



**T. C.**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İN VOLÜT EĞRİSİNDEN ELDE EDİLEN SANNIA  
ÇATILARINA GÖRE REGLE YÜZEYLER**

**HATİCE YURTTAŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ORDU 2024**

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**HATİCE YURTTAŞ**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

### İNVOLÜT EĞRİSİNDEN ELDE EDİLEN SANNİA ÇATILARINA GÖRE REGLE YÜZEYLER

HATİCE YURTTAŞ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 81 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT)

Bu araştırma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmında literatür taraması yapılmış, daha önceki çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde Öklid uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm iki alt başlık altında verilmiştir. Birinci alt başlıkta involüt eğri ile ilgili tanım ve teoremler verilmektedir. İkinci alt başlıkta ise Sannia çatılı regle yüzeyler ifade edilmiştir.

Dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup üç alt bölüm olarak tasarlanmıştır. Birinci alt bölümde involüt eğrinin tanjant vektörüyle oluşan regle yüzey, ikinci alt bölümde normal vektörüyle oluşan regle yüzeyler ve üçüncü alt bölümde binormal vektörle oluşan regle yüzeyler araştırılmıştır. Ayrıca her bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi bulunmuş ve bu eğri boyunca tanımlanan Sannia çatısı hesaplanmıştır. Daha sonra her bir yüzeyin normal vektör alanları, birinci ve ikinci temel formları ve bu temel formların katsayıları yardımıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Çalışmanın sonunda Gauss ve ortalama eğrilikleri yardımıyla yüzeylerin açılabilir ve minimal olma durumları sonuç olarak ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde tüm çalışmadan elde edilen bulgular sunularak, bundan sonra yapılacak çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Regle yüzey, Involut eğri, Sannia çatısı, Striksiyon eğrisi.

## **ABSTRACT**

### **RULED SURFACES ACCORDING TO THE SANNIA FRAME OBTAINED FROM INVOLUTE CURVE**

**HATİCE YURTTAŞ**

**ORDU UNIVERSITY**

**INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**MATHEMATICS**

**MASTER THESIS, 81 PAGES**

**(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. SÜLEYMAN ŞENYURT)**

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a literature review is conducted in the introduction section, providing information about previous studies. The second chapter covers the basic concepts related to Euclidean space. The third chapter is presented under two subheadings. The first subheading includes definitions and theorems related to the involute curve. The second subheading discusses ruled surfaces with the Sannia frame.

fourth chapter, which constitutes the original part of the study, is designed in three subsections. The first subsection investigates ruled surfaces formed by the tangent vector of the involute curve, the second subsection examines ruled surfaces formed by the normal vector, and the third subsection explores ruled surfaces formed by the binormal vector. Additionally, the striction curve of each ruled surface is found, and the Sannia frame defined along this curve is calculated. Subsequently, the normal vector fields, the first and second fundamental forms of each surface, and the Gaussian and mean curvatures are calculated using the coefficients of these fundamental forms. At the end of the study, the developable and minimal conditions of the surfaces are expressed as results using the Gaussian and mean curvatures.

In the fifth chapter, the findings obtained from the entire study are presented, and suggestions are made for future research.

**Keywords:** Ruled surface, Involute curve, Sannia frame, Striction curve.

## TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında baőta danıőman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT'a, tez yazım aőamasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen meslektaőım Sayın Doç. Dr. Kemal EREN'e ve Arő. Gör. Dr. Davut CANLI'ya teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim eőim Őkr YURTTAŞ ve ocuklarım Sanem, Nehir ve Osman'a çalıőmalarım boyunca gösterdikleri sabır için teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	I
<b>ÖZET</b> .....	I
<b>ABSTRACT</b> .....	II
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	IV
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	IV
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....	VI
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ</b> .....	VII
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. GENEL BİLGİLER</b> .....	5
2.1 Öklit Uzayı.....	5
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	13
3.1 İnvolut Eğrisi.....	13
3.2 Öklit Uzayında Sannia Çatılı Regle Yüzeyle.....	18
3.2.1 Tanjant Regle Yüzeyle İlişkilendirilmiş Sannia Çatılı Regle Yüzeyle.....	19
3.2.2 Normal Regle Yüzeyle İlişkilendirilmiş Sannia Çatılı Regle Yüzeyle.....	28
3.2.3 Binormal Regle Yüzeyle İlişkilendirilmiş Sannia Çatılı Regle Yüzeyle.....	38
<b>4. BULGULAR VE TARTIŞMA</b> .....	43
4.1 İnvolut Eğrisinin Tanjant Yüzeyle Ait Sannia Çatısına Göre Regle Yüzeyle.....	43
4.2 İnvolut Eğrisinin Asli Normal Yüzeyle Ait Sannia Çatısına Göre Regle Yüzeyle.....	57
4.3 İnvolut Eğrisinin Binormal Yüzeyle Ait Sannia Çatısına Göre Regle Yüzeyle.....	71
<b>5. SONUÇ ve ÖNERİLER</b> .....	78
<b>6. KAYNAKLAR</b> .....	79
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	81

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 1.1 St. Mary Axe Binası .....	1
Şekil 1.2 Santiago Calatrava tarafından Almanya’da tasarlanan garaj kapısı.....	2
Şekil 1.3 Haydar Aliyev Kültür Merkezi.....	2
Şekil 1.4 Gustavo Sannia.....	3
Şekil 3.1 $\alpha$ uzay eğrisi ve $\alpha^*$ involüt eğri .....	18
Şekil 3.2 $X_T$ yüzeyinin grafiği.....	24
Şekil 3.3 $\Phi_1$ ve $X_T$ yüzeyinin grafiği.....	25
Şekil 3.4 $\Phi_2$ ve $X_T$ yüzeyinin grafiği.....	26
Şekil 3.5 $\Phi_3$ ve $X_T$ yüzeyinin grafiği.....	27
Şekil 3.6 $X_N$ yüzeyinin grafiği.....	34
Şekil 3.7 $\Gamma_1$ ve $X_N$ yüzeyinin grafiği.....	35
Şekil 3.8 $\Gamma_2$ ve $X_N$ yüzeyinin grafiği.....	36
Şekil 3.9 $\Gamma_3$ ve $X_N$ yüzeyinin grafiği.....	37
Şekil 3.10 $X_B$ yüzeyinin grafiği.....	39
Şekil 3.11 $\Psi_1$ ve $X_B$ yüzeyinin grafiği.....	40
Şekil 3.12 $\Psi_2$ ve $X_B$ yüzeyinin grafiği.....	41
Şekil 3.13 $\Psi_3$ ve $X_B$ yüzeyinin grafiği.....	42
Şekil 4.1 $\alpha^*$ involüt eğrisi ve $X_{T^*}$ yüzeyinin grafiği.....	53
Şekil 4.2 $\Phi_1^*$ involüt eğrisi ve $X_{T^*}$ yüzeyinin grafiği.....	54
Şekil 4.3 $\Phi_2^*$ involüt eğrisi ve $X_{T^*}$ yüzeyinin grafiği.....	55
Şekil 4.4 $\Phi_3^*$ involüt eğrisi ve $X_{T^*}$ yüzeyinin grafiği.....	56
Şekil 4.5 $\alpha^*$ involüt eğrisi ve $X_{N^*}$ yüzeyinin grafiği.....	67
Şekil 4.6 $\Gamma_1^*$ involüt eğrisi ve $X_{N^*}$ yüzeyinin grafiği.....	68
Şekil 4.7 $\Gamma_2^*$ involüt eğrisi ve $X_{N^*}$ yüzeyinin grafiği.....	69
Şekil 4.8 $\Gamma_3^*$ involüt eğrisi ve $X_{N^*}$ yüzeyinin grafiği.....	70
Şekil 4.9 $\alpha^*$ involüt eğrisi ve $X_{B^*}$ yüzeyinin grafiği.....	74
Şekil 4.10 $\Psi_1^*$ involüt eğrisi ve $X_{B^*}$ yüzeyinin grafiği.....	75
Şekil 4.11 $\Psi_2^*$ involüt eğrisi ve $X_{B^*}$ yüzeyinin grafiği.....	76
Şekil 4.12 $\Psi_3^*$ involüt eğrisi ve $X_{B^*}$ yüzeyinin grafiği.....	77

## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

---

$E^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\times$	: Vektörel çarpım
$\  \ $	: Norm
$T$	: Serret-Frenet çatıda teğet vektör
$N$	: Serret-Frenet çatıda asli normal vektör
$B$	: Serret-Frenet çatıda binormal vektör
$\kappa$	: Eğrilik
$\tau$	: Torsiyon (Burulma)
$s$	: Yay parametresi
$I$	: Birinci temel form
$II$	: İkinci temel form
$K$	: Gauss eğriliği
$H$	: Ortalama eğrilik
$W$	: Darboux vektörü
$\alpha$	: Uzay eğrisi
$\alpha^*$	: Involüt eğri
$T^*$	: Involüt eğrinin teğet vektörü
$N^*$	: Involüt eğrinin asli normal vektörü
$B^*$	: Involüt eğrinin binormal vektörü
$\kappa^*$	: Involüt eğrinin eğriliği
$\tau^*$	: Involüt eğrinin torsiyonu(burulma)

---



## 1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin en önemli kavramlarından biri regle yüzeylerdir. İlk olarak Gaspard Monge tarafından ortaya konmuştur. Bir doğrunun herhangi bir eğri boyunca sürekli hareketi ile meydana gelen yüzeylerdir. Silindir yüzeyi, düzlem ve koni yüzeyi en bilinen regle yüzeylere örnek olarak verilebilir. Mimaride, mühendislikte, bilgisayar destekli tasarım yaparken ve kinematikte yaygın kullanım alanına sahiptir.

Regle yüzeyler açılabilen regle yüzeyler ve açılabilir olmayan regle yüzeyler olarak ikiye ayrılır. Açılabilir regle yüzeylerin her noktasında Gauss eğriliği sıfırdır. Gerilmeden veya yırtılmadan düzlem üzerine serilebilen yüzey şeklinde düşünülebilirler. Endüstride bu özelliğinden dolayı gemi, uçak, otomobil yapımında, mimaride çokça kullanılır. Gauss eğriliğinin pozitif, negatif veya sıfır olma durumları farklı mimari yapılarda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin Londra'da St. Mary Axe binası Gauss eğriliği pozitif artan bir yüzey örneğidir (Şekil 1.1). Santiago Calatrava tarafından Almanya'da tasarlanan garaj kapısı negatif eğriliğe sahip bir yüzey örneğidir (Şekil 1.2). Bakü'deki Haydar Aliyev Kültür Merkezi'nde bu üç durum da mevcuttur (Şekil 1.3), (Yazar, 2019).



Şekil 1.1 St. Mary Axe binası (Anonim 2024)

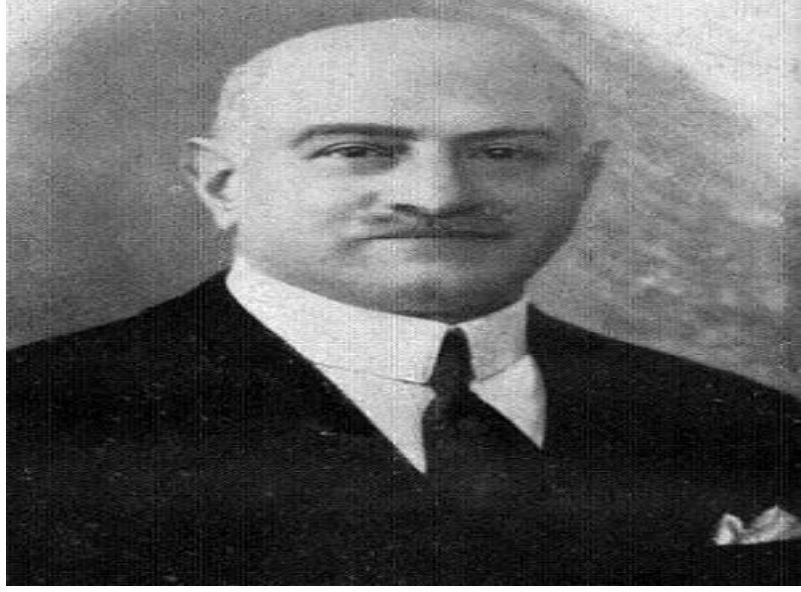


**Şekil 1.2** Santiago Calatrava tarafından Almanya’da tasarlanan Garaj Kapısı  
(Anonim 2024)



**Şekil 1.3** Haydar Aliyev Kültür Merkezi (Anonim 2024)

Eğrilere ve yüzeylere ait pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu tür çalışmalara ait temel kavramlar ve teoremler (Hacısalihoğlu, 1983), (Sabuncuoğlu, 2016) ve (Özdemir, 2020) verilmiştir. Bu çalışmaların temelini çatı kavramı oluşturur. Diferansiyel geometride kullanılan çatılardan biri Sannia çatısıdır. İlk defa Pottman tarafından ifade edilmiştir.



**Şekil 1.4** Gustavo Sannia (Anonim 2024)

Şenyurt ve Eren (2022) çalışmalarında Frenet vektörlerinin çizdiği yüzeylerin striksiyon eğrisi boyunca Sannia çatıları oluşturarak her bir çatıya ait regle yüzeyleri tanımlamışlar ve bu yüzeylerin birinci, ikinci temel formları, Gauss ve ortalama eğriliklerini hesaplamışlardır.

Sannia çatısı kullanılarak başka çalışmalar da yapılmıştır. Şenyurt ve ark. (2021) Sannia çatısının vektörlerinin türev ilişkilerini tanımlamışlar, Sannia vektörlerinin küresel göstergelerinin eğri uzunluklarını ve jeodezik eğrilerini hesaplamışlardır. Yine, Şenyurt ve ark. (2024) yakın zamanda alternatif çatı vektörleri ile tanımlanan regle yüzeylerin striksiyon eğrileri boyunca hareket eden Sannia çatılarına göre regle yüzeyleri çalışmışlar ve bu yüzeylerin özelliklerini ortaya koymuşlardır.

İki eğrinin karşılıklı noktalarında teğet vektörleri birbirine dik ise bu tür eğriler involüt-evolüt eğriler olarak bilinir. Bu tür eğriler üzerinde literatürde bir çok çalışma mevcuttur.

Sivas ve ark. (2023) yayınladıkları bir makalede Smarandacha eğrilerinin invaryantlarını involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve evolüt eğrisi terimleriyle hesaplamışlardır.

Şenyurt ve ark. (2015) “Some Characterizations for the Involute Curves in Dual Space” adlı çalışmada dual uzayda evolüt-involüt eğrileri ve dual Serret Frenet çatısı ile Darboux vektörleri arasındaki bağlantıları vermişlerdir.

Bilici (1999) involüt- evolüt eğri çiftinin Frenet çatıları arasındaki bağlantıları farklı bir yaklaşımla elde etmiş, involüt eğrisi için tanımlanan küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri ve tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartları evolüt eğrisi ile alakalı olarak bazı orjinal sonuçlar elde etmiştir.

Bu çalışmada  $\alpha$  uzay eğrisi alınarak bu eğrinin involüt eğrisi elde edilmiştir. Birinci alt bölümde involüt eğrinin tanjant vektörüyle oluşan regle yüzey, ikinci alt bölümde normal vektörüyle oluşan regle yüzeyler ve üçüncü alt bölümde binormal vektörle oluşan regle yüzeyler araştırılmıştır. Ayrıca her bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi bulunmuş ve bu eğri boyunca tanımlanan Sannia çatısı hesaplanmıştır. Daha sonra her bir yüzeyin normal vektör alanları, birinci ve ikinci temel formları ve bu temel formların katsayıları yardımıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Çalışmanın sonunda Gauss ve ortalama eğrilikleri yardımıyla yüzeylerin açılabilir ve minimal olma durumları sonuç olarak ifade edilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

### 2.1 Öklid Uzayı

**Tanım 2.1**  $A$  boş olmayan bir cümle ve  $V$  de  $\mathfrak{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $f : A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$\text{i: } \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$$\text{ii: } \forall P \in A, \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ vardır.}$$

**Tanım 2.2**  $V$ ,  $A$  ile birleşen bir afin uzay olsun.  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in A$  noktaları için  $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$  cümlesi  $V$  nin bir bazı ise  $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$ -lisine  $A$  afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada  $P_0$  noktasına çatının başlangıç noktası ve  $P_i, 1 \leq i \leq n$ , noktalarına da çatının birim noktaları denir.  $\text{boy}V = n$  ise  $A$  ya  $n$ -boyutlu bir afin uzay denir.

**Tanım 2.3**  $V$ ,  $A$  ile birleşen bir afin uzay olsun.  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow R$  fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir:

$$\forall x, y, z \in V \text{ ve } \forall a, b \in R \text{ için}$$

i: Bilineerlik (2-linear) Aksiyomu:

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle$$

ii: Simetri Aksiyomu:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

iii: Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu:

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**Tanım 2.4** Reel standart afin uzayı  $R^n$  olmak üzere,  $\forall X, Y \in R^n$  için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : R^n \times R^n \rightarrow R, \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma  $R^n$  de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $R^n$  vektör uzayı ile birleşen afin uzayına n-boyutlu standart Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu,2000).

**Tanım2.5**  $X \in E^n$  noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun.  $x_i : E^n \rightarrow R, 1 \leq i \leq n$ , fonksiyonuna  $E^n$  nin i-yinci koordinat fonksiyonu denir.

**Tanım 2.6**  $d : E^n \times E^n \rightarrow R, d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$  şeklinde tanımlanan  $d$

fonksiyonuna  $E^n$ , Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(X, Y) \in R$  sayısına  $X$  ile  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık denir.

**Tanım 2.7**  $\alpha : I \subset R \rightarrow E^n, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  diferansiyellenebilir fonksiyona  $E^n$  de bir eğri denir. Burada  $I \subset R$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı ve  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  eğrisinin parametresi denir.

**Tanım 2.8**  $\alpha : I \subset R \rightarrow E^n$  diferansiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow R, \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

Şeklinde tanımlı  $\|\alpha'\|$  fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu,  $\|\alpha'(t)\| \in R$  sayısına  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki skaler hızı,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left( \frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right) \Big|_t$$

vektörüne de  $\alpha$  eğrisinin hız vektörü denir.

**Tanım 2.9**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  eğrisi için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise eğriye birim hızlı eğri,  $s \in I$  parametresine de eğrinin yay-parametresi denir.

**Tanım 2.10**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  bir eğri ve  $a, b \in I$  için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds$$

Reel sayısına  $\alpha(a)$  ve  $\alpha(b)$  noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

**Tanım 2.11**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  bir eğri ve  $\Phi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(r)}\}$  cümlesi lineer bağımsız olsun.  $\alpha^{(k)} \in S_p\{\Phi\}, k > r$ , olmak üzere  $\Phi$  cümlesinden Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  ortonormal sistemine  $\alpha(s)$  noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı,  $\forall V_i, 1 \leq i \leq r$ , vektörüne de Serret Frenet vektörü denir.

**Tanım 2.12**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin Frenet r-ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  olsun.

$$k_i : I \subset \mathbb{R}, k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle, 1 \leq i \leq r,$$

Şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin **i-yinci** eğrilik fonksiyonu,  $\forall s \in I$  için  $k_i(s) \in \mathbb{R}$  sayısına da  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki **i-yinci** eğriliği denir.

**Teorem 2.1**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin Frenet r-ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  i-yinci eğriliği  $k_i(s)$  olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), 1 \leq i \leq r, \\ V_r'(s) &= -k_{r-1}(s)V_r(s) \end{aligned}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoglu,2000).

**Sonuç 2.1**  $n=3$  özel halinde  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı  $\{T, N, B\}$  ile gösterilir. Burada  $T$  ye teğet vektör,  $N$  ye asli normal vektör ve  $B$  ye de binormal vektör denir.

i)  $s \in I$  yay- parametresi ise

$$\begin{aligned}
T(s) &= \alpha'(s) \\
N(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s) \\
B(s) &= T(s) \times N(s)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ii)  $s \in I$  keyfi parametresi ise

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} \alpha'(s) \\
N(s) &= B(s) \times T(s) \\
B(s) &= \frac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} (\alpha'(s) \times \alpha''(s))
\end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu,2000).

**Sonuç 2.2**  $\alpha$  eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri de sırasıyla  $\kappa$  ve  $\tau$  ile gösterilsin.

i)  $s \in I$  yay- parametresi ise  $\kappa$  ve  $\tau$  eğrilikleri ile Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\
N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\
B'(s) &= -\tau(s)N(s), \\
\kappa(s) &= \|\alpha''(s)\|, \quad \tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ii)  $s \in I$  keyfi parametresi ise  $\kappa$  ve  $\tau$  eğrilikleri ile Frenet formülleri

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \|\alpha'(s)\| \kappa(s)N(s) \\
N'(s) &= \|\alpha'(s)\| (-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \\
B'(s) &= -\|\alpha'(s)\| \tau(s)N(s), \\
\kappa(s) &= \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad \tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(s) \times \alpha''(s) \rangle},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu,2000).

**Tanım 2.13**  $\alpha$  eğrisi üzerinde  $\alpha(s)$  noktası eğriyi çizerken bu noktadaki  $\{T, N, B\}$  Frenet 3-ayaklısı her  $s$  anında (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Darboux (ani dönme) ekseni denir.



Darboux vektörü  $W$  ile gösterilirse bu vektör

$$W = \tau T + \kappa B$$

şeklinde bulunur (Hacısalihoglu,2000).  $W$  ile  $B$  vektörleri arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse  $C$  birim Darboux vektörü

$$C = \frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B = \sin \varphi T + \cos \varphi B$$

(2.5)

şeklinde bulunur (Hacısalihoglu,2000). Burada  $\tau = \|W\| \sin \varphi$ ,  $\kappa = \|W\| \cos \varphi$ .

**Tanım 2.14**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki hız vektörü, sabit bir  $U$  vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye bir eğim çizgisi,  $S_p \{U\}$  ya da eğim eksenini denir (Hacısalihoglu,2000).

**Teorem 2.2**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi bir eğim çizgisi olması için gerek ve yeter şart eğrilikleri oranı sabit olmalıdır (Hacısalihoglu,2000).

**İspat:** " $\Rightarrow$ " Kabul edelim ki  $\alpha$  bir eğim çizgisi olsun. Eğilim çizgisi tanımına göre  $\langle T, U \rangle = \cos \theta$  yazılır. Bu ifadenin türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\langle T', U \rangle = 0 \Rightarrow \kappa \langle N, U \rangle = 0$$

bulunur. Bu durumda  $U$  vektörü rektifiyan düzlemde olur. Buna göre  $U$  vektörü  $U = aT + bB$  şeklinde yazılsın. Bu ifade sırasıyla  $T$  ve  $B$  ile iç çarpılırsa  $\langle U, T \rangle = a = \cos \theta$ ,  $\langle U, B \rangle = b = \sin \theta$  olur. Bu ifadeler  $U = aT + bB$  bağıntısında yerine yazılırsa  $U = \cos \theta T + \sin \theta B$  bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} N \perp U &\Rightarrow \langle N, U \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N', U \rangle + \langle N, U' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \kappa T - \tau B, U \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \kappa \langle T, U \rangle - \tau \langle B, U \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \kappa \cos \theta - \tau \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &\Rightarrow \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit} \end{aligned}$$

elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Kabul edelim ki  $\forall s \in I$  için  $\frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$  olsun. İddia ediliyor ki  $\alpha$  bir eğim çizgisidir.

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit} &\Rightarrow \frac{\kappa}{\tau} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \text{sabit} \\ &\Rightarrow \cos \theta \kappa - \sin \theta \tau = 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi,  $U = \cos \theta T + \sin \theta B$  vektörünü tanımlayalım. Açının sabit olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa,  $U' = \cos \theta T' + \sin \theta B' = (\cos \theta \kappa - \sin \theta \tau) N$  olur ve norm alınırsa,  $\|U'\| = 0 \Rightarrow \|U'\| = \text{sbt.}$  olduğu görülür. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \langle \alpha', U \rangle &= \langle T, U \rangle \\ &= \langle T, \cos \theta T + \sin \theta B \rangle \\ &= \cos \theta \\ &= \text{sabit} \end{aligned}$$

olur ki bu da  $\alpha$  bir eğim çizgisi olması demektir.

**Teorem 2.3**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir doğru olması için gerek ve yeter şart  $\kappa = 0$  olmasıdır (Hacısalihoglu,2000).

**İspat:** (2.3) bağıntısındaki eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} \kappa(s) = 0 &\Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha'(s) = m \\ &\Leftrightarrow \alpha(s) = ms + n, \quad m, n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Teorem 2.4**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart  $\tau = 0$  olmasıdır (Hacısalihoglu,2000).

**İspat:** " $\Rightarrow$ " Kabul edelim ki  $\alpha$  birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda  $\forall s \in I$  için  $\alpha(s)$  noktalarının tümü bir  $E$  düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali  $q$ , düzlem üzerinde herhangi bir nokta  $p$  olsun. Bu durumda,  $\langle \alpha(s) - p, q \rangle = 0$  olur. Bu ifadenin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), q \rangle + \langle \alpha(s) - p, q' \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \alpha'(s), q \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \alpha''(s), q \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $q$  vektörünün  $T$  ve  $N$  ye dik olduğu görülür. Bu durumda  $q$  vektörü  $B$  ye paralel olur. Dolayısıyla,  $B = \pm \frac{q}{\|q\|}$  şeklinde alınabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa  $B' = 0$  bulunur ve  $B' = -\tau N$  eşitliğinden  $\tau = 0$  elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Kabul edelim ki  $\tau = 0$  olsun.  $B' = -\tau N$  ifadesinden  $B' = 0$  veya  $B = sbt$  olur.

$$f : I \rightarrow R, \quad F(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B \rangle$$

fonksiyon tanımlansın.  $s = 0$  ise  $F(0) = 0$ .  $F$  fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} F'(s) &= \langle \alpha'(s), B \rangle + \langle \alpha'(s) - \alpha(0), B' \rangle \\ &= \langle T, B \rangle + \langle T, -\tau N \rangle \\ &= 0 \\ F(s) &= \text{sabit} \end{aligned}$$

olur. Buna göre  $\langle \alpha(s) - \alpha(0), B \rangle = 0$  eşitliği  $\alpha$  eğrisini,  $\alpha(0)$  noktasından geçen ve  $B$  vektörüne dik olan oskulator düzleminde olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

**Tanım 2.15** Diferensiyellenebilir bir  $\alpha$  eğrisi üzerinde eğrinin parametresine bağlı bir  $r$  doğrusunun hareketiyle elde edilen yüzeye regle yüzey denir ve parametrik denklem

$$X(s, v) = \alpha(s) + vr(s) \quad (2.6)$$

şeklinde verilir (Pressley, 2010). Burada  $\alpha$  eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi ve  $r$  doğrusu da yüzeyin doğrultmanıdır.

Özel olarak  $r$  doğrusu yerine eğrinin Frenet vektörleri alınırsa elde edilen regle yüzeylerin denklemleri

$$\begin{aligned} X_T(s, v) &= \alpha(s) + vT(s), \\ X_N(s, v) &= \alpha(s) + vN(s), \\ X_B(s, v) &= \alpha(s) + vB(s), \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (2.1) ifadesinde verilen  $X(s, v)$  yüzeyinin normali, birinci ve ikinci temel formları ile Gaussian ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$N_X = \frac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|}, \quad (2.7)$$

$$I = E ds^2 + 2F ds dv + G dv^2, \quad II = l ds^2 + 2m ds dv + n dv^2,$$

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{En - 2Fm + Gl}{2(EG - F^2)} \quad (2.8)$$

şeklinde verilir. Burada birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E = \langle X_s, X_s \rangle, \quad F = \langle X_s, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle, \quad (2.9)$$

$$l = \langle X_{ss}, N_X \rangle, \quad m = \langle X_{sv}, N_X \rangle, \quad n = \langle X_{vv}, N_X \rangle \quad (2.10)$$

bağıntılarıyla verilir (Pressley,2010).

**Tanım 2.16** Herhangi bir regle yüzeyin komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına yüzeyin striksiyon noktası ve bu noktaların geometrik yerine de striksiyon eğrisi denir.

Bir  $X(s, v)$  yüzeyinin striksiyon eğrisinin denklemi

$$\beta(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha', r' \rangle}{\|r'\|^2} r \quad (2.11)$$

bağıntısıyla bulunur (Hacısalihoglu,2000). Striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınırsa yüzeyin denklemi

$$X(s, v) = \beta(s) + vr(s) \quad (2.12)$$

şeklinde yazılır.

### 3.MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1 İnvölüt Eğrisi

**Tanım 3.1** Birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi verilsin.  $\forall s \in I$  için  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki teğet vektörü  $\alpha^*(s)$  noktasından geçiyor ve bu noktadaki teğet vektöre dik oluyorsa,  $\alpha^*$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin involütü denir.  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörü  $T(s)$  ve  $\alpha^*$  involüt eğrisinin teğet vektörü  $T^*(s)$  ile gösterilirse

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$$

olur (Sabuncuoğlu,2016).

**Teorem 3.1**  $\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun. İnvölüt eğrisinin denklemi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (c-s)T(s) \quad (3.1)$$

bağıntısıyla verilir (Sabuncuoğlu,2016).

**İspat:** İnvölüt eğrisi tanımına göre  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha^* = \alpha + \lambda T$  şeklinde yazılabilir. Buradan türev alınır ve Frenet formülleri de kullanılırsa

$$(\alpha^*)' = (1 + \lambda')T + \lambda \kappa N$$

bulunur.  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin bir involütü olduğundan  $\langle (\alpha^*)', T \rangle = 0$  olur. Burada

$(\alpha^*)'$  yerine yukarıdaki eşitlik yazılırsa  $\lambda'(s) + 1 = 0$  veya  $\lambda(s) = -s + c, c \in \mathbb{R}$  elde edilir.

**Teorem 3.2**  $\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha(s)$  ile  $\alpha^*(s)$  noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \alpha^*(s)) = |c - s|, \quad c = sbt,$$

bağıntısıyla verilir (Sabuncuoğlu,2016).

**İspat:** İnvölüt eğrisinin (3.1) de verilen ifadesi kullanılırsa

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (c-s)T(s) \Rightarrow \alpha^*(s) - \alpha(s) = (c-s)T(s)$$

$$\Rightarrow \|\alpha^*(s) - \alpha(s)\| = \|c-s\|$$

$$\Rightarrow d(\alpha(s), \alpha^*(s)) = |c-s|$$

bulunur.

**Teorem 3.3**  $\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun. Bu eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  ile gösterilirse bu çatılar arasında

$$\begin{aligned} T^* &= N \\ N^* &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B \\ B^* &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}B \end{aligned} \quad (3.2)$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu,2016).

**İspat:**  $\alpha^*$  involüt eğrisinin (3.1) de verilen ifadesinden türevler alınır

$$(\alpha^*)' = \lambda\kappa N, \quad (3.3)$$

$$(\alpha^*)'' = -\lambda\kappa^2 T + (\lambda\kappa)' N + \lambda\kappa\tau B \quad (3.4)$$

$$(\alpha^*)''' = -\left((\lambda\kappa^2)' + \kappa(\lambda\kappa)'\right)T + \left((\lambda\kappa)'' - \lambda\kappa^4 - \lambda\kappa\tau^2\right)N + \left(\tau(\lambda\kappa)' + (\lambda\kappa\tau)'\right)B \quad (3.5)$$

olur.  $(\alpha^*)'$  ile  $(\alpha^*)''$  vektörel çarpılır ve sonra da gerekli normlar hesaplanırsa

$$(\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' = \lambda^2\kappa^3 B + \lambda^2\kappa^2\tau T = \lambda^2\kappa^2(\tau T + \kappa B) \quad (3.6)$$

$$\left\| (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' \right\| = \lambda^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad (3.7)$$

$$\left\| (\alpha^*)' \right\| = |\lambda \kappa|$$

bulunur. (2.2) bağıntısında (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) ve (3.7) ifadeleri yerine yazılırsa involüt eğrisinin Frenet vektörleri hesaplanmış olur.

**Teorem 3.4**  $\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun.  $\alpha$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$ ,  $\alpha^*$  eğrisinin eğrilikleri de  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  ile gösterilirse bu eğrilikler arasında

$$\kappa^* = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{(c-s)\kappa}, \quad \tau^* = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{(c-s)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)} \quad (3.8)$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu,2016).

**İspat:** (2.4) bağıntısında (3.6) ve (3.7) ifadeleri kullanılırsa involüt eğrisinin  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  eğrilikleri sırasıyla

$$\kappa^* = \frac{\left\| (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' \right\|}{\left\| (\alpha^*)' \right\|^3} = \frac{(c-s)^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{|(c-s)\kappa|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{|(c-s)\kappa|},$$

$$\tau^* = \frac{\left\langle (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'', (\alpha^*)''' \right\rangle}{\left\| (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' \right\|^2} = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{(c-s)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

şeklinde bulunur.

**Teorem 3.5**  $\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun.  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet çatıları arasında

$$\begin{aligned} T^* &= N \\ N^* &= -\cos \varphi T + \sin \varphi B \\ B^* &= \sin \varphi T + \cos \varphi B \end{aligned} \quad (3.9)$$

bağıntısı vardır (Bilici,2002).

**İspat:** (2.5) bağıntısından  $\tau = \|W\| \sin \varphi$ ,  $\kappa = \|W\| \cos \varphi$  yazılır. Bu ifadeler (3.2) de yerine yazılırsa ispat gösterilmiş olur.

**Teorem 3.6**  $\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun.  $W$  ve  $W^*$  Darboux vektörleri arasında

$$W^* = \frac{1}{\kappa(c-s)}(W + \varphi N)$$

bağıntısı vardır (Bilici,1999).

**İspat:** Invölüt eğrisinin  $W^*$  Darboux vektörü  $W^* = \tau^* T^* + \kappa^* B^*$  şeklinde yazılır. Burada  $T^*$ ,  $B^*$ ,  $\kappa^*$ ,  $\tau^*$  yerine (3.8) ve (3.9) yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa(c-s)}(\sin \varphi T + \cos \varphi B) + \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)}N \\ &= \frac{\tau}{\kappa(c-s)}T + \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)\kappa^2}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)}N + \frac{\kappa}{\kappa(c-s)}B \\ &= \frac{1}{\kappa(c-s)}(\tau T + \kappa B + \varphi N) \\ &= \frac{1}{\kappa(c-s)}(W + \varphi N) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.7**  $\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun.  $C$  ve  $C^*$  birim Darboux vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır

$$C^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}}N + \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}}C \quad (3.10)$$

bağıntısı vardır (Bilici,1999).

**İspat:** (2.5) bağıntısından involüt eğrisinin birim Darboux vektörü  $C^* = \sin \varphi^* T^* + \cos \varphi^* B^*$  şeklinde yazılır, burada  $\kappa^* = \|W^*\| \cos \varphi^*$ ,  $\tau^* = \|W^*\| \sin \varphi^*$  dır.  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  yerine (3.8) den karşılıkları yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\sin \varphi^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}}, \quad \cos \varphi^* = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}}$$

olur.  $\sin \varphi^*$ ,  $\cos \varphi^*$  ve (3.9) ifadeleri  $C^*$  birim Darboux vektöründe yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa ispat tamamlanır.



**Örnek 3.1:**  $\alpha(s) = \frac{3}{4} \left( \cos(s) + \frac{\cos(3s)}{9}, \sin(s) + \frac{\sin(3s)}{9}, \frac{-2\cos(s)}{\sqrt{3}} \right)$  eğrisinin

Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$T = \left( \frac{-1}{4} (3\sin(s) + \sin(3s)), \cos(s)^3, \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin(s) \right),$$

$$N = \left( -\frac{\sqrt{3} \cos(2s)}{2}, -\frac{\sqrt{3} \sin(2s)}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

$$B = \left( \frac{3\cos(s) - \cos(3s)}{4}, \sin(s)^3, \frac{\sqrt{3} \cos(s)}{2} \right),$$

$$\kappa = \sqrt{3} \cos(s), \tau = \sqrt{3} \sin(s),$$

$\alpha^*(s)$  involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla  $c=0$  için

$$\alpha^*(s) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12} (9\cos(s)) + \cos(3s) + 3s(3\sin(s) + \sin(3s)), \\ \frac{1}{12} (-12s \cos(s)^3 + 9\sin(s) + \sin(3s)), \\ -\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos(s) + s \sin(s) \end{array} \right),$$

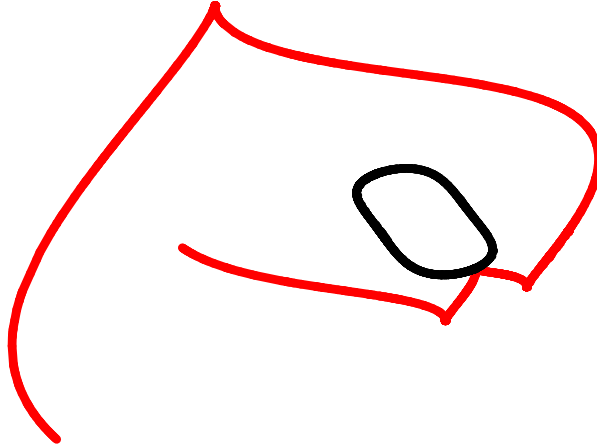
$$T^* = \left( -\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos(2s), -\sqrt{3} \cos(s) \sin(s), \frac{1}{2} \right),$$

$$N^* = (\sin(2s), -\cos(2s), 0),$$

$$B^* = \left( \frac{1}{2} \cos(2s), \frac{1}{2} \sin(2s), \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\kappa^* = \frac{\sec(s)}{|-s|}, \tau^* = -\frac{\sec(s)}{\sqrt{3}s}$$

şeklinde bulunur. (Şekil 3.1)



**Şekil 3.1**  $s \in [-\pi, 2\pi]$  için  $\alpha(s)$  (siyah) uzay eğrisi ve involüt eğri  $\alpha^*(s)$  (kırmızı) grafiğidir.

### 3.2 Öklit Uzayında Sannia Çatılı Regle Yüzeyler

Bu bölümde bir eğrinin Frenet vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin striksiyon eğrileri boyunca Sannia çatılarının meydana getirdiği regle yüzeyler incelenmiştir. Elde edilen her bir regle yüzeyin Sannia çatıları ve Frenet çatıları arasındaki bağıntılar, birinci ve ikinci temel formlar ile Gauss ve ortama eğrilikleri verilmiştir.

**Tanım3.2**  $X(s, v) = \beta(s) + v\alpha(s)$  regle yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca

$$e_1 = \alpha, \quad e_2 = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad e_3 = e_1 \times e_2 \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlı birim vektörlerinin oluşturduğu  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ortonormal sisteme **Sannia çatısı** denir (Pottmann,2001).

$X(s, v)$ , regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin eğriliği  $k_1$  ve torsiyonu  $k_2$  ile gösterilirse Sannia çatısına ait türev formülleri

$$e_1' = k_1 e_2, \quad e_2' = -k_1 e_1 + k_2 e_3, \quad e_3' = -k_2 e_2$$

şeklinde verilir (Pottmann, 2001).

### 3.2.1 Tanjant Regle Yüzey İle İlişkilendirilmiş Sannia Çatılı Regle Yüzeyler

Bu kısımda  $\alpha(s)$  eğrisinin tanjant vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin striksiyon eğrisi boyunca Sannia çatısının oluşturduğu regle yüzeyler tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir.

Konuyla ilgili temel tanım ve teoremler Şenyurt ve Eren ‘in ‘‘On Ruled Surfaces with a Sannia Frame in Euclidean 3-space’’ isimli çalışmadan alınmıştır (Şenyurt ve Eren, 2022).

**Teorem 3.8**  $X_T$ , tanjant regle yüzeyinin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı Sannia çatısı  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ile gösterilsin. Sannia çatısı ile Frenet çatısı arasında

$$e_1 = T, e_2 = N, e_3 = B \quad (3.12)$$

bağıntısı vardır (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $X_T$ , tanjant regle yüzeyin striksiyon eğrisi  $\beta$  olsun.  $X_T$  yüzeyinin dayanak eğrisi olarak striksiyon eğrisi alınabilir. (3.11) denkleminde Sannia çatısı ile Frenet çatısı denk olur.

**Tanım 3.3**  $X_T$ , tanjant regle yüzeyinin  $\beta$  striksiyon eğrisi boyunca  $e_1$  vektörünün oluşturduğu yüzeyin parametrik denklemi

$$\Phi_1(s, v) = \beta(s) + ve_1(s) \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 3.9**  $\Phi_1(s, v)$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Phi_1}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Phi_1} = -B$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:** Striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olduğundan regle yüzeyin denklemi  $\Phi_1(s, v) = \alpha(s) + vT(s)$  şeklinde yazılır. Kısmi türevler alınır

$$\Phi_{1s} = T + v\kappa N,$$

$$\Phi_{1v} = T$$

bulunur. (2.7) bağıntısından yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 3.10**  $\Phi_1(s, v)$  regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
I_{\Phi_1} &= (1 + v^2 \kappa^2) ds^2 + 2dsdv + dv^2, \\
II_{\Phi_1} &= -v\kappa\tau ds^2, \\
K_{\Phi_1} &= 0, \\
H_{\Phi_1} &= \frac{\tau}{2v\kappa}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Phi_1(s, v)$  yüzeyinin parametrelere göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
\Phi_{1s} &= T + v\kappa N, \\
\Phi_{1v} &= T, \\
\Phi_{1ss} &= \kappa N + v(-\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B), \\
\Phi_{1sv} &= \kappa N, \\
\Phi_{1vv} &= 0
\end{aligned}$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E_{\Phi_1} &= \langle \Phi_{1s}, \Phi_{1s} \rangle = 1 + v^2 \kappa^2, \\
F_{\Phi_1} &= \langle \Phi_{1s}, \Phi_{1v} \rangle = 1, \\
G_{\Phi_1} &= \langle \Phi_{1v}, \Phi_{1v} \rangle = 1, \\
l_{\Phi_1} &= \langle \Phi_{1ss}, N_{\Phi_1} \rangle = -v\kappa\tau, \\
m_{\Phi_1} &= \langle \Phi_{1sv}, N_{\Phi_1} \rangle = 0, \\
n_{\Phi_1} &= \langle \Phi_{1vv}, N_{\Phi_1} \rangle = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8), (2.9) ve (2.10) bağıntılarında yerine yazılırsa temel formlar, Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

**Sonuç 3.1**  $\Phi_1(s, v)$  regle yüzeyi açılabilir bir yüzeydir.

**Sonuç 3.2**  $X_T$ , tanjant regle yüzeyinin striksiyon eğrisi düzlemsel yanı  $\tau = 0$  ise  $\Phi_1(s, v)$  Sannia regle yüzeyi açılabilir minimal yüzeylerdir.

**Tanım 3.4**  $X_T$ , tanjant regle yüzeyinin  $\beta$  striksiyon eğrisi boyunca  $e_2$  vektörün oluşturduğu regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\Phi_2(s, v) = \beta(s) + ve_2(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 3.11**  $\Phi_2(s, v)$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Phi_2}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Phi_2} = \frac{-v\tau T + (1 - v\kappa)B}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2}}$$

bağıntısıyla verilir. (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:** Striksiyon eğrisi dayanak eğrisi ve ana doğrusu  $N_{\Phi_2}$  olduğundan  $\Phi_2$  yüzeyi

$\Phi_2(s, v) = \alpha(s) + vN(s)$  şeklinde yazılır. Kısmi türevler alınırsa

$$\Phi_{2s} = (1 - v\kappa)T + v\tau B,$$

$$\Phi_{2v} = N$$

bulunur. Vektörel çarpım yapılır ve normu hesaplanırsa (2.7) bağıntısından yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 3.12**  $\Phi_2(s, v)$  regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$I_{\Phi_2} = \left( (1 - v\kappa)^2 + (v\tau)^2 \right) ds^2 + dv^2,$$

$$II_{\Phi_2} = \frac{v^2(\tau\kappa' - \tau'\kappa) + v\tau'}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2}} ds^2 + \frac{2\tau}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2}} dsdv,$$

$$K_{\Phi_2} = -\frac{\tau^2}{\left( v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2 \right)^2},$$

$$H_{\Phi_2} = \frac{v^2(\tau\kappa' - \tau'\kappa) + v\tau'}{2\left( v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

bağıntısıyla verilir. (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Phi_2(s, v)$  regle yüzeyinin parametreye göre türevleri alınırsa

$$\Phi_{2s} = (1 - v\kappa)T + v\tau B,$$

$$\Phi_{2v} = N,$$

$$\Phi_{2ss} = \kappa N + v\left(-\kappa'T - (\kappa^2 + \tau^2)N + \tau'B\right),$$

$$\Phi_{2sv} = -\kappa T + \tau B,$$

$$\Phi_{2vv} = 0$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E_{\Phi_2} &= \langle \Phi_{2s}, \Phi_{2s} \rangle = (1 - v\kappa)^2 + (v\tau)^2, \\
F_{\Phi_2} &= \langle \Phi_{2s}, \Phi_{2v} \rangle = 0, \\
G_{\Phi_2} &= \langle \Phi_{2v}, \Phi_{2v} \rangle = 1, \\
l_{\Phi_2} &= \langle \Phi_{2ss}, N_{\Phi_2} \rangle = \frac{v^2(\tau\kappa' - \tau'\kappa) + v\tau'}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2}}, \\
m_{\Phi_2} &= \langle \Phi_{2sv}, N_{\Phi_2} \rangle = \frac{\tau}{\sqrt{v^2\tau^2 + (1 - v\kappa)^2}}, \\
n_{\Phi_2} &= \langle \Phi_{2vv}, N_{\Phi_2} \rangle = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8), (2.9) ve (2.10) bağıntılarında yerine yazılırsa temel formlar, Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

**Sonuç 3.3**  $X_T$ , tanjant regle yüzeyinin striksiyon eğrisi düzlemsel ise ve  $\Phi_2(s, v)$  Sannia regle yüzeyleri açılabilir minimal yüzeylerdir.  $K_{e_2} < 0$  olduğundan yüzeyin bütün noktaları hiperbolik noktadır.

**Tanım 3.5**  $X_T$ , tanjant regle yüzeyinin  $\beta$  striksiyon eğrisi boyunca  $e_3$  vektörün oluşturduğu regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\Phi_3(s, v) = \beta(s) + ve_3(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 3.13**  $\Phi_3(s, v)$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Phi_3}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Phi_3}(s, v) = -\frac{v\tau T + N}{\sqrt{1 + (v\tau)^2}}$$

bağıntısıyla verilir (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:** (2.11) bağıntısından striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olur. Bu durumda  $\Phi_3(s, v)$  yüzeyinin denklemi  $\Phi_3(s, v) = \alpha(s) + vB(s)$  şeklinde yazılır. Kısmi türevler alınırsa  $\Phi_{3s} = T - v\tau N$ ,  $\Phi_{3v} = B$  bulunur. (2.7) bağıntısından yüzeyin normali hesaplanmış olur.

**Teorem 3.14**  $\Phi_3(s, v)$  regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} I_{\Phi_3} &= (1 + v^2 \kappa^2) ds^2 + dv^2, \\ II_{\Phi_3} &= -\frac{\kappa(1 + v^2 \tau^2) - v\tau'}{\sqrt{1 + (v\tau)^2}} ds^2 + \frac{2\tau}{\sqrt{1 + (v\tau)^2}} dsdv, \\ K_{\Phi_3} &= -\frac{\tau^2}{(1 + v^2 \kappa^2)^2}, \\ H_{\Phi_3} &= -\frac{\kappa(1 + v^2 \tau^2) - v\tau'}{2(1 + v^2 \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

bağıntılarıyla verilir (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Phi_3(s, v)$  regle yüzeyinin parametreye göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \Phi_{3s} &= T - v\tau N, \\ \Phi_{3v} &= B \\ \Phi_{3ss} &= v\tau\kappa T + (\kappa - v\tau')N - v\tau^2 B, \\ \Phi_{3sv} &= -\tau N, \\ \Phi_{3vv} &= 0 \end{aligned}$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

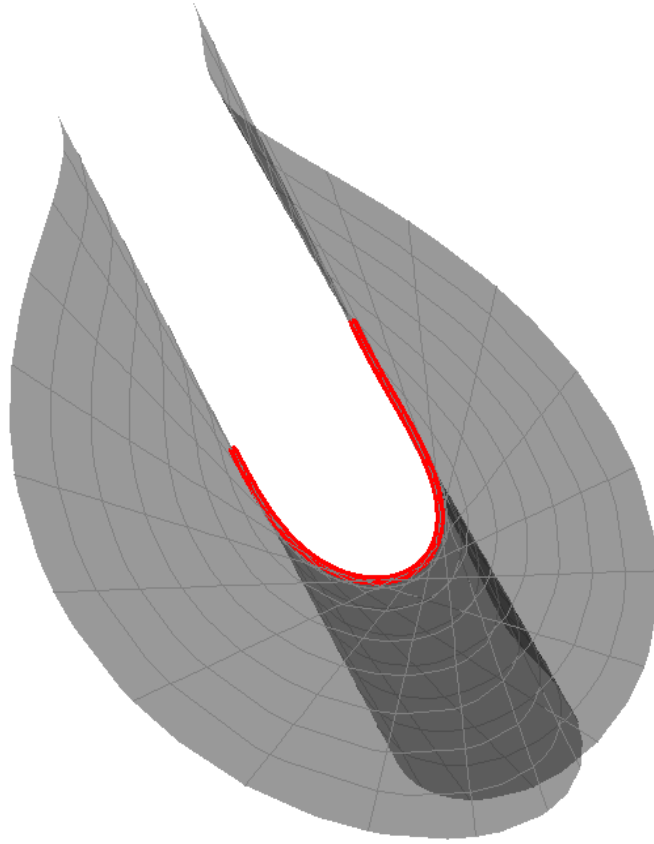
$$\begin{aligned} E_{\Phi_3} &= \langle \Phi_{3s}, \Phi_{3s} \rangle = 1 + v^2 \tau^2, \\ F_{\Phi_3} &= \langle \Phi_{3s}, \Phi_{3v} \rangle = 0, \\ G_{\Phi_3} &= \langle \Phi_{3v}, \Phi_{3v} \rangle = 1, \\ l_{\Phi_3} &= \langle \Phi_{3ss}, N_{\Phi_3} \rangle = -\frac{\kappa(1 + v^2 \tau^2) - v\tau'}{\sqrt{1 + (v\tau)^2}}, \\ m_{\Phi_3} &= \langle \Phi_{3sv}, N_{\Phi_3} \rangle = \frac{\tau}{\sqrt{1 + (v\tau)^2}}, \\ n_{\Phi_3} &= \langle \Phi_{3vv}, N_{\Phi_3} \rangle = 0 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8), (2.9) ve (2.10) bağıntılarında yerine yazılırsa temel formlar, Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

**Örnek 3.2:** Örnek 3.1 de verilen  $\alpha(s)$  eğrisi dayanak eğrisi ve teğet vektörü doğrultman olarak alındığında  $X_T(s, v)$  regle yüzeyinin denklemi

$$X_T(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9\cos(s) + \cos(3s) - 3v(3\sin(s) + \sin(3s))), \\ \frac{1}{12}(12v\cos(s)^3 + 9\sin(s) + \sin(3s)), \frac{\sqrt{3}}{2}(-\cos(s) + v\sin(s)) \end{array} \right)$$

şeklinde bulunur. Bu yüzeye ait grafik Şekil 3.2 de verilmiştir.

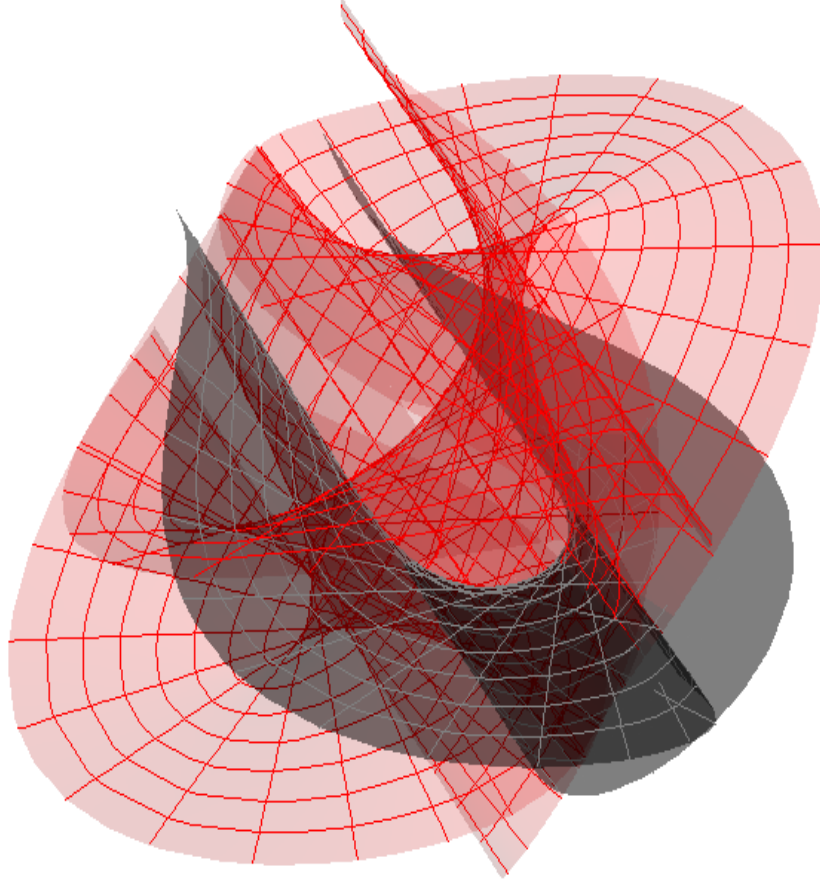


**Şekil 3.2**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  değerleri için  $X_T$  yüzeyinin grafiği.

$X_T$ , tanjant yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca  $e_1, e_2, e_3$  Sannia vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin denklemleri ve grafikleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

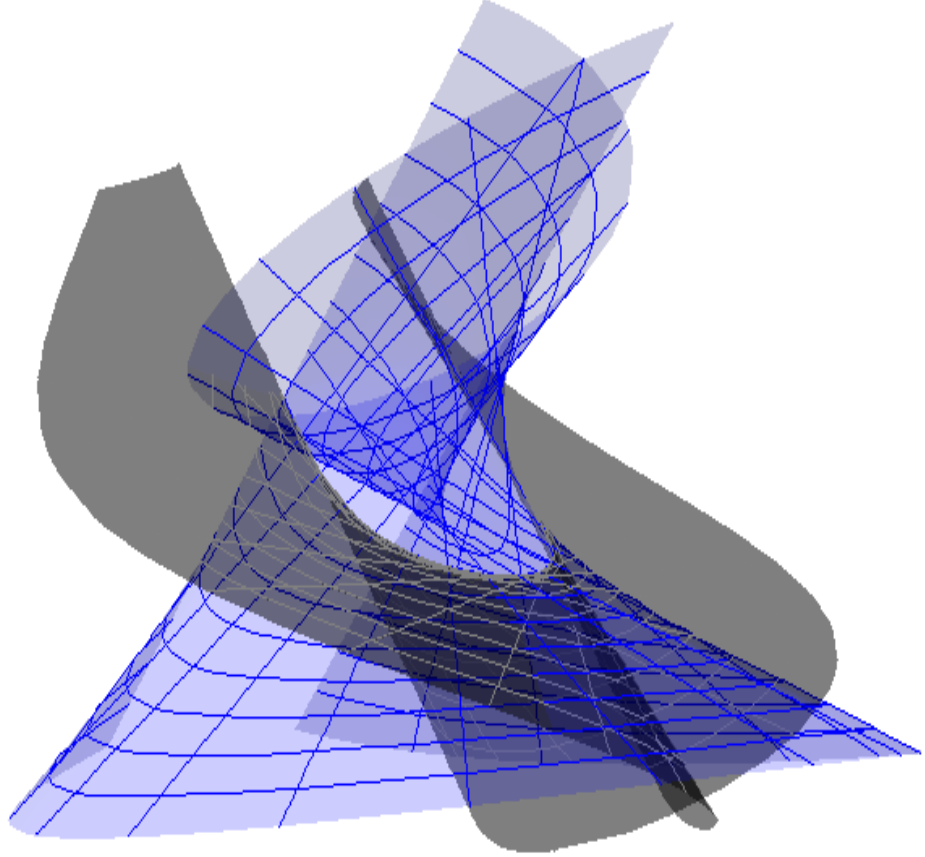


$$\Phi_1(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9\cos(s) + \cos(3s) - 3v(3\sin(s) + \sin(3s))), \\ v\cos(s)^3 + \frac{1}{12}(9\sin(s) + \sin(3s)), \frac{\sqrt{3}}{2}(-\cos(s) + v\sin(s)) \end{array} \right) \quad \text{yüzeyi}$$



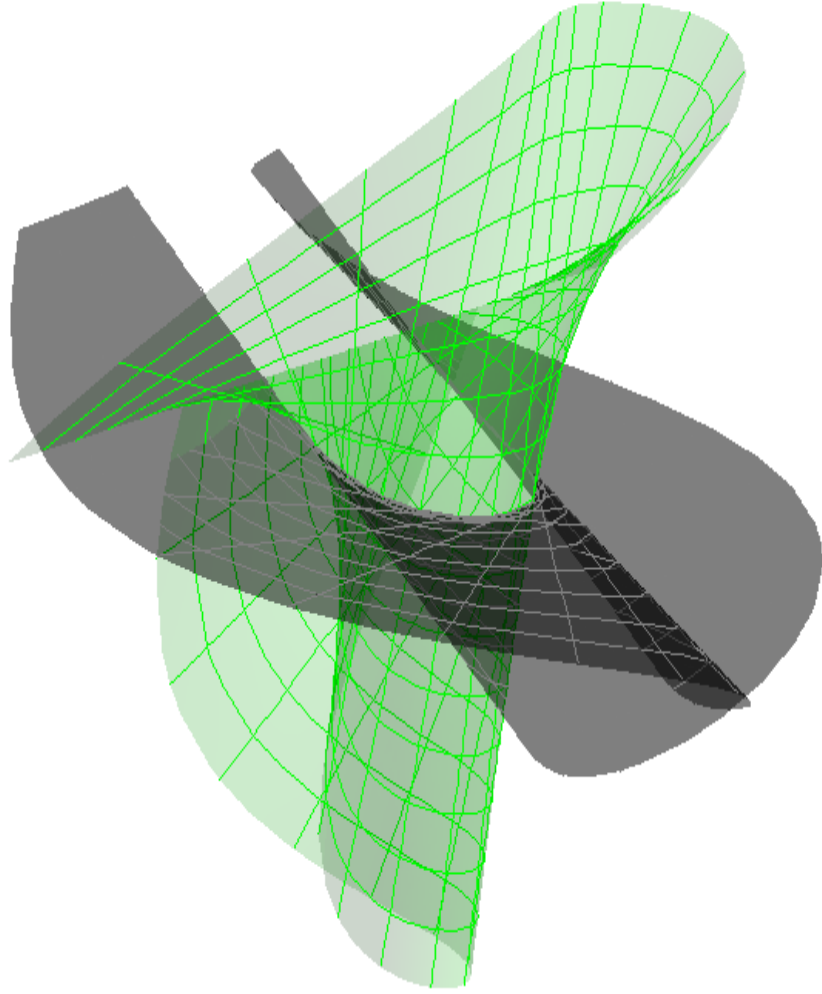
**Şekil 3.3**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Phi_1$  (kırmızı) ve  $X_T$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

$$\Phi_2(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9\cos(s) - 6\sqrt{3}v\cos(2s) + \cos(3s)), \\ \frac{1}{6}(5 - 6\sqrt{3}v\cos(s) + \cos(2s))\sin(s), \frac{1}{2}(v - \sqrt{3}\cos(s)) \end{array} \right) \quad \text{yüzeyi}$$



**Şekil 3.4**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Phi_2$  (mavi) ve  $X_T$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

$$\Phi_3(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{6}(-3v \cos(s)(-2 + \cos(2s)) + \cos(s)(4 + \cos(2s))), \\ \frac{1}{12}(9 \sin(s) + \sin(3s)) + v \cos(s) \sin(s)^2 \tan(s), -\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(s) - v \cos(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 3.5**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Phi_3$  (yeşil) ve  $X_T$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

### 3.2.2 Normal Regle Yüzeyi ile İlişkilendirilmiş Sannia Çatılı Regle Yüzeyler

Bu kısımda  $\alpha(s)$  eğrisinin asli normal vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin striksiyon eğrisi boyunca Sannia çatısının oluşturduğu regle yüzeyler tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir

**Teorem 3.15**  $X_N$ , asli normal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı Sannia çatısı  $\{f_1, f_2, f_3\}$  ile gösterilsin. Sannia çatısı ile Frenet çatısı arasında

$$\begin{aligned} f_1 &= N, \\ f_2 &= \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B, \\ f_3 &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \end{aligned} \quad (3.11)$$

bağıntısı vardır (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:** (2.11) denkleminde asli normal regle yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} N \quad (3.12)$$

şeklinde bulunur.  $X_N(s, v)$  regle yüzey asli normal vektörün hareketiyle oluştuğundan  $f_1 = N$  olur. (2.1) denkleminde  $f_2$  ve  $f_3$  vektörleri hesaplanmış olur.

**Tanım 3.6**  $X_N$ , asli normal regle yüzeyin  $\beta$  striksiyon eğrisi boyunca  $f_1$  vektörünün oluşturduğu regle yüzey

$$\Gamma_1(s, v) = \beta(s) + vf_1(s) \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 3.16**  $\Gamma_1(s, v)$  yüzeyinin normali  $N_{\Gamma_1}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Gamma_1}(s, v) = \frac{-\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_1^2}} T + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_1^2}} B$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $\lambda_1$  ve  $\lambda_3$

$$\lambda_1 = \frac{\tau^2}{\kappa^2 + \tau^2} - v\kappa, \quad \lambda_3 = \tau \left( \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} + v \right)$$

şeklinde birer katsayıdır. (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Gamma_1$  yüzeyinde (3.11) ve (3.12) bağıntısı dikkate alınırsa

$\Gamma_1(s, v) = \alpha(s) + \left( v + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right) N$  yazılır. Buradan türev alınırsa

$$\Gamma_{1s} = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B, \quad \Gamma_{1v} = N$$

olur. Burada  $\lambda_2 = \left( \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right)'$  şeklinde bir katsayıdır. (2.7) bağıntısından yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 3.17**  $\Gamma_1$  yüzeyinin Gaussian ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\Gamma_1} = \frac{-\tau^2}{(\lambda_3^2 + \lambda_1^2)}, \quad H_{\Gamma_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_3' - \lambda_2 \tau - \lambda_1' \lambda_3}{2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde verilir (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Gamma_1$  regle yüzeyinin ikinci türevleri hesaplanırsa

$$\Gamma_{1ss} = (\lambda_1' - \lambda_2 \kappa) T + (\lambda_2' + \lambda_1 \kappa - \lambda_3 \tau) N + (\lambda_3' + \lambda_2 \tau) B,$$

$$\Gamma_{1sv} = -\kappa T + \tau B, \quad \Gamma_{1vv} = 0$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları sırasıyla

$$E_{\Gamma_1} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$F_{\Gamma_1} = \lambda_2,$$

$$G_{\Gamma_1} = 1,$$

$$l_{\Gamma_1} = \frac{\lambda_3 (-\lambda_1' + \lambda_2 \kappa) + \lambda_1 (\lambda_3' + \lambda_2 \tau)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_3^2}},$$

$$m_{\Gamma_1} = \tau,$$

$$n_{\Gamma_1} = 0$$

olur. (2.8) bağıntısından Gaussian ve ortalama eğrilikler bulunur.

**Sonuç 3.4**  $X_N$  regle yüzeyinin  $\alpha$  dayanak eğrisi düzlemsel ise  $\Gamma_1$  Sannia regle yüzeyi açılabilir minimal yüzeydir.

**Tanım 3.7**  $X_N$  normal regle yüzeyinin  $\beta$  striksiyon eğrisi boyunca  $f_2$  vektörünün oluşturduğu regle yüzey

$$\Gamma_2(s, v) = \beta(s) + v f_2(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 3.18**  $\Gamma_2$  yüzeyinin normali  $N_{\Gamma_2}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Gamma_2} = \frac{\eta_2 \tau T - (\eta_1 \tau + \eta_3 \kappa) N + \eta_2 \kappa B}{\sqrt{\eta_2^2 (\kappa^2 + \tau^2) + (\eta_1 \tau + \eta_3 \kappa)^2}}$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $\eta_1, \eta_2$  ve  $\eta_3$

$$\eta_1 = \frac{\tau^2}{\kappa^2 + \tau^2} - v \left( \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)', \eta_2 = \left( \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right)' - v \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \eta_3 = \frac{\kappa \tau}{\kappa^2 + \tau^2} + v \left( \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)'$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Gamma_2$  yüzeyinde (3.11) ve (3.12) bağıntısı dikkate alınırsa  $\Gamma_2$  yüzeyi

$$\Gamma_2(s, v) = \alpha(s) + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} N + v \left( \frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \right)$$

şeklinde olur. Parametrelere göre türevler hesaplanırsa

$$\Gamma_{2s} = \eta_1 T + \eta_2 N + \eta_3 B,$$

$$\Gamma_{2v} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

bulunur. Bu ifadeler (2.7) bağıntısında yerine yazılırsa yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 3.19**  $\Gamma_2$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\Gamma_2} = -\frac{(\kappa^2 + \tau^2)((\eta_3\kappa + \eta_1\tau)\eta'_2 - \eta_2(\eta'_1\tau + \eta'_3\kappa))^2}{((\eta_3\kappa + \eta_1\tau)^2 + \eta_2^2(\kappa^2 + \tau^2))^2},$$

$$H_{\Gamma_2} = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\tau(\eta_3^2 - \eta_1^2) - \eta_1\eta_3(\kappa^2 - \tau^2) - \eta'_2(\eta_3\kappa + \eta_1\tau) + \eta_2(\tau\eta'_1 + \kappa\eta'_3)) - \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}(2(\eta_1\kappa - \eta_3\tau)((\eta_3\kappa + \eta_1\tau)\eta'_2 - \eta_2(\tau\eta'_1 + \kappa\eta'_3)))}{2((\eta_1\tau + \eta_3\kappa)^2 + \eta_2^2(\kappa^2 + \tau^2))^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde verilir (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Gamma_2$  yüzeyinin parametrelere göre ikinci türevleri alırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_{2ss} &= (\eta'_1 - \eta_2\kappa)T + (\eta'_2 + \eta_1\kappa - \eta_3\tau)N + (\eta'_3 + \eta_2\tau)B, \\ \Gamma_{2sv} &= \eta'_1T + \eta'_2N + \eta'_3B, \\ \Gamma_{2vv} &= 0\end{aligned}$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}E_{\Gamma_2} &= \langle \Gamma_{2s}, \Gamma_{2s} \rangle = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2, \\ F_{\Gamma_2} &= \langle \Gamma_{2s}, \Gamma_{2v} \rangle = \frac{\eta_3\tau - \eta_1\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ G_{\Gamma_2} &= \langle \Gamma_{2v}, \Gamma_{2v} \rangle = 1, \\ l_{\Gamma_2} &= \langle \Gamma_{2ss}, N_{\Gamma_2} \rangle = \frac{\eta_2\tau(\eta'_1 - \eta_2\kappa) - (\eta_1\tau + \eta_3\kappa)(\eta'_2 + \eta_1\kappa - \eta_3\tau) + \eta_2\kappa(\eta'_3 + \eta_2\tau)}{\sqrt{\eta_2^2(\kappa^2 + \tau^2) + (\eta_1\tau + \eta_3\kappa)^2}}, \\ m_{\Gamma_2} &= \langle \Gamma_{2sv}, N_{\Gamma_2} \rangle = \frac{\eta_2(\eta'_3\kappa + \eta'_1\tau) - \eta'_2(\eta_3\kappa + \eta_1\tau)}{\sqrt{\eta_2^2(\kappa^2 + \tau^2) + (\eta_1\tau + \eta_3\kappa)^2}}, \\ n_{\Gamma_2} &= \langle \Gamma_{2vv}, N_{\Gamma_2} \rangle = 0\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

### Sonuç 3.5

1-)  $\Gamma_2$  regle yüzeyi açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$(\kappa^2 + \tau^2)((\eta_3\kappa + \eta_1\tau)\eta_2' - \eta_2(\eta_1'\tau + \eta_3'\kappa))^2 = 0$$

bağıntısının var olmasıdır.

2-)  $\Gamma_2$  regle yüzeyi minimaldir gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \left( \kappa\tau(\eta_3^2 - \eta_1^2) - \eta_1\eta_3(\kappa^2 - \tau^2) - \eta_2'(\eta_3\kappa + \eta_1\tau) + \eta_2(\tau\eta_1' + \kappa\eta_3') \right) \\ & - \left( 2(\eta_1\kappa - \eta_3\tau)((\eta_3\kappa + \eta_1\tau)\eta_2' - \eta_2(\tau\eta_1' + \kappa\eta_3')) \right) = 0 \end{aligned}$$

bağıntısının geçerli olmasıdır.

**Tanım 3.8**  $X_N$  normal regle yüzeyinin  $\beta$  striksiyon eğrisi boyunca  $f_3$  vektörünün oluşturduğu regle yüzey

$$\Gamma_3(s, v) = \beta(s) + v f_3(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 3.20**  $\Gamma_3$  yüzeyinin normali  $N_{\Gamma_3}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Gamma_3} = \frac{\mu_2\kappa T + (\mu_3\tau - \mu_1\kappa)N - \mu_2\tau B}{\sqrt{\mu_2^2(\kappa^2 + \tau^2) + (\mu_3\tau - \mu_1\kappa)^2}}$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $\mu_1, \mu_2$  ve  $\mu_3$

$$\mu_1 = \frac{\tau^2}{\kappa^2 + \tau^2} + v \left( \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)', \mu_2 = \left( \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \right)', \mu_3 = \frac{\kappa\tau}{\kappa^2 + \tau^2} + v \left( \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right)'$$

şeklinde birer katsayıdır (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Gamma_3$  yüzeyinde (3.11) ve (3.12) bağıntısı dikkate alınırsa

$$\Gamma_3(s, v) = \alpha(s) + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} N + v \left( \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \right)$$

yazılır. Parametrelere göre türevler hesaplanırsa

$$\Gamma_{3s} = \mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B,$$

$$\Gamma_{3v} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$



bulunur. Bu ifadeler (2.7) bağıntısında yerine yazılırsa yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 3.21**  $\Gamma_3$  regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\Gamma_3} = -\frac{(\kappa^2 + \tau^2)(-\mu_1\mu'_2\kappa + \mu_3\mu'_2\tau + \kappa\mu_2\mu'_1 - \tau\mu_2\mu'_3)^2}{(\mu_3\tau - \mu_1\kappa)^2 + \mu_2^2(\kappa^2 + \tau^2)},$$

$$H_{\Gamma_3} = \frac{(\kappa^2 + \tau^2)\left((\mu_1\kappa - \mu_3\tau)^2 + \mu_2^2\kappa^2 + \mu_2^2\tau^2 + \mu_1\mu'_1\kappa - \mu_3\mu'_1\tau + \tau\mu_2\mu'_3 - \mu'_1\mu_2\kappa\right) + 2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\left((\mu_3\kappa + \mu_1\tau)(\mu_1\mu'_2\kappa - \mu_3\mu'_2\tau + \tau\mu_2\mu'_3 - \mu'_1\mu_2\kappa)\right)}{2\left((\mu_1\kappa - \mu_3\tau)^2 + \mu_2^2(\kappa^2 + \tau^2)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

bağıntısıyla verilir (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:**  $\Gamma_3$  – yüzeyinin parametreye göre ikinci türevleri alırsa

$$\begin{aligned}\Gamma_{3ss} &= (\mu'_1 - \mu_2\kappa)T + (\mu'_2 + \mu_1\kappa - \mu_3\tau)N + (\mu'_3 + \mu_2\tau)B, \\ \Gamma_{3sv} &= \mu'_1T + \mu'_2N + \mu'_3B, \\ \Gamma_{3vv} &= 0\end{aligned}$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntısından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}E_{\Gamma_3} &= \langle \Gamma_{3s}, \Gamma_{3s} \rangle = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2, \\ F_{\Gamma_3} &= \langle \Gamma_{3s}, \Gamma_{3v} \rangle = \frac{\mu_1\tau + \mu_3\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ G_{\Gamma_3} &= \langle \Gamma_{3v}, \Gamma_{3v} \rangle = 1, \\ l_{\Gamma_3} &= \langle \Gamma_{3ss}, N_{\Gamma_3} \rangle = \frac{\mu_2\kappa(\mu'_1 - \mu_2\kappa) + (\mu_3\tau - \mu_1\kappa)(\mu'_2 + \mu_1\kappa - \mu_3\tau) - \mu_2\tau(\mu'_3 + \mu_2\tau)}{\sqrt{\mu_2^2(\kappa^2 + \tau^2) + (\mu_3\tau - \mu_1\kappa)^2}}, \\ m_{\Gamma_3} &= \langle \Gamma_{3sv}, N_{\Gamma_3} \rangle = \frac{(-\mu_1\kappa + \mu_3\tau)\mu'_2 + \mu_2(\kappa\mu'_1 - \tau\mu'_3)}{\sqrt{\mu_2^2(\kappa^2 + \tau^2) + (\mu_3\tau - \mu_1\kappa)^2}}, \\ n_{\Gamma_3} &= \langle \Gamma_{3vv}, N_{\Gamma_3} \rangle = 0\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) ifadesinde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

### Sonuç 3.6

1-)  $\Gamma_3$  regle yüzeyi açılabilirdir ancak ve ancak

$$(\kappa^2 + \tau^2)(-\mu_1\mu_2'\kappa + \mu_3\mu_2'\tau + \kappa\mu_2\mu_1' - \tau\mu_2\mu_3')^2 = 0$$

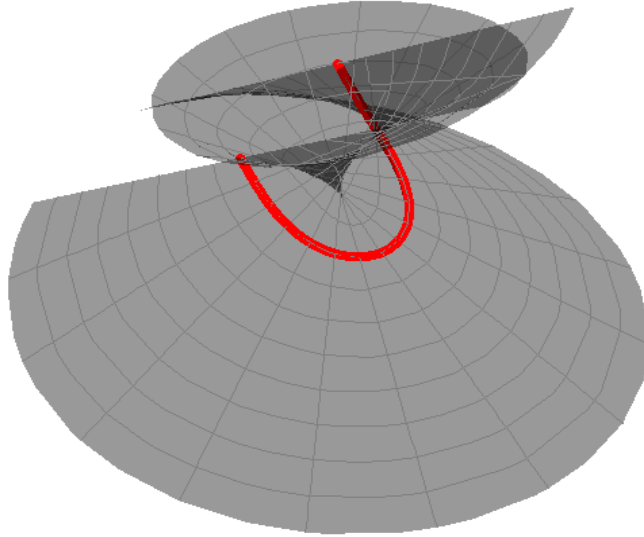
2-)  $\Gamma_3$  regle yüzeyi minimaldir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} & \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \left( (\mu_1\kappa - \mu_3\tau)^2 + \mu_2^2\kappa^2 + \mu_2^2\tau^2 + \mu_1\mu_1'\kappa - \mu_3\mu_3'\tau + \tau\mu_2\mu_3' - \mu_1'\mu_2\kappa \right) \\ & - 2((\mu_3\kappa + \mu_1\tau)(\mu_1\mu_2'\kappa - \mu_3\mu_2'\tau + \tau\mu_2\mu_3' - \mu_1'\mu_2\kappa)) = 0 \end{aligned}$$

**Örnek 3.3:** Örnek 3.1. de verilen  $\alpha(s)$  eğrisi dayanak eğrisi ve asli normal vektörü doğrultman vektör alındığında  $X_N(s, v)$  regle yüzeyin denklemi

$$X_N(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9\cos(s) - 6\sqrt{3}v\cos(2s) + \cos(3s)), \\ \frac{1}{6}(5 - 6\sqrt{3}v\cos(s) + \cos(2s))\sin(s), \frac{1}{2}(v - \sqrt{3}\cos(s)) \end{array} \right)$$

şeklinde yazılır (Şekil 3.6).



**Şekil 3.6**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $X_N$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

$X_N(s, v)$  regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Sannia çatısına ait vektörler sırasıyla

$$\beta(s) = \frac{1}{3}(\cos(s)(2 - \cos(2s)), 2\sin(s)^3, -\sqrt{3}\cos(s)),$$

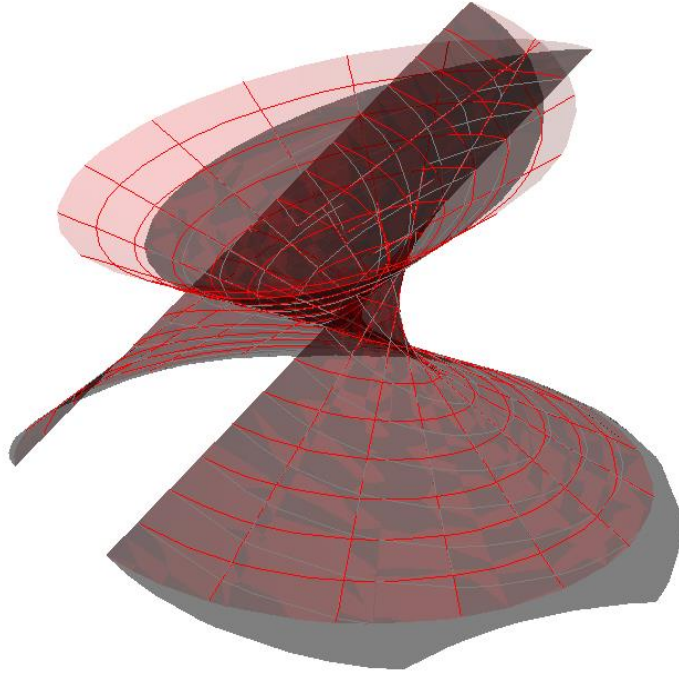
$$f_1 = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2s), -\sqrt{3}\cos(s)\sin(s), \frac{1}{2} \right),$$

$$f_2 = (\sin(2s), -\cos(2s), 0),$$

$$f_3 = \frac{1}{2}(\cos(2s), \sin(2s), \sqrt{3})$$

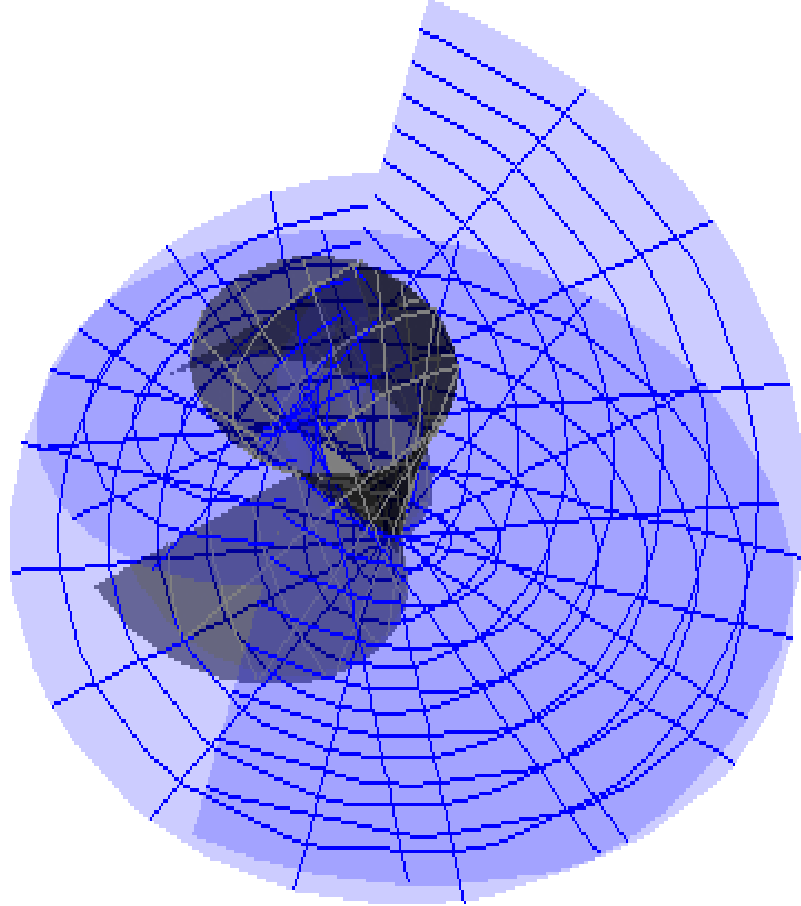
şeklinde hesaplanır.  $X_N$  asli normal yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca  $f_1, f_2, f_3$  Sannia vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin denklemleri ve grafikleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\Gamma_1(s, v) = \left( \frac{1}{6}(3\cos(s) - 3\sqrt{3}v\cos(2s) - \cos(3s)), -\sqrt{3}v\cos(s)\sin(s) + \frac{2\sin(s)^3}{3}, \frac{v}{2} - \frac{\cos(s)}{\sqrt{3}} \right) \text{ yüzeyi}$$



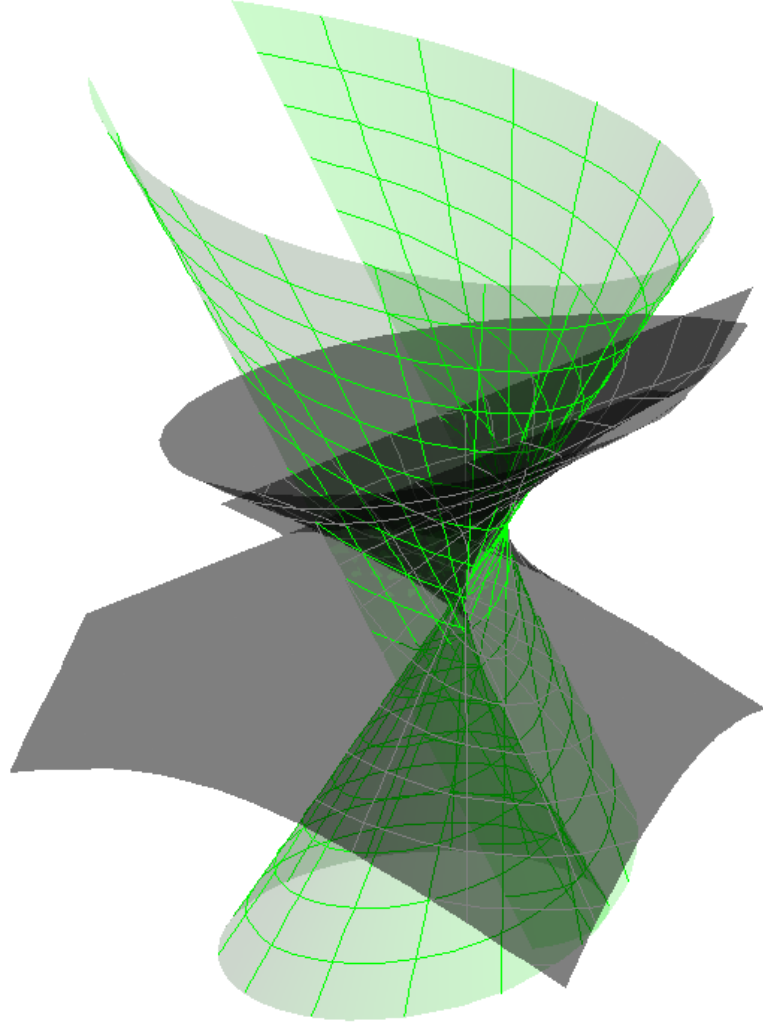
**Şekil 3.7**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Gamma_1$  (kırmızı) ve  $X_N$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

$$\Gamma_2(s,v) = \left( -\frac{1}{3}\cos(s)(-2 + \cos(2s) - 6v\sin(s)), -v\cos(2s) + \frac{2\sin(s)^3}{3}, -\frac{\cos(s)}{\sqrt{3}} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 3.8**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Gamma_2$  (mavi) ve  $X_N$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

$$\Gamma_3(s, v) = \left( \frac{1}{6}(3 \cos(s) + 3v \cos(2s) - \cos(3s)), v \cos(s) \sin(s) + \frac{2 \sin(s)^3}{3}, \frac{3v - 2 \cos(s)}{2\sqrt{3}} \right) \quad \text{yüzeyi}$$



**Şekil 3.9**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Gamma_3$  (yeşil) ve  $X_N$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

### 3.2.3. Binormal Regle Yüzeyi İle İlişkilendirilmiş Sannia Çatılı Regle Yüzeyler

Bu kısımda  $\alpha(s)$  eğrisinin binormal vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin striksiyon eğrisi boyunca Sannia çatısının oluşturduğu regle yüzeyler tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir.

**Teorem 3.22**  $X_B$  binormal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı Sannia çatısı  $\{g_1, g_2, g_3\}$  ile gösterilsin. Sannia çatısı ile Frenet çatısı arasında

$$g_1 = B, \quad g_2 = -N, \quad g_3 = T$$

bağıntısı vardır (Şenyurt ve Eren, 2022).

**İspat:** (2.11) denkleminde binormal regle yüzeyin striksiyon eğrisi  $\beta(s) = \alpha(s)$  olur.  $X_B$  binormal regle yüzey tanımı dikkate alındığında  $g_1 = B$  yazılır. (2.1) denkleminde  $g_2$  ve  $g_3$  vektörleri hesaplanmış olur.

**Tanım 3.9**  $X_B$ , regle yüzeyinin  $\delta$  striksiyon eğrisi boyunca  $g_1, g_2$  ve  $g_3$  vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\Psi_1(s, v) = \beta(s) + vg_1(s), \quad \Psi_1(s, v) = \alpha(s) + vB(s)$$

$$\Psi_2(s, v) = \beta(s) + vg_2(s), \quad \text{veya} \quad \Psi_2(s, v) = \alpha(s) - vN(s)$$

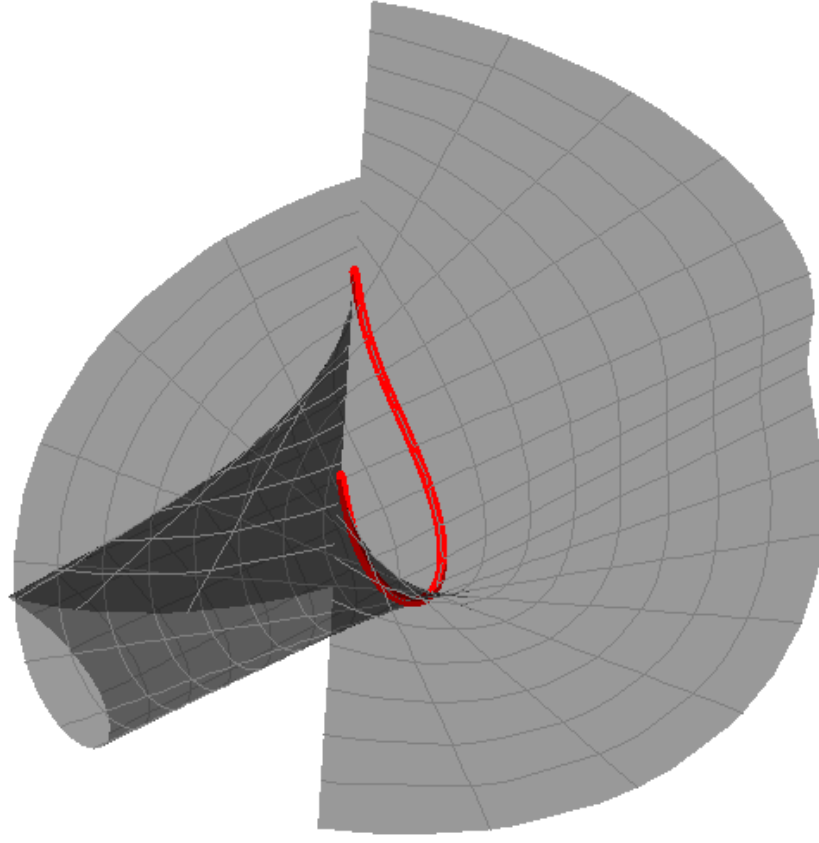
$$\Psi_3(s, v) = \beta(s) + vg_3(s) \quad \Psi_3(s, v) = \alpha(s) + vT(s)$$

şeklinde yazılır.

**Örnek 3.4:** Örnek 3.1 de verilen  $\alpha(s)$  eğrisi dayanak eğrisi ve  $B$  binormal vektörü doğrultman vektör alındığında  $X_B$  regle yüzeyin denklemi

$$X_B(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9(1+v)\cos(s) + (1-3v)\cos(3s)), \\ \frac{1}{12}(9\sin(s) + 12v\sin(s)^3 + \sin(3s)), \frac{1}{2}\sqrt{3}(-1+v)\cos(s) \end{array} \right)$$

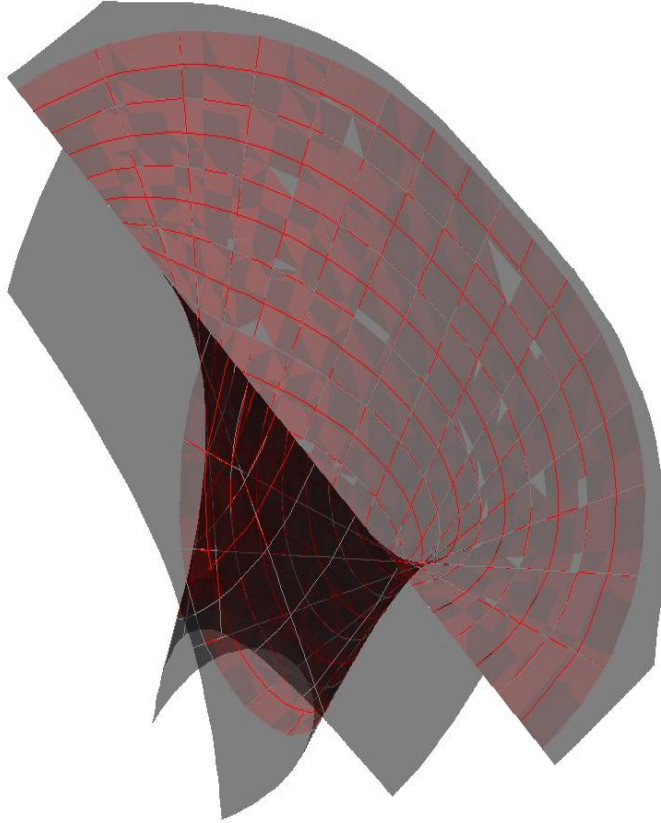
şeklinde yazılır. (Şekil 3.10)



**Şekil 3.10**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $X_B$  yüzeyinin grafiği.

$X_B$  binormal yüzeyinin striksiyon eğrisi boyunca  $g_1, g_2, g_3$  Sannia vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin denklemleri ve grafikleri aşağıda verilmiştir.

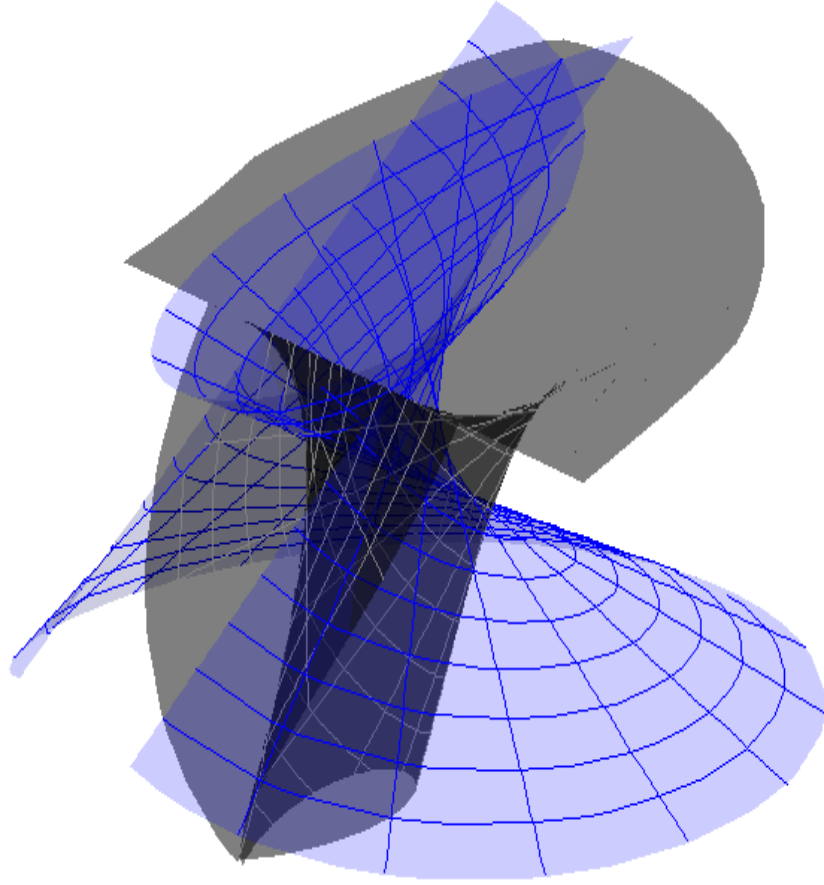
$$\Psi_1(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{6} \cos(s)(4 + 6v + (1 - 3v)\cos(2s)), \\ \frac{1}{6} \sin(s)(5 + \cos(2s) + 6v \sin(s)^2), \frac{1}{2} \sqrt{3}(-1 + v)\cos(s) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 3.11**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Psi_1$  (kırmızı) ve  $X_B$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

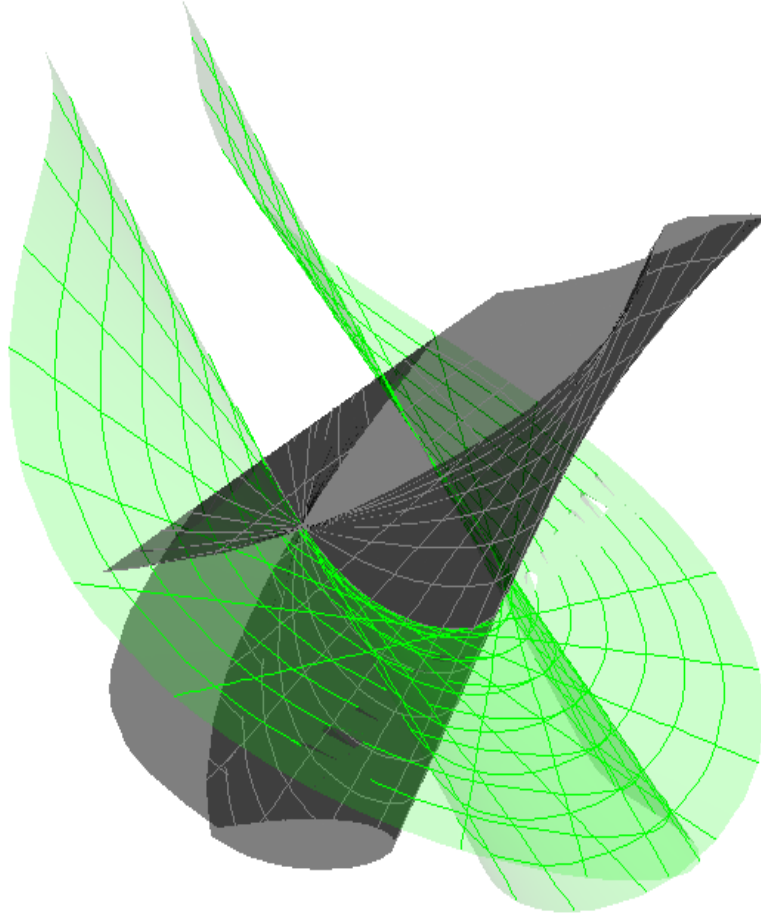


$$\Psi_2(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{6} \cos(s)(4 + \cos(2s)) + \frac{\sqrt{3}v(-\sin(s) + \sin(3s))}{4 \sin(s)}, \\ \frac{1}{6} (5 + \cos(2s)) \sin(s) + \sqrt{3}v \cos(s) \sin(s), \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \cos(s) - v \csc(s) \sin(s)) \end{array} \right) \quad \text{yüzeyi}$$



**Şekil 3.12**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Gamma_2$  (mavi) ve  $X_B$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

$$\Psi_3(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{6}(\cos(s)(4 + \cos(2s)) - 3v(2 + \cos(2s))\sin(s)), \\ \frac{1}{6}(5 + \cos(2s))\sin(s) + v\cos(s)^2 \cot(s)\sin(s), -\frac{1}{2}\sqrt{3}(\cos(s) - v\sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 3.13**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\Psi_3$  (yeşil) ve  $X_B$  (siyah) yüzeyinin grafiği.

#### 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm çalışmanın original kısmını oluşturmaktadır. Burada bir eğrinin involüt eğrisinin Frenet vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin striksiyon eğrileri boyunca Sannia çatılarının meydana getirdiği regle yüzeyler incelenecektir. Elde edilen yüzeylere Sannia regle yüzeyi adı verilecek ve her bir regle yüzeyin Sannia ve Frenet çatıları arasındaki bağıntılar, birinci ve ikinci temel formlar ile Gauss ve ortama eğrilikleri ayrı ayrı hesaplanacaktır.

##### 4.1 İnvolut Eğrisinin Tanjant Yüzeyine Ait Sannia Çatısına Göre Regle Yüzeyler

$\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun. İnvolut eğrisinin teğet vektörünün oluşturduğu tanjant regle yüzeyin denklemi

$$X_{T^*}(s, v) = \alpha^*(s) + vT^*(s)$$

şeklinde yazılır.

$T^*$  teğet vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin striksiyon eğrisi boyunca Sannia çatıları tanımlanacak her vektörün çizdiği regle yüzeylere ait Sannia çatısı elde edilecektir.

**Teorem 4.1**  $X_{T^*}$ , tanjant regle yüzeyinin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı Sannia çatısı  $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$  ile gösterilsin. Sannia çatısı ile Frenet çatısı arasında

$$e_1^* = T^*, e_2^* = N^*, e_3^* = B^*$$

bağıntısı vardır.

**İspat:**  $X_{T^*}$ , regle yüzeyin striksiyon eğrisi  $\beta^*$  olsun. (2.11) denkleminde  $\beta^*(s) = \alpha^*(s)$  olur. Bu durumda dayanak eğrisi olarak striksiyon eğrisi alınabilir. (3.11) denkleminde Sannia çatısı ile Frenet çatısı denk olur. (3.2) bağıntısından aşağıdaki sonuç verilebilir:

**Sonuç 4.1**  $X_{T^*}$ , tanjant regle yüzeyinin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı  $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$

Sannia çatısı ile esas eğrinin  $\{T, N, B\}$  Frenet çatısı arasında

$$\begin{aligned} e_1^* &= N \\ e_2^* &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \\ e_3^* &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \end{aligned}$$

bağıntıları vardır.

**Tanım 4.1**  $X_{T^*}$ , regle yüzeyinin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi boyunca  $e_1^*$  vektörünün oluşturduğu yüzeyin parametrik denklemi

$$\Phi_1^*(s, v) = \beta^*(s) + v e_1^*(s)$$

şeklinde yazılır.

Bu yüzey esas eğrinin Frenet aparatları cinsinden ifadesi

$$\Phi_1^*(s, v) = \alpha(s) + (c-s)T(s) + vN(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 4.2**  $\Phi_1^*(s, v)$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Phi_1^*}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Phi_1^*} = -B^*$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\beta^*(s) = \alpha^*(s)$  olduğundan  $\Phi_1^*(s, v)$  regle yüzeyinin parametrik ifadesi

$\Phi_1^*(s, v) = \alpha^*(s) + vT^*(s)$  olur. Yüzeyin kısmi türevler alınır

$$\Phi_{1s}^* = \eta T^* + v\eta\kappa^* N^*,$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1ss}^* &= \eta' (T^* + v\kappa^* N^*) + \eta (T^{*'} + v\kappa^{*'} N^{*'}) \\ &= \eta' (T^* + v\kappa^* N^*) + \eta \left( T^{*'} + v(\kappa^{*'} N^{*'}) \right) \\ &= \eta' T^* + \eta^2 \kappa^* N^* + v \left( -\eta^2 \kappa^{*'} T^* + (\eta' \kappa^* + \eta \kappa^{*'}) N^* + \eta^2 \tau^* B^* \right), \end{aligned}$$

$$\Phi_{1sv}^* = \eta \kappa^* N^*,$$

$$\Phi_{1v}^* = T^*,$$

$$\Phi_{1vv}^* = 0,$$

bulunur. Burada  $\eta = \left\| (\alpha^*)' \right\|$  dir. (2.7) bağıntısından yüzey normali

$$\begin{aligned}
N_{\Phi_1^*} &= \frac{\Phi_{1s}^* \times \Phi_{1v}^*}{\|\Phi_{1s}^* \times \Phi_{1v}^*\|} \\
&= \frac{\eta(T^* + v\kappa^* N^*) \times T^*}{\|\eta(T^* + v\kappa^* N^*) \times T^*\|} \\
&= -B^*
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanmış olur.

**Sonuç 4.2**  $\Phi_1^*(s, v)$  regle yüzeyinin  $N_{\Phi_1^*}$  normali ile esas eğrinin Frenet elemanlarına bağlı ifadesi

$$N_{\Phi_1^*} = -\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B = -\sin \varphi T + \cos \varphi B$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $\varphi$ ,  $B$  ile  $W$  arasındaki açıdır.

**Teorem 4.3**  $\Phi_1^*(s, v)$  regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
I_{\Phi_1^*} &= \eta^2 (1 + v^2 \kappa^{*2}) ds^2 + 2\eta ds dv + dv^2, \\
II_{\Phi_1^*} &= -v\eta^2 \kappa^* \tau^* ds^2, \\
K_{\Phi_1^*} &= 0, \\
H_{\Phi_1^*} &= \frac{\tau^*}{2v\kappa^*}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

**İspat:**  $\Phi_1^*(s, v)$  regle yüzeyinin kısmi türevleri (2.9) ve (2.10) bağıntılarında yerine yazılırsa birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E_{\Phi_1^*} &= \langle \Phi_{1s}^*, \Phi_{1s}^* \rangle = \eta^2 (1 + v^2 \kappa^{*2}), \\
F_{\Phi_1^*} &= \langle \Phi_{1s}^*, \Phi_{1v}^* \rangle = \eta, \\
G_{\Phi_1^*} &= \langle \Phi_{1v}^*, \Phi_{1v}^* \rangle = 1, \\
l_{\Phi_1^*} &= \langle \Phi_{1ss}^*, N_{\Phi_1^*} \rangle = -v\eta^2 \kappa^* \tau^*, \\
m_{\Phi_1^*} &= \langle \Phi_{1sv}^*, N_{\Phi_1^*} \rangle = 0, \\
n_{\Phi_1^*} &= \langle \Phi_{1vv}^*, N_{\Phi_1^*} \rangle = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

**Sonuç 4.3**  $\Phi_1^*$  regle yüzeyi açılabilir yüzeydir.

**Sonuç 4.4**  $X_{\gamma^*}$  regle yüzeyinin striksiyon eğrisi düzlemsel veya helis eğrisi ise  $\Phi_1^*(s, v)$  Sannia regle yüzeyi açılabilir minimal yüzeylerdir.

**İspat:**  $\Phi_1^*(s, v)$  yüzeyi minimal olması için esas eğrinin düzlemsel veya helis eğrisi olmasıdır. Bunun için  $H_{\Phi_1^*} = 0$  olmalıdır.

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_1^*} = 0 &\Rightarrow \frac{\tau^*}{2v\kappa^*} = 0 \\
&\Rightarrow \tau^* = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)} = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \text{ veya } \tau = 0
\end{aligned}$$

bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.5**  $\Phi_1^*(s, v)$  ve  $\Phi_1(s, v)$  regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri arasında

$$H_{\Phi_1^*} = \frac{(H_{\Phi_1})'}{\kappa \left(1 + (2vH_{\Phi_1})^2\right) \sqrt{1 + (2vH_{\Phi_1})^2}}$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** Teorem 4.3 ve (3.8) bağıntısı kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
H_{\phi_1}^* &= \frac{\tau^*}{2\nu\kappa^*} \\
&= \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{2\nu(\kappa^2 + \tau^2)\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\
&= \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{2\nu\kappa\left(1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}\right)\sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}}} \\
&= \frac{(H_{\phi_1})'}{\kappa\left(1 + (2\nu H_{\phi_1})^2\right)\sqrt{1 + (2\nu H_{\phi_1})^2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

**Tanım 4.2**  $X_{T^*}$ , regle yüzeyinin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi boyunca  $e_2^*$  vektörün oluşturduğu regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\Phi_2^*(s, \nu) = \beta^*(s) + \nu e_2^*(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 4.4**  $\Phi_2^*(s, \nu)$  regle yüzeyinin  $N_{\phi_2^*}$  birim normal vektörü

$$N_{\phi_2^*} = \frac{-\nu\tau^*T^* + (1 - \nu\kappa^*)B^*}{\sqrt{\nu^2\tau^{*2} + (1 - \nu\kappa^*)^2}}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\beta^*(s) = \alpha^*(s)$  olduğundan  $\Phi_2^*(s, \nu)$  regle yüzeyi

$\Phi_2^*(s, \nu) = \alpha^*(s) + \nu N^*(s)$  şeklinde yazılır. Buradan kısmi türevler alınırsa

$$\Phi_{2s}^* = (1 - \nu\kappa^*)T^* + \nu\tau^*B^*,$$

$$\Phi_{2\nu}^* = N^*$$

bulunur. (2.7) bağıntısından yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 4.5**  $\Phi_2^*(s, v)$  regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$I_{\Phi_2^*} = \left( (1 - v\kappa^*)^2 + (v\tau^*)^2 \right) ds^2 + dv^2,$$

$$II_{\Phi_2^*} = \frac{v^2 \left( \tau^* \kappa^{*'} - \tau^{*' } \kappa^* \right) + v\tau^{*' }}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 - v\kappa^*)^2}} ds^2 + \frac{2\tau^*}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 - v\kappa^*)^2}} dsdv,$$

$$K_{\Phi_2^*} = -\frac{\tau^{*2}}{\left( v^2 \tau^{*2} + (1 - v\kappa^*)^2 \right)^2},$$

$$H_{\Phi_2^*} = \frac{v^2 \left( \tau^* \kappa^{*'} - \tau^{*' } \kappa^* \right) + v\tau^{*' }}{2 \left( v^2 \tau^{*2} + (1 - v\kappa^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\Phi_2^*(s, v)$  yüzeyinin parametrelere göre ikinci türevleri alınırsa

$$\Phi_{2ss}^* = \kappa^* N^* + v \left( -\kappa^{*' } T^* - (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) N^* + \tau^{*' } B^* \right),$$

$$\Phi_{2sv}^* = -\kappa^* T^* + \tau^* B^*, \quad \Phi_{2vv}^* = 0$$

olur. (2.3) ve (2.4) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E_{\Phi_2^*} = \langle \Phi_{2s}^*, \Phi_{2s}^* \rangle = (1 - v\kappa^*)^2 + (v\tau^*)^2,$$

$$F_{\Phi_2^*} = \langle \Phi_{2s}^*, \Phi_{2v}^* \rangle = 0,$$

$$G_{\Phi_2^*} = \langle \Phi_{2v}^*, \Phi_{2v}^* \rangle = 1,$$

$$l_{\Phi_2^*} = \langle \Phi_{2ss}^*, N_{\Phi_2^*}^* \rangle = \frac{v^2 \left( \tau^* \kappa^{*' } - \tau^{*' } \kappa^* \right) + v\tau^{*' }}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 - v\kappa^*)^2}},$$

$$m_{\Phi_2^*} = \langle \Phi_{2sv}^*, N_{\Phi_2^*}^* \rangle = \frac{\tau^*}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 - v\kappa^*)^2}},$$

$$n_{\Phi_2^*} = \langle \Phi_{2vv}^*, N_{\Phi_2^*}^* \rangle = 0$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.



**Sonuç 4.6:**  $\alpha(s)$  eğrisi düzlemsel veya helis ise  $\Phi_2^*(s, v)$  Sannia regle yüzeyi açılabilir yüzeylerdir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} K_{\Phi_2^*} = 0 &\Rightarrow \frac{\tau^{*2}}{\left(v^2\tau^{*2} + (1 - v\kappa^*)^2\right)^2} = 0 \\ &\Rightarrow \tau^* = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa}{\lambda(\kappa^2 + \tau^2)} = 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \text{ veya } \tau = 0. \end{aligned}$$

**Sonuç 4.7:** Teorem 4.5 de verilen  $K_{\Phi_2^*}$  ve  $H_{\Phi_2^*}$  ifadelerinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  yerine (3.8) denkleminde karşılıkları yazılırsa,  $\Phi_2^*(s, v)$  regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri esas eğrinin eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K_{\Phi_2^*} &= -\frac{\lambda^2\kappa^2(\kappa^2 + \tau^2)^2(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}{\left(v^2(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + \left((1 + \lambda^2)\kappa^2 + \tau^2 - 2v\lambda\kappa\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\right)(\kappa^2 + \tau^2)\right)^2}, \\ H_{\Phi_2^*} &= \frac{v^2\left(\frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{\lambda\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}\left(\frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\lambda\kappa}\right)' - \left(\frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{\lambda\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}\right)' \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\lambda\kappa}\right) + v\left(\frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{\lambda\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}\right)'}{2\left(\frac{v^2(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^2(\lambda\kappa - v\lambda\kappa\sqrt{\kappa^2 + \tau^2})^2}{\lambda^2\kappa^2(\kappa^2 + \tau^2)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

bağıntısıyla verilir.

**Tanım 4.3**  $X_{T^*}$ , regle yüzeyinin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi boyunca  $e_3^*$  vektörün oluşturduğu regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\Phi_3^*(s, v) = \beta^*(s) + ve_3^*(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 4.6**  $\Phi_3^*(s, v)$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Phi_3^*}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Phi_3^*} = -\frac{v\tau^*T^* + N^*}{\sqrt{1+(v\tau^*)^2}}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\beta^*(s) = \alpha^*(s)$  olduğundan  $\Phi_3^*$  regle yüzeyi  $\Phi_3^*(s, v) = \alpha^*(s) + vB^*(s)$  olur. Buradan kısmi türevler alınır  $\Phi_{3s}^* = T^* - v\tau^*N^*, \Phi_{3v}^* = B^*$  bulunur. (2.7) bağıntısından yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 4.7**  $\Phi_3^*$  regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$I_{\Phi_3^*} = (1 + v^2\kappa^{*2})ds^2 + dv^2,$$

$$II_{\Phi_3^*} = -\frac{\kappa^*(1 + v^2\tau^{*2}) - v\tau^{*'}}{\sqrt{1+(v\tau^*)^2}}ds^2 + \frac{2\tau^*}{\sqrt{1+(v\tau^*)^2}}dsdv,$$

$$K_{\Phi_3^*} = -\frac{\tau^{*2}}{(1 + v^2\kappa^{*2})^2},$$

$$H_{\Phi_3^*} = \frac{v\tau^{*'} - \kappa^*(1 + v^2\tau^{*2})}{2(1 + v^2\kappa^{*2})^{\frac{3}{2}}}$$

bağıntıları vardır.

**İspat:**  $\Phi_3^*$  yüzeyinin parametrelere göre ikinci türevleri alırsa

$$\Phi_{3ss}^* = v\tau^*\kappa^*T^* + (\kappa^* - v\tau^{*'})N^* - v\tau^{*2}B^*,$$

$$\Phi_{3sv}^* = -\tau^*N^*,$$

$$\Phi_{3vv}^* = 0$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E_{\Phi_3^*} &= \langle \Phi_{3s}^*, \Phi_{3s}^* \rangle = 1 + v^2 \tau^{*2}, \\
F_{\Phi_3^*} &= \langle \Phi_{3s}^*, \Phi_{3v}^* \rangle = 0, \\
G_{\Phi_3^*} &= \langle \Phi_{3v}^*, \Phi_{3v}^* \rangle = 1, \\
l_{\Phi_3^*} &= \langle \Phi_{3ss}^*, N_{\Phi_3^*} \rangle = -\frac{\kappa^* (1 + v^2 \tau^{*2}) - v \tau^{*'} }{\sqrt{1 + (v \tau^*)^2}}, \\
m_{\Phi_3^*} &= \langle \Phi_{3sv}^*, N_{\Phi_3^*} \rangle = \frac{\tau^*}{\sqrt{1 + (v \tau^*)^2}}, \\
n_{\Phi_3^*} &= \langle \Phi_{3vv}^*, N_{\Phi_3^*} \rangle = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

**Sonuç 4.8**  $\alpha(s)$  eğrisi düzlemsel veya helis ise  $\Phi_3^*(s, v)$  Sannia regle yüzeyi açılabilir yüzeylerdir.

**İspat:**

$$\begin{aligned}
K_{\Phi_3^*} = 0 &\Rightarrow \frac{\tau^{*2}}{(1 + v^2 \kappa^{*2})^2} = 0 \\
&\Rightarrow \tau^* = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa}{\lambda(\kappa^2 + \tau^2)} = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \text{ veya } \tau = 0.
\end{aligned}$$

**Sonuç4.9:** Teorem 4.7 de verilen  $K_{\Phi_3^*}$  ve  $H_{\Phi_3^*}$  ifadelerinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  yerine (3.8) denkleminde karşılıkları yazılırsa,  $\Phi_3^*(s, v)$  regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri esas eğrinin eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$K_{\Phi_3^*} = -\frac{\lambda^2 \kappa^2 (\kappa \tau' - \kappa' \tau)^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^2 (\lambda^2 \kappa^2 + v^2 (\kappa^2 + \tau^2))^2},$$

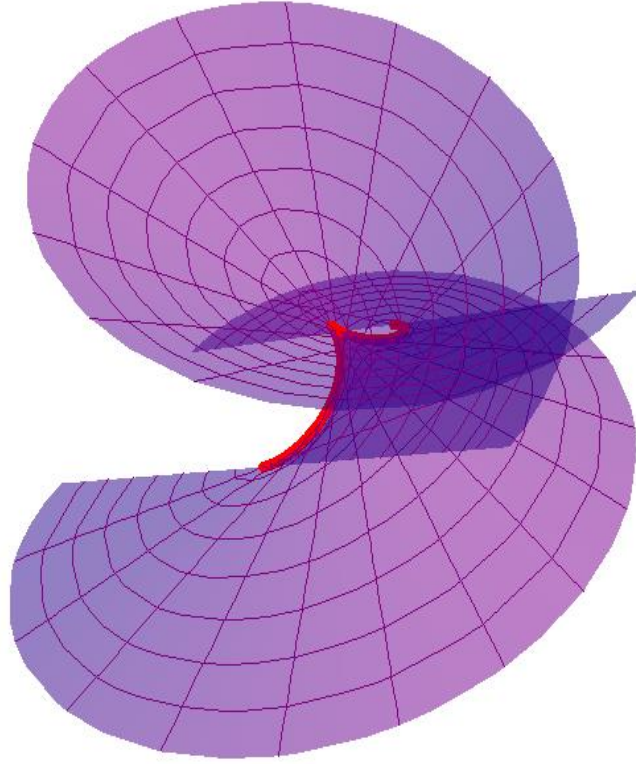
$$H_{\Phi_3^*} = \frac{v \left( \frac{(\kappa \tau' - \kappa' \tau)}{\lambda \kappa (\kappa^2 + \tau^2)} \right)' - \frac{\lambda^2 \kappa^2 (\kappa^2 + \tau^2)^2 + v^2 (\kappa \tau' - \kappa' \tau)^2}{\lambda^3 \kappa^3 (\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}}{2 \left( \frac{\lambda^2 \kappa^2 + v^2 (\kappa^2 + \tau^2)}{\lambda^2 \kappa^2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

bağıntısıyla verilir.

**Örnek 4.1** Örnek 3.1 de verilen  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisi dayanak eğrisi ve teğet vektörü doğrultman alındığında  $X_{T^*}(s, v)$  regle yüzeyin denklemi

$$X_{T^*}(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12} (9 \cos(s) - 6\sqrt{3}v \cos(2s) + \cos(3s) + 9s \sin(s) + 3s \sin(3s)), \\ -s \cos(s)^3 - \sqrt{3}v \cos(s) \sin(s) + \frac{1}{6} (5 + \cos(2s)) \sin(s), \\ \frac{1}{2} (v - \sqrt{3} (\cos(s) + s \sin(s))) \end{array} \right)$$

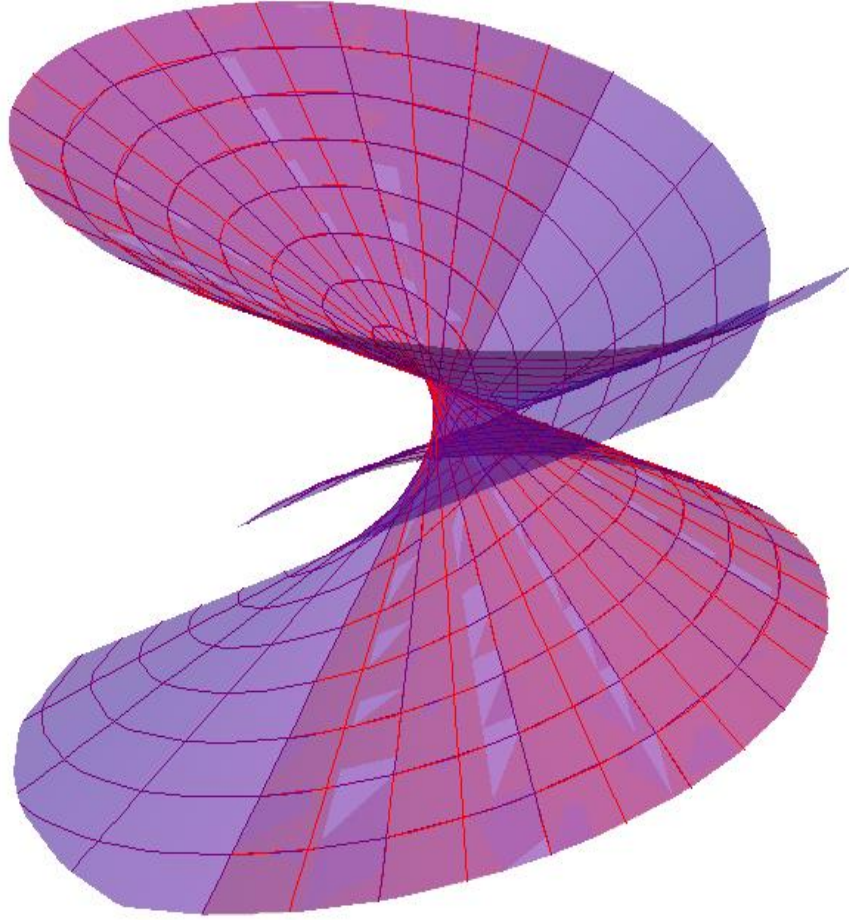
şeklinde bulunur. Bu yüzeye ait grafik Şekil 4.1 de verilmiştir.



**Şekil 4.1**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisi (kırmızı) ve  $X_{T^*}$  yüzeyinin grafiği.

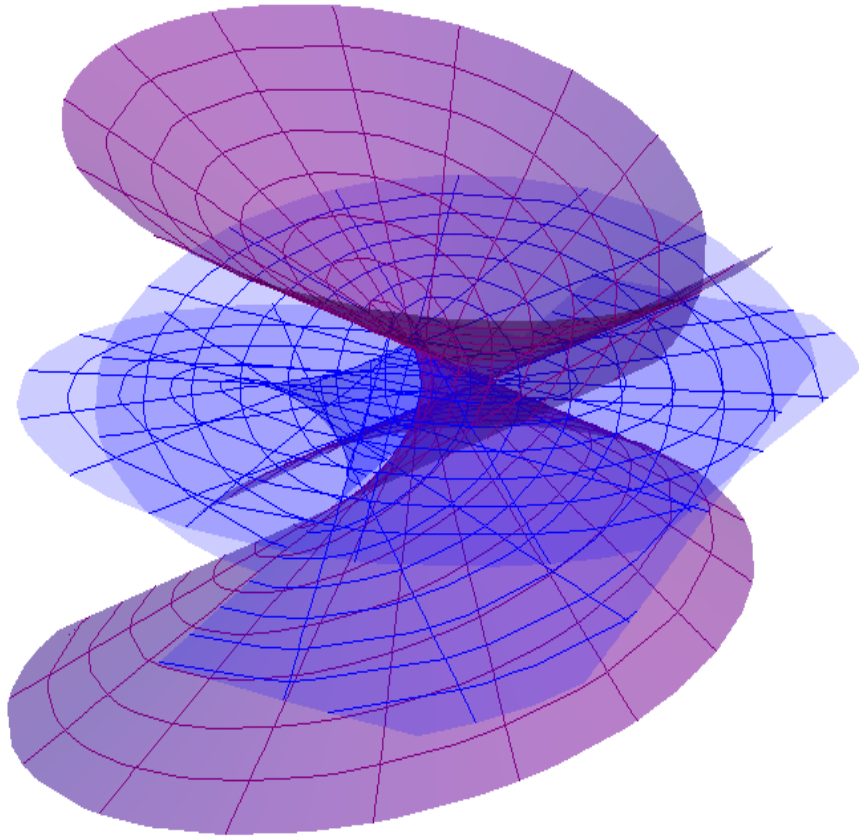
$X_{T^*}$  regle yüzeyin striksiyon eğrisi boyunca Sannia vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerinin denklemleri ve grafikleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\Phi_1^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9 \cos(s) - 6\sqrt{3}v \cos(2s) + \cos(3s) + 9s \sin(s) + 3s \sin(3s)), \\ -s \cos(s)^3 - \sqrt{3}v \cos(s) \sin(s) + \frac{1}{6}(5 + \cos(2s)) \sin(s), \\ \frac{1}{2}(v - \sqrt{3}(\cos(s) + s \sin(s))) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



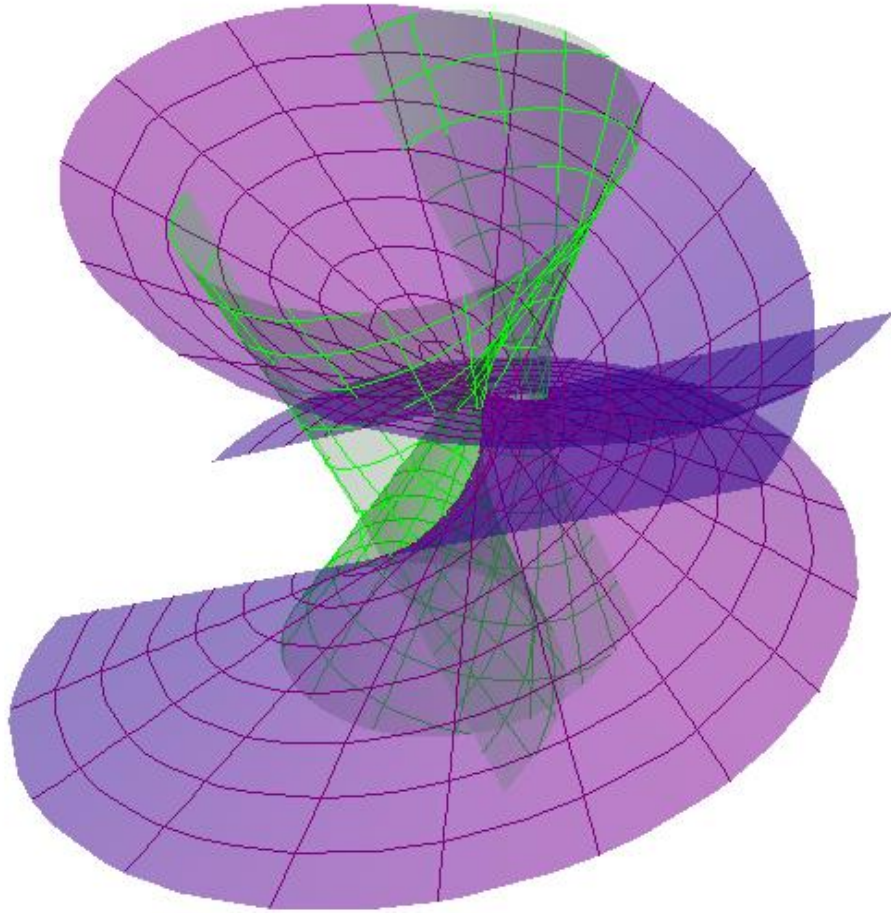
**Şekil 4.2**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  değerleri için  $\Phi_1$  (kırmızı) ve  $X_{T^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.

$$\Phi_2^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} v \sin(2s) + \frac{1}{12} (9 \cos(s) + \cos(3s) + 3s(3 \sin(s) + \sin(3s))), \\ \frac{1}{12} (-12s \cos(s)^3 - 12v \cos(2s) + 9 \sin(s) + \sin(3s)), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} (\cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.3**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  değerleri için  $\Phi_2^*$  (mavi) ve  $X_T^*$  (mor) yüzeyinin grafiği.

$$\Phi_3^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9 \cos(s) + 6v \cos(2s) + \cos(3s) + 9s \sin(s) + 3s \sin(3s)), \\ -s \cos(s)^3 + v \cos(s) \sin(s) + \frac{1}{12}(9 \sin(s) + \sin(3s)), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(-v + \cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.4**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  değerleri için  $\Phi_3^*$  (yeşil) ve  $X_{T^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.



## 4.2 İvolüt Eğrisinin Asli Normal Yüzeyine Ait Sannia Çatısına Göre Regle Yüzeyler

$\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun. İvolüt eğrisinin asli normal vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin denklemi

$$X_{N^*}(s, v) = \alpha^*(s) + vN^*(s)$$

şeklinde yazılır.

$N^*$  vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin striksiyon eğrisi boyunca Sannia çatıları tanımlamak her vektörün çizdiği regle yüzeylere ait sannia çatıları elde edilecektir.

**Teorem 4.8**  $X_{N^*}$ , asli normal regle yüzeyin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı Sannia çatısı  $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$  ile gösterilsin. Sannia çatısı ile Frenet çatısı arasında

$$\begin{aligned} f_1^* &= N^*, \\ f_2^* &= \frac{-\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} T^* + \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} B^*, \\ f_3^* &= \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} T^* + \frac{\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} B^* \end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** Asli normal regle yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\beta^*(s) = \alpha^*(s) + \frac{\kappa^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} N^*$$

şeklinde bulunur.  $X_{N^*}$  regle yüzey tanımı dikkate alınırsa  $f_1^* = N^*$  olur. (2.1) denkleminde  $f_2^*$  ve  $f_3^*$  vektörleri hesaplanmış olur.

**Tanım 4.4**  $X_{N^*}$ , asli normal regle yüzeyin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi boyunca  $f_1^*$  vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\Gamma_1^*(s, v) = \beta^*(s) + v f_1^*(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 4.9**  $\Gamma_1^*(s, v)$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Gamma_1^*}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Gamma_1^*} = \frac{-\left(v\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \kappa^*\tau^*\right)T^* + \left(\left(1 - v\kappa^*\right)(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^{*2}\right)B^*}{\sqrt{\left(v\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \kappa^*\tau^*\right)^2 + \left(\left(1 - v\kappa^*\right)(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^{*2}\right)^2}}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\Gamma_1^*$  yüzeyinde (2.6) ve (2.8) bağıntıları dikkate alınır

$$\Gamma_1^*(s, v) = \alpha^*(s) + \left(v + \frac{\kappa^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}\right)N^*$$

şeklinde yazılır. Buradan kısmi türevler alınır

$$\begin{aligned} \Gamma_{1s}^* &= \frac{\eta(1 - v\kappa^*)(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \eta\kappa^{*2}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}T^* + \frac{\kappa^{*'}(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \kappa^*(2\kappa^*\kappa^{*'} + 2\tau^*\tau^{*'})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}N^* \\ &+ \frac{\eta v\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \eta\kappa^*\tau^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}B^*, \end{aligned}$$

$$\Gamma_{1v}^* = N^*,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{1s}^* \times \Gamma_{1v}^* &= \eta \left(1 - v\kappa^* - \frac{\kappa^{*2}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}\right)T^* \times N^* + \eta \left(v\tau^* + \frac{\kappa^*\tau^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}\right)B^* \times N^* \\ &= -\frac{\eta v\tau^*(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \eta\kappa^*\tau^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}T^* + \frac{\eta(1 - v\kappa^*)(\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \eta\kappa^{*2}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}B^* \end{aligned}$$

olur. (2.7) bağıntısından yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 4.10**  $\Gamma_1^*$  regle yüzeyinin Gaussian ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\Gamma_1^*} = -\frac{\tau^{*2}(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}{\left(\tau^{*2} + v^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2\right)^2},$$

$$H_{\Gamma_1^*} = \frac{\tau^{*3}\left(\tau^*\left(\rho_3 - \rho_1 v \tau^*\right) - 2\eta \kappa^{*'}\right) - \rho_3 v \kappa^{*5} - \rho_1 v \kappa^{*4} \tau^* - \kappa^{*3} \tau^*\left(\rho_1 + 2\rho_3 v \tau^*\right) + \kappa^{*2} \tau^*\left(\tau^*\left(\rho_3 - 2\rho_1 v \tau^*\right) + 2\eta \kappa^{*'}\right) - \kappa^* \tau^{*2}\left(\tau^*\left(\rho_1 + \rho_3 v \tau^*\right) - 4\eta \tau^{*'}\right)}{2\eta^2 \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \left(\tau^{*2} + v^2(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2\right)^{3/2}}$$

şeklinde verilir.

**İspat:**  $\Gamma_1^*$  yüzeyinin ikinci türevleri hesaplanırsa

$$\Gamma_{1ss}^* = \rho_1 T^* + \rho_2 N^* + \rho_3 B^*,$$

$$\Gamma_{1sv}^* = -\eta \kappa^* T^* + \eta \tau^* B^*,$$

$$\Gamma_{1vv}^* = 0.$$

Burada  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  katsayıları

$$\rho_1 = \eta' - v \kappa^* \eta' - \frac{\kappa^{*2} \eta'}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - v \eta \kappa^{*'} - \frac{3\eta \kappa^* \kappa^{*'}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} + \frac{2\eta \kappa^{*2} (2\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2},$$

$$\rho_2 = \eta^2 \kappa^* - v \eta^2 \kappa^{*2} - v \eta^2 \tau^{*2} - \frac{\eta^2 \kappa^{*3}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - \frac{\eta^2 \kappa^* \tau^{*2}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - \frac{2\kappa^{*'} (2\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} + \frac{2\kappa^* (2\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'})^2}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3} + \frac{\kappa^{*''}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - \frac{\kappa^* (2\kappa^{*''2} + 2\tau^{*''2} + 2\kappa^* \kappa^{*''} + 2\tau^* \tau^{*''})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2},$$

$$\rho_3 = v \tau^* \eta' + \frac{\kappa^* \tau^* \eta'}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} + \frac{2\eta \tau^* \kappa^{*'}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} + v \eta \tau^{*'} + \frac{\eta \kappa^* \tau^{*'}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - \frac{2\eta \kappa^* \tau^* (2\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}$$

şeklinde bulunur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarında birinci ve ikinci temel formun kat sayıları sırasıyla

$$E_{\Gamma_1^*} = \frac{\eta^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3 \left( \tau^{*2} + v^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2 \right) + \left( (\kappa^{*2} - \tau^{*2}) \kappa^{*'} + 2\kappa^* \tau^* \tau^{*'} \right)^2}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^4},$$

$$F_{\Gamma_1^*} = \frac{(-\kappa^{*2} + \tau^{*2}) \kappa^{*'} - 2\kappa^* \tau^* \tau^{*'}}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2},$$

$$G_{\Gamma_1^*} = 1,$$

$$l_{\Gamma_1^*} = \frac{-\rho_3 v \kappa^{*3} - \rho_1 \kappa^* (1 + v \kappa^*) \tau^* + \rho_3 (1 - v \kappa^*) \tau^{*2} - \rho_1 v \tau^{*3}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \sqrt{\tau^{*2} + v^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}},$$

$$m_{\Gamma_1^*} = \frac{\eta \tau^* \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}{\sqrt{\tau^{*2} + v^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}},$$

$$n_{\Gamma_1^*} = 0$$

olur. (2.8) bağıntısından Gauss ve ortalama eğrilikler bulunur.

**Sonuç 4.10**  $\alpha(s)$  eğrisi düzlemsel veya helis ise  $\Gamma_1^*$  Sannia regle yüzeyi açılabilir yüzeydir.

**İspat:**

$$K_{\Gamma_1^*} = 0 \Rightarrow \frac{\tau^{*2} (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}{\left( \tau^{*2} + v^2 (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2 \right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \tau^* = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \kappa}{\lambda (\kappa^2 + \tau^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0 \text{ veya } \tau = 0.$$

**Tanım 4.5**  $X_{N^*}$  normal regle yüzeyinin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi boyunca  $f_2^*$  vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\Gamma_2^*(s, v) = \beta^*(s) + v f_2^*(s)$$

bağıntısıyla berilir.

**Teorem 4.11**  $\Gamma_2^*$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Gamma_2^*}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Gamma_2^*} = \frac{\lambda_2 \eta_2}{\sqrt{(\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)^2 + \lambda_2^2}} T^* + \frac{\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2}{\sqrt{(\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)^2 + \lambda_2^2}} N^* - \frac{\lambda_2 \eta_1}{\sqrt{(\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)^2 + \lambda_2^2}} B^*$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1$  ve  $\eta_2$

$$\lambda_1 = \eta - \frac{\eta \kappa^{*2}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - \frac{v \kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} + \frac{v \kappa^* (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}},$$

$$\lambda_2 = -\frac{v \eta \kappa^{*2}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \frac{v \eta \tau^{*2}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} + \frac{\kappa^{*'}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - \frac{2 \kappa^* (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2},$$

$$\lambda_3 = \frac{\eta \kappa^* \tau^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} + \frac{v \tau^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \frac{v \tau^* (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}},$$

$$\eta_1 = -\frac{\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}},$$

$$\eta_2 = \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}$$

şeklinde birer katsayıdır.

**İspat:**  $\Gamma_2^*$  yüzeyinde (2.6) ve (2.8) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\Gamma_2^*(s, v) = \alpha^*(s) + \frac{\kappa^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} N^* + v \left( \frac{-\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} T^* + \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} B^* \right)$$

olur.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_1$  ve  $\eta_2$  değerleri hipotezde olduğu gibi alınırsa yüzeyin parametrelere göre türevleri

$$\Gamma_{2s}^* = \lambda_1 T^* + \lambda_2 N^* + \lambda_3 B^*,$$

$$\Gamma_{2v}^* = \eta_1 T^* + \eta_2 B^*$$

bulunur. Bu ifadeler (2.7) bağıntısında yerine yazılırsa yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 4.12**  $N_{\Gamma_2^*}$  regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\Gamma_2^*} = -\frac{(\lambda_2 \eta_2 \varepsilon_1 + \lambda_3 \eta_1 \varepsilon_2 - \lambda_1 \eta_2 \varepsilon_2 - \lambda_2 \eta_1 \varepsilon_3)^2}{(\lambda_2^2 + (\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 \eta_1 + \lambda_3 \eta_2)^2)},$$

$$H_{\Gamma_2^*} = \frac{-(\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)(-\mu_2 + 2(\lambda_1 \eta_1 + \lambda_3 \eta_2) \varepsilon_2) + \lambda_2 (\eta_1 (-\mu_3 + 2\lambda_1 \eta_1 \varepsilon_3) + \eta_2 (\mu_1 + 2\lambda_3 \eta_1 \varepsilon_3 - 2(\lambda_1 \eta_1 + \lambda_3 \eta_2) \varepsilon_1))}{2\sqrt{\lambda_2^2 + (\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 \eta_1 + \lambda_3 \eta_2)^2)}$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  ifadeleri

$$\mu_1 = \frac{v\eta^2 \kappa^* (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + \eta' \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \frac{\kappa^{*2} \eta' - 3\eta \kappa^* \kappa^{*'}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} + \frac{4\eta \kappa^{*2} (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}$$

$$+ \frac{v\kappa^{*'} (2\kappa^* \kappa^{*'} + 2\tau^* \tau^{*'}) + v\kappa^* (\kappa^{*2} + \tau^{*2} + \kappa^* \kappa^{*''} + \tau^* \tau^{*''})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}}$$

$$- \frac{6v\kappa^* (\kappa^* \tau^*)'^2 - 4v\kappa^{*''} (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}{4(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{5/2}},$$

$$\mu_2 = -\frac{\eta' v (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 3v\eta (\kappa^* \kappa^{*'} - \tau^* \tau^{*'}) + 2v\eta (\kappa^* \tau^*)'}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}$$

$$- \frac{4\kappa^{*'} (\kappa^* \tau^*)' - 2\kappa^* (\kappa^{*2} + \tau^{*2} + \kappa^* \kappa^{*''} + \tau^* \tau^{*''})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} + \frac{4\kappa^* (\kappa^* \tau^*)'^2 + \kappa^{*''} (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3},$$

$$\mu_3 = -v\eta^2 \tau^* \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} + \frac{\eta' \kappa^* \tau^* + 2\eta \tau^* \kappa^{*'} + \eta \kappa^* \tau^{*'} - 4\eta \kappa^* \tau^* (\kappa^* \tau^*)' + v\tau^{*''} \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}$$

$$- \frac{2v\tau^{*'} (\kappa^* \tau^*)' + v\tau^* (\kappa^{*''2} + \tau^{*''2} + \kappa^* \kappa^{*''} + \tau^* \tau^{*''})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}} + \frac{6v\tau^* (\kappa^* \tau^*)'^2}{4(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{5/2}},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\kappa^{*2} (\tau^{*'} - \kappa^{*'}) - \kappa^* \tau^* (\tau^* - \kappa^*)}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}},$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\eta}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} (\kappa^{*2} + \tau^{*2}),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\tau^{*'} \kappa^* (\kappa^* - \tau^*) - \tau^{*2} (\kappa^{*'} - \tau^{*'})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}}$$

şeklinde birer katsayıdır.

**İspat:**  $\Gamma_2^*$  yüzeyinin parametrelere göre ikinci türevleri alırsa

$$\Gamma_{2,ss}^* = \mu_1 T^* + \mu_2 N^* + \mu_3 B^*,$$

$$\Gamma_{2,sv}^* = \varepsilon_1 T^* + \varepsilon_2 N^* + \varepsilon_3 B^*,$$

$$\Gamma_{2,vv}^* = 0$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntısından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E_{\Gamma_2^*} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$F_{\Gamma_2^*} = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_3 \eta_2,$$

$$G_{\Gamma_2^*} = 1,$$

$$l_{1_2^*} = \frac{\lambda_2 \eta_2 \mu_1 + \lambda_3 \eta_1 \mu_2 - \lambda_1 \eta_2 \mu_2 - \lambda_2 \eta_1 \mu_3}{\sqrt{\lambda_2^2 + (\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)^2}},$$

$$m_{1_2^*} = \frac{\lambda_3 \eta_1 \varepsilon_2 - \lambda_1 \eta_2 \varepsilon_2 - \lambda_2 \eta_1 \varepsilon_3 + \lambda_2 \eta_2 \varepsilon_1}{\sqrt{\lambda_2^2 + (\lambda_3 \eta_1 - \lambda_1 \eta_2)^2}},$$

$$n_{\Gamma_2^*} = 0$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

**Tanım 4.6**  $X_{N^*}$  normal regle yüzeyinin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi boyunca  $f_3^*$  vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\Gamma_3^*(s, v) = \beta^*(s) + v f_3^*(s)$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 4.13**  $\Gamma_3^*(s, v)$  regle yüzeyinin normali  $N_{\Gamma_3^*}$  ile gösterilirse bu normal

$$N_{\Gamma_3^*} = \frac{\xi_2 \psi_2}{\sqrt{(\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2)^2 + \xi_2^2}}, \frac{\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2}{\sqrt{(\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2)^2 + \xi_2^2}}, -\frac{\xi_2 \psi_1}{\sqrt{(\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2)^2 + \xi_2^2}}$$

bağıntısıyla verilir. Burada  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \psi_1$  ve  $\psi_2$  ifadeleri

$$\xi_1 = \frac{v \tau^{*'} (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - v \tau^* (\kappa^* \tau^{*'})' + \eta \tau^{*2} \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}},$$

$$\xi_2 = \frac{\kappa^{*'} (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - 2 \kappa^* (\kappa^* \tau^{*'})'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2},$$

$$\xi_3 = \frac{\eta \kappa^* \tau^* \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} + v \kappa^{*2} (\kappa^{*'} - \tau^{*'}) - v \kappa^{*'} \tau^* (\kappa^* - \tau^*)}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}},$$

$$\psi_1 = \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}},$$

$$\psi_2 = \frac{\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}$$

şeklinde birer katsayıdır.

**İspat:**  $\Gamma_3^*$  yüzeyinde (2.6) ve (2.8) bağıntısı dikkate alınırsa

$$\Gamma_3^*(s, v) = \alpha^*(s) + \frac{\kappa^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} N^* + v \left( \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} T^* + \frac{\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} B^* \right)$$

olur. Parametrelere göre türevler hesaplanırsa

$$\Gamma_{3s}^* = \xi_1 T^* + \xi_2 N^* + \xi_3 B^*,$$

$$\Gamma_{3v}^* = \psi_1 T^* + \psi_2 B^*$$



bulunur. Bu ifadeler (2.7) bağıntısında yerine yazılırsa yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 4.14.**  $\Gamma_3^*$  regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\Gamma_3^*} = -\frac{\xi_2^2 (\psi_1 \sigma_3 - \psi_2 \sigma_1)^2}{\left(\xi_2^2 + (\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2)^2\right) \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - (\xi_1 \psi_1 + \xi_3 \psi_2)^2\right)},$$

$$H_{\Gamma_3^*} = \frac{\xi_3 \psi_1 \omega_2 - \xi_1 \psi_2 \omega_2 + \xi_2 (\psi_1 (-\omega_3 + 2\xi_1 \psi_1 \sigma_3) + \psi_2 (\omega_1 + 2\xi_3 \psi_1 \sigma_3 - 2(\xi_1 \psi_1 + \xi_3 \psi_2) \sigma_1))}{2\sqrt{\xi_2^2 + (\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2)^2} \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - (\xi_1 \psi_1 + \xi_3 \psi_2)^2\right)}$$

şeklinde verilir. Burada  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$  ifadeleri

$$\omega_1 = +\frac{\left(\eta' \tau^{*2} - 3\eta \kappa^* \kappa'\right) (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) + 4\eta \kappa^{*2} (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} + \frac{2\nu \tau^{*'} (\kappa^* \tau^*)' - \nu \tau^* (\kappa^{*'}2 + \tau^{*'}2 + \kappa^* \kappa^{*''} + \tau^* \tau^{*''})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}} + \frac{3\nu \tau^* (\kappa^* \tau^*)'^2 + \nu \tau^{*''} (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{5/2}},$$

$$\omega_2 = \frac{\nu \eta (\tau^* \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'})}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \frac{4\kappa^{*'} (\kappa^* \tau^*)' + 2\kappa^* (\kappa^{*'}2 + \tau^{*'}2 + \kappa^* \kappa^{*''} + \tau^* \tau^{*''})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} + \frac{4\kappa^* (\kappa^* \tau^*)'^2 + \kappa^{*''} (\kappa^{*2} + \tau^{*2})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^3},$$

$$\omega_3 = \frac{\kappa^* \tau^* \eta' + 2\eta \tau^* \kappa' + \eta \kappa^* \tau^*}{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} - \frac{4\eta \kappa^* \tau^* (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} - \frac{2\nu \kappa^{*'} (\kappa^* \tau^*)' + \nu \kappa^* (\kappa^{*'}2 + \tau^{*'}2 + \kappa^* \kappa^{*''} + \tau^* \tau^{*''})}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}} + \frac{3\nu \kappa^* (\kappa^* \tau^*)'^2 + \nu \kappa^{*''} (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{5/2}},$$

$$\sigma_1 = \frac{\tau^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \frac{\tau^* (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}},$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{\kappa^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \frac{\kappa^* (\kappa^* \tau^*)'}{(\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{3/2}}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\Gamma_3^*$  yüzeyinin parametrelere göre ikinci türevleri alırsa

$$\Gamma_{3ss}^* = \omega_1 T^* + \omega_2 N^* + \omega_3 B^*,$$

$$\Gamma_{3sv}^* = \sigma_1 T^* + \sigma_3 B^*,$$

$$\Gamma_{3vv}^* = 0$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntısından birinci ve ikinci temel formun katsayıları

$$E_{f_3^*} = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad F_{f_3^*} = \xi_1 \psi_1 + \xi_3 \psi_2, \quad G_{f_3^*} = 1,$$

$$l_{f_3^*} = \frac{\xi_2 \psi_2 \omega_1 + \xi_3 \psi_1 \omega_2 - \xi_1 \psi_2 \omega_2 - \xi_2 \psi_1 \omega_3}{\sqrt{\xi_2^2 + (\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2)^2}},$$

$$m_{f_3^*} = \frac{\xi_2 (-\psi_1 \sigma_3 + \psi_2 \sigma_1)}{\sqrt{\xi_2^2 + (\xi_3 \psi_1 - \xi_1 \psi_2)^2}},$$

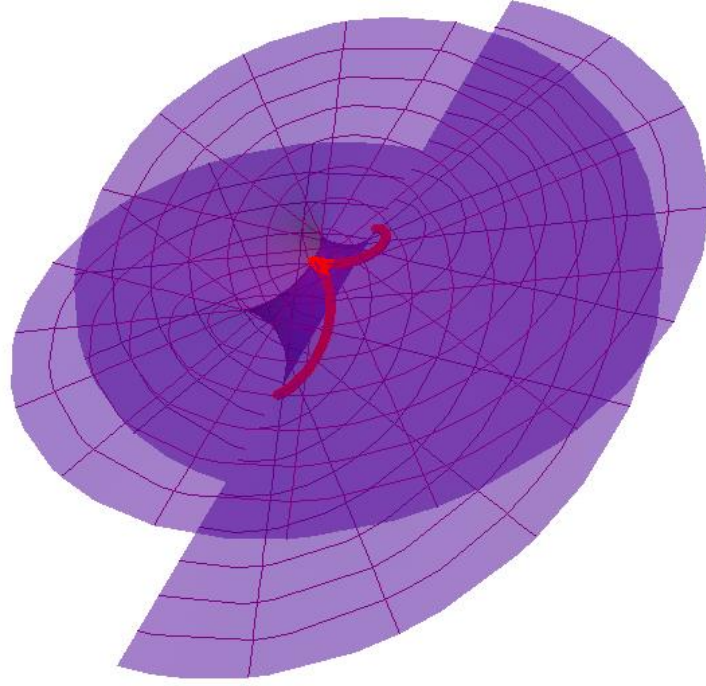
$$n_{f_3^*} = 0$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) ifadesinde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler bulunur.

**Sonuç 4.11**  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisi çember ise ( $\kappa^*$  sabit ve  $\tau^* = 0$ )  $\Gamma_3^*$  Sannia regle yüzeyi açılabilir yüzeydir.

**Örnek 4.2** Örnek 3 de verilen  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisi dayanak eğrisi ve bu involüt eğrinin normal vektörü doğrultmanı olan  $X_{N^*}(s, v)$  regle yüzeyin denklemi ve grafiği aşağıdaki gibidir.

$$X_{N^*}(s, v) = \left. \begin{array}{l} v \sin(2s) + \frac{1}{12}(9 \cos(s) + \cos(3s) + 3s(3 \sin(s) + \sin(3s))), \\ \frac{1}{12}(-12s \cos(s)^3 - 12v \cos(2s) + 9 \sin(s) + \sin(3s)), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right\} \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.5**  $s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisi (kırmızı) ve  $X_{N^*}$  yüzeyinin grafiği.

$X_{N^*}$  regle yüzeyin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi (2.11) bağıntısından

$$\beta^*(s) = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9 \cos(s) + \cos(3s) + 6s \sin(s)^3), \\ \frac{1}{24}(-9s \cos(s) + 3s \cos(3s) + 2(9 \sin(s) + \sin(3s))), \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}(\cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right\}$$

şeklinde bulunur. Striksiyon eğrisi boyunca Sannia çatısının vektörleri

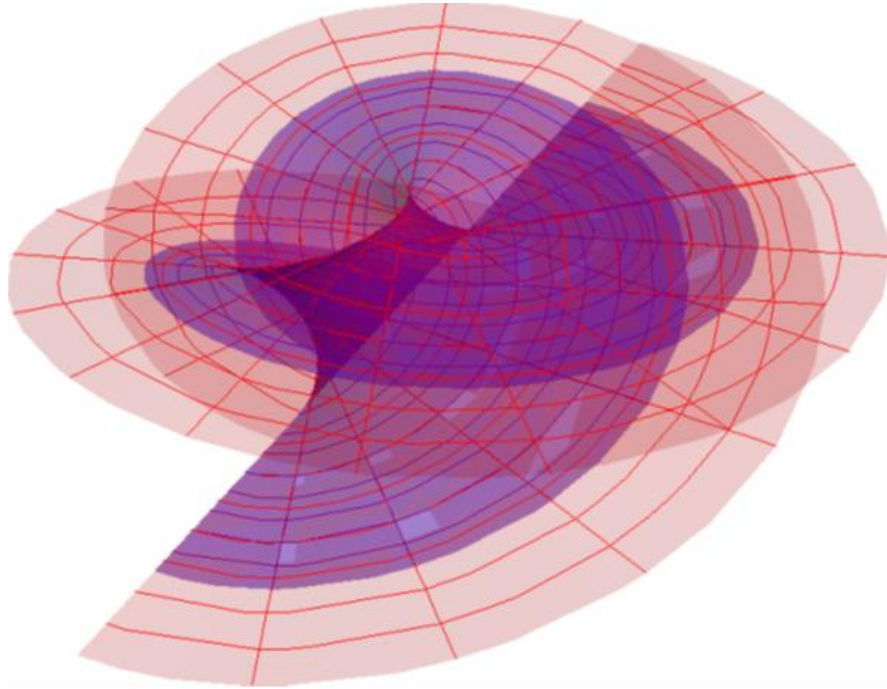
$$f_1^*(s) = (\sin(2s), -\cos(2s), 0)$$

$$f_2^*(s) = (\cos(2s), \sin(2s), 0)$$

$$f_3^*(s) = (0, 0, 1)$$

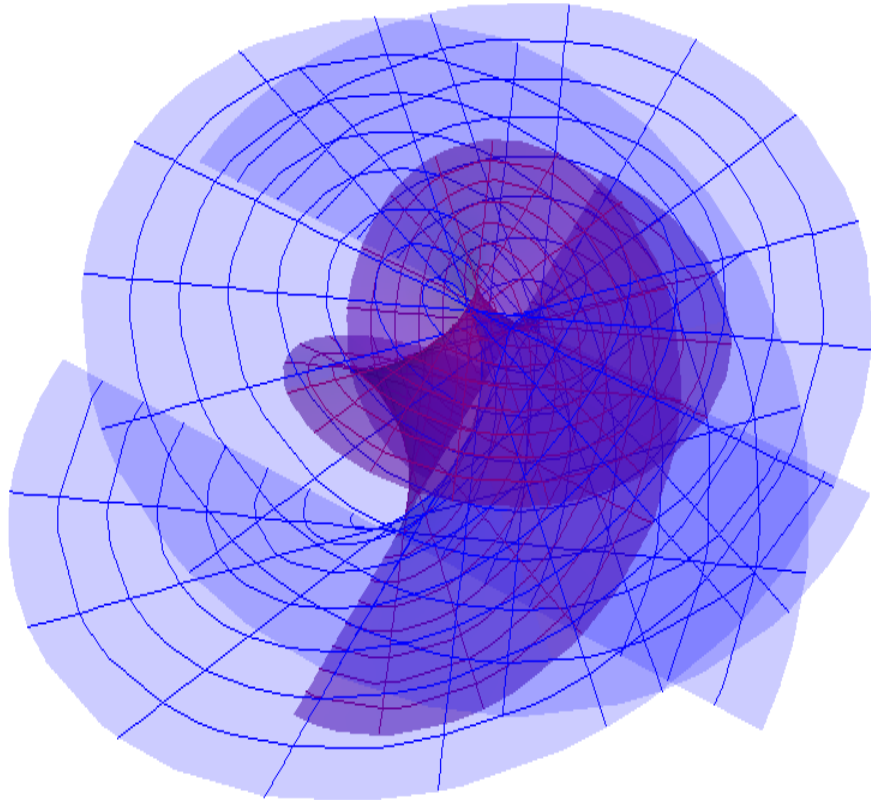
Şeklinde hesaplanır. Buna göre striksiyon eğrisi boyunca sanna vektörlerinin çizdiği regle yüzeylerin denklemleri sırasıyla

$$\Gamma_1^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} v \sin(2s) + \frac{1}{12} (9 \cos(s) + \cos(3s) + 3s(3 \sin(s) + \sin(3s))), \\ \frac{1}{12} (-12s \cos(s)^3 - 12v \cos(2s) + 9 \sin(s) + \sin(3s)), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} (\cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



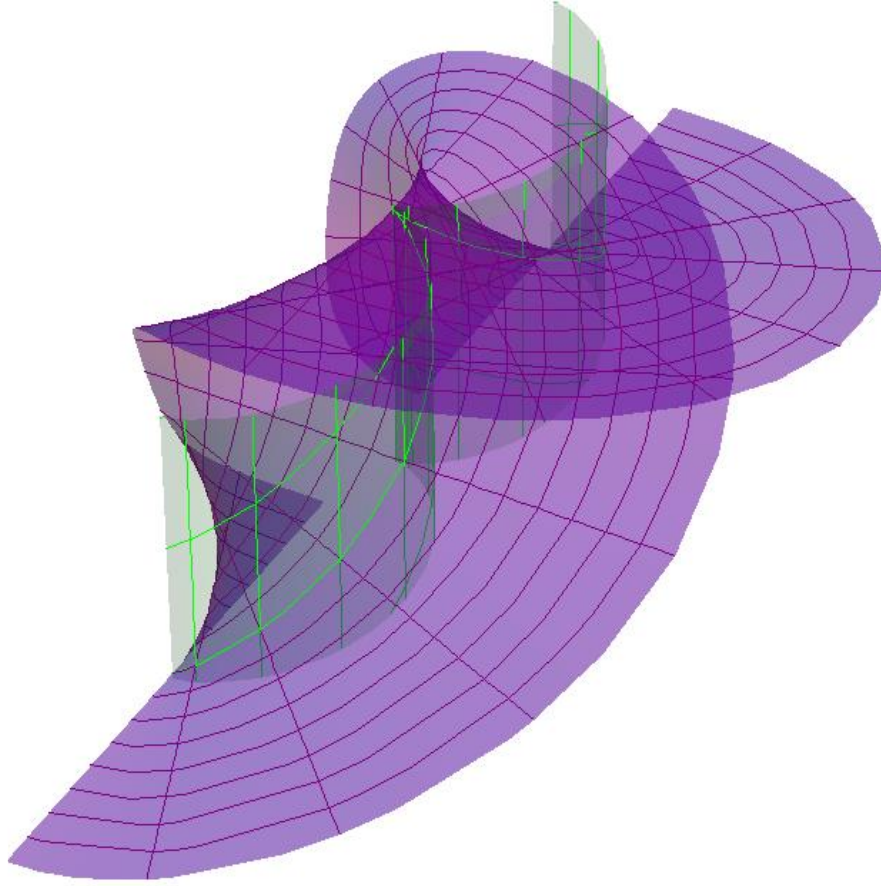
**Şekil 4.6**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-1, 1]$  değerleri için  $\Gamma_1^*$  (kırmızı) ve  $X_{N^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.

$$\Gamma_2^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} v \cos(2s) + \frac{1}{12} (9 \cos(s) + \cos(3s) + 3s(3 \sin(s) + \sin(3s))), \\ -s \cos(s)^3 + \frac{1}{6} (5 + 12v \cos(s) + \cos(2s)) \sin(s), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} (\cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.7**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-1, 1]$  değerleri için  $\Gamma_2^*$  (mavi) ve  $X_{N^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.

$$\Gamma_3^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12} (9 \cos(s) + \cos(3s) + 3s(3 \sin(s) + \sin(3s))), \\ \frac{1}{12} (-12s \cos(s)^3 + 9 \sin(s) + \sin(3s)), v - \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.8**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-1, 1]$  değerleri için  $\Gamma_3^*$  (yeşil) ve  $X_{N^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.

### 4.3 İnvolut Eğrisinin Binormal Yüzeyine Ait Sannia Çatısına Göre Regle Yüzeyler

$\alpha$  eğrisinin involüt eğrisi  $\alpha^*$  olsun. İnvolut eğrisinin binormal vektörünün oluşturduğu regle yüzeyin denklemi

$$X_{B^*}(s, v) = \alpha^*(s) + vB^*(s)$$

şeklinde yazılır.

$B^*$  vektörünün oluşturduğu regle yüzeylerin striksiyon eğrileri boyunca Sannia çatıları tanımlanacak her vektörün çizdiği regle yüzeylere ait sannia çatıları elde edilecektir.

**Teorem 4.15**  $X_{B^*}$  regle yüzeyin striksiyon eğrisi üzerinde tanımlı Sannia çatısı  $\{g_1^*, g_2^*, g_3^*\}$  ile gösterilsin. Sannia çatısı ile Frenet çatısı arasında

$$g_1^* = B^*, g_2^* = -N^*, g_3^* = T^*$$

bağıntısı vardır.

**İspat:** (2.11) denkleminde involüt eğrisinin binormal regle yüzeyinin striksiyon eğrisi  $\beta^*(s) = \alpha^*(s)$  olur.  $X_{B^*}$  binormal regle yüzey tanımı dikkate alındığında  $g_1^* = B^*$  yazılır. (2.1) denkleminde  $g_2^*$  ve  $g_3^*$  vektörleri hesaplanmış olur.

**Tanım 4.7**  $X_{B^*}$ , regle yüzeyinin  $\beta^*$  striksiyon eğrisi boyunca  $g_1^*$ ,  $g_2^*$  ve  $g_3^*$  vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\Psi_1^*(s, v) = \beta^*(s) + vg_1^*(s),$$

$$\Psi_2^*(s, v) = \beta^*(s) + vg_2^*(s),$$

$$\Psi_3^*(s, v) = \beta^*(s) + vg_3^*(s)$$

şeklinde yazılır. Bu yüzeyler  $\Psi_1^*$  regle yüzeyi,  $\Psi_2^*$  regle ve  $\Psi_3^*$  regle yüzeyi olarak adlandırılacaktır.

**Sonuç 4.12**  $X_{T^*}$  ve  $X_{B^*}$  regle yüzeylerinin striksiyon eğrileri dolayısıyla bu eğriler boyunca tanımlanan Sannia çatıları aynıdır. Bu nedenle aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir:

- i.  $\Psi_1^*$  ve  $\Phi_3^*$  regle yüzeylerin normalleri, birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri aynıdır.
- ii.  $\Psi_3^*$  ve  $\Phi_1^*$  regle yüzeylerin normalleri, birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri aynıdır.

**Teorem 4.16**  $\Psi_2^*(s, v)$  regle yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N_{\Psi_2^*}(s, v) = -\frac{v\tau^* T^* + (1 + v\kappa^*) B^*}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 + v\kappa^*)^2}}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\beta^*(s) = \alpha^*(s)$  olduğundan  $\Psi_2^*(s, v)$  regle yüzeyi

$$\Psi_2^*(s, v) = \alpha^*(s) - vN^*(s)$$

şeklinde yazılır. Buradan kısmi türevler alınır

$$\Psi_{2s}^* = \eta(1 + v\kappa^*) T^* - v\eta\tau^* B^*,$$

$$\Psi_{2v}^* = -N^*$$

bulunur. (2.7) bağıntısından yüzey normali hesaplanmış olur.

**Teorem 4.17**  $\Psi_2^*(s, v)$  regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ile Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$I_{\Psi_2^*} = \eta^2 \left( (1 + v\kappa^*)^2 + (v\tau^*)^2 \right) ds^2 + dv^2,$$

$$II_{\Psi_2^*} = \frac{\eta \left( v^2 (\tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'}) + v\tau^{*'} \right)}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 + v\kappa^*)^2}} ds^2 + \frac{2\eta\tau^*}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 + v\kappa^*)^2}} dsdv,$$

$$K_{\Psi_2^*} = -\frac{\tau^{*2}}{\left( v^2 \tau^{*2} + (1 + v\kappa^*)^2 \right)^2},$$

$$H_{\Psi_2^*} = \frac{v^2 (\tau^{*'} \kappa^* - \tau^* \kappa^{*'}) + v\tau^{*'}}{2\eta \left( v^2 \tau^{*2} + (1 + v\kappa^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat:**  $\Psi_2^*(s, v)$  yüzeyinin parametrelere göre ikinci türevleri alınır

$$\Psi_{2ss}^* = \left( \eta' + v\kappa^* \eta' + v\eta\kappa^{*'} \right) T^* + \left( \eta^2 \kappa^* + v\eta^2 \kappa^{*2} + v\eta^2 \tau^{*2} \right) N^* - \left( v\tau^* \eta' + v\eta\tau^{*'} \right) B^*,$$

$$\Psi_{2sv}^* = \eta\kappa^* T^* - \eta\tau^* B^*, \quad \Psi_{2vv}^* = 0$$

olur. (2.9) ve (2.10) bağıntılarından birinci ve ikinci temel formun katsayıları



$$\begin{aligned}
E_{\Psi_2^*} &= \eta^2 \left( (1 + v\kappa^*)^2 + (v\tau^*)^2 \right), \\
F_{\Psi_2^*} &= 0, \\
G_{\Psi_2^*} &= 1, \\
l_{\Psi_2^*} &= \frac{\eta \left( v^2 (\tau^* \kappa^* - \tau^* \kappa^*) + v\tau^* \right)}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 + v\kappa^*)^2}}, \\
m_{\Psi_2^*} &= \frac{\eta \tau^*}{\sqrt{v^2 \tau^{*2} + (1 + v\kappa^*)^2}}, \\
n_{\Psi_2^*} &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (2.8) denkleminde yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış olur.

**Sonuç 4.13** Eğer  $\tau^* = 0$  ise  $\Psi_2^*$  Sannia regle yüzeyi açılabilir ve minimaldir yüzeydir.

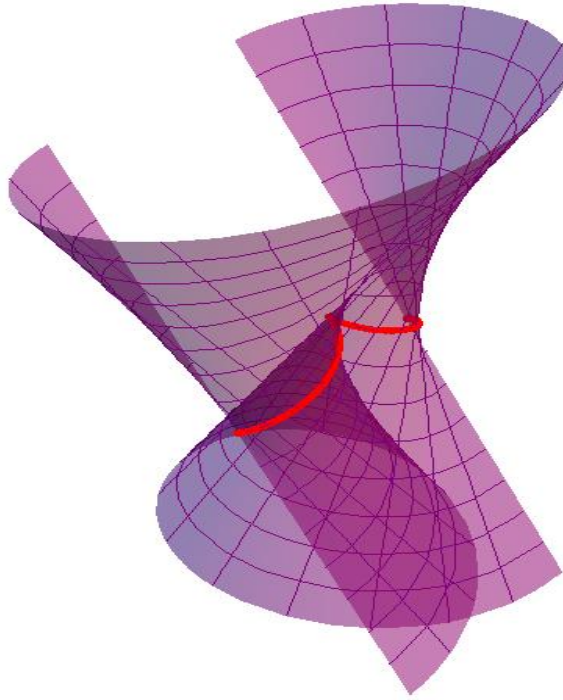
**Sonuç 4.14** Teorem 4.17 de verilen  $K_{\Psi_2^*}$  ve  $H_{\Psi_2^*}$  ifadelerinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  yerine (3.8) denkleminde karşılıkları yazılırsa,  $\Psi_2^*(s, v)$  regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri esas eğrinin eğriliklerine bağlı ifadeleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
K_{\Psi_2^*} &= - \frac{\lambda^2 \kappa^2 (\kappa^2 + \tau^2)^2 (\kappa \tau' - \kappa' \tau)^2}{\left( v^2 (\kappa \tau' - \kappa' \tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^2 (\lambda \kappa + v \sqrt{\kappa^2 + \tau^2})^2 \right)^2}, \\
H_{\Psi_2^*} &= \frac{\left( \frac{(\kappa \tau' - \kappa' \tau)}{\lambda \kappa (\kappa^2 + \tau^2)} \right)' \left( \frac{v^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} + v \lambda \kappa}{\lambda \kappa} \right) - \frac{v^2 (\kappa \tau' - \kappa' \tau)}{\lambda \kappa (\kappa^2 + \tau^2)} \left( \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\lambda \kappa} \right)'}{2\eta \left( \frac{v^2 (\kappa \tau' - \kappa' \tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^2 (\lambda \kappa + v \sqrt{\kappa^2 + \tau^2})^2}{\lambda^2 \kappa^2 (\kappa^2 + \tau^2)^2} \right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

**Örnek 4.3** Örnek 3.1 de verilen  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisi dayanak eğrisi ve involüt eğrisinin binormal vektörü doğrultman vektör olarak alındığında  $X_{B^*}(s, v)$  regle yüzeyin denklemi ve grafiği aşağıdaki gibidir.

$$X_{B^*}(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9 \cos(s) + 6v \cos(2s) + \cos(3s) + 9s \sin(s) + 3s \sin(3s)), \\ v \cos(s) \sin(s) - s \cos(s)^3 + \frac{1}{12}(9 \sin(s) + \sin(3s)), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(-v + \cos(s) + s \sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.9**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  için  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisi (kırmızı) ve  $X_{B^*}$  yüzeyinin grafiği.

$X_{B^*}$  regle yüzeyin striksiyon eğrisi boyunca Sannia vektörleri

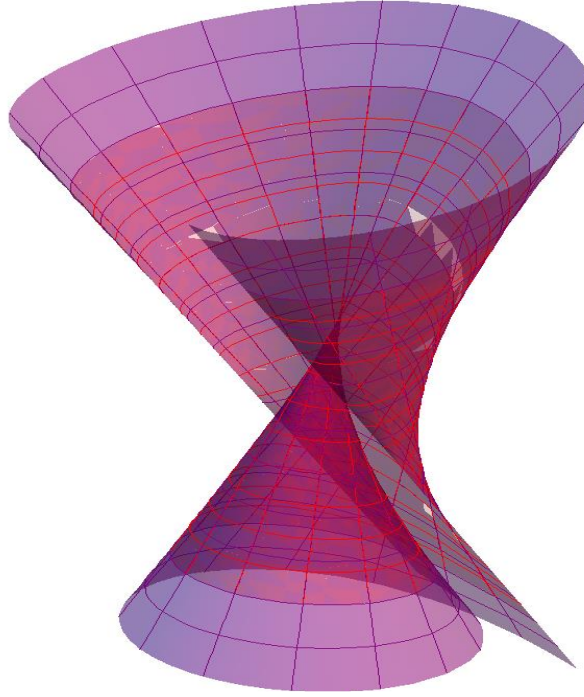
$$g_1^*(s) = \left( \frac{1}{2} \cos(2s), \cos(s) \sin(s), \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$g_2^*(s) = (-\sin(2s), \cos(2s), 0)$$

$$g_3^*(s) = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2s), -\sqrt{3} \cos(s) \sin(s), \frac{1}{2} \right)$$

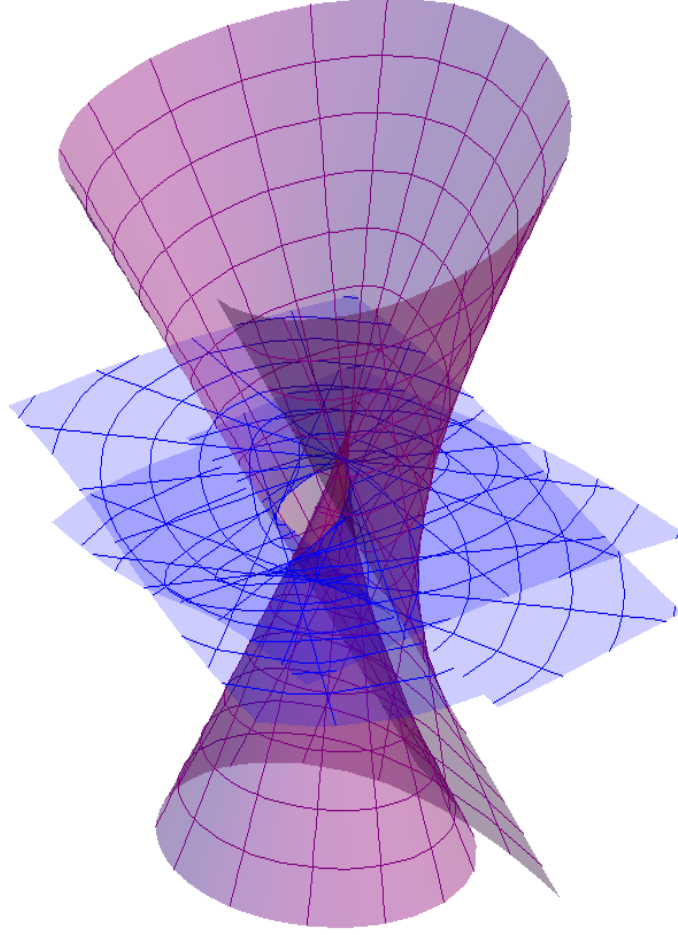
şeklinde bulunur. Sannia vektörlerinin striksiyon eğrisi boyunca çizdiği regle yüzeylerinin denklemleri ve grafikleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\Psi_1^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(9 \cos(s) + 6v \cos(2s) + \cos(3s) + 9s \sin(s) + 3s \sin(3s)), \\ v \cos(s) \sin(s) - s \cos(s)^3 + \frac{1}{12}(9 \sin(s) + \sin(3s)), \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(v - \cos(s) - s \sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



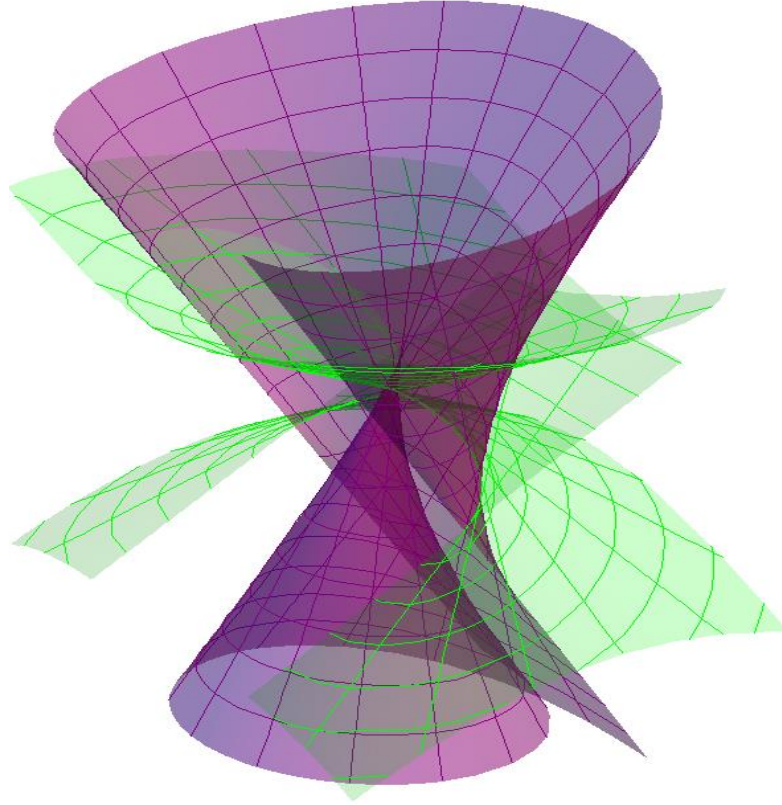
**Şekil 4.10**  $s \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  değerleri için  $\Psi_1^*$  (kırmızı) ve  $X_{B^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.

$$\Psi_2^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12}(\cos(3s) + 6s(2 + \cos(2s))\sin(s) + \cos(s)(9 - 24v\sin(s))), \\ v\cos(2s) + \frac{1}{12}(-12s\cos(s)^3 + 9\sin(s) + \sin(3s)), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(s) + s\sin(s)) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.11**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  değerleri için  $\Psi_2^*$  (mavi) ve  $X_{B^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.

$$\Psi_3^*(s, v) = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{12} (9 \cos(s) - 6\sqrt{3}v \cos(2s) + \cos(3s) + 9s \sin(s) + 3s \sin(3s)), \\ \frac{1}{6} (5 + \cos(2s)) \sin(s) - s \cos(s)^3 - \sqrt{3}v \cos(s) \sin(s), \\ \frac{1}{2} (v - \sqrt{3}(\cos(s) + s \sin(s))) \end{array} \right) \text{ yüzeyi}$$



**Şekil 4.12**  $s \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  ve  $v \in [-2, 2]$  değerleri için  $\Psi_3^*$  (yeşil) ve  $X_{B^*}$  (mor) yüzeyinin grafiği.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmadaki orijinal kısım Bölüm 4 de verilmiş olup üç alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Bölüm 3 de elde edilen bir uzay eğrisinin vektörleri ile oluşturan regle yüzeylerin striksiyon eğrisi boyunca tanımlanan Sannia çatılı regle yüzeyler göz önüne alınmış ve involut eğri boyunca tanımlanan Sannia çatılı regle yüzeylerin açılabilir ve minimal olma koşulları araştırılmıştır.

Bölüm 4 ün ilk alt bölümü olan 4.1 de involut eğrinin teğet vektörüyle oluşturulan regle yüzeylerin striksiyon eğrisi boyunca tanımlanan Sannia çatılı regle yüzeyin açılabilir ve minimal olma şartları verilmiştir. Bölüm 4 ün ikinci alt bölümü olan 4.2 de involut eğrinin normal vektörüyle oluşturulan regle yüzeylerin striksiyon eğrisi boyunca tanımlanan Sannia çatılı regle yüzeyin açılabilir ve minimal olma şartları araştırılmıştır. Bölüm 4 ün üçüncü alt bölümü olan 4.3 de involut eğrinin binormal vektörüyle oluşturulan regle yüzeylerin striksiyon eğrisi boyunca tanımlanan Sannia çatılı regle yüzeyin açılabilir ve minimal olma şartları verilmiştir. Bu üç yüzey için ayrı ayrı örnekler verilip grafikleri çizilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen teoremler ve sonuçlar, Evolut eğrisi, Bertrand ve Mannheim eğrileri için de incelenebilir. Ayrıca bu çalışmanın benzeri Minkowski uzayında da yapılabilir.

## 6.KAYNAKLAR

- Anonim [https://www.researchgate.net/figure/30-St-Mary-Axe-London-England-Norman-Foster-2003-an+d-Burj-Khalifa-Dubai-UAE-Adrian\\_fig4\\_329971916](https://www.researchgate.net/figure/30-St-Mary-Axe-London-England-Norman-Foster-2003-an+d-Burj-Khalifa-Dubai-UAE-Adrian_fig4_329971916) (Eriřim tarihi 10.07.2024)
- Anonim <https://tr.pinterest.com/pin/santiago-calatrava-fabio-reinhardt-bruno-reichlin--176907091588092437/> (Eriřim tarihi 10.07.2024)
- Anonim [https://www.icmimarlikdergisi.com/2016/11/10/haydar-aliyev-kultur-merkezi/#google\\_vignette](https://www.icmimarlikdergisi.com/2016/11/10/haydar-aliyev-kultur-merkezi/#google_vignette) (Eriřim tarihi 10.07.2024)
- Anonim [https://en.wikipedia.org/wiki/Gustavo\\_Sannia](https://en.wikipedia.org/wiki/Gustavo_Sannia) (Eriřim tarihi 10.07.2024)
- Bilici, M. (1999). İnvolut-evolut eğrilerinin küresel göstergelerinin eğrilikleri ve tabii liftleri. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Samsun.
- Bilici, M. & Çalışkan, M. (2002). Some characterizations for the pair of involute-evolute curves in euclidean space. *Bulletin of Pure And Applied Sciences*, 21E (2), 289-294.
- Hacısalıhoğlu, HH. & Sabuncuoğlu, A. (1983). Diferansiyel geometri. M.E.B. İstanbul,324s.
- Hacısalıhoğlu, HH. (2000). Diferansiyel geometri. Ankara Üniversitesi Yayınları. Cilt II, 340s.
- Kelleci, A. & Eren, K. (2020). On evolution of some associated type ruled surfaces. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 8(2), 178-186.
- Özdemir, M. (2020). Diferansiyel geometri. Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 448s.
- Pottmann, H. & Wallner, J. (2001). Computational Line Geometry. Springer-Verlag, Berlin. 565s.
- Pressley, A. (2010). Elementary Differential Geometry. Second Edition, Springer London Ltd, London UK, 474s.
- Sabuncuoğlu, A. (2016). Diferansiyel Geometri. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 513s.
- Sarıođlugil, A. & Tutar, A. (2007). On ruled surfaces in Euclidean space  $E^3$ . *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2(1), 1-11.
- Sivas, S., Şenyurt, S. & Çalışkan, A. (2023). Smarandache Curves of Involute-Evolute Curve According to Frenet Frame. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 4(1), 35-45.
- Şenyurt, S., Bilici, M., Çalışkan, M. (2015).Some characterizations for the involute curves in dual space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 1, 113-125.
- Şenyurt, S., Ayvacı, H.K. & Canlı, D. (2021). Some characterizations of spherical indicatrix curves generated by sannia frame. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9 (2), 222-232.

- Şenyurt, S. & Eren, K. (2022). On ruled surfaces with a Sannia frame in Euclidean 3-space. *Kyungpook Mathematical Journal*, 62, 509-531.
- Şenyurt, S., Canlı, D. & Ayvacı, H.K. (2024). On ruled surfaces generated by Sannia frame based on alternative frame. *Honam Mathematical Journal*, 46(1), 12-37.
- Yazar, T. (2019). Mimarlıkta yüzey panelleme yaklaşımlarının gauss eğriliği ile ilişkisi. *Megaron*, 14(1),18-30.



## ÖZGEÇMİŞ

<b>Kişisel Bilgiler</b>	
Adı Soyadı	HATİCE YURTTAŞ
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	.....@gmail.com
<b>Eğitim Bilgileri</b>	
<b>Lisans</b>	
Üniversite	BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
Fakülte	FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
Bölümü	MATEMATİK
Mezuniyet Yılı	15.07.1998
<b>Yüksek Lisans</b>	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
<b>Doktora</b>	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
<b>Bildiriler</b>	
Şenyurt S., Yurttaş H.,Eren K. (2024). Ruled Surfaces Genereted By Sannia Frame According To İnvolute Curve. 20th International Geometry Symposium (Özet metin/Sözlü Sunum)	