tanım 3.1.1 $M(t)$, n . dereceden bir polinom eğrisi ve bu eğri üzerinde tanımlanan Flc çatısı $\{T, D_2, D_1\}$ olsun. Bu çatı yardımıyla tanımlanan $K(t, \theta)$ tüp yüzeyi

$$K(t, \theta) = M(t) + r [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] \quad (3.1.1)$$

şeklinde verilir. Burada $r \in \mathbb{R}^+$ tüp yüzeyin yarıçapı, $M(t)$ merkez(spine) eğrisi, $\theta \in [0, 2\pi)$ dir (Dede vd.,2019).

Teorem 3.1.2 $M(t)$ merkez eğrisi boyunca Flc çatısı ile tanımlanan $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla,

$$\mathbb{K} = \frac{-\cos \theta d_1 - \sin \theta d_2}{r[1 - r(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2)]}, \quad (3.1.2)$$

$$\mathbb{H} = \frac{1 - 2r(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2)}{2r[1 - r(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2)]} \quad (3.1.3)$$

dır (Dede vd.,2019).

İspat 3.1.3 $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri, yüzey normali, temel formları,

$$K_t = \nu(1 - r(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2))T - \nu r \sin \theta d_3 D_2 + \nu r \cos \theta d_3 D_1, \quad (3.1.4)$$

$$K_\theta = -r \sin \theta D_2 + r \cos \theta D_1, \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned}
K_{tt} &= \begin{bmatrix} \nu^2 r d_3 (\sin \theta d_1 - \cos \theta d_2) - \nu r (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2') \\ -\nu' r (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) + \nu' \end{bmatrix} T \\
&- [\nu^2 r \cos \theta (d_1^2 + d_3^2) + \nu^2 r d_1 d_2 \sin \theta + r \sin \theta (\nu d_3)' - \nu^2 d_1] D_2 \\
&- [\nu^2 r \sin \theta (d_2^2 + d_3^2) + \nu^2 r d_1 d_2 \cos \theta + r \cos \theta (\nu d_3)' - \nu^2 d_2] D_1, \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

$$K_{t\theta} = \nu r (\sin \theta d_1 - \cos \theta d_2) T - \nu r \cos \theta d_3 D_2 - \nu r \sin \theta d_3 D_1, \tag{3.1.7}$$

$$K_{\theta\theta} = -r \cos \theta D_2 - r \sin \theta D_1, \tag{3.1.8}$$

$$\begin{aligned}
K_t \wedge K_\theta &= \nu r \cos \theta (\cos \theta d_1 r + \sin \theta d_2 r - 1) D_2 \\
&+ \nu r \sin \theta (\cos \theta d_1 r + \sin \theta d_2 r - 1) D_1,
\end{aligned}$$

$$\|K_t \wedge K_\theta\| = \nu r (\cos \theta d_1 r + \sin \theta d_2 r - 1),$$

$$N(t, \theta) = \frac{K_t \wedge K_\theta}{\|K_t \wedge K_\theta\|} = \cos \theta D_2 + \sin \theta D_1 \tag{3.1.9}$$

$$E = \langle K_t, K_t \rangle = \nu^2 [1 - r (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2)]^2 + \nu^2 r^2 d_3^2, \tag{3.1.10}$$

$$F = \langle K_t, K_\theta \rangle = \nu r^2 d_3, \tag{3.1.11}$$

$$G = \langle K_\theta, K_\theta \rangle = r^2, \tag{3.1.12}$$

$$e = \langle K_{tt}, N \rangle = \nu^2 (d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta) - \nu^2 r (d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta)^2 - \nu^2 r d_3^2, \tag{3.1.13}$$

$$f = \langle K_{t\theta}, N \rangle = -\nu r d_3, \quad (3.1.14)$$

$$g = \langle K_{\theta\theta}, N \rangle = -r \quad (3.1.15)$$

dır. Bulunan bu ifadeler teorem (2.1.43) de yerine konulursa tüp yüzeyin \mathbb{K} Gauss eğriliği ve \mathbb{H} ortalama eğriliği bulunur.

Teorem 3.1.4 $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin singüler noktaları

$$\cos\theta_0 d_1 + \sin\theta_0 d_2 = \frac{1}{r} \quad (3.1.16)$$

denklemini sağlar.

İspat 3.1.5 Bir $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin (t_0, θ_0) noktasında singüler noktalarının olması için

$$\|K_t \wedge K_\theta\|(t_0, \theta_0) = 0$$

olmalıdır. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \|K_t \wedge K_\theta\|(t_0, \theta_0) = 0 &\Rightarrow rv(rcos\theta_0 d_1 + r sin\theta_0 d_2 - 1) = 0 \quad (r \neq 0 \quad \text{ve} \quad v \neq 0) \\ &\Rightarrow rcos\theta_0 d_1 + r sin\theta_0 d_2 = 1 \\ &\Rightarrow cos\theta_0 d_1 + sin\theta_0 d_2 = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

olur.

1. Özel olarak $\theta_0 = 0$ alınırsa $d_1 = \frac{1}{r}$ olur. Bu durumda $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin singüler noktalarının geometrik yeri

$$K(t, 0) = M(t) + rD_2(t)$$

şeklinde bir eğridir.

2. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ veya $\theta = \frac{3\pi}{2}$ alınırsa $d_2 = \frac{1}{r}$ olur. Bu durumda $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin singüler noktalarının geometrik yeri

$$K(t, \frac{\pi}{2}) = M(t) + rD_1(t),$$

$$K(t, \frac{3\pi}{2}) = M(t) - rD_1(t)$$

şeklinde birer eğridir.

Teorem 3.1.6 $K(t, \theta)$ yüzeyi Flc çatısı ile verilen tüp yüzey olsun.

- (i) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin t parametre eğrilerinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$rd_3^2 + r(\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2)^2 = \cos\theta d_1 + \sin\theta d_2 \quad (3.1.17)$$

olmasıdır.

- (ii) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin θ parametre eğrileri asimptotik eğri değildir.

İspat 3.1.7

- (i) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin t parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart $e = 0$ olmalıdır. (3.1.13) nolu denklemden

$$\begin{aligned} e &= -v^2 r d_3^2 - v^2 r (\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2)^2 + v^2 (\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2) = 0, \quad v \neq 0 \\ \Rightarrow r d_3^2 + r (\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2)^2 &= \cos\theta d_1 + \sin\theta d_2 \end{aligned}$$

olur.

- (ii) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin θ parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart $g = 0$ olmalıdır. (3.1.15) nolu denklemden $g = -r$ ve $r \neq 0$ olduğundan θ parametre eğrileri asimptotik olamaz.

Teorem 3.1.8 $K(t, \theta)$ yüzeyi Flc çatısı ile verilen tüp yüzey olsun.

- (i) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin t parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} v^2 d_1 d_2 r \cos 2\theta - v^2 \cos\theta \sin\theta r (d_1^2 - d_2^2) - v^2 (\cos\theta d_2 - \sin\theta d_1) - r (v d_3)' &= 0, \\ (\cos\theta + \sin\theta) (v^2 r d_3 (\cos\theta d_2 - \sin\theta d_1) + v r (\cos\theta d_1' + \sin\theta d_2')) & \quad (3.1.18) \\ + r v' (\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2) - v' &= 0 \end{aligned}$$

olmasıdır.

- (ii) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin θ parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat 3.1.9

- (i) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin t parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N \wedge K_{tt} = 0$ olmasıdır. (3.1.6) ve (3.1.9) denklemlerinden $N \wedge K_{tt}$ vektörü,

$$\begin{aligned} N \wedge K_{tt} = & (v^2 d_1 d_2 r \cos 2\theta - v^2 \cos \theta \sin \theta r (d_1^2 - d_2^2) - v^2 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) \\ & - r (v d_3)') T(t) + \sin \theta (v^2 r d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) + v r (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2')) \\ & + r v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v') D_2(t) - \cos \theta (v^2 r d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) \\ & + v r (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2')) + r v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v') D_1(t) \end{aligned}$$

bulunur. $N \wedge K_{tt} = 0$ olması için katsayılar sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned} v^2 d_1 d_2 r \cos 2\theta - v^2 \cos \theta \sin \theta r (d_1^2 - d_2^2) \\ - v^2 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) - r (v d_3)' = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta (v^2 r d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) + v r (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2')) \\ + r v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v' = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta (v^2 r d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) + v r (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2')) \\ + r v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v' = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu denklemler düzenlenirse istenen elde edilir.

- (ii) $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin θ parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N \wedge K_{\theta\theta} = 0$ olmasıdır. (3.1.8) ve (3.1.9) denklemleri kullanıldığında $N \wedge K_{\theta\theta} = 0$ olur. Bu ise θ parametre eğrilerinin daima geodezik olması demektir.

Teorem 3.1.10 $K(t, \theta)$ yüzeyi Flc çatısı ile verilen bir tüp yüzey olsun. Yüzey üzerindeki parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $d_3 = 0$ olmasıdır.

İspat 3.1.11 $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $F = f = 0$ olmasıdır. (3.1.11) ve (3.1.14) nolu denklemlerden

$$\nu r^2 d_3 = 0 \quad \text{ve} \quad -\nu r d_3 = 0$$

olur. Burada $\nu \neq 0$ ve $r \neq 0$ olduğundan $d_3 = 0$ olmalıdır.

Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir :

Sonuç 3.1.1. $K(t, \theta)$ tüp yüzeyi üzerindeki t ve θ parametre eğrileri düzlemsel ise bu eğriler yüzeyin eğrilik çizgisidir.

Örnek 3.1.12 $M : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ merkez eğrisi $M(t) = (t, t^4, t^9)$ olan polinom eğrisi verilsin. $M(t)$ eğrisinin 1., 2. ve 9. mertebeden türevi hesaplanırsa

$$M'(t) = (1, 4t^3, 9t^8),$$

$$M''(t) = (0, 12t^2, 72t^7),$$

$$M^{(9)}(t) = (0, 0, 362880)$$

olur. $M(t)$ eğrisinin Flc elemanları,

$$T(t) = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}}, \frac{4t^3}{\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}}, \frac{9t^8}{\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}} \right),$$

$$D_1(t) = \frac{M'(t) \times M^{(9)}(t)}{\|M'(t) \times M^{(9)}(t)\|} = \left(\frac{4t^3}{\sqrt{16t^6 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{16t^6 + 1}}, 0 \right),$$

$$\begin{aligned} D_2(t) &= T(t) \times D_1(t) \\ &= \left(-\frac{9t^8}{\sqrt{1 + 16t^6}\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}}, -\frac{36t^{11}}{\sqrt{1 + 16t^6}\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{1 + 16t^6}}{\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}} \right), \end{aligned}$$

$$d_1(t) = \frac{\langle T'(t), D_2(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{72t^7(10t^6 + 1)}{\sqrt{1 + 16t^6(1 + 16t^6 + 81t^{16})}^{\frac{3}{2}}},$$

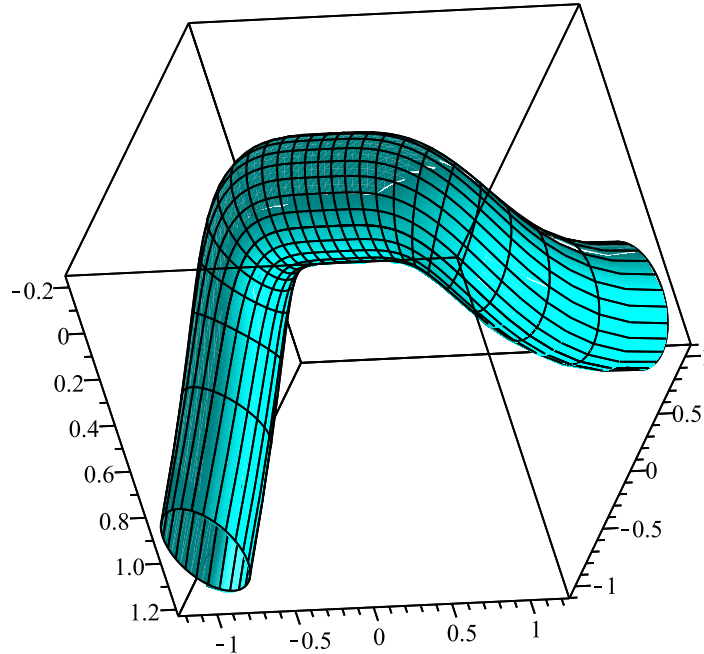
$$d_2(t) = \frac{\langle T'(t), D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = -\frac{12t^2}{\sqrt{1 + 16t^6(1 + 16t^6 + 81t^{16})}},$$

$$d_3(t) = \frac{\langle D_2(t)', D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{108t^{10}}{(1 + 16t^6)(1 + 16t^6 + 81t^{16})}$$

şeklinde bulunur. Yarıçap $r = 0.25$ alınırsa $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin parametrik denklemi

$$K(t, \theta) = \left(t - \frac{9t^8 \cos \theta}{4\sqrt{1 + 16t^6}\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}} + \frac{t^3 \sin \theta}{\sqrt{1 + 16t^6}}, t^4 - \frac{\sin \theta}{4\sqrt{1 + 16t^6}} \right. \\ \left. - \frac{9t^{11} \cos \theta}{\sqrt{1 + 16t^6}\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}}, t^9 + \frac{\cos \theta \sqrt{1 + 16t^6}}{4\sqrt{1 + 16t^6 + 81t^{16}}} \right)$$

bulunur (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 $M(t) = (t, t^4, t^9)$ Polinom Eğrisi ile Verilen $K(t, \theta)$ Tüp Yüzeyi

3.2 Flc Çatısı İle Verilen Tüp Yüzeylerin Fokal Yüzeyleri

Bu kısımda Flc çatısı ile verilen tüp yüzeylerin fokal yüzeyleri tanımlandı. Daha sonra bu yüzeylerin geometrik özellikleri incelenerek yüzey üzerindeki özel eğrilerin karakterizasyonları verildi.

Tanım 3.2.1 $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin fokal yüzeyleri $K_i^*(t, \theta)$ ile gösterilirse bu yüzeylerin denklemi

$$K_i^*(t, \theta) = K(t, \theta) + \frac{1}{k_i} N(t, \theta), \quad i = 1, 2 \quad (3.2.1)$$

şeklinde verilir. Burada $N(t, \theta)$, tüp yüzeyin birim normali, k_1 ve k_2 tüp yüzeyin birinci ve ikinci asli eğrilikleridir.

$K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları,

$$\rho = \cos\theta d_1 + \sin\theta d_2$$

olarak alınır ve (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15) denklemlerinde verilen katsayılar düzenlenirse

$$E = \nu^2 (1 - r\rho)^2 + \nu^2 r^2 d_3^2, \quad F = \nu r^2 d_3, \quad G = r^2,$$

$$e = \nu^2 \rho - r\nu^2 \rho^2 - r\nu^2 d_3^2, \quad f = -\nu r d_3, \quad g = -r$$

olur. Buradan $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin teorem (2.1.43) den yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-\nu^2 \rho r (1 - \rho r)}{r^2 \nu^2 (1 - r\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{r(\rho r - 1)}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{H} &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{r\nu^2(1 - r\rho)(2r\rho - 1)}{2r^2\nu^2(1 - r\rho)^2} \\
&= \frac{2r\rho - 1}{2r(1 - r\rho)} \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (3.2.2) ve (3.2.3) ifadeleri teorem (2.1.45) da yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin k_1 ve k_2 asli eğrilikleri,

$$\begin{aligned}
k_1 &= \mathbb{H} + \sqrt{\mathbb{H}^2 - \mathbb{K}} \\
&= \frac{2r\rho - 1}{2r(1 - r\rho)} + \sqrt{\frac{(2r\rho - 1)^2 + 4r\rho(1 - r\rho)}{4r^2(1 - r\rho)^2}} \\
&= \frac{2r\rho - 1}{2r(1 - r\rho)} + \frac{1}{2r(1 - r\rho)} \\
&= \frac{\rho}{1 - r\rho}, \tag{3.2.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= \mathbb{H} - \sqrt{\mathbb{H}^2 - \mathbb{K}} \\
&= \frac{2r\rho - 1}{2r(1 - r\rho)} - \sqrt{\frac{(2r\rho - 1)^2 + 4r\rho(1 - r\rho)}{4r^2(1 - r\rho)^2}} \\
&= \frac{2(r\rho - 1)}{2r(1 - r\rho)} \\
&= -\frac{1}{r} \tag{3.2.5}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.2.4) ve (3.2.5) denklemleri dikkate alındığında $K_1^*(t, \theta)$ ve

$K_2^*(t, \theta)$ fokal yüzeylerinin parametrizasyonu sırasıyla

$$\begin{aligned}
K_1^*(t, \theta) &= K(t, \theta) + \frac{1}{k_1} N(t, \theta) \\
&= M(t) + r [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] + \left(\frac{1 - r\rho}{\rho} \right) [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] \\
&= M(t) + r [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] + \left(\frac{1}{\rho} - r \right) [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] \\
&= M(t) + \frac{1}{\rho} [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)], \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2^*(t, \theta) &= K(t, \theta) + \frac{1}{k_2} N(t, \theta) \\
&= M(t) + r [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] + \left(\frac{1}{-\frac{1}{r}} \right) [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] \\
&= M(t) + r [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] - r [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] \\
&= M(t) \tag{3.2.7}
\end{aligned}$$

olur. Bu duruma göre aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.1. (3.2.7) ifadesi dikkate alındığında $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin $K_2^*(t, \theta)$ fokal yüzeyi $M(t)$ merkez eğrisine dejenere olmuştur.

$K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin geometrik özelliklerini inceleyelim: $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri, yüzey normali, temel formları,

$$K_{1t}^* = -\left(\frac{\cos\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho}\right)D_2(t) + \left(-\frac{\sin\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho}\right)D_1(t), \quad (3.2.8)$$

$$K_{1\theta}^* = -\left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho}\right)D_2(t) + \left(-\frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho}\right)D_1(t), \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} K_{1tt}^* = & \left(\frac{\nu\rho_t - \nu^2 d_3 \rho_\theta}{\rho}\right)T(t) - \left(\frac{\nu^2 \cos\theta(d_1^2 + d_3^2) + \sin\theta(\nu d_3)' + \nu^2 \sin\theta d_1 d_2}{\rho}\right. \\ & \left. - \frac{2\nu \sin\theta d_3 \rho_t - \cos\theta \rho_{tt}}{\rho^2} + \frac{2\cos\theta(\rho_t)^2}{\rho^3} + \nu^2 d_1\right)D_2(t) - \left(\frac{2\sin\theta(\rho_t)^2}{\rho^3} + \nu^2 d_2\right. \\ & \left. + \frac{\nu^2 \sin\theta(d_2^2 + d_3^2) - \cos\theta(\nu d_3)' + \nu^2 \cos\theta d_1 d_2}{\rho} + \frac{2\nu \cos\theta d_3 \rho_t + \sin\theta \rho_{tt}}{\rho^2}\right)D_1(t), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} K_{1t\theta}^* = & \left(\frac{2\cos\theta\rho_t\rho_\theta}{\rho^3} + \frac{\sin\theta\rho_t - \cos\theta\rho_{t\theta} + \sin\theta\nu d_3\rho_\theta}{\rho^2} - \frac{\cos\theta\nu d_3}{\rho}\right)D_2(t) \\ & + \left(\frac{2\sin\theta\rho_t\rho_\theta}{\rho^3} - \frac{\cos\theta\rho_t + \sin\theta\rho_{t\theta} + \cos\theta\nu d_3\rho_\theta}{\rho^2} - \frac{\sin\theta\nu d_3}{\rho}\right)D_1(t), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} K_{1\theta\theta}^* = & \left(\frac{2\cos\theta\rho_\theta^2}{\rho^3} + \frac{2\sin\theta\rho_\theta - \cos\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\cos\theta}{\rho}\right)D_2(t) \\ & + \left(\frac{2\sin\theta\rho_\theta^2}{\rho^3} - \frac{2\cos\theta\rho_\theta + \sin\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\sin\theta}{\rho}\right)D_1(t) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned}
K_{1t}^* \wedge K_{1\theta}^* &= \left[- \left(\frac{\cos\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \right] \\
&\wedge \left[- \left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \right] \\
&= \left(\frac{\cos\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right) \left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho} \right) (D_2(t) \wedge D_2(t)) \\
&\quad - \left(\frac{\cos\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right) \left(- \frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho} \right) (D_2(t) \wedge D_1(t)) \\
&\quad - \left(- \frac{\sin\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right) \left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho} \right) (D_1(t) \wedge D_2(t)) \\
&\quad + \left(- \frac{\sin\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right) \left(- \frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho} \right) (D_1(t) \wedge D_1(t)) \\
&= - \left(\frac{\cos\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right) \left(- \frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho} \right) T(t) \\
&\quad + \left(- \frac{\sin\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right) \left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho} \right) T(t) \\
&= \left[\frac{\cos\theta \sin\theta \rho_\theta \rho_t}{\rho^4} - \frac{\cos^2 \theta \rho_t}{\rho^3} + \frac{\nu d_3 \rho_\theta \sin^2 \theta}{\rho^3} - \frac{\nu d_3 \sin\theta \cos\theta}{\rho^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos\theta \sin\theta \rho_\theta \rho_t}{\rho^4} - \frac{\sin^2 \theta \rho_t}{\rho^3} + \frac{\nu d_3 \rho_\theta \cos^2 \theta}{\rho^3} + \frac{\nu d_3 \sin\theta \cos\theta}{\rho^2} \right] T(t) \\
&= \left(\frac{\nu d_3 \rho_\theta - \rho_t}{\rho^3} \right) T(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|K_{1t}^* \wedge K_{1\theta}^*\| &= \sqrt{\left\langle \left(\frac{\nu d_3 \rho_\theta - \rho_t}{\rho^3}\right) T(t), \left(\frac{\nu d_3 \rho_\theta - \rho_t}{\rho^3}\right) T(t) \right\rangle} \\
&= \frac{\nu d_3 \rho_\theta - \rho_t}{\rho^3}, \\
N_1^*(t, \theta) &= \frac{K_{1t}^* \wedge K_{1\theta}^*}{\|K_{1t}^* \wedge K_{1\theta}^*\|} \\
&= \frac{\left(\frac{\nu d_3 \rho_\theta - \rho_t}{\rho^3}\right) T(t)}{\frac{\nu d_3 \rho_\theta - \rho_t}{\rho^3}} \\
&= T(t), \tag{3.2.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1^* &= \langle K_{1t}^*, K_{1t}^* \rangle \\
&= \left\langle \left(- \left(\frac{\cos\theta \rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta \rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \right), \right. \\
&\quad \left. \left(- \left(\frac{\cos\theta \rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta \rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \right) \right\rangle \\
&= \left(\frac{\cos\theta \rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right)^2 + \left(- \frac{\sin\theta \rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right)^2 \\
&= \frac{\cos^2\theta \rho_t^2}{\rho^4} + \frac{2\nu d_3 \rho_t \cos\theta \sin\theta}{\rho^3} + \frac{\nu^2 d_3^2 \sin^2\theta}{\rho^2} \\
&\quad + \frac{\sin^2\theta \rho_t^2}{\rho^4} - \frac{2\nu d_3 \rho_t \cos\theta \sin\theta}{\rho^3} + \frac{\nu^2 d_3^2 \cos^2\theta}{\rho^2} \\
&= \frac{\rho_t^2}{\rho^4} + \frac{\nu d_3^2}{\rho^2}, \tag{3.2.14}
\end{aligned}$$

$$F_1^* = \langle K_{1t}^*, K_{1\theta}^* \rangle$$

$$= \left\langle \left(- \left(\frac{\cos\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta\rho_t}{\rho^2} + \frac{\nu d_3 \cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \right), \right. \\ \left. \left(- \left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \right) \right\rangle$$

$$= \frac{\cos^2\theta\rho_t\rho_\theta}{\rho^4} + \frac{\rho_t\cos\theta\sin\theta}{\rho^3} + \frac{\nu d_3\rho_\theta\sin\theta\cos\theta}{\rho^3} + \frac{\nu d_3\sin^2\theta}{\rho^2}$$

$$+ \frac{\sin^2\theta\rho_t\rho_\theta}{\rho^4} - \frac{\rho_t\cos\theta\sin\theta}{\rho^3} - \frac{\nu d_3\rho_\theta\sin\theta\cos\theta}{\rho^3} + \frac{\nu d_3\cos^2\theta}{\rho^2}$$

$$= \frac{\rho_t\rho_\theta}{\rho^4} + \frac{\nu d_3^2}{\rho^2},$$

(3.2.15)

$$G_1^* = \langle K_{1\theta}^*, K_{1\theta}^* \rangle$$

$$= \left\langle - \left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho} \right) D_1(t), \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\cos\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) + \left(- \frac{\sin\theta\rho_\theta}{\rho^2} + \frac{\cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \right\rangle$$

$$= \frac{\cos^2\theta\rho_\theta^2}{\rho^4} + \frac{2\cos\theta\sin\theta\rho_\theta}{\rho^3} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} + \frac{\sin^2\theta\rho_\theta^2}{\rho^4} - \frac{2\cos\theta\sin\theta\rho_\theta}{\rho^3} + \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}$$

$$= \frac{\rho_\theta^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2},$$

(3.2.16)

$$\begin{aligned}
e_1^* &= \langle K_{1tt}^*, N_1^* \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\nu\rho_t - \nu^2 d_3 \rho_\theta}{\rho} \right) T(t) - \left(\frac{\nu^2 \cos\theta(d_1^2 + d_3^2) + \sin\theta(\nu d_3)' + \nu^2 \sin\theta d_1 d_2}{\rho} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2\nu \sin\theta d_3 \rho_t - \cos\theta \rho_{tt}}{\rho^2} + \frac{2\cos\theta(\rho_t)^2}{\rho^3} + \nu^2 d_1 \right) D_2(t) - \left(\frac{2\sin\theta(\rho_t)^2}{\rho^3} + \nu^2 d_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\nu^2 \sin\theta(d_2^2 + d_3^2) - \cos\theta(\nu d_3)' + \nu^2 \cos\theta d_1 d_2}{\rho} + \frac{2\nu \cos\theta d_3 \rho_t + \sin\theta \rho_{tt}}{\rho^2} \right) D_1(t), \right. \\
&\quad \left. T(t) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$= \frac{\nu\rho_t - \nu^2 d_3 \rho_\theta}{\rho}, \tag{3.2.17}$$

$$\begin{aligned}
f_1^* &= \langle K_{1t\theta}^*, N_1^* \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{2\cos\theta \rho_t \rho_\theta}{\rho^3} + \frac{\sin\theta \rho_t - \cos\theta \rho_{t\theta} + \sin\theta \nu d_3 \rho_\theta}{\rho^2} - \frac{\cos\theta \nu d_3}{\rho} \right) D_2(t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2\sin\theta \rho_t \rho_\theta}{\rho^3} - \frac{\cos\theta \rho_t + \sin\theta \rho_{t\theta} + \cos\theta \nu d_3 \rho_\theta}{\rho^2} - \frac{\sin\theta \nu d_3}{\rho} \right) D_1(t), T(t) \right\rangle \\
&= 0, \tag{3.2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1^* &= \langle K_{1\theta\theta}^*, N_1^* \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{2\cos\theta\rho_\theta^2}{\rho^3} + \frac{2\sin\theta\rho_\theta - \cos\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\cos\theta}{\rho} \right) D_2(t) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2\sin\theta\rho_\theta^2}{\rho^3} - \frac{2\cos\theta\rho_\theta + \sin\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\sin\theta}{\rho} \right) D_1(t), T(t) \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

dır. Bulunan bu ifadeler teorem (2.1.43) de yerine konulursa $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin \mathbb{K}_1^* Gauss eğriliği ve \mathbb{H}_1^* ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_1^* &= \frac{e_1^* g_1^* - f_1^{*2}}{E_1^* G_1^* - F_1^{*2}} \\
&= \frac{0}{\left(\frac{\rho_t^2}{\rho^4} + \frac{\nu d_3^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{\rho_\theta^2}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^2} \right) - \left(\frac{\rho_t \rho_\theta}{\rho^4} + \frac{\nu d_3^2}{\rho^2} \right)^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}_1^* &= \frac{1}{2} \frac{e_1^* G_1^* - 2f_1^* F_1^* + g_1^* E_1^*}{E_1^* G_1^* - F_1^{*2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\rho^3 \nu (\rho_t - \nu d_3 \rho_\theta) (\rho_\theta^2 + \rho^2)}{(\rho_t^2 + \nu d_3^2 \rho^2) (\rho_\theta^2 + \rho^2) - (\rho_t \rho_\theta + \nu d_3^2 \rho^2)^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\rho \nu (\rho_t - \nu d_3 \rho_\theta) (\rho_\theta^2 + \rho^2)}{\rho_t^2 + \nu d_3^2 \rho_\theta^2 + \nu d_3^2 \rho^2 - 2\nu d_3^2 \rho_t \rho_\theta - \nu^2 d_3^4 \rho^2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2.2. $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyi daima açılabilir.

Teorem 3.2.2 $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin t parametre eğrileri asimptotik eğri değildir, θ parametre eğrileri daima asimptotik eğrilerdir.

İspat 3.2.3 $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin t parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart $e_{1*} = 0$ olmasıdır. (3.2.17) denklemleri kullanılırsa

$$e_{1*} = 0 \Rightarrow \frac{\nu\rho_t - \nu^2 d_3 \rho_\theta}{\rho} = 0,$$

$$\Rightarrow \nu\rho_t - \nu^2 d_3 \rho_\theta = 0,$$

$$\Rightarrow \rho_t - \nu d_3 \rho_\theta = 0$$

olur. Fakat t parametre eğrilerinin asimptotik olmasını sağlayan noktalar singüler noktalar olduğundan t parametre eğrileri hiçbir zaman asimptotik değildir. $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin θ parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart $g_1^* = 0$ olmasıdır. (3.2.19) denklemlerinden bu koşul daima sağlandığından θ parametre eğrileri daima asimptotik eğrilerdir.

Teorem 3.2.4 $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin

(i) t parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\nu^2 \sin\theta (d_2^2 + d_3^2) - \cos\theta (\nu d_3)' + \nu^2 \cos\theta d_1 d_2}{\rho} + \frac{2\nu \cos\theta d_3 \rho_t + \sin\theta \rho_{tt}}{\rho^2} + \frac{2 \sin\theta (\rho_t)^2}{\rho^3} + \nu^2 d_2 = 0,$$

$$\frac{\nu^2 \cos\theta (d_1^2 + d_3^2) + \sin\theta (\nu d_3)' + \nu^2 \sin\theta d_1 d_2}{\rho}$$

$$- \frac{2\nu \sin\theta d_3 \rho_t - \cos\theta \rho_{tt}}{\rho^2} + \frac{2 \cos\theta (\rho_t)^2}{\rho^3} + \nu^2 d_1 = 0$$

(ii) θ parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$(2(\rho\theta)^2 - \rho\rho_{\theta\theta} - \rho^2)(\sin\theta + \cos\theta) + 2\rho\rho_{\theta}(\sin\theta - \cos\theta) = 0$$

olmasıdır.

İspat 3.2.5

(i) $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin t parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N_1^* \wedge K_{1tt}^* = 0$ olmasıdır. O halde (3.2.10) ve (3.2.13) denklemleri kullanılarak vektörel çarpım yapılırsa,

$$\begin{aligned} N_1^* \wedge K_{1tt}^* = & \left(\frac{2\sin\theta(\rho_t)^2}{\rho^3} + \nu^2 d_2 + \frac{\nu^2 \sin\theta(d_2^2 + d_3^2) - \cos\theta(\nu d_3)' + \nu^2 \cos\theta d_1 d_2}{\rho} \right. \\ & \left. + \frac{2\nu \cos\theta d_3 \rho_t + \sin\theta \rho_{tt}}{\rho^2} \right) D_2(t) - \left(\frac{2\cos\theta(\rho_t)^2}{\rho^3} - \frac{2\nu \sin\theta d_3 \rho_t - \cos\theta \rho_{tt}}{\rho^2} \right. \\ & \left. + \frac{\nu^2 \cos\theta(d_1^2 + d_3^2) + \sin\theta(\nu d_3)' + \nu^2 \sin\theta d_1 d_2}{\rho} + \nu^2 d_1 \right) D_1(t) \end{aligned}$$

bulunur. $N_1^* \wedge K_{1tt}^* = 0$ olduğundan D_2 ve D_1 in katsayıları sıfır olur. Bu durumda istenen elde edilir.

(ii) $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin θ parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N_1^* \wedge K_{1\theta\theta}^* = 0$ olmasıdır. O halde (3.2.12) ve (3.2.13) denklemleri kullanılarak vektörel çarpım yapılırsa,

$$\begin{aligned} N_1^* \wedge K_{1\theta\theta}^* = & \left(\frac{2\cos\theta\rho_{\theta}^2}{\rho^3} + \frac{2\sin\theta\rho_{\theta} - \cos\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\cos\theta}{\rho} \right) D_1(t) \\ & - \left(\frac{2\sin\theta\rho_{\theta}^2}{\rho^3} - \frac{2\cos\theta\rho_{\theta} + \sin\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\sin\theta}{\rho} \right) D_2(t) \end{aligned}$$

bulunur. $N_1^* \wedge K_{1\theta\theta}^* = 0$ olduğundan D_2 ve D_1 in katsayıları sıfır olur. Yani,

$$\frac{2\sin\theta\rho_{\theta}^2}{\rho^3} - \frac{2\cos\theta\rho_{\theta} + \sin\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\sin\theta}{\rho} = 0,$$

$$\frac{2\cos\theta\rho_{\theta}^2}{\rho^3} + \frac{2\sin\theta\rho_{\theta} - \cos\theta\rho_{\theta\theta}}{\rho^2} - \frac{\cos\theta}{\rho} = 0$$

olmalıdır. Bu denklemler düzenlenirse, istenen elde edilir.

Teorem 3.2.6 $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin

(i) t parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart

$$\rho_t \rho_\theta + \rho^2 \nu d_3^2 = 0$$

(ii) θ parametre eğrileri daima eğrilik çizgisidir.

olmasıdır.

İspat 3.2.7

(i) $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin t parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $F_1^* = 0$ olmasıdır. O halde (3.2.15) denklemi kullanılırsa

$$F_1^* = 0 \Rightarrow \frac{\rho_t \rho_\theta}{\rho^4} + \frac{\nu d_3^2}{\rho^2} = 0$$

$$\Rightarrow \rho_t \rho_\theta + \rho^2 \nu d_3^2 = 0$$

olur.

(ii) $K_1^*(t, \theta)$ fokal yüzeyinin θ parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $f_1^* = 0$ olmasıdır. (3.2.18) denkleminde bu koşul daima sağlandığından θ parametre eğrileri daima eğrilik çizgisidir.

Örnek 3.2.8 $M : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M(t) = (t, t^2, t^3)$ polinom eğrisi verilsin. $M(t)$ eğrisinin 3.mertebe kadar türevleri hesaplanırsa

$$M'(t) = (1, 2t, 3t^2),$$

$$M''(t) = (0, 2, 6t),$$

$$M'''(t) = (0, 0, 6)$$

olur.

$M(t)$ eğrisinin Flc elemanları,

$$T(t) = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}, \frac{2t}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}, \frac{3t^2}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \right),$$

$$D_1(t) = \frac{M'(t) \times M^{(9)}(t)}{\|M'(t) \times M^{(9)}(t)\|} = \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}}, 0 \right),$$

$$D_2(t) = T(t) \times D_1(t)$$

$$= \left(-\frac{3t^2}{\sqrt{4t^2 + 1}\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}, -\frac{6t^3}{\sqrt{4t^2 + 1}\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}, \frac{\sqrt{4t^2 + 1}}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \right),$$

$$d_1(t) = \frac{\langle T'(t), D_2(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{6t(2t^2 + 1)}{\sqrt{4t^2 + 1}(9t^4 + 4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

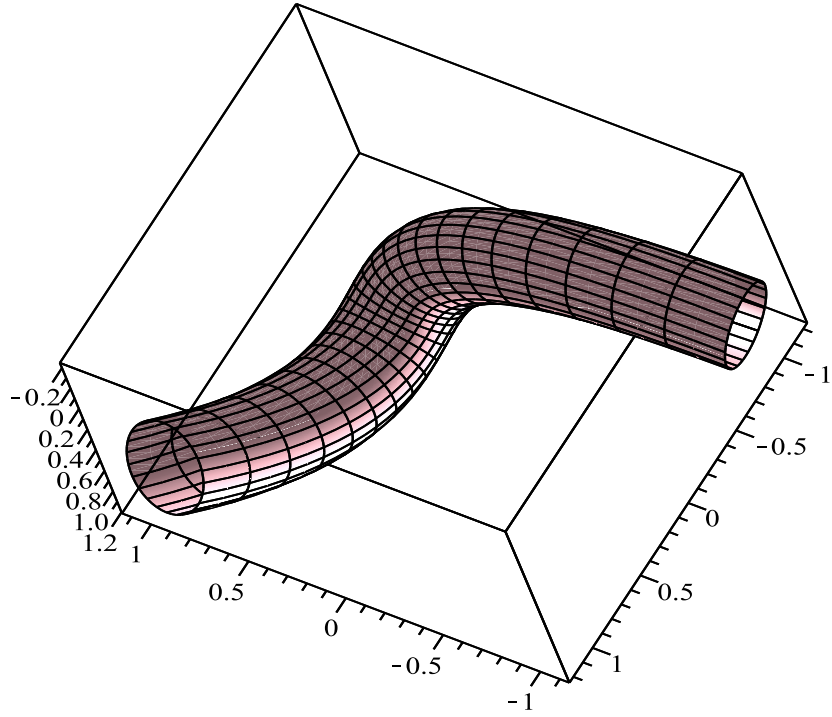
$$d_2(t) = \frac{\langle T'(t), D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = -\frac{2}{\sqrt{4t^2 + 1}(9t^4 + 4t^2 + 1)},$$

$$d_3(t) = \frac{\langle D_2(t)', D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{6t^2}{(4t^2 + 1)(9t^4 + 4t^2 + 1)}$$

bulunur. Yarıçapı $r = 0.25$ olan $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin parametrik denklemi

$$K(t, \theta) = \left(t - \frac{3t^2 \cos \theta - 2t \sin \theta \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}{4\sqrt{4t^2 + 1}\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}, \right. \\ \left. t^2 - \frac{\sin \theta \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1} + 6t^3 \cos \theta}{4\sqrt{4t^2 + 1}\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}}, t^3 + \frac{\cos \theta \sqrt{4t^2 + 1}}{4\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}} \right)$$

olur Şekil (3.2).



Şekil 3.2 $M(t) = (t, t^2, t^3)$ Polinom Eğrisi ile Verilen $K(t, \theta)$ Tüp Yüzeyi

Diğer yandan $\rho(t, \theta) = \cos\theta d_1 + \sin\theta d_2$ olduğundan d_1 ve d_2 ifadeleri yerine konulursa

$$\begin{aligned} \rho(t, \theta) &= \frac{6 \cos \theta (2s^2 + 1) s}{\sqrt{4s^2 + 1} (9s^4 + 4s^2 + 1)^{3/2}} - \frac{2 \sin \theta}{(9s^4 + 4s^2 + 1) \sqrt{4s^2 + 1}} \\ &= \frac{6 \cos \theta (2s^3 + s) - 2 \sin \theta \sqrt{9s^4 + 4s^2 + 1}}{(9s^4 + 4s^2 + 1)^{3/2} \sqrt{4s^2 + 1}} \end{aligned}$$

olur.

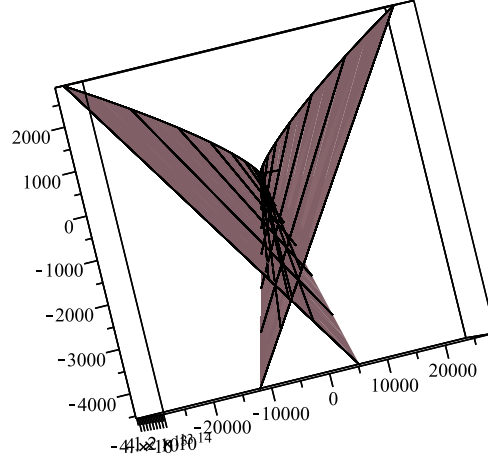
Buradan $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin k_1 ve k_2 asli eğrilikleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{\rho}{1 - r\rho} \\
 &= \frac{6\cos\theta(2s^3 + s) - 2\sin\theta\sqrt{9s^4 + 4s^2 + 1}}{(9s^4 + 4s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{4s^2 + 1}} \\
 &= \frac{1 - \frac{3\cos\theta(2s^3 + s) - \sin\theta\sqrt{9s^4 + 4s^2 + 1}}{2\sqrt{4s^2 + 1}(9s^4 + 4s^2 + 1)^{3/2}}}{\frac{3\cos\theta(2s^3 + s) - \sin\theta\sqrt{9s^4 + 4s^2 + 1}}{2\sqrt{4s^2 + 1}(9s^4 + 4s^2 + 1)^{3/2}} - 3\cos\theta(2s^3 + s) + \sin\theta\sqrt{9s^4 + 4s^2 + 1}} \\
 k_2 &= -\frac{1}{r} = -4
 \end{aligned}$$

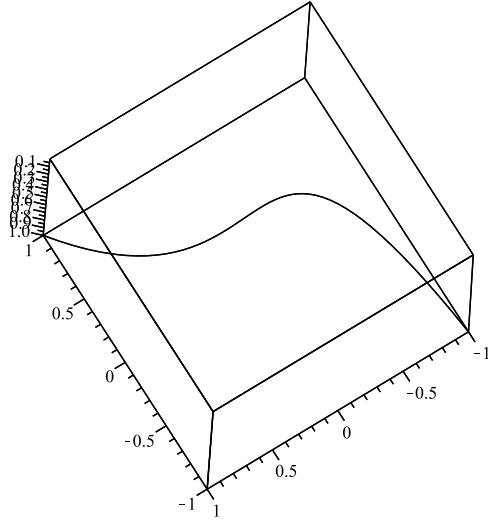
şeklinde bulunur. k_1 ve k_2 asli eğrilikleri $K_1^*(t, \theta)$ ve $K_2^*(t, \theta)$ fokal yüzeylerinde yerine yazılırsa fokal yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
 K_1^*(t, \theta) &= K(t, \theta) + \frac{1}{k_1}N(t, \theta) \\
 &= \left(-\frac{3t^2(9t^4 - 1)\cos\theta - 2t^3(9t^2 + 4)\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\sin\theta}{6t(2t^2 + 1)\cos\theta - 2\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\sin\theta}, \right. \\
 &\quad \left. -\frac{6t^5(9t^2 + 2)\cos\theta + (3t^2 + 1)^2\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\sin\theta}{6t(2t^2 + 1)\cos\theta - 2\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\sin\theta}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{8t^2(6t^4 + 1) + (31t^4 + 1)\cos\theta - 2t^3\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\sin\theta}{6t(2t^2 + 1)\cos\theta - 2\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}\sin\theta} \right), \\
 K_2^*(t, \theta) &= K(t, \theta) + \frac{1}{k_2}N(t, \theta) \\
 &= (t, t^2, t^3)
 \end{aligned}$$

olur Şekil (3.3).



a) $K_1^*(t, \theta)$ Açılabilir Fokal Yüzeği



b) Eğriye Dejenere Olan $K_2^*(t, \theta)$ Fokal Yüzeği

Şekil 3.3 $K^*(t, \theta)$ Fokal Yüzeği

3.3 Flc Çatısı İle Verilen Tüp Yüzeylerin Paralel yüzeyleri

Bu bölümde $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin paralel yüzeyleri tanımlanarak geometrik özellikleri ve yüzey üzerindeki özel eğrilerin karakterizasyonları incelendi.

Tanım 3.3.1 $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin paralel yüzeyi $K_p(t, \theta)$ ile gösterilirse bu yüzeyin denklemi

$$K_p(t, \theta) = K(t, \theta) + \varepsilon N(t, \theta) \quad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlanır. (3.1.1) ve (3.1.9) ifadeleri burada yerine yazılırsa $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin Flc çatısına göre ifadesi,

$$\begin{aligned} K_p(t, \theta) &= K(t, \theta) + \varepsilon N(t, \theta) \\ &= M(t) + r [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] + \varepsilon [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] \\ &= M(t) + (r + \varepsilon) [\cos \theta D_2(t) + \sin \theta D_1(t)] \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

olur.

Teorem 3.3.2 $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla,

$$\mathbb{K}_p = \frac{-\cos \theta d_1 - \sin \theta d_2}{(r + \varepsilon)[1 - (r + \varepsilon)(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2)]}, \quad (3.3.3)$$

$$\mathbb{H}_p = \frac{1 - 2(r + \varepsilon)(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2)}{2(r + \varepsilon)[1 - (r + \varepsilon)(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2)]} \quad (3.3.4)$$

bağıntısıyla verilir.

İspat 3.3.3 $K_p(t, \theta)$ yüzeyinin t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri, yüzey normali ve temel formları,

$$\begin{aligned} K_{pt} &= \nu(1 - (r + \varepsilon)(\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2))T - \nu(r + \varepsilon) \sin \theta d_3 D_2 \\ &\quad + \nu(r + \varepsilon) \cos \theta d_3 D_1, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$K_{p\theta} = -(r + \varepsilon) \sin \theta D_2 + (r + \varepsilon) \cos \theta D_1, \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned}
K_{p_{tt}} &= [\nu^2(r + \varepsilon)d_3(\sin\theta d_1 - \cos\theta d_2) - \nu(r + \varepsilon)(\cos\theta d_1' + \sin\theta d_2') \\
&- \nu'(r + \varepsilon)(\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2) + \nu']T \\
&- [\nu^2(r + \varepsilon)\cos\theta(d_1^2 + d_3^2) + \nu^2(r + \varepsilon)d_1d_2\sin\theta + (r + \varepsilon)\sin\theta(\nu d_3)' - \nu^2d_1]D_2 \\
&- [\nu^2(r + \varepsilon)\sin\theta(d_2^2 + d_3^2) + \nu^2(r + \varepsilon)d_1d_2\cos\theta + (r + \varepsilon)\cos\theta(\nu d_3)' - \nu^2d_2]D_1,
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

$$K_{p_{t\theta}} = \nu(r + \varepsilon)(\sin\theta d_1 - \cos\theta d_2)T - \nu(r + \varepsilon)\cos\theta d_3D_2 - \nu(r + \varepsilon)\sin\theta d_3D_1, \tag{3.3.8}$$

$$K_{p_{\theta\theta}} = -(r + \varepsilon)\cos\theta D_2 - (r + \varepsilon)\sin\theta D_1, \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned}
K_{p_t} \wedge K_{p_\theta} &= \nu(r + \varepsilon)\cos\theta(\cos\theta d_1(r + \varepsilon) + \sin\theta d_2(r + \varepsilon) - 1)D_2 \\
&+ \nu(r + \varepsilon)\sin\theta(\cos\theta d_1(r + \varepsilon) + \sin\theta d_2(r + \varepsilon) - 1)D_1,
\end{aligned}$$

$$\|K_{p_t} \wedge K_{p_\theta}\| = \nu(r + \varepsilon)(\cos\theta d_1(r + \varepsilon) + \sin\theta d_2(r + \varepsilon) - 1),$$

$$N_p(t, \theta) = \frac{K_{p_t} \wedge K_{p_\theta}}{\|K_{p_t} \wedge K_{p_\theta}\|} = \cos\theta D_2 + \sin\theta D_1, \tag{3.3.10}$$

$$E_p = \langle K_{p_t}, K_{p_t} \rangle = \nu^2 [1 - (r + \varepsilon)(\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2)]^2 + \nu^2(r + \varepsilon)^2 d_3^2, \tag{3.3.11}$$

$$F_p = \langle K_{p_t}, K_{p_\theta} \rangle = \nu(r + \varepsilon)^2 d_3, \tag{3.3.12}$$

$$G_p = \langle K_{p\theta}, K_{p\theta} \rangle = (r + \varepsilon)^2, \quad (3.3.13)$$

$$e_p = \langle K_{p_{tt}}, N_p \rangle = \nu^2(d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta) - \nu^2(r + \varepsilon)(d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta)^2 - \nu^2(r + \varepsilon)d_3^2, \quad (3.3.14)$$

$$f_p = \langle K_{p_{t\theta}}, N_p \rangle = -\nu(r + \varepsilon)d_3, \quad (3.3.15)$$

$$g_p = \langle K_{p_{\theta\theta}}, N_p \rangle = -(r + \varepsilon). \quad (3.3.16)$$

olur. Bulunan bu ifadeler teorem (2.1.43) de yerine yazılırsa $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin \mathbb{K}_p Gauss eğriliği ve \mathbb{H}_p ortalama eğriliği hesaplanmış olur.

Teorem 3.3.4 $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin singüler noktaları

$$\cos \theta_0 d_1 + \sin \theta_0 d_2 = \frac{1}{r + \varepsilon} \quad (3.3.17)$$

denklemini sağlar.

İspat 3.3.5 $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin (t_0, θ_0) noktasında singüler noktalarının olması için

$$\|K_{p_t} \wedge K_{p_\theta}\|(t_0, \theta_0) = 0$$

olmalıdır. Buradan gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \|K_{p_t} \wedge K_{p_\theta}\|(t_0, \theta_0) = 0 &\Rightarrow \nu(r + \varepsilon)(\cos \theta d_1(r + \varepsilon) + \sin \theta d_2(r + \varepsilon) - 1) = 0 \\ &\Rightarrow (r + \varepsilon)\cos \theta_0 d_1 + (r + \varepsilon)\sin \theta_0 d_2 = 1 \\ &\Rightarrow \cos \theta_0 d_1 + \sin \theta_0 d_2 = \frac{1}{r + \varepsilon} \end{aligned}$$

Sonuç 3.3.1. Özel olarak $\theta_0 = 0$ alınırsa $d_1 = \frac{1}{r + \varepsilon}$ olur. Bu durumda yüzeyin singüler noktalarının geometrik yeri

$$K_p(t, 0) = M(t) + (r + \varepsilon)D_2(t)$$

şeklinde bir eğridir.

Sonuç 3.3.2. Eğer $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ veya $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ alınırsa $d_2 = \frac{1}{r+\varepsilon}$ olur. Bu durumda yüzeyin singüler noktalarının geometrik yeri

$$K_p(t, \frac{\pi}{2}) = M(t) + (r + \varepsilon)D_1(t),$$

$$K_p(t, \frac{3\pi}{2}) = M(t) - (r + \varepsilon)D_1(t)$$

şeklinde birer eğridir.

Teorem 3.3.6 $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin

(i) t parametre eğrilerinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart

$$(r + \varepsilon)d_3^2 + (r + \varepsilon)(\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2)^2 = \cos\theta d_1 + \sin\theta d_2$$

olmalıdır.

(ii) θ parametre eğrileri asimptotik eğri değildir.

İspat 3.3.7

(i) $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin t parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart $e_p = 0$ olmalıdır. (3.2.17) denkleminde

$$\begin{aligned} e_p = 0 &\Rightarrow v^2(d_1 \cos\theta + d_2 \sin\theta) - v^2(r + \varepsilon)(d_1 \cos\theta + d_2 \sin\theta)^2 - v^2(r + \varepsilon)d_3^2 = 0 \\ &\Rightarrow (r + \varepsilon)d_3^2 + (r + \varepsilon)(d_1 \cos\theta + d_2 \sin\theta)^2 = d_1 \cos\theta + d_2 \sin\theta \end{aligned}$$

olur.

(ii) $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin θ parametre eğrilerinin asimptotik eğriler olması için gerek ve yeter şart $g_p = 0$ olmalıdır. (3.1.15) denkleminde $g_p = -r - \varepsilon$ ve $r, \varepsilon \neq 0$ olduğundan θ parametre eğrileri asimptotik olamaz.

Teorem 3.3.8 $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin

(i) t parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} &v^2 d_1 d_2 (r + \varepsilon) \cos 2\theta - v^2 \cos\theta \sin\theta (r + \varepsilon) (d_1^2 - d_2^2) \\ &- v^2 (\cos\theta d_2 - \sin\theta d_1) - (r + \varepsilon) (v d_3)' = 0, \\ &(\cos\theta + \sin\theta) \left(v^2 (r + \varepsilon) d_3 (\cos\theta d_2 - \sin\theta d_1) + v (r + \varepsilon) (\cos\theta d_1' + \sin\theta d_2') \right. \\ &\left. + (r + \varepsilon) v' (\cos\theta d_1 + \sin\theta d_2) - v' \right) = 0 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

olmasıdır.

(ii) θ parametre eğrileri daima geodeziktir.

İspat 3.3.9

(i) $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin t parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N_p \wedge K_{p_{tt}} = 0$ olmasıdır. (3.1.6) ve (3.1.9) denklemlerinden $N_p \wedge K_{p_{tt}}$ vektörü,

$$\begin{aligned} N_p \wedge K_{p_{tt}} = & \left(v^2 d_1 d_2 (r + \varepsilon) \cos 2\theta - v^2 \cos \theta \sin \theta (r + \varepsilon) (d_1^2 - d_2^2) \right. \\ & \left. - v^2 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) - (r + \varepsilon) (v d_3)' \right) T(t) \\ & + \sin \theta \left(v^2 (r + \varepsilon) d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) + v (r + \varepsilon) (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2') \right. \\ & \left. + (r + \varepsilon) v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v' \right) D_2(t) \\ & - \cos \theta \left(v^2 (r + \varepsilon) d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) + v (r + \varepsilon) (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2') \right. \\ & \left. + (r + \varepsilon) v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v' \right) D_1(t) \end{aligned}$$

bulunur. $N_p \wedge K_{p_{tt}} = 0$ olması için katsayılar sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned} & v^2 d_1 d_2 (r + \varepsilon) \cos 2\theta - v^2 \cos \theta \sin \theta (r + \varepsilon) (d_1^2 - d_2^2) \\ & - v^2 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) - (r + \varepsilon) (v d_3)' = 0, \\ & \sin \theta \left(v^2 (r + \varepsilon) d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) + v (r + \varepsilon) (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2') \right. \\ & \left. + (r + \varepsilon) v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v' \right) = 0, \\ & \cos \theta \left(v^2 (r + \varepsilon) d_3 (\cos \theta d_2 - \sin \theta d_1) + v (r + \varepsilon) (\cos \theta d_1' + \sin \theta d_2') \right. \\ & \left. + (r + \varepsilon) v' (\cos \theta d_1 + \sin \theta d_2) - v' \right) = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu denklemler düzenlenirse istenen elde edilir.

(ii) $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin θ parametre eğrilerinin geodezik eğriler olması için gerek ve yeter şart $N_p \wedge K_{p_{\theta\theta}} = 0$ olmasıdır. (3.1.8) ve (3.1.9) denklemleri kullanıldığında $N_p \wedge K_{p_{\theta\theta}} = 0$ olur. Bu ise θ parametre eğrilerinin daima geodezik olması demektir.

Teorem 3.3.10 $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyi verilsin. Yüzey üzerindeki parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $d_3 = 0$ olmalıdır.

İspat 3.3.11 $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $F_p = f_p = 0$ olmalıdır. (3.1.11) ve (3.1.14) denklemlerinden

$$\nu(r + \varepsilon)^2 d_3 = 0 \quad \text{ve} \quad -\nu(r + \varepsilon) d_3 = 0$$

olur. Burada $\nu, r \neq 0$ olduğundan $d_3 = 0$ olur.

Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir:

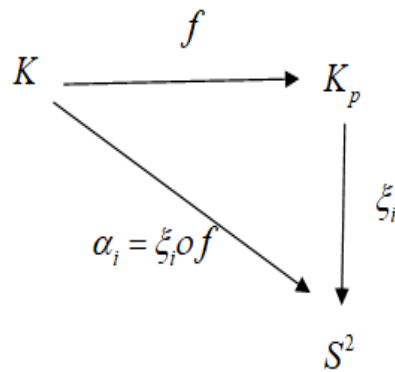
Sonuç 3.3.3. $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyi üzerindeki t ve θ parametre eğrileri düzlemsel ise bu eğriler yüzeyin eğrilik çizgisidir.

Teorem 3.3.12 \mathbb{E}^3 te paralel yüzey çifti (K, K_p) olsun. K ve K_p yüzeylerinin birim normal vektörleri sırasıyla N ve N_p olmak üzere, Gauss dönüşümleri arasında

$$\eta = \eta_p$$

bağıntısı vardır.

İspat 3.3.13 K ve K_p birim normal vektörlerinin koordinatları sırasıyla $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\xi_i = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ olsun.



$$\eta : K \longrightarrow S^2$$

$$X \longrightarrow \eta(X) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(X) \frac{\partial}{\partial Y_i|_X}$$

dönüşümü K yüzeyinin Gauss dönüşümüdür. Diğer taraftan, $f : K \rightarrow K_p$ paralel dönüşümü olmak üzere, K_p yüzeyinin Gauss dönüşümü

$$\begin{aligned}
\eta_p : K_p &\rightarrow S^2 \\
f(X) &\rightarrow \eta_p(f(X)) = \sum_{i=1}^n \xi_i(f(X)) \frac{\partial}{\partial Y_i} \Big|_{f(X)} \\
&= \sum_{i=1}^n (\xi_i \circ f(X)) \frac{\partial}{\partial Y_i} \Big|_{f(X)} \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i(X) \frac{\partial}{\partial Y_i} \Big|_{f(X)} \\
&= \eta_p(X)
\end{aligned}$$

olur. $\forall X \in K$ için Gauss dönüşümü sağlanacağından $\eta = \eta_p$ elde edilir.

Örnek 3.3.14 $M : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ merkez eğrisi $M(t) = (t, t^8, t^9)$ olan polinom eğrisi verilsin. $M(t)$ eğrisinin 1., 2. ve 9.mertebeden türevleri hesaplanırsa

$$M'(t) = (1, 8t^7, 9t^8),$$

$$M''(t) = (0, 56t^6, 72t^7),$$

$$M^{(9)}(t) = (0, 0, 9!)$$

olur. $M(t)$ eğrisinin Flc elemanları,

$$T(t) = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}}, \frac{8t^7}{\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}}, \frac{9t^8}{\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} \right),$$

$$D_1(t) = \frac{M'(t) \times M^{(9)}(t)}{\|M'(t) \times M^{(9)}(t)\|} = \left(\frac{8t^7}{\sqrt{64t^{14} + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{64t^{14} + 1}}, 0 \right),$$

$$D_2(t) = T(t) \times D_1(t)$$

$$= \left(-\frac{9t^8}{\sqrt{64t^{14} + 1}\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}}, -\frac{72t^{15}}{\sqrt{64t^{14} + 1}\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}}, \frac{\sqrt{64t^{14} + 1}}{\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} \right),$$

$$d_1(t) = \frac{\langle T'(t), D_2(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{72t^7 (8t^{14} + 1)}{\sqrt{64t^{14} + 1} (81t^{16} + 64t^{14} + 1)^{3/2}},$$

$$d_2(t) = \frac{\langle T'(t), D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = -\frac{56t^6}{\sqrt{64t^{14} + 1} (81t^{16} + 64t^{14} + 1)},$$

$$d_3(t) = \frac{\langle D_2(t)', D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{504t^{14}}{(64t^{14} + 1) (81t^{16} + 64t^{14} + 1)}$$

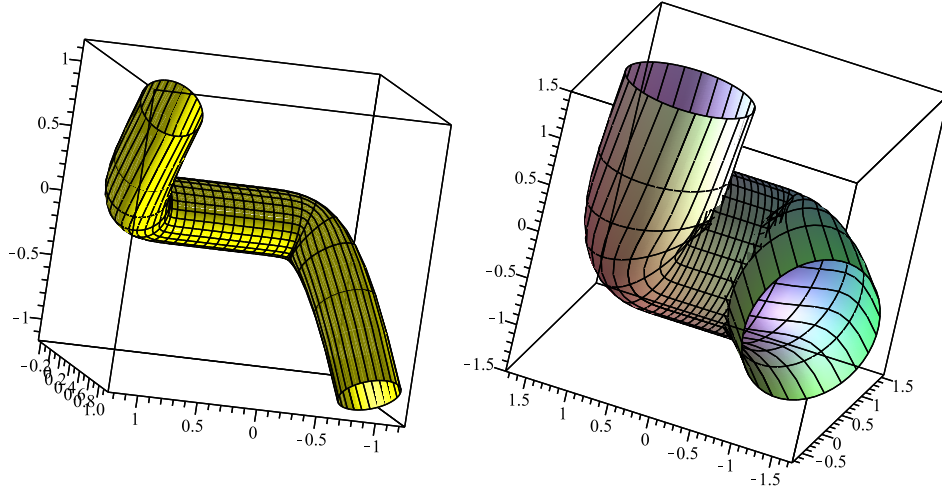
şeklinde bulunur. Yarıçap $r = 0.25$ alınırsa $K(t, \theta)$ tüp yüzeyinin parametrik denklemi

$$K(t, \theta) = \left(t - \frac{9t^8 \cos \theta}{4\sqrt{64t^{14} + 1}\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} + \frac{2t^7 \sin \theta}{\sqrt{64t^{14} + 1}}, \right. \\ \left. t^8 - \frac{18t^{15} \cos \theta}{\sqrt{64t^{14} + 1}\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} - \frac{\sin \theta}{4\sqrt{64t^{14} + 1}}, \right. \\ \left. t^9 + \frac{\cos \theta \sqrt{64t^{14} + 1}}{4\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} \right)$$

olur. $\epsilon = 0.5$ alınırsa $K_p(t, \theta)$ paralel yüzeyinin denklemi

$$K_p(t, \theta) = \left(t - \frac{27t^8 \cos \theta}{4\sqrt{64t^{14} + 1}\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} + \frac{6t^7 \sin \theta}{\sqrt{64t^{14} + 1}}, \right. \\ \left. t^8 - \frac{54t^{15} \cos \theta}{\sqrt{64t^{14} + 1}\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} - \frac{3 \sin \theta}{4\sqrt{64t^{14} + 1}}, \right. \\ \left. t^9 + \frac{3 \cos \theta \sqrt{64t^{14} + 1}}{4\sqrt{81t^{16} + 64t^{14} + 1}} \right)$$

bulunur, Şekil (3.4).



$K(t, \theta)$ Tüp Yüzeyi

$K_p(t, \theta)$ Tüp Yüzeyin Paralel Yüzeyi

Şekil 3.4 $K(t, \theta)$ Tüp Yüzeyi ve Onun Paralel Yüzeyi

3.4 Flc Çatısı İle Verilen Roller Coaster Yüzeyler

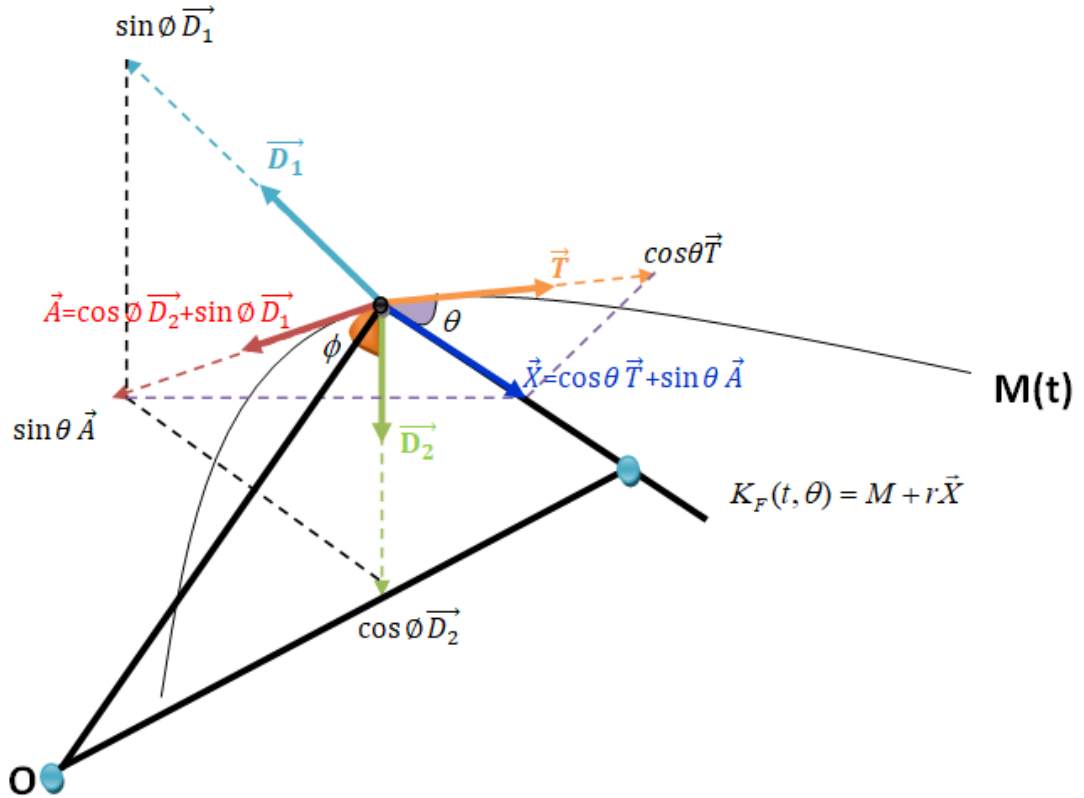
Bu bölümde Roller coaster yüzeyleri Flc çatısına göre ifade edilerek geometrik özellikleri incelendi.

Tanım 3.4.1 $M = M(t)$ polinom eğrisinin Flc çatısı $\{T, D_2, D_1\}$ olsun. Bu çatıya göre Roller coaster yüzeyi $K_F(t, \theta)$ ile gösterilir ve denklemi

$$K_F(t, \theta) = M(t) + r \left(\cos\theta T + \sin\theta (\cos\phi(t) D_2 + \sin\phi(t) D_1) \right) \quad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\phi(t)$ açısı $\phi' = - \int \left(d_3 + \frac{(\frac{d_2}{d_1})'}{1 + (\frac{d_2}{d_1})^2} \right) dt$ bağıntısından bulunur.

Şimdi F-Roller coaster yüzey denkleminin geometrik açılımını verelim:



Şekil 3.5 F-Roller Coaster Gösterimi

$\{D_2, D_1\}$ düzleminde yatan ve T düzlemine dik olan bir vektör A olsun. D_2 ile A vektörü arasındaki açı da ϕ ile gösterilsin. Bu durumda A vektörü

$$A = \cos\phi(t)D_2 + \sin\phi(t)D_1$$

şeklinde yazılır. $\{A, T\}$ düzleminde yatan bir vektör X olsun. X ile T arasındaki açı da θ ile gösterilirse bu durumda X vektörü

$$X = \cos\theta T + \sin\theta A$$

şeklinde yazılır. M eğrisi boyunca X vektörünün çizmiş olduğu regle yüzey bir Roller Coaster yüzeyidir. Gerçekten; regle yüzey tanımından $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K_F(t, \theta) &= M(t) + rX \\ &= M(t) + r(\cos\theta T + \sin\theta A) \\ &= M(t) + r\left(\cos\theta T + \sin\theta(\cos\phi(t)D_2 + \sin\phi(t)D_1)\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4.2 $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyinin \mathbb{K}_F Gauss ve \mathbb{H}_F ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} & -r(X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2)[\sin\theta(\cos\phi(t)Y_2 + \sin\phi(t)Z_2 + \cos\theta X_2)] \\ & -r^2\left(\nu(t)\cos\theta X_2(\cos\phi(t)d_1 + \sin\phi(t)d_2) + \nu(t)\sin\theta(d_1Y_2 + d_2Z_2) \right. \\ & \left. - \cos\theta(\phi'(t) + \nu(t)d_3)(\cos\phi(t)Z_2 - \sin\phi(t)Y_2)\right) \\ \mathbb{K}_F &= \frac{}{}, \\ & -r\left[(r\nu(t)\cos\theta\cos\phi(t))^2(d_1^2 - d_2^2) - (r\nu(t)\cos\theta)^2(d_1^2 - d_3^2) \right. \\ & \left. + (r\nu(t)\cos\theta)^2d_1d_2\sin 2\phi(t) + r^2\nu(t)\sin 2\theta(\phi'(t) + \nu(t)d_3) \right. \\ & \left. \cdot (\sin\phi(t)d_1 - \cos\phi(t)d_2) - (r\sin\theta)^2\phi'(t)(2\nu(t)d_3 + \phi'(t)) - \nu^2(t)(d_3^2r^2 + \cos^2\theta)\right] \end{aligned}$$

$$\mathbb{H}_F = \frac{\begin{aligned} & - \left[\left(\nu(t) - r\nu(t)\sin\theta (\cos\phi(t)d_1 + \sin\phi(t)d_2) \right)^2 \right. \\ & + r^2 \left(\nu(t)d_1\cos\theta - \sin\theta\sin\phi(t)(\nu(t)d_3 + \phi'(t)) \right)^2 \\ & \left. + r^3 \left(\nu(t)d_2\cos\theta + \sin\theta\cos\phi(t)(\nu(t)d_3 + \phi'(t)) \right)^2 \right] \\ & \left(\sin\theta (\cos\phi(t)Y_2 + \sin\phi(t)Z_2) + X_2\cos\theta \right) \\ & + 2r^2\nu(t) (r\cos\phi(t)d_1 + r\sin\phi(t)d_2 - \sin\theta) . \\ & \left[\nu(t)X_2\cos\theta (\cos\phi(t)d_1 + \sin\phi(t)d_2) - \cos\theta (\cos\phi(t)Z_2 \right. \\ & \left. - \sin\phi(t)Y_2(\nu(t)d_3 + \phi'(t)) + \nu(t)\sin\theta(d_1Y_2 + d_2Z_2) \right] \end{aligned}}{-2r \left[(r\nu(t)\cos\theta \cos\phi(t))^2(d_1^2 - d_2^2) - (r\nu(t)\cos\theta)^2(d_1^2 - d_2^2) \right. \\ + (r\nu(t)\cos\theta)^2 d_1 d_2 \sin 2\phi(t) + r^2 \nu(t) \sin 2\theta (\phi'(t) + \nu(t)d_3) \\ \left. (\sin\phi(t)d_1 - \cos\phi(t)d_2) - (r\sin\theta)^2 \phi'(t)(2\nu(t)d_3 + \phi'(t)) - \nu^2(t)(d_3^2 r^2 + \cos^2\theta) \right]}$$

şeklinde verilir.

İspat 3.4.3 $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyinin t ve θ parametrelerine göre kısmi türevleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} K_{F_t} &= [\nu(t) - \nu(t)r\sin\theta (\cos\phi(t)d_1 + \sin\phi(t)d_2)] T \\ &+ r [\nu(t)d_1\cos\theta - \sin\theta\sin\phi(t) (\phi'(t) + \nu(t)d_3)] D_2 \\ &+ r [\nu(t)d_2\cos\theta + \sin\theta\cos\phi(t) (\phi'(t) + \nu(t)d_3)] D_1 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$K_{F_\theta} = -r\sin\theta T + r\cos\theta\cos\phi(t)D_2 + r\cos\theta\sin\phi(t)D_1. \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned} & -r\nu(t)\cos\theta [\cos\phi(t)d_1 + \sin\phi(t)d_2] T \\ K_{F_{t\theta}} &= -r [\nu(t)d_1\sin\theta + \cos\theta\sin\phi(t) (\phi'(t) + \nu(t)d_3)] D_2 \\ &+ r [-\nu(t)d_2\sin\theta + \cos\theta\cos\phi(t) (\phi'(t) + \nu(t)d_3)] D_1 \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$K_{F_{\theta\theta}} = -r\cos\theta T - r\sin\theta\cos\phi(t)D_2 - r\sin\theta\sin\phi(t)D_1 \quad (3.4.5)$$

$$\begin{aligned}
K_{F_{tt}} = & \left[\nu(t)r\sin\theta\left(\nu(t)d_3 + 2\phi'(t)\right)\left(d_1\sin\phi(t) - d_2\cos\phi(t)\right) + \nu'(t) \right. \\
& \left. - \nu^2(t)r\cos\theta\left(d_1^2 + d_2^2\right) - r\sin\theta\left((\nu d_2)'\sin\phi(t) + (\nu d_1)'\cos\phi(t)\right) \right] T \\
& - \left[\nu^2(t)d_1r\sin\theta\left(d_2\sin\phi(t) + d_1\cos\phi(t)\right) + \nu d_3r\sin\theta\cos\phi(t)\left(\nu(t)d_3 + 2\phi'(t)\right) \right. \\
& + d_3r\left(\nu^2(t)\cos\theta d_2 + \sin\theta\sin\phi(t)\nu'(t)\right) + r\sin\theta\left(\nu(t)\sin\phi(t)d_3' + (\phi'(t))^2\cos\phi(t)\right) \\
& \left. - r\cos\theta(\nu(t)d_1)' + r\phi'(t)\sin\theta\sin\phi(t) + \nu^2(t)d_1 \right] D_2 \\
& + \left[-\nu^2(t)r\sin\theta\sin\phi(t)\left(d_2^2 + d_3^2\right) + r\sin\theta\cos\phi(t)\left(\nu(t)d_3\right)' + r\cos\theta\left(\nu(t)d_2\right)' \right. \\
& + r\sin\theta\cos\phi(t)\left(\phi'(t) - \nu^2(t)d_1d_2\right) - r\phi'(t)\sin\theta\sin\phi(t)\left(\phi'(t) + 2\nu(t)d_3\right) \\
& \left. + \nu^2(t)d_1d_3r\cos\theta + \nu^2(t)d_2 \right] D_1
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
X_1 = & \nu(t)r\sin\theta\left(\nu(t)d_3 + 2\phi'(t)\right)\left(d_1\sin\phi(t) - d_2\cos\phi(t)\right) + \nu'(t) \\
& - \nu^2(t)r\cos\theta\left(d_1^2 + d_2^2\right) - r\sin\theta\left((\nu d_2)'\sin\phi(t) + (\nu d_1)'\cos\phi(t)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 = & -\nu^2(t)d_1r\sin\theta\left(d_2\sin\phi(t) + d_1\cos\phi(t)\right) - \nu d_3r\sin\theta\cos\phi(t)\left(\nu(t)d_3 + 2\phi'(t)\right) \\
& - d_3r\left(\nu^2(t)\cos\theta d_2 + \sin\theta\sin\phi(t)\nu'(t)\right) - r\sin\theta\left(\nu(t)\sin\phi(t)d_3' + (\phi'(t))^2\cos\phi(t)\right) \\
& + r\cos\theta(\nu(t)d_1)' - r\phi'(t)\sin\theta\sin\phi(t) + \nu^2(t)d_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_1 = & -\nu^2(t)r\sin\theta\sin\phi(t)\left(d_2^2 + d_3^2\right) + r\sin\theta\cos\phi(t)\left(\nu(t)d_3\right)' + r\cos\theta\left(\nu(t)d_2\right)' \\
& + r\sin\theta\cos\phi(t)\left(\phi'(t) - \nu^2(t)d_1d_2\right) - r\phi'(t)\sin\theta\sin\phi(t)\left(\phi'(t) + 2\nu(t)d_3\right) \\
& + \nu^2(t)d_1d_3r\cos\theta + \nu^2(t)d_2
\end{aligned}$$

alınırsa $K_{F_{tt}}$ ifadesi

$$K_{F_{tt}} = X_1T + Y_1D_2 + Z_1D_1 \quad (3.4.6)$$

şeklinde yazılır. K_{F_t} ve K_{F_θ} ifadelerinin vektörel çarpımı alınır ve elde edilen vektörün

normu alınırsa,

$$\begin{aligned}
K_{F_t} \wedge K_{F_\theta} &= \begin{pmatrix} r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) \\ \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \end{pmatrix} D_2 \\
&\quad \begin{pmatrix} -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] + \nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{pmatrix} D_1, \\
\|K_{F_t} \wedge K_{F_\theta}\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) \\ \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \\ -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{pmatrix}^2}
\end{aligned}$$

olur. Buradan yüzey normali,

$$\begin{aligned}
N_F(t, \theta) &= \frac{K_{F_t} \wedge K_{F_\theta}}{\|K_{F_t} \wedge K_{F_\theta}\|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) \\ \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \\ -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] + \nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) \\ \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \\ -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{pmatrix}^2}}
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

olur. Burada

$$X_2 = \frac{r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right)}{\sqrt{\left(r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) \right)^2 + \left(\begin{array}{l} \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \end{array} \right)^2 + \left(\begin{array}{l} -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{array} \right)^2}}$$

$$Y_2 = \frac{\begin{array}{l} \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \end{array}}{\sqrt{\left(r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) \right)^2 + \left(\begin{array}{l} \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \end{array} \right)^2 + \left(\begin{array}{l} -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{array} \right)^2}}$$

$$Z_2 = \frac{\begin{array}{l} -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{array}}{\sqrt{\left(r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) \right)^2 + \left(\begin{array}{l} \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \end{array} \right)^2 + \left(\begin{array}{l} -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{array} \right)^2}}$$

alınırsa $N_F(t, \theta)$ yüzey normali

$$N_F(t, \theta) = X_2T + Y_2D_2 + Z_2D_1 \quad (3.4.8)$$

şeklinde yazılır. Yüzeyin birinci ve ikinci temel formları

$$\begin{aligned} E_F = \langle K_{F_t}, K_{F_t} \rangle &= [\nu(t) - \nu(t)r \sin \theta (\cos \phi(t)d_1 + \sin \phi(t)d_2)]^2 \\ &+ r [\nu(t)d_1 \cos \theta - \sin \theta \sin \phi(t) (\phi'(t) + \nu(t)d_3)]^2 \\ &+ r [\nu(t)d_2 \cos \theta + \sin \theta \cos \phi(t) (\phi'(t) + \nu(t)d_3)]^2 \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

$$F_F = \langle K_{F_t}, K_{F_\theta} \rangle = r^2\nu(t) (\cos \phi(t)d_1 + \sin \phi(t)d_2) - r\nu(t)\sin\theta \quad (3.4.10)$$

$$G_F = \langle K_{F_\theta}, K_{F_\theta} \rangle = r^2 \quad (3.4.11)$$

$$e_F = \langle K_{F_{tt}}, N_F(t, \theta) \rangle = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \quad (3.4.12)$$

$$f_F = \langle K_{F_{t\theta}}, N_F(t, \theta) \rangle \quad (3.4.13)$$

$$\begin{aligned} &\nu(t)X_2\cos\theta[d_1\cos\phi(t) + d_2\sin\phi(t)] \\ &= +\cos\theta(\nu(t)d_3 + \phi'(t))[Y_2\sin\phi(t) - Z_2\cos\phi(t)] \\ &+\nu(t)\sin\theta(d_1Y_2 + d_2Z_2) \end{aligned}$$

$$g_F = \langle K_{F_{\theta\theta}}, N_F(t, \theta) \rangle = -r\sin\theta[Y_2\cos\phi(t) + Z_2\sin\phi(t)] - rX_2\cos\theta \quad (3.4.14)$$

şeklindedir. Temel formlar (2.1.43) da yerine yazılırsa \mathbb{K}_F Gauss eğriliği ve \mathbb{H}_F ortalama eğriliği hesaplanmış olur.

Teorem 3.4.4 $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyi üzerinde

$$\delta(t) = M(t) + r [\cos \theta(t)T + \sin \theta(t) (\cos \phi(t)D_2 + \sin \phi(t)D_1)]$$

eğrisinin striksiyon eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\theta = \mp \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d_2}{d_1} = c, (c = \text{sabit})$$

olmalıdır.

İspat 3.4.5 $\delta = \delta(t)$ eğrisinin $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyinin striksiyon eğrisi olması için

$$\langle \delta'(t), \cos \theta(t)T + \sin \theta(t) (\cos \phi(t)D_2 + \sin \phi(t)D_1) \rangle = 0$$

olmalıdır. Buradan $\delta(t)$ eğrisinin t parametresine göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= M'(t) + r \left(-\theta'(t)\sin\theta(t)T + \cos\theta(t)T' + \theta'(t)\cos\theta(t)[\cos\phi(t)D_2 + \sin\phi(t)D_1] \right. \\ &\quad \left. + \sin\theta(t)[-\phi'(t)\sin\phi(t)D_2 + \cos\phi(t)D_2' + \phi'(t)\cos\phi(t)D_1 + \sin\phi(t)D_1'] \right), \\ &= \nu(t)T + r \left(-\theta'(t)\sin\theta(t)T + \nu(t)\cos\theta(t)(d_1D_2 + d_2D_1) \right. \\ &\quad \left. + \theta'(t)\cos\theta(t)[\cos\phi(t)D_2 + \sin\phi(t)D_1] + \sin\theta(t)[-\phi'(t)\sin\phi(t)D_2 \right. \\ &\quad \left. + \nu(t)\cos\phi(t)(-d_1T + d_3D_1) + \phi'(t)\cos\phi(t)D_1 - \nu(t)\sin\phi(t)(d_2T + d_3D_2) \right), \\ &= \left[\nu(t) - r\sin\theta(t)(\theta'(t) + \nu(t)[\cos\phi(t)d_1 + \sin\phi(t)d_2]) \right] T \\ &\quad + r \left[\cos\theta(t)[\nu(t)d_1 + \theta'(t)\cos\phi(t)] - \sin\theta(t)\sin\phi(t)[\nu(t)d_3 + \phi'(t)] \right] D_2 \\ &\quad + r \left[\cos\theta(t)[\nu(t)d_2 + \theta'(t)\sin\phi(t)] + \sin\theta(t)\cos\phi(t)[\nu(t)d_3 + \phi'(t)] \right] D_1 \end{aligned}$$

bulunur. Burada iç çarpım yapılırsa istenen elde edilir.

Sonuç 3.4.1. $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyinin striksiyon eğrileri

$$\delta_1(t) = M(t) + r [\cos \phi(t)D_2 + \sin \phi(t)D_1],$$

$$\delta_2(t) = M(t) - r [\cos \phi(t)D_2 + \sin \phi(t)D_1]$$

biçimindedir.

Teorem 3.4.6 $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyinin (t_0, θ_0) 'da singüler noktasının olması için gerek ve yeter şart

$$\theta_0 = \mp \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d_2}{d_1} = c, \quad (c = \text{sabit})$$

olmalıdır.

İspat 3.4.7 $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyinin (t_0, θ_0) 'da singüler noktasının olması için gerek ve yeter şart $\|K_{F_t} \wedge K_{F_\theta}\|(t_0, \theta_0) = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$\|K_{F_t} \wedge K_{F_\theta}\|(t_0, \theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\begin{pmatrix} r \cos \theta (\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)]) \\ \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) \\ -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] \end{pmatrix}^2} = 0$$

$$\Rightarrow r \cos \theta \left(\nu \cos \theta [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] - \sin \theta [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \sin \phi(t) - d_2 \cos \phi(t)] \\ & -r \sin^2 \theta \cos \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] - \nu(t) \cos \theta \sin \phi(t) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\nu(t) r \sin \theta \cos \theta \cos \phi(t) [d_1 \cos \phi(t) + d_2 \sin \phi(t)] \\ & -r \sin^2 \theta \sin \phi(t) [\nu(t) d_3 + \phi'(t)] \\ & +\nu(t) \cos \theta [\nu(t) d_1 \sin \theta + \cos \phi(t)] = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Bu ifadenin gerçekleşmesi için de

$$\cos \theta_0 = 0, \quad \frac{d_2}{d_1} = c, (c = \text{sabit})$$

sağlanmalıdır. Bu ise

$$\theta_0 = \mp \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d_2}{d_1} = c, (c = \text{sabit})$$

olmasını gerektirir.

Sonuç 3.4.2. $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyinin singüler noktalarının geometrik yeri striksiyon eğrileridir.

Örnek 3.4.8 $M : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ merkez eğrisi $M(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ polinom eğrisi verilsin. $M(t)$ eğrisinin 1.,2. ve 3. mertebeden türevleri hesaplanırsa

$$M'(t) = (6, 6t, 3t^2),$$

$$M''(t) = (0, 6, 6t),$$

$$M'''(t) = (0, 0, 6)$$

olur. $M(t)$ eğrisinin Flc elemanları,

$$T(t) = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = \left(\frac{2}{t^2 + 2}, \frac{2t}{t^2 + 2}, \frac{t^2}{t^2 + 2} \right),$$

$$D_1(t) = \frac{M'(t) \times M'''(t)}{\|M'(t) \times M'''(t)\|} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, 0 \right),$$

$$D_2(t) = T(t) \times D_1(t) = \left(-\frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}(t^2 + 2)}, -\frac{t^3}{\sqrt{t^2 + 1}(t^2 + 2)}, \frac{2\sqrt{t^2 + 1}}{t^2 + 2} \right),$$

$$d_1(t) = \frac{\langle T'(t), D_2(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{2t}{3\sqrt{t^2 + 1}(t^2 + 2)^2},$$

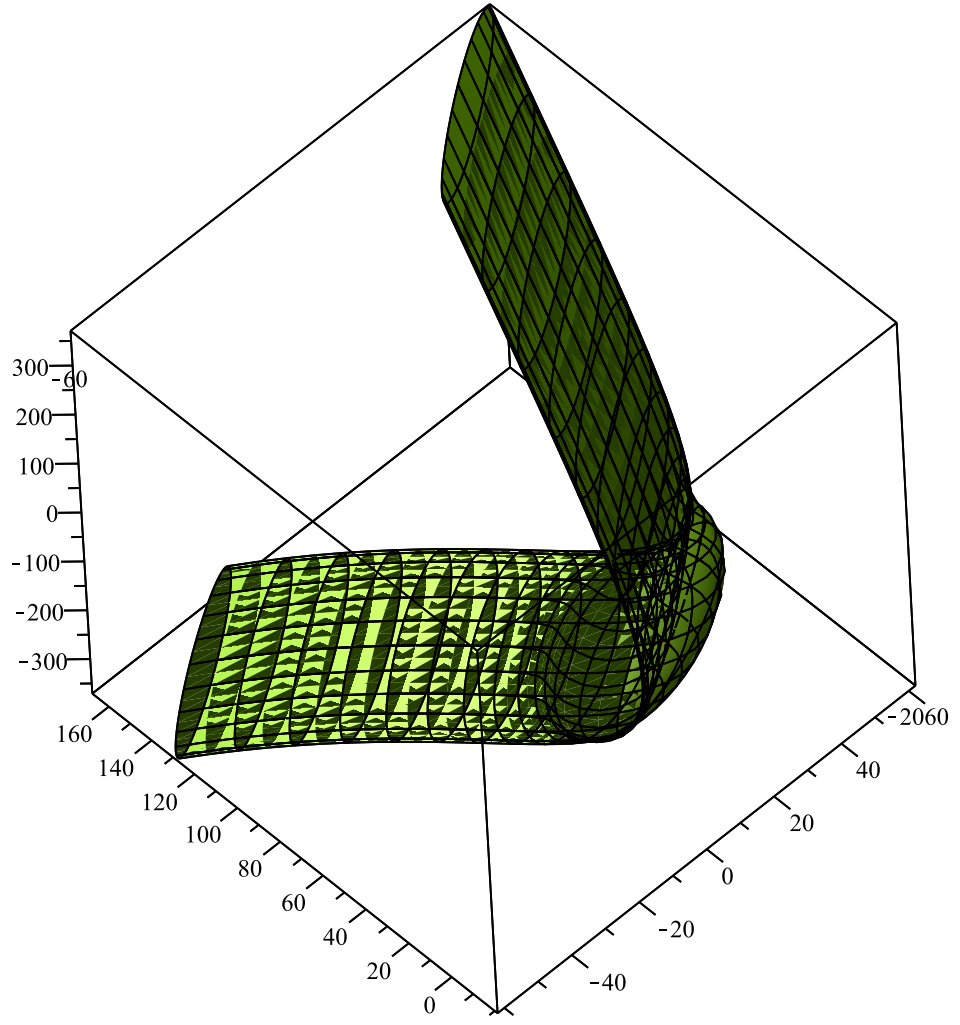
$$d_2(t) = \frac{\langle T'(t), D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = -\frac{2}{3\sqrt{t^2 + 1}(t^2 + 2)^2},$$

$$d_3(t) = \frac{\langle D_2(t)', D_1(t) \rangle}{\|M'(t)\|} = \frac{t^2}{3(t^2 + 1)(t^2 + 2)^2}$$

şeklinde bulunur. Burada $\phi(t)$ açısı

$$\phi(t) = - \int \left(d_3 + \frac{\left(\frac{d_2}{d_1}\right)'}{1 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2} \right) ds = -\frac{\sqrt{2}}{12} \arctan \left(\frac{t\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{t}{6(t^2 + 2)}$$

dır. Yarıçap $r = 0.25$ alınırsa $K_F(t, \theta)$ Roller coaster yüzeyi Şekil (3.6) olur.



Şekil 3.6 $K_F(t, \theta)$ Roller Coaster Yüzeyi

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Öklid uzayında Flc çatısına göre Dede tarafından tanımlanmış ve bu çatıya ait özellikler incelenmiştir (Dede,2016). Bu çalışmadan sonra tüp yüzeyler de Flc çatısına göre yine Dede tarafından incelenmiş ve geometrik özellikleri ele alınmıştır. Bu tez çalışmasında Flc çatısından üretilen tüp yüzeylerden üretilen bazı yüzeyler ele alınarak kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Tezin orjinal kısmını oluşturan 3.bölümde üç boyutlu Öklid uzayında Flc çatısına göre verilen tüp yüzeylerin üzerinde yatan parametre eğrileri ele alınmıştır. Bu eğrilerin özel eğriler olması durumu incelenmiştir. Sonrasında bu yüzeylerin paralel ve fokal yüzeyleri tanımlanmıştır. Tanımlanan yeni yüzeylere ait geometrik özellikler elde edilmiştir. Paralel yüzeylerin Gauss dönüşümü daima koruduğu sonucuna varılarak geometri alanında bu konuya dair önemli bir katkı oluşturulmuştur. Daha sonra merkez eğrisi polinom eğrisi olan ve bu eğri üzerinde tanımlanan Flc çatısı ile Roller coaster yüzeyler tanımlanmıştır. Roller coaster yüzeyler ile regle yüzeyler arasındaki bağlantı incelenmiş ve ilgili geometrik sonuçlar elde edilmiştir. Roller coaster yüzeyin striksiyon eğrileri bulunmuştur. Bu yüzeyin singüler noktalarının geometrik yerinin striksiyon eğriler olduğu gösterilmiştir.

Daha sonraki yapılacak çalışmalarda, elde edilen bu yüzeylerin Minkowski, Galile gibi çeşitli uzaylarda benzer özelliklerinin incelenmesi hedeflenmektedir.

5. KAYNAKLAR

- Abdel-Baky R.A. & Ünlütürk Y. (2016). On the Curvatures of Spacelike Circular Surfaces. *Kuwait Journal of Science*, 43 (3), 50-58.
- Anonim, (2024). Düzgün Elektrik Alan. <https://fizikdersi.gen.tr/duzgun-elektrik-alan-nedir-ornekler-ve-soru-cozumleri/>-(Erişim tarihi: 12.05.2024).
- Anonim, (2024). Les Montagnes Russes de Belleville. <https://coastersworld.fr/historique-des-montagnes-russes/>-(Erişim tarihi: 12.05.2024).
- Anonim, (2024). Roller Coaster Pisti. <https://scopeblog.stanford.edu/2018/08/16/this-is-your-brain-on-roller-coasters/>-(Erişim tarihi: 12.05.2024).
- Baş, S. (2018). Ribbon Çatısına göre Roller Coaster Yüzeyinin Karakterizasyonları. *BEÜ Fen Bilimleri Dergisi*, 7 (2), 390-398
- Büyükkütük, S., Kişi, İ. & Öztürk, G. (2019). Some Characterizations of Focal Surfaces of a Tubular Surface in E3 arXiv:1810.05531v2 [math.DG].
- Cui L., Wang D., & Dai J.S. (2009). Kinematic Geometry of Circular Surfaces With a Fixed Radius Based on Euclidean Invariants. *Journal of Mechanical Design*, 131 (10), 101009-1-9.
- Dayel, I.A., Solouma, E. & Khan, M. (2022). On geometry of focal surfaces due to B-Darboux and type-2 Bishop frames in Euclidean 3-space. *AIMS Mathematics*, 7(7) 13454–13468.
- Dede, M. (2019). A new representation of tubular surfaces. *Houston Journal of Mathematics*, 45 (3), 707-720.
- Do Carmo, M.P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Farouki, R. T., Han, C. Y., Manni, C. & Sestini, A. (2004). Characterization and Construction of Helical Polynomial Space Curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162, 365–392.
- Georgiev, G. H. & Pavlov, M. D. (2018). Focal and generalized focal surfaces of parabolic cylinders. *ARPJ. Eng. Appl. Sci.*, 13, 4458–4465.
- Gordon, C.G. (1991). Face recognition from depth maps and surface curvature. *Proc.SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision San-Diego CA*.
- Gray, A. (1998). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Second ed. CrcPress, USA, 1053 p.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1983). *Diferensiyel Geometri*. İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No:7, Malatya.
- Hagen, H., Pottmann, H. & Divivier, A. (1991). Visualization Functions on a Surface. *Journal of Visualization and Animation*, 2, 52-58.
- Izumiya, S., Saji, K. & Takeuchi, N. (2007). Circular surfaces. *Advances in Geometry*, 7, 295–313.

- Kişi, İ., Büyükkütük, S. & Öztürk, G. (2018). Focal surface of a tubular surface with Bishop Frame in E^3 , 5th ifs and contemporary mathematics conference september 05-09, Kahramanmaraş, Turkey, pp:132-139.
- Koenderink, J. (1990). Solid Shape. MIT Press, Cambridge, MA.
- Larson, R. (2012). Elementary Linear Algebra. The Pennsylvania State University, Boston.
- Liu, H. & Miao, J. (2021). Geometric invariants and focal surfaces of spacelike curves in de Sitter space from a caustic viewpoint. *AIMS Math.*, 6, 3177–3204.
- Millman, R.S. & Parker, G.D. (1977). Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall, Englewood Clis, New Jersey.
- O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian Geometry. Academic Press Inc., New York.
- Ortaöğretim Genel Müdürlüğü Materyal (OGM Materyal) (2024). Yüklü, iletken ve paralel levhalar arasında oluşan elektrik alan. <https://ogmmateryal.eba.gov.tr/panel/upload/fasikul/rptaek13ezg.pdf>-(Erişim tarihi: 12.05.2024).
- Özdemir, M. (2004). On the Focal Curvatures of Non-lightlike Curves in Minkowski $(m+1)$ -Space. *F.Ü. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 16 (3), 401-409.
- Özdemir, B. & Arslan, K. (2008). On Generalized Focal Surfaces in E^3 . *Rev. Bull. Calcutta Math. Soc.*, 16(1), 23-32.
- Pottman, H., Asperl, A., Hofer, M. & Kilian, A. (2007). Architectural Geometry. Bentley Institute Press, Exton, Pennsylvania USA.
- Pottmann H. & Wallner, J. (2001). Computational Line Geometry. Springer-Verlag Berlin.
- Spivak, M. (1999). A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, 4(3), Publish or Perish Inc., Houston- Texas.
- Şimşek, H. (2016). Sonlu boyutlu minkowski uzaylarında fokal eğriler ve fokal yüzeyler. Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Antalya.
- Thirion, J.P. & Gourdon, A. (1993). The Marching Lines Algorithm, New results and proofs. *Rapports de Recherche*, 1881, INRIA, SophiaAntipolis, France.
- Xu Z., Feng R. & Sun J.G. (2006). Analytic and Algebraic Properties of Canal Surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 195(1-2), 220-228.
- Wang, Z., Pei, D., Chen, L., Kong, L. & Han, Q. (2021). Singularities of focal surfaces of null Cartan curves in Minkowski 3-space. *Abstr. Appl. Anal.*, 823809.
- Vargas, R.U. (2005). On Vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves. *Bull Braz Math Soc, New Series*, 36 (3), 285-307.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Kebire Hilal AYVACI
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölümü	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2016
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	23.07.2019
Doktora	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	.../.../2024
Yayınlar	
<p>Y.Li, K.Eren, K.H Ayvacı and S.Ersoy, Simultaneous characterizations of partner ruled surfaces using Flc frame. AIMS Mathematics 7(11), 20213-20229, (2023). (SCI-Exp Q1)</p> <p>Y.Li, K.Eren, K.H. Ayvacı and S. Ersoy, The developable surfaces with pointwise 1-type Gauss map of Frenet type framed base curves in Euclidean 3-space, AIMS Math 8(1), 2226-2239, (2023). (SCI-Exp Q1)</p> <p>K.H. Ayvacı and G.Ş. Atalay, Surface family with a common Mannheim B-asymptotic curve, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 20, No. 13 (2023). (SCI-Exp Q3)</p> <p>A Has, B Yılmaz and KH Ayvacı, C_a ruled surfaces respect to direction curve in fractional differential geometry, Journal of Geometry 115 (1), 11, (2024). (ESCI)</p>	

- G.Ş Atalay and K.H. Ayvaci, Surface family with a common Mannheim B-geodesic curve, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Vol.26, No.2, pp. 1-12, (2021). **(ESCI)**
- S. Şenyurt, K.H. Ayvaci and D.Canlı, Family of Surfaces with a common Bertrand D-Curve as Isogeodesic, Isoasymptotic and Line of Curvature, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal* Vol. 16, Issue 2, pp. 1186 – 1201, (2021). **(ESCI)**
- S. Şenyurt, K.H. Ayvaci and D.Canlı, Family of surfaces with a common involute and evolute curves as of each isogeodesic, isoasymptotic and curvature line, *International Electronic Journal of Geometry*, Volume 15 No. 1 Page 160–174, (2022). **(ESCI)**
- S. Şenyurt, K. Eren and K.H. Ayvaci, A study on Inextensible Flows of Polynomial Curves with Flc Frame. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal* Vol. 17(1), 123 – 133, (2022). **(ESCI)**
- K. Eren, K. H. Ayvaci and S.Şenyurt, On Characterizations Of Spherical Curves Using Frenet Like Curve Frame, *Honam Mathematical J.* 44, No. 3, pp. 391–401, (2022). **(ESCI)**
- S.Şenyurt, D.Canlı and K.H. Ayvaci, Associated Curves in E^3 from a Different Point of View, *Commun. Fac. Sci.Univ.Ank.Ser. A1 Math. Stat.* 71(3), 826–845, (2022). **(ESCI)**
- K.Eren, K.H. Ayvaci and S. Şenyurt, On Ruled Surfaces Constructed By The Evolution of a Polynomial Space Curve, *Journal of Science and Arts*, Volume 23(1), 7-90, (2023). **(ESCI)**
- S.Şenyurt, K.Eren and K.H. Ayvaci, Characterizations of Tzitzeica Curves Using Flc Frame, *Sigma J Eng Nat Sci*, Vol. 42, No. 1, pp. 37–41, February, (2024). **(ESCI)**
- S.Şenyurt, D.Canlı and K.H. Ayvaci, On ruled surfaces generated by Sannia Frame based on alternative frame *Honam Mathematical J.* 46(1), pp. 12–37, (2024). **(ESCI)**

- S.Şenyurt, K.H. Ayvaci and D.Canlı, "Family of Surfaces with a Common Alternative Partner Curve as Asymptotic, Geodesic and Curvature Line Palestine Journal of Mathematics, Vol. 12(2), 464–474, (2023). **(ESCI)**
- S.Şenyurt, K.H.Ayvaci and D.Canlı, Special Smarandache Ruled Surfaces According to Flc Frame in E^3 , Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), Vol. 18, Iss. 1, Article 16. (2023). **(ESCI)**
- K.H. Ayvaci and G.Ş Atalay, Surface Family With A Common Bertrand-B Isogeodesic Curve. Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(3): 1975-1983, (2020). **(TR Dizin)**
- S.Şenyurt, K.H.Ayvaci and D.Canlı, Some characterizations of spherical indicatrix curves generated by Sannia frame. Konuralp Journal of Mathematics, 9 (2), 222-232, (2021). **(TR Dizin)**
- S. Senyurt, K.H. Ayvaci and D. Canlı, Some characterizations of spherical indicatrix curves generated by Flc Frame. Turk. J. Math. Comput. Sci., 13(2), (1–9), (2021). **(TR Dizin)**
- G.Ş. Atalay and K.H. Ayvaci, Surface Family With A Common Bertrand-B Isoasymptotic Curve. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 25(2), 262-268, (2021). **(TR Dizin)**
- S. Şenyurt, K. H. Ayvaci and D.Canlı, Smarandache Curves According to Flc-Frame in Euclidean 3-Space, Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences, 4(1) 16 – 30, (2023). **(TR Dizin)**
- S.Şenyurt, K.H.Ayvaci and D.Canlı, On the Surfaces with Common Mannheim D- Isogeodesic Curve, Ordu Univ. J. Sci. Tech., 10(2): 105-116, (2020). **(TR Dizin)**
- S.Şenyurt, K.H. Ayvaci and D.Canlı, Family of Surfaces with a Common Mannheim D- Isoasymptotic Curve, Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., 10(2): 143-153, (2020). **(TR Dizin)**

Hakem İncelemede Bulunan Yayınlar

- S. Şenyurt and K.H. Ayvaci, On Geometry of Focal Surfaces due to Flc Frame in Euclidean 3-Space.
- S. Şenyurt, D. Canlı and K.H. Ayvaci, Smarandache Ruled Surfaces According to Bishop Frame in E^3 .
- S.Şenyurt, D.Canlı and K.H. Ayvaci, Smarandache geometry based ruled surfaces according to Frenet Frame in E^3 .
- K.H. Ayvaci, K.Eren and S.Şenyurt, On Ruled Surfaces Generated by Direction Curves with Sannie Frame and Their Characterizations.
- A.Has, B.Yılmaz and K.H. Ayvaci, Characterizations of Tzitzeica Curves Using Conformable Frenet Frame.

Uluslararası Konferanslar, Katılımlar, Bildiriler ve Sunumlar

- 15th International Geometry Symposium, 3-6 July 2017, Amasya / TURKEY.
- “Family of Surfaces with A Common Mannheim B- Isogeodesic and Isoasymptotic Curve”, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME 2018), Ordu / TURKEY.
- “Family of Surfaces with A Common Bertrand D- Isogeodesic and Isoasymptotic Curve”, 3rd International Conference On Mathematical And Related Sciences: Current Trends And Developments Online Meeting, November 20-22,2020, TURKEY.
- “Some characterizations of spherical indicatrix curves generated by Flc frame”
18th International Geometry Symposium, 12-13 July 2021, Malatya / TURKEY.
- “On the ruled surfaces generated by Sannia Frame based on alternative frame”
18th International Geometry Symposium, 12-13 July 2021, Malatya / TURKEY.

“On Characterizations of Spherical Curves using Frenet Like Curve Frame” 19th International Geometry Symposium, 27 - 30 June 2022, Trakya University, Edirne.

Ulusal Konferanslar, Katılımlar, Bildiriler ve Sunumlar

Ortak Bertrand-B Geodezikli ve Asimptotikli Yüzey Aileleri, 32.Ulusal Matematik Sempozyumu, MATDER, 31 Ağustos-3 Eylül 2019, Samsun/ TÜRKİYE.

Hakemlikler

International Journal of Geometric Methods in Modern Physics-(2024)

Mathematical Sciences and Applications E-Notes-(2024)

International Journal of the Physical Sciences-(2023,2024).

Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences-(2023,2024).