T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARÇALI LİNEER MODELLER ALTINDA PARAMETRE TAHMİNLERİ VE TAHMİN EDİCİLER ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

HARUN SAKA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

HARUN SAKA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

PARÇALI LİNEER MODELLER ALTINDA PARAMETRE TAHMİNLERİ VE TAHMİN EDİCİLER ARASINDAKİ BAZI İLİŞKİLER

HARUN SAKA

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 114 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek kısa bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve genel bilgiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde genel lineer model ve onun kısıtlamalı modeli altında parametrelerin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) gözönüne alınmıştır. Ayrıca genel model altındaki tahmin ediciler ile kısıtlamalı lineer model altındaki tahmin edicilerin eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Dörtüncü bölümde parçalı lineer modeller altında parametrelerin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) gözönüne alınmıştır. Ayrıca eşitlik veya eşitsizlik kısıtlamalı parçalı lineer modeller altındaki tahmin edicilerin eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Beşinci bölümde ise sonuç ve öneriler verilmistir. Altıncı bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris, Rank, Genelleştirilmiş İnvers, Lineer Model, Kısıtlamalı Model, Parçalı Lineer Model, Kovaryans Matrisi, Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi, En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici.

ABSTRACT

PARAMETER ESTIMATIONS UNDER PARTITIONED LINEAR MODELS AND SOME RELATIONS BETWEEN PARAMETER ESTIMATORS

HARUN SAKA

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 114 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in six parts. In the first chapter, an introduction is given by mentioning the purpose of the study. In the second chapter, the basic definitions, theorems and general information that will be required in our study are expressed. In the third chapter, the ordinary least squares estimator (OLSE) and the best linear unbiased estimator (BLUE) of parameters under a general linear model and its equality constrained model are considered. Also, some necessary and sufficient conditions are investigated for equalities of estimators under a general linear model and its constrained model. In the fourth chapter, the ordinary least squares estimator (OLSE) and the best linear unbiased estimator (BLUE) of parameters under partitioned linear model are considered. Furthermore, some necessary and sufficient conditions are investigated for equalities of estimators under equality or inequality constrained partitioned linear models. In the fifth chapter, conclusions and recommendations are given. In the sixth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Rank, Generalized Inverse, Linear Model, Constrained Model, Partitioned Linear Model, Covariance Matrix, Ordinary Least Squares Estimator, Best Linear Unbiased Estimator.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve tüm çalışmalarım boyunca her zaman üstün bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bu zorlu süreçte daima desteğini hissettiğim değerli eşim Serap SAKA’ya, hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemde destek veren değerli aileme teşekkür ederim.

Ayrıca Lisans ve Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{K_n^m} = \boldsymbol{K}^{\mathbf{m\times n}}$	: K Cismi Üzerinde Tanımlı $m\times n$ Boyutlu Tüm Matrislerin Kümesi
I_n	: $n\times n$ Boyutlu Birim Matris
$\boldsymbol{A^T}$	: A Matrsinin Tranzpozu
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Ek Matrisi
$\|\boldsymbol{A}\|$	: A Matrisinin Determinantı
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A Matrisinin İnversi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Rankı
$\boldsymbol{A}^{\perp}$	: A Matrisinin Ortogonal Bütünleyeni
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Sıfır Uzayı
$\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$	: A Matrisinin Ranj (Sütun) Uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$	: A Matrisinin Genelleştirilmiş Inversi (Iç Inversi)
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$	: A Matrisinin Moore-Penrose Inversi
$\boldsymbol{OLSE}(\boldsymbol{\beta}) = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$	: β Parametresinin Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicisi
$\boldsymbol{BLUE}(\boldsymbol{\beta}) = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}$	: β Parametresinin En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici
$\|\|\boldsymbol{u}\|\|$	: u Vektörünün Öklid Normu
$\boldsymbol{boy}(\mathbf{u})$	: u Vektörünün Boyutu
$\boldsymbol{min}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$	: a ve b Sayılarının Minimumu
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{V})$	: a ortalamalı V Varyanslı Normal Dağılım
$\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{z})$	: $f(z)$ Fonksiyonunun Türevi
$\boldsymbol{\sigma^2 V}$	: Kovaryans Matrisi
$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X})$	: X Rasgele Değişkeninin Kovaryansı
$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$	: X ve Y Rasgele Değişkenleri Arasındaki Kovaryans
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$	: X Rasgele Değişkeninin Beklenen Değeri
$\boldsymbol{var}(\boldsymbol{X})$	: X Rasgele Değişkeninin Varyansı

1. GİRİŞ

Bugün matris teorisi ve matris inversleri üzerine inşa edilen lineer modeler ve bunun çeşitli uygulamaları başta teorik matematik ve istatistik olmak üzere, sosyoloji, kimya, fizik, yazılım mühendisliği ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda oldukça önemli bir yere sahiptir. Matris teorisi uzun yıllardır bilinmekte ve oldukça yaygın şekilde kullanılmaktadır. Matris kavramı ilk olarak 1850 yılında İngiliz matematikçi Sylvester tarafından kullanmış ve daha sonra 1853 yılında yine bir İngiliz matematikçisi olan Hamilton '*Lineer and Vector Functions'* isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden yararlanmasına rağmen henüz matris ismini kullanmamıştır. 1858 yılında ise bir diğer İngiliz matematikçi Cayley ise kendi zamanında oldukça meşhur olan *'Memorie on the Theory of Matrices*' isimli eserinde matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. İlerleyen yıllarda Cayley' in çalışmalarından yararlanarak Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili çeşitli yeni kavramlar ve teoremler üzerinde önemli çalışmalarda bulunmuşlardır.

Bir singüler matrisin inversi kavramı ise ilk kez 1920 yılında Moore(1920) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak ta ki 1950 li yılların ortalarına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki yıllarda yapılan çalışmalardan tamamen bağımsız olarak, Penrose(1955, 1956) daha farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını yeniden tanımlamıştır. Penrose ile hemen hemen aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından Rao(1965) tarafından tanımlanan ve geliştirilen Pseuda invers ise Moore ve Penrose tarafından verilen kısıtlamaların tamamını sağlamamaktadır. Rao, daha sonraki çalışmalarında lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olan ve Moore ve Penrose tarafından verilen tanımlardan daha da zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g-invers) olarak adlandırılmış ve bunun çeşitli uygulamaları Rao(1965)' nun çalışmalarında deyatlı bir şekilde yer almıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili önemli gelişmeler ve bunların uygulamaları 1971 yılında yine Rao tarafından hazırlanan *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* isimli kitapta verilmiştir.

Matris denildiğinde ilk akla gelen kavramlardan birisi de rank kavramıdır. Bir matrisin sütunlarının ya da satırlarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, verilen matrisin elementer matris işlemler yardımıyla satır veya sütun eşelon formlara indirgenmesidir. Herhangi bir matris ifadesi verildiğinde, bu ifade ile ilgili çeşitli rank eşitlikleri kurulabilir ve bu eşitliklerinden yararlanarak verilen ifadenin bazı temel özellikleri ortaya konulabilir. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri kullanılarak pek çok önemli rank eşitlikleri verilmiş ve bu eşitliklerden önemli sonuç türetilmiştir.

Regresyon, bir bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi belirlemektir. Regresyon analizi, bağımsız değişkenlerin bazıları değiştiğinde bağımlı değişkenin nasıl değiştiğini anlamaya yardımcı olmaktadır. Bu yöntem değişkenler arasındaki neden sonuç ilişkisini tahmin etmek ve belirlemek için kullanılır. Regresyon teknikleri çoğunlukla bağımsız değişkenlerin sayısına ve bağımsız ve bağımlı değişkenler arasındaki ilişkinin türüne göre farklılık gösterebilir ve tahmin yapmak için kullanılan çeşitli regresyon teknikleri mevcuttur.

Lineer korelasyon ve basit lineer regresyon, iki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi inceleyen istatistiksel yöntemlerdir. Burada şu farklılığı vurgulamak faydalı olacaktır: Korelasyon, iki değişkenin ne kadar ilişkili olduğunu gösterirken, doğrusal regresyon, iki değişken arasındaki ilişkiye dayanarak birinin değerini diğerinden tahmin etmeyi sağlayan bir denklem (veya model) oluşturmayı içermektedir. Doğrusal regresyon, bir dizi noktaya en uygun düz çizgiyi veya hiper düzlemi bulmak için kullanılmaktadır. Bir diğer ifadeyle doğrusal regresyon, en uygun düz çizgi (regresyon çizgisi olarak da bilinir**)** kullanarak bağımlı değişken ile bir veya daha fazla bağımsız değişken arasında bir ilişki kurmaktır.

Lineer (Doğrusal) regresyon istatistiksel veri analizinde sıkça kullanılan bir yöntemdir. Lineer regresyon, doğrusal ve sürekli değişkenler için kullanılan bir yöntemdir. Değişkenler arasında doğrusal ilişki gözlendiğinde geleceğe dair tahminde bulunmak, değişkenlerin birbirleri üzerinde nasıl etkide bulunduğunu incelemek ve çıkarım yapmak için doğrusal regresyon modeli kullanılır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Matrislerle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı önemli tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 K keyfi bir cisim olmak üzere K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane lineer denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ 1 \le i \le m$$

biçiminde tanımlanır. Burada, x_j , $1 \le j \le n$ ler bilinmeyenler, a_{ij}, $1 \le i \le m$ ler bilinen katsayılar ve b_i ler ise bilinen reel sayılardır. Bu denklem sistemi daha açık olarak

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

şeklinde yazılır (Hacısalihoğlu,1977).

Tanım 2.2

(i) Bir K cismi verilmiş olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \le i \le m$,$1 \le j \le n$ için bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesi $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile gösterilmek üzere

$$f: A \to K \ , (i,j) \to f(i,j) = a_{ij}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu takdirde $a_{ij} \in K$ olacak şekilde seçilen $m.$n tane elemandan oluşan bir tabloya K cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir. Eğer $K = \mathbb{R}$, alınırsa bu takdirde matrise bir reel matris, $K = \mathbb{C}$, alınırsa bu takdirde matrise bir kompleks matris adı verilir. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı A matrisinin i −yinci satır j −yinci sütununa karşılık gelen elemanıdır. K cismi üzerinde seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerin kümesi $K^{\mathrm{m \times n}}$ veya K_n^m ile gösterilir.

(ii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ matrisleri aynı boyutlu iki matris olsun. Eğer her bir (i, j) için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrislerine eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir.

(iii) Eğer $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin her bir a_{ij} elemanı sıfır ise, bu takdirde A matrisine bir sıfır matris denir ve $A = 0$ ile gösterilir.

(iv) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ aynı boyutlu matrisler olmak üzere $A + B$ toplamı

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

(v) K cismi üzerinde $k \in K$ bir skaler sayı olmak üzere $kA \in K_n^m$ matrisi

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

(vi) $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ ve $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ olmak üzere A ve B matrislerinin çarpımı

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots + \mathrm{a_{1p}}b_{pn}) \\ (a_{21}b_{11} + \dots + a_{2p}b_{p1}) & \dots & (a_{21}b_{1n} + \dots + \mathrm{a_{2p}}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots + \mathrm{a_{mp}}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Burada açıkca görüleceği gibi iki matrisin toplamından söz edebilmek için matrislerin aynı boyutlu matrisler olmaları yeterlidir. Ancak iki matrisin çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı birbirine eşit olmalıdır. Bu şartlar altında çarpım matrisi $A.B$ ya da AB ile gösterilir.

Tanım 2.3

(i) Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde eğer $m = n$ ise yani satır sayısı sütun sayısına eşitse bu durumda A matrisine bir kare matris denir. Bu durumda A matrisindeki $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına da bu matrisin köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

(ii) Köşegen elemanları 1 ve diğer tüm elemanları 0 olan bir kare matrise bir birim matris denir ve birim matris I_n şeklinde gösterilir.

(iii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinde aynı numaralı satır ve sütunların yer değiştirilmesi ile elde edilen $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu denir. Uygun tipten matrisler için $(A+B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$ eşitlikleri sağlanır.

(iv) A bir kare matris olmak üzere eğer $A^T = A$ ise, bu durumda A matrisine bir simetrik matris adı verilir.

Tanım 2.4 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri verilsin. Bu durumda eğer $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ olacak şekilde tümü birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_n$ skaler sayıları bulunabilirse bu takdirde $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır, aksi halde lineer bağımsızdır denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.5 A matrisi $m\times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü için $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. Bu durumda A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen bütün vektörlerin oluşturduğu kümeye A matrisinin sütun uzayı veya ranj uzayı denir ve $\Re(A)$ ile gösterilir. $\Re(A)$, A matrisinin sütunları tarafından gerilir ve

$$\Re(A) = \{y \in \mathbb{R}^{m\times 1} : y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$$

ile ifade edilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.6 A matrisinin $a_1, a_2, \dots, a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n\times 1}$ uzayının alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\Re(A^T)$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.7 Herhangi bir matrisin sütun uzayının boyutuna matrisin sütun rankı ve satır uzayının boyutuna da matrisin satır rankı denir. Bir matrisin satır indirgenmiş eşelon formundaki sıfırdan farklı satırların sayısına ise o matrisin rankı denir ve bir A matrisinin rankı $r(A)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 A matrisi $m\times n$ boyutlu bir matris olsun. Bu takdirde A matrisinin satır rankı ile sütun rankı birbirine eşittir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 Uygun boyutlu A, B ve C matrisleri için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir (Hacısalihoğlu H.H., 1977):

(i) $\Re(A{:}B) = \Re(A) + \Re(B)$,

(ii) $\Re(AB) \subseteq \Re(A)$,

(iii) $\Re(AA^T) = \Re(A)$,

(iv) $\Re(C) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow C$ matrisi AB biçimindedir.

(v) $boy\big(\Re(A)\big) = r(A)$,

(vi) $r(A) = r(A^T) = r(A^TA) = r(AA^T)$.

Tanım 2.8 $P^2 = P$ eşitliğini sağlayan bir P matrisine bir idempotent matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.9 A matrisinin sıfır uzayı

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.10 V_1 ve V_2 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ üzerinde iki vektör üzayı olmak üzere eğer her $u \in V_1$ ve her $v \in V_2$ için $u^Tv = 0$ ise V_1 ve V_2 vektör uzayları birbirine diktir denir ve $V_1 \perp V_2$ ile gösterilir. Birbirine dik olan iki vektör uzayının toplamına bu iki vektör uzayının direct toplamı adı verilir ve $V_1 \oplus V_2$ ile gösterilir. Eğer $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ ise V_1 ve V_2 vektör uzaylarına birbirinin dik tümleyeni denir ve bu durum $V_2 = V_1^{\perp}$ (veya $V_1 = V_2^{\perp}$) ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.11 V uzayı $\mathbb{R}^{n\times 1}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $v \in V$ için $Pv = v$ ve $Pv \in V$ ise P matrisine V üzerinde bir izdüşüm matrisi adı verilir. Öte yandan P matrisi V üzerinde ve $I - P$ matrisi de $V^{\perp}$ üzerinde bir izdüşüm matrisi ise P matrisine V üzerinde bir dik izdüşüm matrisi adı verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.12 $A = (a_{ij})$ matrisi $n \times n$ boyutlu bir kare matris olmak üzere A matrisinin determinantı $|A|$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

(i) $n = 1$ için $|A| = a_{11}$,

(ii) $n = 2$ için $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

(iii) $n > 2$ için

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i}\,|A_{1i}|$$

dir, burada A_{1i}, $(1, i) -$ yinci minördür.

Teorem 2.3 A matrisi köşegen elemanları $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ olan $n \times n$ boyutlu matris olmak üzere, A matrisi üst üçgensel veya alt üçgensel ya da köşegen bir matris ise bu durumda $|A| = a_{11}a_{12} \ldots a_{nn}$ olacaktır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Sonuç 2.1

(i) A matrisi tersinir bir matris olmak üzere $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|}$ dir.

(ii) I birim matris olmak üzere $|I| = 1$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

(iii) A ve B aynı mertebeden kare matrisler olmak üzere $|AB| = |A||B|$ eşitliği gerçeklenir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.13 $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektörü ve simetrik $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için, $Q(y) = y^T A y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$ ifadesine, y_i elemanlarının bir kuadratik formu ve A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. Bu durumda $y^T A y$ kuadratik formu, simetrik bir A matrisi tarafından karakterize edilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977). Böyle bir matris için aşağıdakiler söylenebilir.

(i) Eğer $\forall y \neq 0$ için $y^T A y > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.

(ii) Eğer $\forall y \neq 0$ için $y^T A y < 0$ ise A negatif tanımlıdır.

(iii) Eğer $\forall y$ için $y^T A y \geq 0$ ise A nonnegatif tanımlıdır.

Sonuç 2.2 Eğer $Q(y) = y^T A y$ bir kuadratik form, y bir $m \times 1$ tipinde vektör ve A matrisi $m \times m$ tipinde herhangi bir simetrik matris ise, $Q'(y) = \frac{\partial}{\partial y} Q(y) = 2Ay$ dir.

Teorem 2.4 Bir A matrisinin nonnegatif tanımlı ve r ranklı bir matris olabilmesi için gerek ve yeter şart $A = RR^T$ olacak şekilde r ranklı bir R matrisinin mevcut olmasıdır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Eğer $AB = I$ ise, B matrisine A matrisinin sağ inversi denir ve bu invers B^{-R} ile gösterilir. A matrisine ise B matrisinin sol inversi denir ve bu invers A^{-L} ile gösterilir. A matrisinin sağ inversi ancak A matrisi tam satır ranklı olduğunda ve benzer şekilde B matrisinin sol inversi B matrisi tam sütun ranklı olduğunda mevcut olacaktır. Buna göre sağ invers veya sol invers tek olmayabilir. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ üçgensel matris olmak üzere, rank şartları gösterir ki, $m > n$ olduğunda sağ invers ve $m < n$ olduğunda da sol invers mevcut olmayabilir. Bu nedenle her iki inversin de mevcut olması için gerek ve yeter şart A matrisinin bir kare matris ve tam ranklı olmasıdır. Bu durumda matrisin sağ inversi ile sol inversi birbirine eşit olup bu matrise, nonsingüler A matrisinin inversi adı verilir ve A^{-1} ile gösterilir. O halde bir A matrisinin inversinin mevcut ve tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dır. Eğer A ve B matrislerinin her ikisi de nonsingüler ve aynı boyutlu ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olacaktır.

2.2 Matrislerin Genelleştirilmiş İnversleri

Bu kısımda çalışmamız boyunca sık sık isimlerini zikredeceğimiz matrisler için bazı genelleştirilmiş inversler ve bu inverslerin çeşitli özellikleri verilecektir.

Tanım 2.13 $\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir X matrisine A matrisinin bir Moore–Penrose inversi denir ve $A^\dagger$ sembollerinden birisi ile gösterilir.

(i) $AXA = A,$

(ii) $XAX = X,$

(iii) $(AX)^* = AX,$

(iv) $(XA)^* = XA.$ (2.1)

Eğer X matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu X matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan X matrisine A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan X matrisine ise A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ ile gösterilir.

Bu tanınma göre eğer A matrisi nonsingüler bir matris ise bu takdirde A^{-1} matrisinin Moore–Penrose invers şartlarını sağlayacağı açıktır, yani $A^{-1} = A^\dagger$ dir. Bununla birlikte, eğer A matris bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir $A^\dagger$ matrisinin mevcut olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı her A matrisi için bir $A^\dagger$ matrisinin mevcut ve tek olduğu şeklinde olacaktır. Aşağıda bu durum gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin bazı önemli özellikleri verilecektir. Öncelikle belirtelim ki eğer A matrisi $m \times n$ tipinde bir sıfır matris ise, bu takdirde $A^{\dagger}$ matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matris olacağı açıktır.

Teorem 2.5 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek $A^{\dagger}$ matrisi vardır (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.6 (i) $m \times n$ boyutlu A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^{\dagger} = \frac{1}{m.n} A^{*}$ dir.

(ii) $a,\ n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^{\dagger} = (a^{*}a)^{-1}a^{*}$ dir.

(iii) $a,\ 1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda $a^{\dagger}$, $a^{\dagger} = a^{*}(aa^{*})^{-1}$ şeklindedir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.7 A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^{*})^{\dagger} = (A^{\dagger})^{*} \tag{2.2}$$

eşitliği geçerlidir (Pringle ve Rayner., 1971).

Sonuç 2.3 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, bir A matrisi için, $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$ dir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.8 Herhangi bir A matrisi için $r(A) = r(A^{\dagger})$ eşitliği gerçeklenir, yani bir matrsn rankı ile Moore-Penrose inversinin rankı eşittir (Pringle ve Rayner., 1971).

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, bu takdirde $A^{\dagger}$, $AA^{\dagger}$, $A^{\dagger}A$, $AA^{\dagger}A$ ve $A^{\dagger}AA^{\dagger}$ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Sonuç 2.4 Eğer A matrisi simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^{\dagger} = A$ dir (Pringle ve Rayner., 1971).

Sonuç 2.5 Eğer $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ise, bu takdirde A matrisinin Moore–Penrose inversi $A^{\dagger}$, i–yinci satır ve i–yinci sütunda yer alan köşegen elemanı $a_{ii} \neq 0$ iken a_{ii}^{-1} ve $a_{ii} = 0$ iken 0 olan bir köşegen matristir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.9

(i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{-1}$ ve $AA^{\dagger} = I_m$ dir

(ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^{\dagger} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}$ ve $A^{\dagger}A = I_n$ olur (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.10 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere B ve C matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde olmak üzere $r(B) = r(C) = r$ olsun. Bu takdirde,

$$(BC)^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger} \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanır (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.11 A, B ve C uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur (Pringle ve Rayner., 1971):

(i) $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$

(ii) $AA^{\dagger}$ ve $A^{\dagger}A$ idempotenttir.

(iii) $r(A) = r(A^{\dagger}) = r(AA^{\dagger}) = r(A^{\dagger}A)$,

(iv) $A^TAA^{\dagger} = A^T = A^{\dagger}AA^T$ ve $A^T(A^{\dagger})^TA^{\dagger} = A^{\dagger} = A^{\dagger}(A^{\dagger})^TA^T$,

(v) $A = 0 \Leftrightarrow AB = 0$, $A^{\dagger} = 0 \Leftrightarrow B^{\dagger}A^{\dagger} = 0$ ve $A^{\dagger}B = 0 \Leftrightarrow A^TB = 0$

(vi) $r(A) = r(A^-A) = r(AA^-) \leq r(A^-)$,

Teorem 2.12 Herhangi bir A matrisi için $P_A = AA^-$ matrisi $\Re(A)$ üzerinde bir izdüşüm matrisidir. Ayrıca $A(A^TA)^-A^T$ matrisi $\Re(A)$ üzerinde bir dik izdüşüm matrisidir (Pringle ve Rayner., 1971).

Tanın 2.14 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi ve $g \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ vöktörü verilmiş olsun. Bu durumda $Ax = g$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü varsa $Ax = g$ denklem sistemi tutarlıdır denir (Pringle ve Rayner., 1971).

Teorem 2.13 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi ve $g \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ vöktörü verilmiş olsun. Bu durumda $Ax = g$ denklem sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $AA^-g = g$ olmasıdır. Bu durumda $Ax = g$ denklem sisteminin genel çözümü $h \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ keyfi bir vektör olmak üzere

$$x = A^-g + (I - A^-A)h \tag{2.4}$$

şeklindedir (Pringle ve Rayner., 1971).

3 MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Lineer Modelin Kurulumu

Y $n \times 1$ tipinde bir gözlemler vektörü (rasgele vektör), X $n \times \mathrm{p}$ $(n < \mathrm{p})$ tipinde bir bilinen katsayı matrisi, β $\mathrm{p} \times 1$ tipinde bir bilinmeyen parametre vektörü ve $E(\varepsilon) = 0$, $Cov(\varepsilon) = \Sigma$ olmak üzere ε ise $n \times 1$ tipinde rasgele değişkenlerin gözlenebilir olmayan bir vektörü olsun. Bu durumda bu değişkenler arasında

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{3.1}$$

biçiminde varsayılan bir bağıntıya bir lineer model veya lineer regresyon modeli denir. Bu model, ε rasgele hata vektörünün dağılımına ve Σ kovaryans matrisine ya da X matrisinin yapısına ve rankına bağlı olarak bazı özel durumlara sahiptir. ε rasgele hata vektörünün dağılımı hakkında ise üç durum göz önüne alınabilir. Bunlar ε rasgele vektörünün $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ dağılımına sahip olması durumu, ε un bilinmeyen bir dağılıma sahip olup $E(\varepsilon)$=0 ve $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ şeklinde olması durumu ya da V nin bilinen pozitif definit bir matris olmak üzere $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V$ şeklinde olması durumudur. Birinci durumda her bir ε_i rasgele değişkeni 0 ortalamalı, σ^2 bilinmeyen varyanslı normal dağılıma sahip olup ε_i , $i = 1,2,3, \ldots, N$, ler kendi aralarında bağımsızdır. İkinci durumda, her bir ε_i nin beklenen değeri sıfır ise, ε_i ler ilişkisiz ve ε_i ler ortak σ^2 bilinmeyen varyansına sahiptirler. Birinci ve üçüncü durumdaki varsayımlar altında modele bir Gauss-Markov modeli denir. İkinci durumdaki modele ise en küçük kareler modeli adı verilir. Ayrıca eğer hata terimi bir normal dağılıma sahip ise bu durumda modellere hipotez modelleri de denilmektedir.

(31) lineer modelinde $X\beta$ vektörüne modelin deterministik kısmı, Y ve ε vektörlerine ise modelin stokastik kısmı adı verilir. Y vektörü bağımlı değişken, tepki değişkeni veya açıklanan değişken adı verilen bir rastgele değişken ile ilgili gözlemler vektörüdür. X matrisine modelin tasarım matrisi, açıklayıcı değişkenlerin matrisi, bağımlı değişkenlerin gözlem matrisi gibi isimler de verilmektedir, ε vektörüne ise hata vektörü denilmektedir. Doğal yaşamda olayların lineer modeller yardımıyla ifade edilmesi aşamasında Y, X, β ve ε değişkenleri değişik biçimlere yorumlanmaktadır.

Örneğin bazı modellerde Y üretim miktarı iken, bazılarında boy uzunluğu, bazılarında ağırlık ve bazılarında ise bir ekonomik değişken olarak alınır.

Belli bir cins meyvedeki meyve suyu miktarını bu meyvenin ağırlığına bağlı olarak incelemek istediğimiz varsayalım. Gerçekte bir meyvedeki meyve suyu miktarı sadece meyvenin ağırlığına bağlı değildir. Ama ağırlık ile meyvedeki meyve suyu miktarı arasında bir fonksiyonel bağıntının varlığını kabul ederek, gözlemlerin bunu doğrulayıp doğrulamadığını, gözlemlerden çıkarılan bir bağıntının bulunmasını ve bunların neticesinde de ağırlığa bağlı olarak meyvedeki meyve suyu miktarını tahmin etmek isteyebiliriz. Bu örnekte açıklayıcı değişken olan meyvenin ağırlığı ve açıklanan değişken olan meyve suyu miktarı birer rasgele değişken olacaktır. Bu durumda eğer ağırlığı X ile ve meyve suyu miktarını da Y ile gösterirsek X ve Y değişkenlerinin bir ortak dağılımı söz konusu olacaktır. Burada $E(Y|X=x)=g(x)$ ifadesine Y değikeninin X değişkeni üzerindeki bir regresyon denklemi adı verildiğini ve X ve Y değişkenlerinin ortak dağılımının normal olması durumunda regresyon denkleminin

$$E(Y|X=x)=g(x)=\beta_0+\beta_1 x$$

şeklinde ifade edilebileceğini hatırlatalım. (X,Y) iki boyutlu rasgele değişkeninin ortak dağılımından N birimlik örneklem, (X_i,Y_i) , $i=1,2,\ldots,N,$ olmak üzere

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+\varepsilon_i,\ \ i=1,2,\ldots,N,\ \ \varepsilon_i\sim(0,\sigma^2 I)$$

veya matris formatında

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_N\end{bmatrix}_{N\times1},\quad X=\begin{bmatrix}1&X_1\\1&X_2\\\vdots&\vdots\\1&X_N\end{bmatrix}_{N\times2},\quad \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_N\end{bmatrix}_{N\times1}\ \text{ve}\ \beta=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix}_{2\times1}$$

matris gösterimleri altında

$$Y=X\beta+\varepsilon,$$

modeline bir basit lineer regresyon modeli adı verilir. Öte yandan X ve Y rasgele değişkenleri arasında bir ortak dağılım düşünülmeden sadece Y bağımlı değişkeni ile ilgili gözlemlere dayalı olarak,

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+\varepsilon_i, i=1,2,\ldots,N,$$

biçiminde bir ifade söz konusu olduğunda ise modele basit lineer model denir.

Bir lineer modelde eğer açıklayıcı değişken sayısı birden fazla ise bu durumda modele bir çoklu lineer model denir. Öte yandan bir lineer modelde eğer bağımlı değişken sayısı birden çok ise bu durumda da modele çok değişkenli model adı verilmektedir. Sıcaklık ile basıncın sertlik üzerindeki etkisinin bir fonksiyon biçiminde bir bağıntı ile ifade edilip edilemeyeceği, bu bağıntının biçiminin ne olacağı veya sıcaklık ile basınç değişkenlerinin sertliği ne derecede etkileyip etkilemediği gibi sorunlar ilk olarak metalürji biliminin sorunları gibi gözükmektedir. Metalürji biliminin kanunlarına göre sıcaklık ile basıncın sertlik üzerindeki etkisi tam olarak belirlenmiş olabilir veya verilen bağıntı biçimsel olarak belirlenmiş ancak içinde bilinmeyen katsayılar mevcut ya da aralarında bir bağıntı var ama ne olduğu belirlenmemiş olabilir. Böyle bir durumda ilk durum için istatistikçinin yapacağı fazla bir şey yoktur. Belki de sadece belirlenmiş olan modelin geçerliliğinin sınanmasında yardımcı olabilir. İkinci ve üçüncü durumlar için ise istatistikçiye çok önemli görevler düşmektedir. Amaç belirlendikten sonra, örneğin bu amaç hangi sıcaklık ve basınç altında malzemenin sertliği maksimum seviyeye ulaşmaktadır şeklinde olabilir, gözlemlerin alınacağı en uygun deney tasarımının seçilmesi ve daha sonra istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması istatistik biliminin en öncelikli ve önemli sorunudur.

Bir diğer örnek olarak belirli bir zirai ürünün verimini incelemek istediğimizi varsayalım. Şüphesiz verim, toprak ve hava ile ilgili birçok tabiat özelliğinin yanında sulama, gübreleme, toprağı işleme gibi bazı dış etkenlere de bağlı olacaktır. Bu nedenle modelleme sırasında çok karmaşık olan gerçek hayattaki ilişkilerden bazılarını ihmal ederek, verim miktarı (Y) için, yağış miktarı (X_1), sıcaklık ortalaması (X_2), gübre miktarı (X_3) ve birim metrekareye ekilen bitki sayısı (X_4) değişkenlerine bağlı,

$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + X_4\beta_4 + \varepsilon$$

biçiminde bir modelin geçerli olacağı varsayılmaktadır. Bu durumda gerek model geçerliliğinin sınanması ve gerekse geçerli bir modelde açıklayıcı değişkenlerin etkilerinin, yani parametrelerin tahmin edilmesi amacıyla yapılacak araştırmada veri toplama işlemi uygulamada pek de kolay olmayacaktır. Bu durumda modeldeki yağış miktarı ve sıcaklık ortalaması ile ilgili açıklayıcı değişkenler birer rasgele değişken olmasına rağmen gübre miktarı ile ilgili açıklayıcı değişken bir deterministik değişken olarak görülebilir.

3.2 Basit Lineer Modellerde Parametre Tahmini

Bir deneyin n kez tekrarındaa aşağıdaki verinin elde edildiğini varsayalım.

Gözlem Numarası	y tepkimesi	$X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_p$ açıklayıcı değişkenleri
1	y_1	$\boldsymbol{x}_{11} \quad \boldsymbol{x}_{12} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{1p}$
2	y_2	$\boldsymbol{x}_{21} \quad \boldsymbol{x}_{22} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{2p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$
n	y_n	$\boldsymbol{x}_{n1} \quad \boldsymbol{x}_{n2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{np}$

Bu durumda eğer modelin

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon$$

olduğunu kabul eder ve gözlemlerin n- lilerinin aynı modele işleyeceği de varsayılırsa bu durumda bunlar arasında

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_p x_{1p} + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_p x_{2p} + \varepsilon_2 \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_p x_{np} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntının sağlanacağı söylenebilir. Bu takdirde bu n tane denklemden oluşan sistem matris formunda

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

olarak ya da genel olarak

$$y = X\beta + \varepsilon$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n})^T$ inceleme değişkeni üzerinde n sayıda gözlemden oluşan $n \times 1$ tipinde bir vektör olup

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

p sayıda açıklayıcı değişkenin her birisi üzerinde n sayıda gözlemin $n \times p$ boyutlu bir matrisidir. $\beta = \left(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\right)^T$ regresyon katsayılarının $p \times 1$ boyutlu bir vektörü olup $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)^T$ ise rasgele hata bileşenlerinin veya hata terimlerinin $n \times 1$ tipinde bir vektörü olacaktır. Eğer modelde bir regresyon sabiti mevcut ise, bu durumda X matrisinin birinci sütunu $(1,1,\dots,1)^T$ şeklinde alınır. İstatistiksel sonuçlar ortaya çıkarmak için $y = X\beta + \varepsilon$ lineer modelinde bazı ilave varsayımlara da ihtiyaç duyulur. Bu varsayımlar regresyon katsayıları için tahmin edicinin istatistiksel özelliklerinin verilmesinde kullanılır ve aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

(i) $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0.$

(ii) $E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n.$

(iii) $r(X) = p$

(iv) X stokastik (rasgele) olmayan bir matristir.

(v) $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n).$

Lineer modellerde regresyon katsayı vektörünün tahminini belirlemek için kullanılan en genel yöntem, seçilen uygun bir L fonksiyonu için,

$$\sum_{i=1}^{n} L(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} L\left(y_i - x_{i1}\beta_1 - x_{i2}\beta_2 - \cdots - x_{ip}\beta_p\right)$$

toplamını minimum yapmaktır. Lineer modellerde genel olarak parametrelerin tahmini için $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ ile verilen en küçük kareler yöntemi göz önüne alınmaktadır. Bu amaçla β vektörlerinin kümesini B ile gösterelim. Eğer özel bir ek bilgi verilmez ise, B kümesi $k-$boyutlu reel öklid uzayında olacaktır. Amacımız ε_i hatalarının kareleri toplamını, yani, y ve X in verilen değerleri için, B kümesinde

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (y - X\beta)^T (y - X\beta) \tag{3.2}$$

fonksiyonunu minimum yapacak olan bir $b^T = \left(b_1, b_2, \dots, b_p\right)$ vektörü bulmaktır. Bu durumda $S(\beta)$ fonksiyonu reel değerli, konveks ve türevlenebilir bir fonksiyon olup bir minimumu daima mevcut olacaktır. Bunun için

$$S(\beta) = y^T y + \beta^T X^T X \beta - 2\beta^T X^T y$$

yazılır ve $S(\beta)$ fonksiyonunun β ya göre 1. ve 2. türevleri alınırsa Sonuç 2.2 den

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 2X^T X\beta - 2X^T y, \qquad \frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} = 2X^T X$$

yazılabilir. Dolayısıyla normal denklemimiz

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0 \;\Rightarrow X^T X\beta = X^T y$$

şelinde olacaktır. Burada $r(X) = p$ olduğu kabul edildiğinden $X^T X$ matrisi pozitif tanımlı olacaktır ki bu durumda da normal denklemimizin yegane çözümü

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \tag{3.3}$$

olur. Bu ise β nın alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) olarak adlandırılır. Öte yandan X matrisinin tam sütun ranklı olmadığı durumda, $(X^T X)^-$ matrisi $X^T X$ matrisinin bir genelleştirilmiş inversi ve h keyfi bir vektör olmak üzere

$$\hat{\beta} = (X^T X)^- X^T y + [I - (X^T X)^- X^T X]h \tag{3.4}$$

şeklinde olacaktır. Öte yandan X matrisinin tam sütun ranklı olduğu kabulu altında bilinen bir V pozitif definit matrisi için $E(\varepsilon) = 0$ ve $D(\varepsilon) = \sigma^2 V$ olarak dikkate alındığında elde edilen normal denklemlere karşılık olarak $X^T V^{-1} X\beta = X^T V^{-1} y$ normal denkleminin yegane çözümü

$$\hat{\beta} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} y \tag{3.5}$$

olacaktır. Bu da β nın genelleştirilmiş en küçük kareler edicisi olarak adlandırılır.

Teorem 3.1

(i) $\hat{y} = \widehat{X\beta}$ vektörü y vektörünün bir tahmin edicisi olsun. Bu takdirde $\hat{y}$ vektörü $X^T X\beta = X^T y$ matris denkleminin tüm β çözümleri için aynı değere sahiptir.

(ii) $S(\beta)$; $X^T X\beta = X^T y$ nin herhangi bir çözümü için minimum olur (Rao, 1973).

İspat. (i) b paramatresi

$$b = (X^T X)^- X^T y + [I - (X^T X)^- X^T X]h$$

deki herhangi bir eleman olsun. Bu takdirde $X(X^T X)^- X^T X = X$ olduğundan,

$$Xb = X(X^T X)^- X^T y + X[I - (X^T X)^- X^T X]h = X(X^T X)^- X^T y$$

olur ki bu ifade h ya bağlı değildir. Bu ise, $\hat{y}$ vektörünün $X^T Xb = X^T y$ normal denkleminin her bir b çözümü için aynı değere sahip olacağı anlamına gelir.

(ii) Herhangi β vektörü için

$$S(\beta) = [y - Xb + X(b-\beta)]^T[y - Xb + X(b-\beta)]$$

$$= (y - Xb)^T(y - Xb) + (b-\beta)^T X^T X(b-\beta) + 2(b-\beta)^T X^T(y - Xb)$$

$$= (y - Xb)^T(y - Xb) + (b-\beta)^T X^T X(b-\beta)$$

$$\geq (y - Xb)^T(y - Xb) = S(b)$$

$$= y^T y - 2y^T Xb + b^T X^T Xb$$

$$= y^T y - b^T X^T Xb$$

$$= y^T y - \hat{y}^T \hat{y}$$

olduğu elde edilir.

Eğer $y = X\beta + \varepsilon$ modeli için, $\hat{\beta}$ tahmini β parametresinin herhangi bir tahmin edicisi ise, bu takdirde uydurulan değerler $\hat{y} = \widehat{X\beta}$ olarak tanımlanır. Bu durumda $\hat{\beta}$ aşağıdaki özelliklere sahip olacaktır:

(i) $\hat{\beta}$ nın tahmin hatası aşağıdaki şekildedir.

$$\hat{\beta} - \beta = (X^T X)^{-1} X^T y - \beta = (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon\,.$$

(ii) Yansızlık: X in rasgele olmadığı kabul edildiğinden ve $E(\varepsilon) = 0$ olduğundan

$$E(\hat{\beta} - \beta) = (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon) = 0$$

olduğu açıktır. Bu ise bize alışılmış en küçük kareler tahmin edicisinin aynı zamanda β nın bir yansız tahmin edicisi olduğunu gösterir.

(iii) $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin kovaryans matrisi $Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$ şeklindedir.

Teorem 3.2 (Gauss–Markov Teoremi) β parametresinin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi aynı zamanda β için en iyi lineer yansız tahmin edicidir (Rao, 1973).

İspat. β parametresinin OLSE tahmin edicisi y vektörünün bir lineer fonksiyonu olan

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y$$

şeklinde olsun. Ayrıca a vektörünün elemanları keyfi sabitler olmak üzere, $u^T \beta$ lineer parametrik fonksiyonunun bir $b^* = a^T y$ keyfi lineer tahmin edicisini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$E(b^*) = E(a^T y) = a^T X\beta$$

yazılabilir ve bu nedenle

$$E(b^*) = a^T X\beta = u^T\beta \Rightarrow a^T X = u^T$$

olduğunda, b^* aynı zamanda $u^T\beta$ parametresi için de bir yansız tahmin edici olacaktır. Biz çalışmalarımızda sadece lineer ve yansız olan tahmin edicileri ele almak istediğimizden kendimizi $a^T X = u^T$ için olan tahmin edicilere sınırlayabiliriz. Ayrıca

$$Var(a^T y) = a^T Var(y) a = \sigma^2 a^T a$$

ve

$$Var(u^T b) = u^T Var(b) u = \sigma^2 a^T X (X^T X)^{-1} X^T a$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda eğer

$$\begin{aligned} Var(a^T y) - Var(u^T b) &= \sigma^2 [a^T a - a^T X (X^T X)^{-1} X^T a] \\ &= \sigma^2 a^T [I - X (X^T X)^{-1} X^T] a \\ &= \sigma^2 a^T (I - H) a \end{aligned}$$

eşitliği dikkate alınırsa $(I - H)$ matrisi pozitif yarı definit bir matris olacağından

$$Var(a^T y) - Var(u^T b) \geq 0$$

yazılabilir. Bu takdirde, eğer b^* herhangi bir lineer yansız tahmin edici ise, bu durumda varyansının b nin varyansından daha küçük olmaması gerektiğini ortaya koyar. Sonuç olarak "en iyi b" sıfatı b nin lineer yansız tahmin ediciler arasında etkin olduğu belirtmek üzere, b en iyi lineer yansız tahmin edicidir.

3.3 Genel Lineer Modellerde Parametre Tahmini

Genel lineer modellerde tahmin edicilerin karakterize edilmesinde matris rank metotlarının kullanılması oldukça önem arzetmektedir. Bununla ilgili olarak tekrar

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2 \mathrm{V}, \tag{3.6}$$

genel lineer modeli verilmiş olsun, burada $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametredir. Bu durumda (3.6) modeli genel olarak

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} \tag{3.7}$$

biçiminde gösterilir. Burada (3.6) lineer modelinin tutarlı olduğu, başka bir deyişle bir çözüme sahip olduğu varsayılacaktır. Bunun için 1 olasılıkla

$$y \in \Re[X, V] \tag{3.8}$$

olması gerekmektedir. Öte yandan eğer V kovaryans matrisi singüler bir matris ise (3.6) modeline bir singüler lineer model veya bir singüler Gauss-Markov modeli adı verilir. Bu durumda β ve $X\beta$ parametrelerinin (3.7) de verilen genel lineer model altında OLSE ve BLUE tahmin edicileri sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(i) β parametresinin (3.7) genel lineer modeli altındaki OLSE tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}}(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta)^T(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta) \tag{3.9}$$

olacaktır. Bu durumda $X\beta$ parametresinin (3.7) genel linner modeli altındaki OLSE tahmin edicisi

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = \widehat{X\beta} = X.OLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$$

olacaktır.

(ii) $X\beta$ parametresinin (3.7) genel lineer modeli altındaki BLUE tahmin edicisi, $BLUE_M(X\beta)$ ile gösterilir, bir Gy lineer tahmin edicisi olarak tanımlanır öyle ki eğer $E(Gy) = \beta$ ve $X\beta$ nin (3.7) modeli altındaki diğer herhangi bir yansız lineer tahmin edicisi Ly ise bu takdirde $Cov(Ly) - Cov(Gy)$ farkı nonnegatif definit olacaktır.

P_A, Q_A ve F_A matrisleri sırasıyla

$$P_A = AA^\dagger,\ Q_A = I - P_A = I - AA^\dagger \text{ ve } F_A = I - P_{A^T} = I - A^\dagger A$$

ortogonal izdüşümlerini gösterelim. Bu gösterimler altında (3.9) bağıntısı ile ilgili normal denklem $X^T X\beta = X^T y$ biçiminde olup bu denklemin çözümü aşağıdaki lemma da verilen iyi bilinen sonuçtur.

Lemma 3.1 (3.7) lineer modeli altında β ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE tahmin edicileri $v \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ keyfi bir vektör olmak üzere

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X^T X)^\dagger X^T y + (I - X^\dagger X)v = X^\dagger y + F_X v \tag{3.10}$$

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = XOLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = XX^\dagger y = P_X\, y \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir (Rao, 1973).

Lemma 3.2 Bir Gy tahmin edicisinin (3.7) de verilen model altında $X\beta$ parametresinin bir BLUE tahmin edicisi olabilmesi için gerek ve yeter şart G matrisinin

$$G[X, VE_X] = [X, 0] \tag{3.12}$$

lineer matris denklemini sağlamasıdır (Marsaglia ve Styan, 1974).

Bu denklem tutarlı bir denklemdir, başka bir ifadeyle, $\Re([X, 0]) \subseteq \Re([X, VE_X])$ içermesi veya buna denk olarak,

$$[X,0][X, VE_X]^{\dagger}[X,VE_X] = [X,0]$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durumda (3.12) denkleminin $P_{X\|V}$ ile gösterilen genel çözümü, $U \in \mathbb{R}^{nxn}$ keyfi olmak üzere

$$P_{X\|V} = [X,0][X, VE_X]^{\dagger} + UE_{[X,VE_X]}, \tag{3.13}$$

formunda yazılabilir ve dolayısıyla $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = \widetilde{X\beta} = P_{X\|V}y \tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir. İleride $\{P_{X\|V}\}$ ve $\{BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\}$ sembolleri ile sırasıyla tüm $P_{X\|V}$ çözümlerinin ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicilerinin aileleri gösterilecektir.

Lineer modellerle ilgili yapılan çalışmalarda (3.7) modelindeki X tasarım matrisinin tam sütun ranklı bir matris ve V kovaryans matrisinin ise pozitif definit bir matris olduğu durum oldukça sık rastlanılan bir durumdur. Böyle bir durumda, (3.7) lineer modeli altında, β ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri sırasıyla aşağıdaki standart formlarda tek türlü olarak yazılabilir:

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X' y\ ,$$

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = \widehat{X\beta} = X(X^T X)^{-1} X^T y,$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \tilde{\beta} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} y\ ,$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = \widetilde{X\beta} = X(X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} y. \tag{3.15}$$

Bu durumda (3.6) lineer modeli altında β ve $X\beta$ parametreleri için verilen bu tahmin edicilerin her birisi aynı zamanda birer yansız tahmin edici olacaktır.

Şimdi Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren (3.11) ve (3.14) de verilen $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicilerini tekrar gözönüne alalım. Bu durumda Moore-Penrose inversler ve keyfi matrisler içeren değişik matris ifadelerini sadeleştirmek için bir dizi rank formüllerine ihtiyaç duyulmaktadır. Parçalı matrisler için aşağıdaki rank formülleri Marsaglia & Styan (1974) tarafından verilmiştir.

Lemma 3.3 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ ve $D \in \mathbb{R}^{1\times k}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

(i) $r[A, B] = r(A) + r(E_A B) = r(B) + r(E_B A)$,

(ii) $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)$,

(iii) $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_B A F_C)$,

(iv) $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r\begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ CF_A & D - CA^{\dagger}B \end{pmatrix}$,

(v) $\mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(A)$ ve $\mathfrak{R}(C^T) \subseteq \mathfrak{R}(A^T) \Longrightarrow r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r(D - CA^{\dagger}B)$,

(vi) $r[A, B] = r(A) \Leftrightarrow E_A B = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(A)$,

(vii) $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow CF_A = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{R}(C^T) \subseteq \mathfrak{R}(A^T)$,

(viii) $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(A)$, $\mathfrak{R}(C^T) \subseteq \mathfrak{R}(A^T)$ ve $D = CA^{\dagger}B$,

Diğer taraftan

$$r(B - AA^{\dagger}B) \geq r(B) + r(AA^{\dagger}B) = r(B) - r(A^T B)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu nedenle

$$r[A, B] \geq r(A) + r(B) - r(A^T B)$$

eşitsizliği yazılabilir. Üstelik

$$\mathfrak{R}(B) \subseteq \mathfrak{R}(A) \Leftrightarrow AA^{\dagger}B = B \Leftrightarrow r[A, B] = r(A),$$

$$\mathfrak{R}(A_1) = \mathfrak{R}(A_2),$$

ve

$$\mathfrak{R}(B_1) = \mathfrak{R}(B_2) \Rightarrow r[A_1, B_1] = r[A_2, B_2]$$

ifadeleri de verilebilir (Marsaglia ve Styan, 1974).

Lemma 3.4 (3.6) ile verilen modelin tutarlı olduğunu varsayalım ve $L_1y + c_1$ ve $L_2y + c_2$ lineer tahmin edicileri $K\beta$ parametresi için yansız lineer tahmin ediciler, yani $E(L_1y + c_1) = E(L_2y + c_2) = K\beta$ olsun. Bu takdirde $L_1y + c_1 = L_2y + c_2$ tahmin edicilerinin 1 olasılıkla eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart $L_1V = L_2V$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Tian, 2010).

Lemma 3.5 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi verilmiş olsun ve $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisleri A matrisinin dış inversleri, yani $Z_iAZ_i = Z_i$, $i = 1,2,3$ olsun. Ayrıca

$$\Re(Z_i) \subseteq \Re(Z_1) \text{ ve } \Re(Z_i^T) \subseteq \Re(Z_1^T)$$

içermelerinin sağlandığı varsayılsın. Bu takdirde

$$r(Z_1 - Z_2 - Z_3) = r(Z_1) - r(Z_2) - r(Z_3) + r(Z_2AZ_3) + r(Z_3AZ_2) \quad (3.16)$$

rank eşitliği sağlanır (Rao, 1973).

İspat. Elementer blok matris işlemleri altında bir matrisin rankının değişmediğini daha önce ifade emiştik. Bu nedenle elementer blok matris işlemleri uygulanırsa

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_1 - Z_2 - Z_3 \end{bmatrix}$$

$$= r(Z_1 - Z_2 - Z_3) + r(Z_1) + r(Z_2) + r(Z_3) \quad (3.17)$$

eşitliğinin yazılabileceği kolaylıkla gösterilebilir. Diğer taraftan Lemma 3.4 de verilen şartlar altında elementer matris blok matris işlemleri ile

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & Z_1AZ_2 & Z_1AZ_3 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & 0 & -Z_2AZ_3 & 0 \\ 0 & -Z_3AZ_2 & 0 & 0 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r(Z_1) + r(Z_2AZ_3) + r(Z_3AZ_2) \quad (3.18)$$

rank eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda (3.17) ve (3.18) rank eşitlikleri birleştirilerek istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.6 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ve $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ matrisleri verilsin. Bu durumda

$$\max_{Z\in R^{k\times 1}} r(A - BZC) = \min\left\{r[A, B], r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}\right\}, \tag{3.19}$$

$$\min_{Z\in R^{k\times 1}} r(A - BZC) = r[A, B] + r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Bu durumun özel bir sonucu olarak $BZC = A$ denkleminin tutarlı olmabilmesi için gerek ve yeter şart

$$r[A, B] = r(B) \text{ ve } r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(C) \tag{3.21}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır (Rao, 1973).

Şimdi (3.6) lineer modeli altında $K \in \mathbb{R}^{k\times p}$ olmak üzere $K\beta$ şeklindeki bir lineer parametrik fonksiyonun tahmini problemini göz önüne alalım.

Tanım 3.1 Eğer $E(Ly + c) = K\beta$ yani $LX\beta + c = K\beta$ olacak şekilde bir L matrisi ve bir c vektörü bulunabilirse $K\beta$ parametre vektörü (3.6) lineer modeli altında tahmin edilebilirdir denir ve bu durumda da $Ly + c$ lineer tahmin edicisine $K\beta$ parametre vektörünün bir yansız lineer tahmin edicisi adı verilir.

Benzer şekilde eğer $E(Ly) = K\beta$ yani $LX\beta = K\beta$ olacak şekilde bir L matrisi bulunabilirse $K\beta$ parametre vektörü (3.6) modeli altında homojen olarak tahmin edilebilirdir denir ve bu durumda Ly lineer tahmin edicisine $K\beta$ parametre vektörünün bir homojen olarak yansız lineer tahmin edicisi denir (Tian ve Ark., 2008).

Verilen bir $K\beta$ parametre vektörünün tahmin edilebilirliği ile ilgili olarak iki problem hemen akla gelebilir. Birincisi $K\beta$ (homojen olarak) parametre vektörünün tahmin edilebilir olması çin gerek ve yeter şartların belirlenmesidir. Ikincisi ise eğer $K\beta$ (homojen olarak) parametre vektörü tahmin edilebilir ise $E(Ly + c) = K\beta$ (veya $E(Ly) = K\beta$) olacak şekildeki L matrisinin ve c vektörünün genel ifadelerinin elde edilmesidir. Eğer β parametre vektörü serbest değişken olarak alınırsa $LX\beta = K\beta$ eşitliği $LX = K$ ve $c = 0$ olmasına denk olacaktır. Bu ise $K\beta$ parametre vektörünün tahmin edilebilir olabilmesi için gerek ve yeter şartın $\Re(K^T) \subseteq \Re(X^T)$ olduğu anlamına gelir. Bu durumda L matrisinin genel ifadesi U keyfi bir matris olmak üzere

$$L = KX^{\dagger} + U(I - XX^{\dagger})$$

ile verilir.

Teorem 3.2 (3.6) ile verilen lineer modelin tutarlı olduğunu, yani $y \in \Re(X{:}V)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır:

(i) $Ly + c$ lineer tahmin edicisi $K\beta$ için bir yansız lineer tahmin edicidir.

(ii) L, K ve c matrisleri için

$$r\begin{pmatrix} X & V & y \\ K - LX & 0 & c \end{pmatrix} = r(X{:}V)$$

rank eşitliği gerçeklenir.

(iii) L, K ve c matrisleri için

$$\Re([LX - K{:}0]^T) \subseteq \Re([X{:}V]^T) \text{ ve } [LX - K{:}0][X{:}V]^{\dagger}y = c$$

durumları sağlanır.

(iv) L, K ve c matrisleri için

$$L[X{:}0](I - [X{:}V]^{+}[X{:}V]) = [K{:}0](I - [X{:}V]^{\dagger}[X{:}V])$$

ve

$$[LX - K{:}0][X{:}V]^{\dagger}y = c$$

eşitlikleri sağlanır (Isotalo ve Puntanen, 2009).

Daha önce de ifade edildiği gibi bir Gy lineer istatistiğinin $K\beta$ tahmin edilebilir parametre fonksiyonunun bir en iyi lineer yansız tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart $cov(Gy)$ kovaryans matrisinin bir minimum olmasıdır. Bu durumda Gy nin $K\beta$ tahmin edilebilir parametre fonksiyonunun bir en iyi lineer yansız tahmin edici olabilmesi için gerek ve yeter koşul G matrisinin

$$G(X{:}VX^{\perp}) = (K{:}0) \tag{3.22}$$

matris denklemini sağlamasıdır (bakınız, Rao, 1973, s.282). Ayrıca $K\beta$ parametre vektörünün BLUE tahmin edicisi için açık gösterimler kolayca elde edilebilir. Örneğin U matrisi $\Re(W) = \Re(X{:}V)$ olacak şekilde keyfi bir matris olmak üzere eğer $W = V + XUX^T$ alınırsa, bu takdirde $K\beta$ parametre vektörünün BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = \widetilde{K\beta} = K(X^TW^{-}X)^{-}X^TW^{-}y \tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $K\beta$ parametre vektörünün OLSE tahmin edicisi

$$OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = \widehat{K\beta} = K\hat{\beta} = K(X^TX)^{-}X'y \tag{3.24}$$

şeklinde yazılabilir, burada $\hat{\beta}$ vektörü $X^TX\hat{\beta} = X^Ty$ normal denklemini sağlayan keyfi bir vektördür. $K\beta$ parametre vektörü tahmin edilebilir ve $\widehat{K\beta}$ tahmini $(X^TX)^{-}$ nin seçiminden bağımsız olduğundan $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ nın ifadesi $K\hat{\beta} = KX^{\dagger}y$ olarak da yazılabilir. Ayrıca $K\hat{\beta}$ tahmini V kovaryans matrisinden bağımsız olduğundan $BLUE$ ye bir alternatif olarak pek çok şekilde ifade edilebilir. Bu nedenle $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ nın $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ye eşit olabilmesi için V kovaryans matrisinin yapısını gözönüne almak daha ilginç olacaktır. $X\beta$ beklenen değer vektörünün $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicilerinin eşitliği ile ilgili literatürde oldukça önemli çalışmalar yapılmıştır (bkz. Puntanen ve Styan, 1989).

3.4 Genel Lineer Model ve Kısıtlamalı Model Altında Tahminlerin Eşitliği

Bu kısımda genel lineer modeller ve kısıtlamalı model altında parametre fonksiyonlarının tahminlerinin denklik durumları incelenecektir. Bunun için, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ keyfi ranklı bir bilinenler matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir bir rasgele vektör, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı nonnegatif definit bir matris ve σ^2 keyfi bilinmeyen bir pozitif parametre olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon,\ E(y) = X\beta, cov(y) = \sigma^2 V, \tag{3.25}$$

genel lineer modelinin verildiğini varsayalım. Öte yandan bilinmeyen β parameter vektörü üzerinde $A \in \mathbb{R}^{m\times(p+q)}$ bilinenler matrisi ve $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere tutarlı bir

$$A\beta = b \tag{3.26}$$

lineer matris formunda ekstra bilginin verildiğini de varsayalım. Bu tip kısıtlamalar genellikle parametre vektörü hakkındaki lineer hipotez testlerinin incelenmesinde karşımıza çıkabilir. (3.26) kısıtlaması ile birlikte (3.6) modeline bir kısıtlamalı lineer model veya eşitlik kısıtlamalı lineer model adı verilir ve bu model

$$\mathcal{M}_r = \{y, X\beta \mid A\beta = b, \sigma^2 V\} \tag{3.27}$$

kapalı form biçiminde gösterilir. Kısıtlamalı lineer modeler özellikle istatistikte oldukça sık kullanılmaktadır. Bununla beraber (3.27) modeli altında β parametre vektörünün tahmin edilmesi (3.6) modeli altında β parametre vektörünün tahmin edilmesinden çok daha karmaşık olacaktır. Lineer modellerin incelenmesinde (3.27) modeli genellikle çeşitli dönüşümler yardımıyla daha açık bir kısıtlamalı lineer modele dönüştürülür. Bu husustaki en popular dönüşümler Lagrange çarpanları ve (3.26) deki denkleme bir çözüm olacak şekilde yeniden parametreleştirme yapmaktır.

$r(X) = p$ ve $r(A) = m$ olması özel durumunda (3.27) de verilen model altında β parametre vektörünün alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE)

$$OLSE_{M_r}(\beta) = (X^T X)^{-1} X^T y$$
$$+(X^T X)^{-1}[A(X^T X)^{-1} A^T]^{-1}(A(X^T X)^{-1} X^T y - b) \qquad (3.28)$$

şeklinde verilir (bkz. Amemiya, 1985).

Bu kısımda $K \in \mathbb{R}^{k \times p}$ olmak üzere verilen bir tahmin edilebilir $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.6) ve (3.27) ile verilen lineer modeller altındaki tahmin edicileri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Özellikle bu tahmin edicilerin birbirine denk olabilmesi için bazı belirleyici şartlar ele alınacaktır. Eğer model matrisi tam ranklı değil ise, β ve $K\beta$ parametre vektörlerinin OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin ifade edilmesinde genelleştirilmiş inversler işin içine girecektir.

$K \in \mathbb{R}^{k \times p}$ olmak üzere verilen bir $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.6) ve (3.27) de verilen genel lineer modeller altında tahmin edilebilir olabilmesi için daha önce de ifade edildiği gibi $E(Ly + c) = K\beta$ olacak şekilde L ve c matrisleri bulunmalıdır. Bu durumda (3.6) ile verilen genel lineer model altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun tahmin edilebilir olması için gerek ve yeter şart $\Re(K^T) \subseteq \Re(X^T)$ olmasıdır. Benzer şekilde (3.27) ile verilen genel lineer model altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun tahmin edilebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Re(K^T) \subseteq \Re(X^T : A^T)$ olmasıdır. Buradan kolayca görülebilir ki eğer $K\beta$ parametre fonksiyonu (3.6) modeli altında tahmin edilebilir ise (3.27) lineer modeli altında da tahmin edilebilir olacaktır. $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.6) ve (3.27) ile verilen lineer modeller altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicileri farklı kriterlere göre tanımlandığından bunların aynı olmaları gerekmez. Bu nedenledir ki $K\beta$ fonksiyonunun OLSE ve BLUE tahmin edicilerini karşılaştırmak ve eşit olmaları için gerek ve yeter şartlar vermek oldukça önemlidir.

(3.26) de verilen tutarlı matris denkleminin genel çözümü u keyfi vektörü için

$$\beta = A^{\dagger} b + F_A u \qquad (3.29)$$

şeklinde olacaktır. Burada $F_A = I - P_{A^T} = I - A^{\dagger} A$ dır. Bu durumda eğer β nın bu değeri (3.6) ifadesinde yerine yazlırsa, bu takdirde $z = y - XA^{\dagger} b$ olmak üzere yeniden parametreleştirilmiş

$$z = X_A u + \varepsilon \tag{3.30}$$

lineer modeli elde edilir. Bu nedenle (3.27) modeli altındaki tahmin ediciler (3.30) ifadesinden türetilebilir. $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.6) ve (3.27) ifadelerinde verilen genel lineer modeller altında OLSE tahminleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.7 (i) $\mathcal{M}$ lineer modeli (3.6) ifadesindeki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonunun bu model altında tahmin edilebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde M modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE tahmin edicisi

$$OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = KX^{\dagger}y \tag{3.31}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

(ii) $\mathcal{M}_r$ modeli (3.27) ifadesindeki gibi verilmiş olsun ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olsun. Bu takdirde $\mathcal{M}_r$ modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun OLSE tahmin edicisi $K_A = KF_A$ ve $X_A = XF_A$ olmak üzere

$$OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = \left(KA^{\dagger} - K_A X_A^{\dagger} X A^{\dagger}\right)b + K_A X_A^{\dagger} y \tag{3.32}$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir (Tian, 2010).

İspat. (i) şıkkının ispatı daha önceden verilmişti. Ayrıca $AX = B$ matris denkleminin tutarlı olabilmesi için gerek ve yeter şart biliyoruz ki $AA^{\dagger}B = B$ olmasıdır. Bu durumda C keyfi bir matris olmak üzere denklemin genel çözümü $X = A^{\dagger}B + F_A C$ parametrik formunda yazılabilir. Özel olarak $AX = 0$ denkleminin nonnegatif tanımlı genel çözümü ise $X = F_A C C^T F_A$ olarak verilebilir. Bu durumda (3.30) ifadesindeki u parametre vektörünün OLSE tahmin edicisi v keyfi bir vektör olmak üzere $\hat{u} = X_A^{\dagger} z + F_{X_A} v$ olarak yazılabilir. Bu ifade (3.32) de yerine yazılırsa iddia edildiği gibi

$$\begin{aligned} OLSE_{M_r}(\beta) &= A^{\dagger}b + F_A X_A^{\dagger} z + F_A F_{X_A} u \\ &= \left(A^{\dagger} - F_A X_A^{\dagger} X A^{\dagger}\right)b + F_A X_A^{\dagger} y + F_A F_{X_A} u \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Bu ise lemmanın ispatını tamamlar.

Lemma 3.8 $\mathcal{M}$ modeli (3.6) daki gibi verilsin ve $K\beta$ fonksiyonu (3.6) lineer modeli altında tahmin edilebilir olsun. Bu durumda $\mathcal{M}$ modeli altında $K\beta$ fonksiyonunun BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = P_{K:X:V}y \tag{3.33}$$

şeklinde yazılabilir, burada $P_{K:X:V}$

$$G(X: VE_X) = (K: 0) \tag{3.34}$$

matris denkleminin çözümüdür. Bu takdirde (3.34) denkleminin genel çözümü U matrisi keyfi olmak üzere

$$P_{K:X:\mathrm{V}} = (K: 0)(X: VE_X)^{\dagger} + UE_{(X:VE_X)} \tag{3.35}$$

parametrik formunda yazılabilir ve ayrıca

$$r(X: VE_X) = r(X: V) \text{ ve } \Re(X: VE_X) = \Re(X: V)$$

olup $P_{K:X:V}V$ çarpımı $P_{K:X:V}V = (K: 0)(X: VE_X)^{\dagger}V$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Bu durumda (3.33) ifadesine ilaveten $BLUE_M(K\beta)$ tahmininin bir gösterimi olarak U keyfi simetrik bir matris, $r(T) = r(X: V)$ ve $T = V + XUX^T$ olmak üzere

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = K(X^T T^{\dagger} X)^{\dagger} X T T^{\dagger} y \tag{3.36}$$

ifadesi yazılabilir (Tian, 2010).

Lemma 3.9 $\mathcal{M}_r$ kısıtlamalı modeli (3.27) deki gibi verilmek üzere $K\beta$ fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olsun. Bu durumda $\mathcal{M}_r$ kısıtlamalı lineer modeli altında $K\beta$ parametre fonksiyonunun BLUE tahmin edicisi $K_A = KF_A$, $X_A = XF_A$ ve

$$P_{K_A:X_A:V} = (K_A: 0)\left(X_A: VE_{X_A}\right)^{\dagger} + UE_{X_A:VE_{X_A}}$$

olmak üzere

$$BLUE_{M_r}(K\beta) = \left(I - P_{K_A:X_A:V}\right)XA^{\dagger}b + P_{K_A:X_A:V}y \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir bu durumda

$$r\left(X_A: VE_{X_A}\right) = r(X_A: V) \text{ ve } \Re\left(X_A: VE_{X_A}\right) = \Re(X_A: V)$$

olup $P_{K_A:X_A:V}V$ çarpımı

$$P_{K_A:X_A:V}V = (K_A: 0)\left(X_A: VE_{X_A}\right)^{\dagger}V$$

şeklinde tek türlü yazılır (Tian, 2010).

İspat. Lemma 3.8 dan kolayca görülebilir ki (3.30) modeli altında $K_A u$ nun BLUE tahmin edicisi $BLUE_{\mathcal{M}}(K_A u) = P_{K_A:X_A:V} z$ şeklinde yazılabilir. Eğer bu ifade (3.29) eşitliğinde yerine yazılırsa, bu durumda (3.37) de istenildiği gibi

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = KA^{\dagger}b + BLUE_{\mathcal{M}_r}(K_A u)$$

$$= KA^{\dagger}b + P_{K_A:X_A:V}(y - \mathrm{X}A^{\dagger}b)$$

olduğu görülür ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.7, Lemma 3.8 ve Lemma 3.9 da OLSE ve BLUE tahmin edicileri için verilen ifadelerden kolayca gösterilebilir ki OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşitliğinin karakterize edilmesi için matrisler ve genelleştirilmiş inverslerini içeren matris denklemlerinin eşitliğinin karakterize edilmesi gerekmektedir. Bunula ilgili olarak daha önce verilen rank eşitlikleri uygulanarak $K\beta$ parametre fonksiyonunun (3.6) ve (3.27) de verilen genel lineer modeller altındaki OLSE ve BLUE tahminleri ile ilgili aşağıdaki altı eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şartlar verilebilir.

i. $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$,

ii. $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$,

iii. $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$,

iv. $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$,

v. $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$,

vi. $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$.

Teorem 3.3 $\mathcal{M}$ modeli (3.6) ifadesindeki gibi verilsin ve $K\beta$ fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.31) ve (3.33) ifadelerinde verildikleri şekilde olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır:

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla gerçeklenir.

(ii) K, X ve V matrisleri için $KX^{\dagger}\mathrm{V}\mathrm{E}_X = 0$ matris denklemi gerçeklenir.

(iii) $\Re[(KX^{\dagger}V)^T] \subseteq \Re(X)$ dir.

(iv) $\Re\begin{bmatrix} X^TVE_X \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X^TX \\ K \end{bmatrix}$ dir.

(v) $r\begin{bmatrix} X^TV & X^TX \\ X^T & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X^TV & X^TX \\ X^T & 0 \end{bmatrix} = 2r(X)$ dir.

(vi) $\Re\begin{bmatrix} K^T \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X^TX & 0 \\ VX & X \end{bmatrix}$ dir.

(vii) $\mathrm{E}_X(\mathrm{VX}: 0)\mathrm{F}_{(X^TX:K^T)} = 0$ dir.

(viii) $\mathrm{XU}_1 + \mathrm{U}_2(X^TX: K^T) = (VX: 0)$ matris denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilir.

(ix) V matrisi bir C matrisi için $V = (I - H^TH)CC^T(I - H^TH)$ olarak yazılır, burada $H = KX^\dagger - (K: 0)(X: VE_X)^\dagger$ dir (Tian, 2010).

İspat. $OLSE_M(K\beta)$ ve $BLUE_M(K\beta)$ tahmin edicileri (3.6) ifadesinde verilen model altında $K\beta$ parametre fonksiyonu için yansız tahmin edicilerdir. Bu nedenle 1 olasılıkla $OLSE_M(K\beta) = BLUE_M(K\beta)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$KX^\dagger V = (K: 0)(X: VE_X)^\dagger V$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&r(KX^\dagger \mathrm{V} - (K: 0)(X: VE_X)^\dagger V) \\
&\quad = r(K(X^TX)^\dagger X^TV - (K: 0)(X: VE_X)^\dagger V) \\
&\quad = r\left[\big(K: (K: 0)\big)\begin{pmatrix} X^TX & 0 \\ 0 & (X: VE_X) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} X^TV \\ V \end{pmatrix}\right] \\
&\quad = r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & X^TV \\ 0 & -(X: VE_X) & V \\ K & (K: 0) & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(X: VE_X) \\
&\quad = r\begin{bmatrix} X^TX & -X^TX & 0 & X^TV \\ 0 & -X & -VE_X & V \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(X: \mathrm{V}) \\
&\quad = r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & X^TVE_X & 0 \\ 0 & -X & 0 & V \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(X: \mathrm{V}) \\
&\quad = r\begin{bmatrix} X^TX & X^TVE_X \\ K & 0 \end{bmatrix} - r(X) \\
&\quad = r\begin{bmatrix} VX & 0 & X \\ X^TX & K^T & 0 \end{bmatrix} - 2r(X) \\
&\quad = r(E_X(VX: 0)F_{(X^TX:K^T)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda eşitliğin her iki tarafı sıfıra eşitlenirse (iv)-(vii) şıklarının sağlandığı görülür. (viii) ve (ix) şıklarının denkliği ise açıkça görülebilir. Ayrıca (3.31) eşitliğini (3.34) de yerine yazarak $KX^{\dagger}X = K$ nın $KX^{\dagger}V\mathrm{E}_X = 0$ matris denklemini sağladığı dikkate alınırsa (iii) de istenildiği gibi $\Re[(KX^{\dagger}V)^T] \subseteq \Re(X)$ olduğu elde edilmiş olur. Öte yandan $KX^{\dagger}\mathrm{V} = (K{:}\,0)(X{:}\,\mathrm{VE}_X)^{\dagger}\mathrm{V}$ denkleminin çözümü (i) şıkkının çözümün elde edildiğini gösterir. Böylece de ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4 $\mathcal{M}$ modeli (3.6) ifadesindeki gibi verilsin ve $K\beta$ fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.31) ve (3.32) ifadelerinde verildikleri şekilde olsunlar.

(i) Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

a. $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

b. $r\begin{bmatrix} X^TX & X^TXF_A & X^TV \\ F_AX^TX & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} = r(XF_A) + r(X)$ dir.

c. $N = \begin{pmatrix} X^TX & X^TXF_A \\ F_AX^TX & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\Re\begin{bmatrix} X^TV \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re(N),\ \ \Re\begin{bmatrix} K^T \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re(N) \text{ ve } (K{:}\,0)N^{\dagger}\begin{bmatrix} X^TV \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

durumları sağlanır.

d. V matrisi keyfi bir C matrisi için $V = F_JCC^TF_J$ olarak parçalanabilir, burada $J = KX^{\dagger} - K_AX_A^{\dagger}$ dir.

(ii) V matrisi pzitif definit olduğunda $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Re(K^T) \subseteq \Re(X^TXF_A)$ olmasıdır (Tian, 2010).

İspat. $\mathcal{M}$ lineer modeli (3.6) daki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicileri $K\beta$ parametre fonksiyonunun yansız tahmin edilcileri olduğundan 1 olasılıkla $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $KX^{\dagger}V = K_AX_A^{\dagger}V$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r\big(KX^{\dagger}V - K_AX_A^{\dagger}V\big)$$
$$= r(K(X^TX)^{\dagger}X^TV - KF_A(F_AX^TXF_A)^{\dagger}(XF_A)^TV)$$

$$= r\left[(K{:}KF_A)\begin{pmatrix} X^TX & 0 \\ 0 & F_AX^TXF_A \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} X^TV \\ (XF_A)^TV \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & X^TV \\ 0 & (XF_A)^TXF_A & (XF_A)^TV \\ K & KF_A & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(XF_A)$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & X^TV \\ -(XF_A)^TX & -(XF_A)^TXF_A & 0 \\ K & KF_A & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(XF_A)$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & X^TXF_A & X^TV \\ F_AX^TX & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r(XF_A)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenirse a. ve b. şıklarının denkliği görülür. b. ve c. şıklarının denkliği ise kolay bir şekilde görülebilir. Öte yandan $KX^{\dagger}V = K_AX_A^{\dagger}V$ denkleminin çözümü d. şıkkının çözümünün elde edildiğini gösterir. Ayrıca (ii) deki sonuç ise (i) şıkkından direct olarak görülebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5 $\mathcal{M}$ modeli (3.6) ifadesinde verildiği gibi olsun ve $K\beta$ fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.31) ve (3.37) ifadelerinde verildikleri şekilde olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(ii) $r\begin{bmatrix} VX & 0 & X \\ 0 & 0 & A \\ X^TX & K^T & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(X)$ dir.

(iii) $F_{(X:A)^T}\begin{pmatrix} VX & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}E_{(X^TX:K^T)} = 0$ eşitliği sağlanır.

(iv) $\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix}U_1 + U_2(X^TX{:}K^T) = \begin{bmatrix} VX & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilirdir.

İspat. $\mathcal{M}$ lineer modeli (3.6) ifadesinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde $OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ parametre fonksiyonu için yansız tahmin ediciler olacaktır. Bunun sonucu olarak

$$OLSE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$$

eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $KX^{\dagger}V = P_{K_A:X_A:V}V$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r\left(KX^{\dagger}V - P_{K_A:X_A:V}V\right)$$

$$= r(K(X^TX)^{\dagger}X^TV - (KF_A:0)\left(XF_A:VE_{XF_A}\right)^{\dagger}V)$$

$$= r\left[(K:KF_A:0)\begin{pmatrix} X^TX & 0 \\ 0 & -\left(XF_A:VE_{XF_A}\right)\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} X^TV \\ V\end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & X^TV \\ 0 & -\left(XF_A:VE_{XF_A}\right) & V \\ K & KF_A & 0\end{bmatrix} - r(X) - r\left(XF_A:VE_{XF_A}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & -X^TXF_A & 0 & X^TV \\ 0 & -XF_A & -VE_{XF_A} & V \\ K & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - r(X) - r(XF_A:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & X^TVE_{XF_A} & 0 \\ 0 & -XF_A & 0 & V \\ K & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - r(X) - r(XF_A:V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & X^TVE_{XF_A} \\ K & 0\end{bmatrix} - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} X^TX & K^T & 0 \\ VX & 0 & XF_A\end{bmatrix} - r(XF_A) - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} VX & 0 & X \\ 0 & 0 & A \\ X^TX & K^T & 0\end{bmatrix} - r\begin{pmatrix} X \\ A\end{pmatrix} - r(X)$$

elde edilir. Eğer bu eşitliğin sağ taraf sıfıra eşitlenirse bu durumda (i) ve (ii) şıklarının denkliğinin sağlandığı görülür. Diğer taraftan (ii) ile (iii) ve (ii) ile (iv) şıklarının denkliği de daha önce verilen lemmalardan kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.6 $\mathcal{M}$ modeli (3.6) daki gibi verilsin ve $K\beta$ fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.32) ve (3.33) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla gerçeklenir.

(ii) $r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & X^TV & 0 & A^T \\ X & X & 0 & V & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^T & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(X\colon V) + r(X) + r(A)$ dir.

İspat. $\mathcal{M}$ modeli (3.6) ifadesinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her biri $K\beta$ fonksiyonu için yansız tahmin edicidir. Bunun sonucunda $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $K_A X_A^{\dagger} V = P_{K:X:V}V$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
& r\left(K_A {X_A}^{\dagger} V - P_{K:X:V}V\right) \\
&= r(KF_A(F_AX^TXF_A)^{\dagger}(F_A)^TV - (K\colon 0)(X\colon VE_X)^{\dagger}V) \\
&= r\left[\left(KF_A\colon (K\colon 0)\right)\begin{pmatrix} (XF_A)^TXF_A & 0 \\ 0 & -(X\colon VE_X) \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} (XF_A)^TV \\ V \end{pmatrix}\right] \\
&= r\begin{bmatrix} (XF_A)^TXF_A & 0 & (XF_A)^TV \\ 0 & -(X\colon VE_X) & V \\ KF_A & (K\colon 0) & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A) - r(X\colon VE_X) \\
&= r\begin{bmatrix} (XF_A)^TXF_A & 0 & 0 & (XF_A)^TV \\ XF_A & -X & -VE_X & V \\ 0 & K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A) - r(X\colon V) \\
&= r\begin{bmatrix} 0 & (XF_A)^TX & (XF_A)^TVE_X & 0 \\ XF_A & -X & 0 & V \\ 0 & K & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A) - r(X\colon V) \\
&= r\begin{bmatrix} 0 & X^TX & X^TV & 0 & V^T \\ X & X & 0 & V & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^T & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} - r(X\colon V) - r(X) - r(A)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda eğer bu eşitliğin sağ taraf sıfıra eşitlenirse bu takdirde (i) ve (ii) şıklarının birbirine denk olacağı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.7 $\mathcal{M}$ modeli (3.6) daki gibi verilsin ve $K\beta$ fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.33) ve (3.37) ifadelerinde verildikleri şekilde olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır (Tian, 2010):

(i) $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla gerçeklenir.

(ii) $r\begin{bmatrix} V & 0 & X \\ 0 & 0 & A \\ X^T & K^T & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(X\colon V)$ dir.

(iii) $\Re\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K^T \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} V & X \\ 0 & A \\ X^T & 0 \end{bmatrix}$ dir.

İspat. M modeli (3.6) deki gibi verilsin. Bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ fonksiyonu için yansız tahmin ediciler olacaktır. Bu nedenle $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ eşitliğinin bir olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $P_{K:X:V}V = P_{K_A:X_A:V}V$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda

$$r\left(P_{K:X:V}V - P_{K_A:X_A:V}V\right)$$

$$= r(((K\colon 0)(X\colon VE_X)^{\dagger}V - (KF_A\colon 0)(XF_A\colon VE_{XF_A})^{\dagger}\mathrm{V})$$

$$= r\left[\left((K\colon 0)\colon (KF_A\colon 0)\right)\begin{pmatrix} (X\colon VE_X) & 0 \\ 0 & -\left(XF_A\colon VE_{XF_A}\right) \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} ((\mathrm{X}\colon \mathrm{VE_X}) & 0 & \mathrm{V} \\ 0 & -\left(\mathrm{XF_A}\colon \mathrm{VE_{XF_A}}\right) & \mathrm{V} \\ (\mathrm{K}\colon 0) & (\mathrm{KF_A}\colon 0) & 0 \end{bmatrix} - r\left(XF_A\colon VE_{XF_A}\right) - r(X\colon VE_X)$$

$$= r\begin{bmatrix} X & VE_X & -XF_A & 0 & V \\ 0 & 0 & -XF_A & -VE_{XF_A}V & \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A\colon V) - r(X\colon V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X & VE_X & 0 & VE_{XF_A} & 0 \\ 0 & 0 & -XF_A & 0 & V \\ K & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(XF_A\colon V) - r(X\colon V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X & VE_{XF_A} \\ K & 0 \end{bmatrix} - r(X\colon V)$$

$$= r\begin{bmatrix} X^T & K^T & 0 \\ V & 0 & XF_A \end{bmatrix} - r(XF_A) - r(X\colon V)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & X^T & K^T \\ X & V & 0 \\ A & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} - r(X\colon V)$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenirse bu durumda (i) ve (ii) şıklarının denkliğinin sağlandığı görülebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.8 $\mathcal{M}$ modeli (3.6) daki gibi verilsin ve $K\beta$ parametre fonksiyonu bu model altında tahmin edilebilir olmak üzere $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(K\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.32) ve (3.37) ifadelerinde verildikleri şekilde olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(ii) $r\begin{bmatrix} VXF_A & 0 & XF_A \\ F_AX^TXF_A & F_AK^T & 0 \end{bmatrix} = 2r(XF_A)$ dir.

(iii) $r\begin{bmatrix} X^TX & 0 & K^T & X^T \\ VX & X & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2r\begin{bmatrix} X \\ A \end{bmatrix} + r(A)$ dir.

(iv) $XF_A\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2(F_AX^TXF_A : F_AK^T) = (VXF_A : 0)$ matris denklemi U_1 ve U_2 için çözülebilir.

İspat. $\mathcal{M}$ modeli (3.6) ifadesinde verildiği gibi olsun. Bu durumda $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ tahmin edicilerinin her ikisi de $K\beta$ fonksiyonu için bir yansız tahmin edici olacaktır. Bunun bir sonucu olarak $OLSE_{\mathcal{M}_r}(K\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(K\beta)$ eşitliğinin bir olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $K_AX_A^{\dagger}V = (K_A : 0)(X_A : E_{X_A})^{\dagger}V$ eşitliğinin gerçekleşmesidir. Dolayısıyla

$$r\left(K_AX_A^{\dagger}V - (K_A : 0)(X_A : E_{X_A})^{\dagger}V\right)$$

$$= r\left[(KF_A(F_AX^TXF_A)^{\dagger}(XF_A)^TV - (KF_A : 0)(XF_A : VE_{XF_A})^{\dagger}\mathrm{V}\right]$$

$$= r\left[(KF_A : KF_A : 0)\begin{pmatrix} F_AX^TXF_A & 0 \\ 0 & -(XF_A : VE_{XF_A}) \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} (XF_A)^TV \\ V \end{pmatrix}\right]$$

$$= r\begin{bmatrix} F_AX^TXF_A & 0 & F_AX^TV \\ 0 & -(XF_A : VE_{XF_A}) & V \\ KF_A & (KF_A : 0) & 0 \end{bmatrix} - r\left(XF_A : VE_{XF_A}\right) - r(\mathrm{X}F_A)$$

$$= r\begin{bmatrix} VXF_A & XF_A & 0 \\ F_AX^TXF_A & 0 & F_AK^T \end{bmatrix} - 2r(XF_A)$$

$$= r\begin{bmatrix} VX & X & 0 & 0 \\ X^TX & 0 & K^T & A^T \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} - r(A)$$

elde edilir. Eğer bu eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenirse bu durumda (i), (ii) ve (iii) şıklarının denkliğinin sağlandığı gösterilmiş olur. Öte yandan (ii) ve (iv) şıklarının denkliği ise kolaylıkla gösterilebilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.7, Lemma 3.8 ve Lemma 3.9 kullanılarak (3.6) ve (3.27) ile verilen modeller altında $X\beta$ vektörünün OLSE ve BLUE tahmin edicileri sırasıyla

$$OLSE_M(X\beta) = P_X y, \tag{3.38}$$

$$OLSE_{M_r}(X\beta) = E_{XF_A} XA^{\dagger}b + P_{XF_A} y, \tag{3.39}$$

$$BLUE_M(X\beta) = P_{X:V} y, \tag{3.40}$$

$$BLUE_{M_r}(X\beta) = \left(I - P_{XF_A:V}\right)XA^{\dagger}b + P_{XF_A:V} y, \tag{3.41}$$

olarak yazılabilir, burada U_1 ve U_2 matrisleri keyfi matrisler olmak üzere $P_{X:V}$ ve $P_{XF_A:V}$ izdüşümleri

$$P_{X:V} = (X:0)(X:VE_X)^{\dagger} + U_1 VE_{(X:V)}$$

$$P_{XF_A:V} = (XF_A:0)\left(XF_A:VE_{XF_A}\right)^{\dagger} + U_2 VE_{(XF_A:V)}$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi OLSE ve BLUE tahmin edicileri için (3.38)-(3.41) de verilen ifadelerin denkliği için Teorem 3.3 – Teorem 3.8 e paralel olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.1 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.38) ve (3.39) ifadelerinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(ii) $\Re\begin{bmatrix} X^TV \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} X^TX \\ A \end{pmatrix}$ dir.

(iii) $\Re[X^TV] \subseteq \Re(X^TXF_A)$ dir.

(iv) $E_{X^TXF_A}X^TV = 0$ dir.

V kovaryans matrisi $G = E_{X^TXF_A}$ ve H uygun mertebeden keyfi bir matris olmak üzere $V = F_G HH^T F_G$ formunda ifade edilebilir.

Sonuç 3.2 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.38) ve (3.40) de verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(ii) $\Re[VX] \subseteq \Re(X)$ dir.

(iii) $P_X V = V P_X$ dir.

(iv) V kovaryans matrisi U_1 ve U_2 uygun mertebeden matrisler olmak üzere

$V = \mathrm{X}\mathrm{U}_1\mathrm{U}_1^T X^T + E_X \mathrm{U}_2 \mathrm{U}_2^T E_X$ formunda ifade edilebilir.

Bir genel lineer model altında OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin denk olup olmadığı oldukça önemlidir. Bu nedenle özellikle tahmin edicilerin denklği üzerine pek çok önemli bilimsel çalışma mevcuttur. Istatistiksel literatürde bu formda verilen bir kovaryans matrisine Rao Kovaryans yapısı adı verilir.

Sonuç 3.3 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.38) ve (3.41) ifadelerinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(ii) $\Re\begin{bmatrix} VX \\ 0 \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix}$ dir.

(iii) $\Re[VX] \subseteq \Re(XF_A)$ dir.

(iv) $E_{XF_A} VX = 0$ dir.

Sonuç 3.4 $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.39) ve (3.40) ifadelerinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktirler (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{M_r}(X\beta) = BLUE_M(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(ii) $r\begin{pmatrix} X & V \\ A & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} + r(X\colon V) - r(X)$ ve $r\begin{pmatrix} VX & X \\ A & 0 \end{pmatrix} = r(X) + r(A)$ dir.

(iii) $r\left(E_{XF_A} V\right) = r(E_X V)$ ve $E_X V X F_A = 0$ dir.

Sonuç 3.5 $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.39) ve (3.41) ifadelerinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktirler (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla gerçeklenir.

(ii) $\mathfrak{R}[VXF_A] \subseteq \mathfrak{R}(XF_A)$ dir.

(iii) $r\begin{pmatrix} VX & X \\ 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} + r(X{:}A) - r(X)$ dir.

(iv) $VXF_A = XF_AV$ dir.

(v) V kovaryans matrisi U_1 ve U_2 uygun mertebeden matrisler olmak üzere

$$V = XF_A\mathrm{U}_1\mathrm{U}_1^TF_AX^T + E_{XF_A}\mathrm{U}_2\mathrm{U}_2^T\,E_{XF_A}$$

formunda ifade edilebilir.

Sonuç 3.6 $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.40) ve (3.41) ifadelerinde verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Tian, 2010):

(i) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(ii) $r\begin{pmatrix} X & V \\ A & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} + r(X{:}A) - r(X)$ dir.

(iii) $r\big(E_{XF_A}V\big) = r(E_XV)$ dir.

Sonuç 3.8 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.38)-(3.41) de verildiği gibi olsun. Ayrıca $\mathfrak{R}(A^T) \cap \mathfrak{R}(X^T) = \{0\}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği sağlanır.

(ii) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği sağlanır (Tian, 2010).

Sonuç 3.9 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.38)-(3.41) eşitliklerinde verildikleri şekilde olsunlar. Ayrıca $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(V)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla sgerçeklenir.

$\Leftrightarrow BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla gerçeklenir.

$\Leftrightarrow \mathfrak{R}(A^T) \cap \mathfrak{R}(X^T) = \{0\}$ dir.

(ii) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ eşitliği 1 olasılıkla şerçeklenir.

$\Leftrightarrow \mathfrak{R}(A^T) \cap \mathfrak{R}(X^T) = \{0\}$ ve $\mathfrak{R}(VX) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ dir (Tian, 2010).

Sonuç 3.10 Eğer $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta),\ OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta),\ BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.38)-(3.41) eşitliklerinde verildikleri şekilde olmak üzere $r(X) = p$ ise, bu takdirde aşağıdaki ifadeler 1 olasılıkla gerçeklenir (Tian, 20210):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) \Leftrightarrow AX^{\dagger}V = 0$,

(ii) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) \Leftrightarrow X^{\dagger}V = 0$ ve $\Re(VX) \subseteq \Re(X)$,

(iii) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) \Leftrightarrow \Re((A{:}\,0)^T\ ) \subseteq \Re((X{:}\,V)^T\ )$.

Şimdi $r(X) = p$ ve $K = I_p$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.6) ve (3.27) ifadelerinde verilen lineer modeller altında β parametre vektörünün OLSE ve BLUE tahmin edicileri sırasıyla

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = X^{\dagger}y, \tag{3.42}$$

$$OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = (A^{\dagger} - F_A(XF_A)^{\dagger}XA^{\dagger}b + F_A(XF_A)^{\dagger}y, \tag{3.43}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = P_{I_p:X:V}y, \tag{3.44}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = \left(I_p - P_{F_A:XF_A:V}\right)XA^{\dagger}b + P_{F_A:XF_A:V}y, \tag{3.45}$$

dir, burada U_1 ve U_2 matrisleri keyfi olmak üzere $P_{I_p:X:V}$ ve $P_{F_A:XF_A:V}$ izdüşümleri

$$P_{I_p:X:V} = \left(I_p{:}\,0\right)(X{:}\,VE_X)^{\dagger} + U_1VE_{(X:V)}$$

$$P_{F_A:XF_A:V} = (F_A{:}\,0)\left(XF_A{:}\,VE_{XF_A}\right)^{\dagger} + U_1VE_{(XF_A:V)}$$

formunda olacaktır. Eğer $r(X) = p$ ve $r(V) = n$ olduğu varsayılırsa bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.11 Eğer $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta), OLSE_{\mathcal{M}}(\beta),\ BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla (3.42)-(3.45şeklinde ise aşağıdaki ifadeler sağlanır (Tian, 2010):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) =\ BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) \Leftrightarrow \Re(VX) \subseteq \Re(X)$,

(ii) $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) =\ OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(X^T)\cap\Re(A^T) = \{0\}$,

(iii) $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) =\ BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(VXF_A) \subseteq \Re(XF_A)$,

(iv) $OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) =\ BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) \Leftrightarrow \Re(VXF_A) \subseteq \Re(XF_A)$,

(v) $BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) =\ BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) \Leftrightarrow A = 0$,

(vi)$OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) \Leftrightarrow \Re(VXF_A) \subseteq \Re(XF_A)$.

3.5 Parçalı Lineer Modellerde OLSE ve BLUE Tahminleri

Bu kısımda $\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ paçalı tam lineer modeli ve bu modelden türetilen $\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, \sigma^2 V\}$ ve $\mathcal{M}_2 = \{y, X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ alt modelleri ele alınarak, tam model altında OLSE tahmin edicisinin alt modeller altındaki OLSE tahmin edicilerin toplamına eşit; tam model altında BLUE tahmin edicisinin alt modeller altındaki BLUE tahmin edicilerin toplamına eşit ve tam model altında BLUE tahmin edicisinin alt modeller altındaki OLSE tahmin edicilerin toplamına eşit olmaları için bazı gerek ve yeter şartlar verilecektir. Temel sonuçların ispatları genel lineer model altında değişik tahmin edicilerin karakterize edilmesi sürecinde matris rank metotlarının nasıl kullanıldığını da açıklamaktadır.

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon\,,\ E(\varepsilon) = 0\,,\ Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V, \tag{3.46}$$

parçalı lineer modelinin verildiğini varsayalım, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ bilinenlerin keyfi ranklı iki matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlemlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{q\times 1}$, bilinmeyenlerin iki parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı non-negatif definit bir matris ve σ^2 bilinmeyen bir pozitif parametredir. Eğer V matrisi singüler bir matris ise bu durumda (3.46) modeline singüler lineer model de denir. Bu durumda (3.46) modeli genellikle $X = [X_1, X_2]$ ve $\beta =[\beta_1, \beta_2]$ olmak üzere

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\} \tag{3.47}$$

şeklinde gösterilir. $\mathcal{M}$ tam modeli ile ilgili olarak iki alt model de

$$\mathcal{M}_1 = \{y, X_1\beta_1, \sigma^2 V\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{M}_2 = \{y, X_2\beta_2, \sigma^2 V\} \tag{3.48}$$

ile gösterilsin. Bu kısımdaki esas amacımız (3.47) ve (3.48) ile verilen modeller altında OLSE ve BLUE tahmin edicileri arasındaki ilişkileri ortaya koymak olacaktır. Özel olarak, $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ parameresinin OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ modelleri altında sırasıyla $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ parametrelerinin OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin toplamına eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar türetilecektir. Bu konudaki bazı önemli araştırmalar Bhimasankaram & Saharay(1997), Chu ve Ark.(2004), Grob & Puntanen(2000), Nurhonen & Puntanen(1992), Werner & Yapar(1995,1996), Zhang ve Ark.(2004) tarafından yapılmıştır.

β ve $X\beta$ parametrelerinin (3.47) ile verilen genel lineer model altındaki OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki gibi verilebilir: β parametresinin (3.2) de verilen tam lineer model altındaki OLSE tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = argmin(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta)^T(\mathrm{y} - \mathrm{X}\beta) \tag{3.49}$$

dir. Bu durumda $X\beta$ nın (3.2) deki genel linner model altındaki OLSE tahmin edicisi $OLSE_M(X\beta)$= $X.OLSE_M(\beta)$ dir. Öte yandan $BLUE_M(X\beta)$ ile gösterilen $X\beta$ nın (3.47) altındaki BLUE tahmin edicisi, bir Gy lineer tahmin edicisi olarak tanımlanır öyle ki Eğer $E(Gy) = \beta$ ve $X\beta$ parametresinin (3.47) altındaki diğer herhangi bir yansız lineer tahmin edicisi Ly ise bu durumda $Cov(Ly)$– $Cov(Gy)$ farkı non-negatif definit olacaktır. Bu durumda (3.4) bağıntısı ile ilgili normal denklem $X^TX\beta = X^Ty$ şeklinde olup bu denklemin çözümü aşağıdaki iyi bilinen sonuçta verilmiştir.

Lemma 3.10 (3.47) modeli altında β ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE tahmin edicileri $v \in \mathbb{R}^{(p+q)\times 1}$ tipinde keyfi bir vektör olmak üzere aşağıdaki gibi verilebilir:

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = \hat{\beta} = (X^TX)^{\dagger}X^Ty + (I - X^{\dagger}X)v = X^{\dagger}y + F_Xv \tag{3.50}$$

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = \widehat{X\beta} = XOLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = XX^{\dagger}y = P_Xy, \tag{3.51}$$

burada $P_A = AA^{\dagger}, F_A = I - A^{\dagger}A, E_A = I - AA^{\dagger}$ ortogonal izdüşümlerdir (Tian, 2007).

Öte yandan (3.47) lineer modeli altında $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicisi aşağıdaki lemma da verilmiştir (bakınız, Rao, 1973, s.282).

Lemma 3.11 Bir Gy tahmin edicisinin (3.47) modeli altında $X\beta$ parametresinin bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart G matrisinin

$$G[X, VE_X] = [X,0] \tag{3.52}$$

lineer matris denklemini sağlamasıdır (Tian, 2007).

Bu denklem tutarlı bir denklemdir, yani, $\Re([X, 0]^T) \subseteq \Re([X, VE_X]^T)$, veya buna denk olarak,

$$[X, 0][\,X, VE_X]^{\dagger}[X, VE_X] = [X, 0]$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durumda (3.52) denkelminin $P_{X\|V}$ ile gösterilen genel çözümü, $U \in \mathbb{R}^{nxn}$ keyfi nir matris olmak üzere

$$P_{X\|V} = [X, 0][\, X, VE_X]^{\dagger} + UE_{[X,VE_X]}, \tag{3.53}$$

olup $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = \widetilde{X\beta} = P_{X\|V}y \tag{3.54}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\{P_{X\|V}\}$ ve $\{BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\}$ ile sırasıyla tüm $P_{X\|V}$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ lerin ailesini gösterilecektir. Lineer modeller ile ilgili çalışmalarda (3.47) modelindeki X tasarım matrisinin tam sütun ranklı bir matris ve V kovaryans matrisinin de pozitif definit bir matris olduğu durum en sık rastlanılan durumdur. Bu durumda, (3.47) ile verilen model altında, β ve $X\beta$ parametrelerinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri aşağıdaki standart formlarda tek türlü olarak yazılabilir:

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X^TX)^{-1}X'y\,, \quad OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X(X^TX)^{-1}X^Ty, \tag{3.55}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X^TV^{-1}X)X^TV^{-1}y\,,\; BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = (X^TV^{-1}X)X^TV^{-1}y. \tag{3.56}$$

Bu durumda (3.47) modeli altında β ve $X\beta$ parametreleri için verilen bu tahmin edicilerin dördü de yansız tahmin edicilerdir. Ayrıca eğer $X = [X_1, X_2]$ matrisindeki X_1 ve X_2 alt matrisleri ortogonal ise, başka bir deyişle $X_1^TX_2 = 0$ ise bu takdirde, (3.55) ifadesindeki $(X^TX)^{-1}X^T$ ve $X(X^TX)^{-1}X^T$ matrisleri sırasıyla

$$(X^TX)^{-1}X' = \begin{bmatrix}(X_1^TX_1)^{-1}X_1^T\\(X_2^TX_2)^{-1}X_2^T\end{bmatrix},$$

$$X(X^TX)^{-1}X^T = X_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^T + X_2(X_2^TX_2)^{-1}X_2^T \tag{3.57}$$

olarak yazılabilir. Bunun olarak (3.55) da verilen $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri de sırasıyla

$$OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1^TX_1)^{-1}X_1^Ty\\(X_2^TX_2)^{-1}X_2^Ty\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}OLSE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1)\\OLSE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)\end{bmatrix} \tag{3.58}$$

ve

$$\begin{aligned} OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) &= X_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^Ty + X_2(X_2^TX_2)^{-1}X_2^Ty \\ &= OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) \end{aligned} \tag{3.59}$$

olarak yazılabilir. Öte yandan eğer $X = [X_1, X_2]$ matrisindeki X_1 ve X_2 alt matrisleri $V^{-1}-$orthogonal, yani $X_1^TV^{-1}X_2 = 0$ ise, (3.56) deki $(X^TV^{-1}X)^{-1}\, X^TV^{-1}$ ve $X(X^TV^{-1}X)^{-1}\, X^TV^{-1}$ matrisleri sırasıyla

$$(X^TV^{-1}X)^{-1}\, X^TV^{-1} = \begin{bmatrix}(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}X_1^TV^{-1}\\(X_2^TV^{-1}X_2)^{-1}X_2^TV^{-1}\end{bmatrix} \tag{3.60}$$

ve

$$X(X^TV^{-1}X)^{-1}\, X^TV^{-1} = X_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}X_1^TV^{-1} + X_2(X_2^TV^{-1}X_2)^{-1}X_2^TV^{-1} \tag{3.61}$$

biçiminde yazılabilir. Bununla paralel olarak (3.56) ifadesindeki $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicileri sırasıyla

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix}(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}X_1^TV^{-1}y\\(X_2^TV^{-1}X_2)^{-1}X_2^TV^{-1}y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1)\\BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)\end{bmatrix} \tag{3.62}$$

ve

$$\begin{aligned}BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) &= X_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}X_1^TV^{-1}y + X_2(X_2^TV^{-1}X_2)^{-1}{X_2^T}^{-1}y\\ &= BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\end{aligned} \tag{3.63}$$

olarak ayrıştırılabilir.

Bu durumda (3.62) ve (3.63) ifadelerinin sağ taraflarındaki gösterimler $(X_i^TV^{-1}X_i)^{-1}X_i^TV^{-1}y$ ve $X_i(X_i^TV^{-1}X_i)^{-1}X_i^TV^{-1}y$ tahmin edicilerinin (3.48) modeli altında β_i ve $X_i\beta_i$, $i = 1,2$ parametrelerinin BLUE tahmin edicilerinin sembolik gösterimi anlamındadır, ancak bu tahmin ediciler (3.46) modeli altında β_i ve $X_i\beta_i$, $i = 1,2$ parametreleri için BLUE tahmin ediciler değildir.

Kolayca gösterilebilir ki (3.58), (3.59), (3.62) ve (3.63) ifadelerinde verilen ayrışımlar ortogonallik varsayımı altında $OLSE_{\mathcal{M}}(\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicilerinin hesaplanmasına dönüştürülebilir. Ayrıca bunlar tahmin edicilerin çeşitli istatistiksel özelliklerinin türetilmesinde de kullanılabilir. (3.58), (3.59), (3.62) ve (3.63) de verilen $OLSE_{\mathcal{M}_i}(\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$, $BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicileri $X_1^TX_2 = 0$ veya $X_1^TV^{-1}X_2 = 0$, $i = 1,2$ varsayımları altında β_i ve $X_i\beta_i$ parametreleri için yansız tahmin edicilerdir. OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin bu ayrışımına motive olarak, (3.47) ifadesinde verilen $\mathcal{M}$ genel lineer modelinde de OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin muhtemel ifadelerini göz önüne almak oldukça ilginç olacaktır. Bu durumda (3.47) modelinin bir doğru model olduğu varsayımı altında $[X,V][X,V]^{\dagger}[X,V] = [X,V]$ eşitliği dikkate alınarak

$$E([X,V][\,X,V]^{\dagger}y - y) = [X,V][\,X,V]^{\dagger}X\beta - X\beta = 0$$

$$Cov([X,V][X,V]^{\dagger}y-y)=\sigma^2([X,V][X,V]^{\dagger}-\mathrm{I})V([X,V][X,V]^{\dagger}-\mathrm{I})^T=0$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu iki eşitlik $[X,V][X,V]^{\dagger}y=y$ eşitliğinin bir olasılıkla gerçeklendiğini veya buna eşdeğer olarak,

$$P\{y\in\Re[X,V]\}=1 \tag{3.64}$$

olduğunu gösterir. Eğer (3.64) eşitliği sağlanırsa bu takdirde (3.47) de verilen $\mathcal{M}$ lineer modelinin tutarlı olduğu Rao(1971,1973) tarafından ifade edilmiştir.

(3.47) ifadesindenn kolayca görülür ki (3.47) de verilen modelin tutarlılığı (3.47) nin doğru olduğunu göstermez. Gerçekten, eğer $r[X,V]=n$ ise bu durumda (3.47) ifadesinin tutarlı olduğu açıktır ancak doğru olup olmadığı söylenemez.

Tanım 3.2 (3.47) de verilen $\mathcal{M}$ lineer modelinin tutarlı olduğunu varsayalım ve L_1y ve L_2y de $\mathcal{M}$ modeli altında iki lineer tahmin edici olsun. Bu durumda eğer $(L_1-L_2)[X,V]=0$ eşitliği sağlanırsa L_1y ve L_2y tahmin edicileri 1 olasılıkla eşittir, yani her $y\in\Re[X,V]$ vektörü için $(L_1-L_2)y=0$ eşitliği sağlanır (Tian, 2007).

Tanım 3.2' den kolaylıkla gösterilebilir ki $(L_1-L_2)[X,V]=0$ eşitliği $r[X,V]=n$ olmadıkça $L_1=L_2$ denkliğini gerektirmez. Bu nedenle $L_1y=L_2y$ eşitliğinin 1 olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $(L_1-L_2)[X,V]$ matris ifadesinin durumlarına göre değerlendirilir. Bu durum X tasarım matrisinde içerilen L_1 ve L_2 matrislerinin, V kovaryans matrisinin ve bunların genelleştirilmiş inverslerinin özel durumlarına göre değişebilir.

(3.51) eşitliğine göre, (3.48) ifadesinde verilen $\mathcal{M}_1$ ve $\mathcal{M}_2$ küçük modelleri altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ parametrerinin OLSE tahmin edicileri

$$OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)=P_{X_1}y \quad \text{ve} \quad OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)=P_{X_2}y \tag{3.65}$$

olarak yazılabilir. Aşağıdaki lemma bize (3.65) de verilen iki tahmin edicinin bazı istatistiksel özelliklerini vermektedir.

Lemma 3.12 $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.65) ifadesinde verildikleri şekilde olsunlar. Bu takdirde,

(a) $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$, $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ ve toplamlarının beklenen değerleri

$$E\left[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)\right]=X_1\beta_1+P_{X_1}X_2\beta_2,$$

$$E[OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = P_{X_2}X_1\beta_1 + X_2\beta_2 \tag{3.67}$$

$$E[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = X\beta + [P_{X_2}X_1,\ P_{X_1}X_2]\beta \tag{3.68}$$

ile verilir.

(b) $OLSE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicilerinin kovaryans matrisi

$$Cov[OLSE_{M_i}(X_i\beta_i)] = \sigma^2 P_{X_i} V P_{X_i},\ \text{i=1,2} \tag{3.69}$$

$OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ arasındaki kovaryans matrisi

$$Cov\{OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1),\ OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} = \sigma^2 P_{X_1} V P_{X_2} \tag{3.70}$$

dir(Tian, 2007).

(3.67) ve (3.68) ifadelerindeki beklenen değerler (3.66) ifadesindeki tahmin ediciler ve toplamlarının (3.47) ve (3.48) altında $X_1\beta_1$, $X_2\beta_2$ parametreleri ve bunların toplamı olan $X\beta$ parametresi için yansızlığı gerektirmediğini gösterir.

(3.59) eşitliği $X_1^T X_2 = 0$ ve $r(X) = p$ kısıtlamaları altında (3.47) deki genel lineer modelde $X\beta$ parametresinin OLSE tahmin edicisinin bir ayrışımını vermektedir. Öte yandan (3.47) deki genel lineer modelde $X\beta$ parametresinin OLSE tahmin edicisinin diğer ayrışımlarını türetebilmek için (3.51) ve (3.65) ifadelerindeki P_X , P_{X_1}ve P_{X_2} ortogonal izdüşümleri ile ilgili aşağıdaki iki sonuca ihtiyaç vardır:

$$P_X = P_{X_1} + P_{X_2} \Leftrightarrow X_1^T X_2 = 0, \tag{3.71}$$

$$P_X = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}P_{X_2} \Leftrightarrow P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1} \tag{3.72}$$

Teorem 3.9 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.51) ve (3.65) verildikleri şekilde olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denk olacktır:

(i) 1 olasılıkla $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ eşitliği sağlanır.

(ii) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2}$.

(iii) $X_1^T X_2 = 0$.

Bu durumda, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicilerinin her ikisi de (3.47) modeli altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansız tahmin edicilerdir (Tian, 2007).

İspat. (3.51) ve (3.65) ifadelerinden kolayca gösterilebilir ki (i) daki eşittliğin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[X,V]$ vektörü için

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) - OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})y = 0$$

olmasıdır. Tanım 3.2 e göre bu ise

$$(P_X - P_{X_1} - P_{X_2})[X,V] = 0$$

ifadesine denktir. Bu ifadeyi açarak ve $P_X P_{X_i} = P_{X_i}$ $i = 1,2$ eşitliğini kullanarak

$$[-P_{X_2}X_1, -P_{X_1}X_2, (P_X - P_{X_1} - P_{X_2})V] = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradaki ilk iki eşitlik $X_1^T X_2 = 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle bu eşitlik (iii) ye denktir. Bu eşitlik ve (3.72) eşitliği dikkate alınırsa (i), (ii) ve (iii) şıklarının birbirine denk olduğu elde edilmiş olur.

Teorem 3.10 $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ and $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.51) ve (3.65) ifadelerinde verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır (Tian, 2007):

(a) 1 olasılıkla $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ dir.

(b) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}P_{X_2}$.

(c) $P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1}$.

İspat: (3.72) den (b) ve (c) nin denkliği kolayca görülebilir. (3.51) ve (3.65) den (a) daki eşitliğin 1 olasılıkla sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \Re[X,V]$ için

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) - OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) - E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})y = 0$$

olmasıdır. Tanım 3.2 e göre bu ise

$$(P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})[X,V]$$

$$= [-P_{X_2}X_1 + P_{X_1}P_{X_2}X_1, 0, \left(P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2}\right)V] = 0$$

eşitliğine, yani

$$P_{X_2}\, P_{X_1} = P_{X_1}P_{X_2}P_{X_1} \ \text{ ve } \ (P_X - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}P_{X_2})V = 0 \qquad (3.73)$$

ifadelerine denktir. $P_{X_1}P_{X_2}P_{X_1}$ simetrik olduğundan, buradaki ilk eşitlik (c) şıkkına denktir. Böyle bir durumda (3.47) ye göre ikinci eşitlik de otomatik olarak sağlanır.

Özel olarak eğer $V = I$ alınırsa bu takdirde aşağıdaki önemli sonuç verilebilir.

Sonuç 3.12 Farz edelim ki (3.47) de $V = I$ olsun ve $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.6) ve (3.65) ifadelerinde verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır (Tian, 2007):

(i) $OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$,

(ii) $P_X = P_{X_1} + P_{X_2}$,

(iii) $X_1^T X_2 = 0$,

(iv) $E[OLSE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = (X_i\beta_i)$, i=1,2,

(v) $E[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$+ $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2] = E[OLSE_{M\mathcal{M}}(X\beta)]$,

(vi) $Cov\{OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$, $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} = 0$,

(vii) $Cov[OLSE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = Cov[OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] + Cov[OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]$.

Lemma 3.11 den kolayca görülebilir ki (3.48) de verilen küçük modeller altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nin BLUE tahmin edicileri sırasıyla

$$BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) = P_{X_1\|V}y \quad \text{ve} \quad BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) = P_{X_2\|V}y, \tag{3.74}$$

biçimindedir, burada

$$P_{X_i\|V} = [X_i, 0][X_i, VE_{X_i}]^{\dagger} + U_i E_{[X_i, E_{X_i}]}\ , \quad \text{i=1,2...} \tag{3.75}$$

dir. (3.47) nin bir doğru model olduğu varsayımı altında (3.74) da verilen tahmin ediciler gerçekte (3.48) deki modeller altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ parametrelerinin BLUE tahmin edicileri değillerdir, yani onlar (3.48) altında ne $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar ne de minimum kovaryans matrislerine sahiptirler. Bununla beraber, (3.63) ifadesinde gösterildiği gibi onların toplamı aynı şartlar altında (3.47) modelinde $X\beta$ parametresi için bir BLUE tahmin edici olacaktır.

Bu kısımda (3.62) ve (3.63) deki ayrışımları (3.54) ve (3.74) da verilen BLUE tahmin edicilere genişleteceğiz. Bunun için ilk olarak (3.54) ve (3.74) da verilen tahmin edicilerin bazı önemli özelliklerini vereceğiz ve daha sonra

(I) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ eşitliği sağlanacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicilerinin mevcut olacağı

(II) Her $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$tahmin edicisi için

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

eşitliğinin gerçekleşeceği gerek ve yeter şartlar ortaya koyacağız. Son olarak (3.62) ve (3.63) ifadelerinin sağlanabilmesi için bir dizi denklik vereceğiz. (3.53) ve (3.54) daki $P_{X\|V}$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ nın bazı basit özellikleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.13 $P_{X\|V}$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ ifadeleri (3.53) ve (3.54) ifadelerindeki gibi verilmiş olsunlar. Bu takdirde,

(a) $P_{X\|V}X = X$, $P_{X\|V}VE_X = 0$, ve $P_{X\|V}V$ çarpımı

$$P_{X\|V}V = [X, 0][X, VE_X]^{\dagger}V \tag{3.76}$$

olarak tek türlü yazılabilir.

(b) $P_{X\|V}$ tektir ancak ve ancak $r[X, V] = n$ dir.

(c) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$tahmin edicisi 1 olasılıkla yektir eğer M tutarlı ise.

(d) $E[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = X\beta$ ve

$$Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = [X, 0][X, V\,E_X]^{\dagger}\,V([X, 0][X, V\,E_X]^{\dagger})^T,$$

$$r(Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = r(X) + r(V) - r[X, V] = \dim\,[\Re(X)\cap\Re(V)]$$ dir.

Ayrıca, $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$ tahmin edicisi için alternatif formlar da yazılabilir. Örneğin,

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = P_Xy - P_XVE_X(E_XVE_X\,)^{-}E_Xy\,,$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = y - VE_X(E_XVE_X\,)^{-}E_Xy$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X[X^T(V + XTX^T)^{-}X]^{-}X^T(V + XTX^T)^{-}y,$$

dir, burada T matrisi $\Re(V + XTX^T) = \Re[V, X]$ olacak şekilde bir simetrik matristir (bkz. Albert (1973) ve Rao (1973)).

(3.53) ve (3.65) ifadelerinde verilen $P_{X\|V}$, $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ izdüşüm matrisleri için aşağıdaki önemli sonuçlara ihtiyaç duyulacaktır. Bu sonuçlar ise 3.1, 3.5 ve 3.9 numaralı lemmalardan kolayca türetilebilir:

$$\Re([X_i, 0]^T) \subseteq \Re([X_i, VX_i]^T),\ i = 1,2, \tag{3.77}$$

$$E_{X_i}E_X = E_X, i = 1,2, \tag{3.78}$$

$$\Re[X, VE_X] = \Re[X, V]\,, \Re[X_i, VE_{X_i}] = \Re[X_i, V],\ i = 1,2, \tag{3.79}$$

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} = r[VE_{X_1}, X_2] + r(X_1) = r[VE_{X_2}, X_1] + r(X_2), \tag{3.80}$$

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} \geq r\,[X, V] + r(X_1) + r\,(X_2) - r(X) \geq r\,[X, V], \tag{3.81}$$

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} \geq r[X, V] + r[X_2, V] - r(V\,) \geq \mathrm{r}\,[X, V]. \tag{3.82}$$

Aşağıdaki Lemma bize (3.74) da verilen iki tahmin edicinin özelliklerini vermektedir.

Lemma 3.14 $BLUE_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.74) ifadesinde verildikleri şekilde olsunlar. Bu takdirde,

(a) $[X_i, 0]$ ve $[X_i, VE_{X_i}]$ matrisleri için

$$[X_i, 0\,][X_i, VE_{X_i}\,]^\dagger [X_i, VE_{X_i}] = [X_i, 0]\,,\ \mathrm{i=1,2}, \tag{3.83}$$

ve (3.74) da verilen iki $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ matrisi için

$$P_{X_i\|V} X_i = X_i \text{ ve } P_{X_i\|V} V = [\,X_i, 0\,][X_i, VE_{X_i}\,]^\dagger V\,,\ \mathrm{i=1,2} \tag{3.84}$$

eşitlikleri sağlanır.

(b) $P_{X_i\|V}$ matrisi tektir ancak ve ancak $r[X_i, V] = n$, i = 1,2… dir.

(c) $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ 1 olasılıkla tektir ancak ve ancak $\Re[X_i, V] = \Re[X, V]$, i=1,2.

(d) $BLUE_{M_1}X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahin edicileri ve bunların toplamının beklenen değerleri aşağıdaki şekildedir.

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] = X_1\beta_1 + P_{X_1\|V} X_2\beta_2\,, \tag{3.85}$$

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] = P_{X_1\|V} X_1\beta_1 + X_2\beta_2\,, \tag{3.86}$$

$$E\big[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)\big] + E\big[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\big] = X\beta + [P_{X_2\|V} X_1 + P_{X_1\|V} X_2]\beta. \tag{3.87}$$

(e) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $P_{X_1\|V} X_2 = 0$ olacak şekilde bir $P_{X_1\|V}$ matrisi mevcuttur.

(ii) $P_{X_2\|V} X_1 = 0$ olacak şekilde bir $P\ _{X_2\|V}$ matrisi mevcuttur.

(iii) $r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} = r[X, V]$ dir.

Bu durumda, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$, $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.47) de verilen $X_1\beta_1$, $X_2\beta_2$ ve $X\beta$ için sırasıyla yansız olacak şekilde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ mevcuttur.

(f) $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ nin kovaryans matrisi

$$Cov[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = \sigma^2[X_i, 0][X_i, E_{X_i}]^{\dagger}V([X_i, 0\,][X_i, E_{X_i}]^{\dagger})^T \qquad (3.88)$$

şeklindedir, burada $r\big(Cov\big[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)\big]\big) = r(X_i) + r(V) - r[X_i, V]$, i=1,2.. dir.

(g) $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ arasındaki kovaryans matrisi

$$Cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]$$

$$= \sigma^2[X_i, 0][X_i, E_{X_i}] + V([X_2, 0][X_2, E_{X_2}]^{\dagger})^T \qquad (3.89)$$

şeklindedir, burada

$$r(BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2))$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} + r(V) + r[X_1,V] - r[X_2, V] \qquad (3.90)$$

dir.

(h) Herhangi iki $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicisi ilişkisiz olması için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} = r[V, X_1] + r[V, X_2] - r(V), \qquad (3.91)$$

veya, buna denk olarak $r\big(E_{X_1}VE_{X_2}\big) = r\big(E_{X_1}V\big) + r(VE_{X_2}) - r(V)$ olmasıdır.

(ı) Eğer

$$r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} = r[X, V] \qquad (3.92)$$

ise bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcut olup hem ilişkisizdirler hem de (3.47) altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansızdırlar (Tian, 2007).

İspat. (a) da verilen $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ hakkındaki sonuçlar Lemma 3.13 (a) dan kolaylıkla gösterilebilir. (b) şıkkındaki sonuçlar ise $E_{[X_i,VE_{X_i}]}=0,\ i=1,2$, katsayılar matrisinden türetilebilir. Bu nedenle (3.74) un bir sonucu olarak $BLUE_{M_i}(X_i\beta_i)$ tahmin edicisinin 1 olasılıkla tek türlü olması, yani her $y\in\Re[X,V]$ vektörü için $P_{X_1\|V}y$ nin tek olabilmesi için gerek ve yeter şart $E_{[X_i,VE_{X_i}]}[X,V]=0$, i = 1,2, eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu ise (3.54) ifadesine göre

$$r[X_i,V]=r[X,V],\ \text{i = 1,2}$$

olması demektir. Ayrıca $\Re[X_i,V]\subseteq\Re[X,V]$, i = 1,2 olduğundan bu eşitlik (c) de istenildiği gibi $\Re[X_i,V]=\Re[X,V]$, i = 1,2 eşitliğine denktir. (a) varsayımı altında

$$E\left[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)\right]=P_{X_1\|V}[X_1,X_2]\beta=X_1\beta_1+P_{X_1\|V}X_2\beta_2,$$

$$E\left[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\right]=P_{X_2\|V}[X_1,X_2]\beta=P_{X_2\|V}\,X_1\beta_1+X_2\beta_2,$$

yazılabilir. Bu ise (3.85), (3.86) ve (3.87) nin sağlandığını gösterir. Öte yandan

$$P_{X_1\|V}X_2=[X_1,0][X_1,VE_{X_1}]^{\dagger}X_2+U_1E_{[X_i,VE_{X_i}]}X_2$$

ve

$$P_{X_2\|V}X_1=[X_2,0][X_2,VE_{X_2}]^{\dagger}X_1+U_2E_{[X_2,VE_{X_2}]}X_1$$

olduğundan (3.87) eşitliği kullanarak elementer satır işlemleri yardımıyla,

$$\min_{P_{X_1\|V}} r(P_{X_1\|V}X_2)$$

$$=\min_{U_1} r([X_1,0][X_1,VE_{X_i}]+X_2+U_1E_{[X_i,VE_{X_i}]}X_2)$$

$$=r\begin{bmatrix}[X_1,0\,]\,[X_1,VEX_i]\;+X_2\\ E_{[X_i,VE_{X_i}]}X_2\end{bmatrix}-r(E_{[X_i,VE_{X_i}]}X_2\,)$$

$$=r\begin{bmatrix}[X_1,0]\,[X_1,VE_{X_i}]\;+X_2 & 0\\ X_2 & [X_1,\mathrm{V}E_{X_i}]\end{bmatrix}-r[X_1,VE_{X_i},X_2]$$

$$=r\begin{bmatrix}0 & -[X_1,0\,]\\ X_2 & [X_1,\mathrm{V}E_{X_i}]\end{bmatrix}-r[X,V]$$

$$=r(X_1)+r[X_2,E_{X_i}]-r[X,V]$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} - r[X,V]$$

olduğu görülür. Öte yandan simetriklik özelliğinden

$$\min_{P_{X_2\|V}} r(P_{X_2\|V}X_1] = r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} - r[X,V]\ ]$$

yazılabilir. Benzer şekilde (e) şıkkında verilen üç ifadenin denkliği bu eşitliklerden görülebilir. (f) şıkkındaki sonuçlar ise Lemma 3.13(d) den kolaylıkla elde edilir. Ayrıca (3.86) ve (3.87) eşitliklerinden (3.89) de istenildiği gibi

$$Cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)\,,BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\}$$

$$= \sigma^2 P_{X_1\|V}V$$

$$= \sigma^2[X_1,0]\left[X_1,VE_{X_i}\right] + V([X_2,0][X_2,VE_{X_i}\,]^{\dagger})^T$$

olduğu görülür. Öte yandan $\Re([X_i,VE_{X_i}]^T)$ ve $\Re(V) \subseteq \Re[X_i,VE_{X_i}]$, i = 1,2 olduğunu belirtelim. Bu durumda (3.89) ve (3.76) dikkate alınırsa elementer işlemlerle

$$r([X_1,0]\left[X_1,VE_{X_i}\right] + V([X_2,0][X_2,VE_{X_2}]^{\dagger})^T$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 & VE_{X_i} & 0 \\ X_2^T & 0 & 0 & X_2^T \\ E_{X_2}V & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r\left[X_1,VE_{X_i}\right] - r[X_2,VE_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_2^T \\ 0 & 0 - E_{X_2}VE_{X_i} & & 0 \end{bmatrix} - r[X_1,V] - r[X_2,V]$$

$$= r(E_{X_2}VE_{X_i}) + r(X_1) + r(X_2) + r\,(V) - r\,[X_1,\mathrm{V}] - r[X_2,V]$$

$$= r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} + r\,(V) - r[X_1,\mathrm{V}] - r[X_2,V]$$

elde dilir ki bu da (3.90) in sağlandığını gösterir. (h) daki tartışma (g) nin bir direkt sonucudur. Böylece eğer (3.92) ifadesi sağlanırsa, bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahminleri mevcut olup sırasıyla $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ için yansız tahmin olacaklardır. Öte yandan eğer (3.92) sağlanırsa, (3.91) da sağlanır ve dolayısıyla (i) de istenildiği gibi $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri ilişkisiz olurlar.

Teorem 3.11 $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ ifadeleri (3.54) ve (3.84) de verildikleri şekilde olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri mevcuttur öyle ki

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) \tag{3.93}$$

eşitliği 1 olasılıkla grçeklenir.

(b) $P_{X\|V} = P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V}$ olacak şekilde $P_{X\|V}$, $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ matrisleri mevcuttur.

(c) $r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} = r[X, V\ ]$ ve $r(X) = r(X_1) + r(X_2)$ dir.

Bu durumda, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri

$$E[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = X_i\beta_i, \text{ i=1,2} \tag{3.94}$$

$$Cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} = 0, \tag{3.95}$$

$$Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = Cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] + Cov[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)] \tag{3.96}$$

eşitliklerini sağlar (Tian, 2007).

İspat. İlk olarak (b) ve (c) şıklarının denkliğini gösterelim. Bu durumda Lemma 3.11 den kolayca gösterilebilir ki (b) deki eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart

$$(P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V})[X, VE_X] = [X, 0]$$

olacak şekilde $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ matrislerinin mevcut olmasıdır. Buradan $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ değerlerini bu eşitlikte yerlerine yazarsak

$$G = [X, 0] - [X_1, 0][\ X_1, VE_{X_i}]^{+}[X_1, VE_{X_1}]-[X_2, 0][X_2, VE_{X_2}]^{+}[X, VE_X]$$

olmak üzere

$$[U_1, U_2]\begin{bmatrix} E_{[X_1, VE_{X_1}]} & [X, VE_X] \\ E_{[X_2, VE_{X_2}]} & [X, VE_X] \end{bmatrix} = G$$

matris denklemi elde edilir. Lemma 3.11 ye göre böyle U_1 ve U_2 matrislerinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$r\begin{bmatrix} G \\ E_{[X_1,VE_{X_i}]}[X,VE_X] \\ E_{[X_2,VE_{X_2}]}[X,VE_X] \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} E_{[X_1,VE_{X_i}]} & [X,VE_X] \\ E_{[X_2,VE_{X_2}]} & [X,VE_X] \end{bmatrix}$$

rank eşitliğinin sağlanmasıdır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılarak

$$r\begin{bmatrix} G \\ E_{[X_1,VE_{X_{1i}}]}[X,VE_X] \\ E_{[X_2,VE_{X_2}]}[X,VE_X] \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ [X,VE_X] & [X_1,VE_{X_1}] & 0 \\ [X,VE_X] & 0 & [X_2,VE_{X_2}] \end{bmatrix} - r[X_1,VE_{X_i}] - r[X_2,VE_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} [X,0] & [X_1,0] & [X_2,0] \\ [X,VE_X] & [X_1,VE_{X_1}] & 0 \\ [X,VE_X] & 0 & [X_2,VE_{X_2}] \end{bmatrix} - r[X_1,V] - r[X_2,V]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{X_2} & -X_2 & 0 \\ 0 & 0 & -X_1 & 0 & 0 & VE_{X_2} \end{bmatrix} - \boldsymbol{r}[X_1,V] - r[X_2,V]$$

$$= r(X) + r[VE_{X_1},\ X_2] + r[VE_{X_2},\ X_1] - r[X_1,V] - r[X_2,\mathrm{V}]$$

$$= 2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} + r(X) - r[X_1,V] - r[X_2,V] - r(X_1) - r(X_2]$$

ve

$$r\begin{bmatrix} E_{[X_1,VE_{X_1}]} & [X,VE_X] \\ E_{[X_2,VE_{X_2}]} & [X,VE_X] \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} [X,VE_X] & E_{[X_1,VE_{X_1}]} & 0 \\ [X,VE_X] & 0 & E_{[X_2,VE_{X_2}]} \end{bmatrix} - r\,[X_1,VE_{X_i}] - r\,[X_2,VE_{X_2}]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & V & X_1 & V & 0 & 0 \\ X & V & 0 & 0 & X_2 & V \end{bmatrix} - r[X_1,V] - r[X_2,V]$$

$$= 2r[X,V] - r[X_1,V] - r[X_2,V]$$

eşitlikleri elde edilebilir. Bu iki rank eşitliği yukarıdaki yerlerine yazıldığında

$$2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} = 2r[X,V] + r(X_1) + r(X_2) - r(X),$$

olduğu görülür. Bu eşitlik alternatif biçimde

$$\left(r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} - r[X,V]\right) + \left(r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} - r[X,V] - r(X_1) - r(X_2) + r(X)\right) = 0$$

olarak da yazılabilir. Bu durumda bu eşitliğin sol tarafındaki iki terimin non–negatif olacağı kolayca görsterilebilir. Bunun sonucunda (c) deki rank eşitliği elde edilmiş olur. Diğer yandan (3.54) ve (3.74) ifadelerinden kolayca görülebilir ki (3.93) eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her y $\in \Re[X,V]$ vektörü için

$$\mathrm{BLUE}_{\mathcal{M}}(X\beta) - BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) - BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) = (P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})y = 0$$

olmasıdır. Bu ise Tanım 3.2 e göre

$$(P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})[X,V] = (P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})[X_1,X_2,V] = 0 \quad (3.97)$$

olması anlamına gelir ki buradan

$$P_{X\|V}X_1 = P_{X_1\|V}X_1 = X_1 \text{ ve } P_{X\|V}X_2 = P_{X_2\|V} = X_2.$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle (3.97) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_{X_2\|V}X_1 = 0,\ P_{X_1\|V}X_2 = 0 \text{ ve } P_{X\|V}V - P_{X_1\|V}V - P_{X_2\|V}V = 0 \quad (3.98)$$

olacak şekilde $P_{X\|V}$, $P_{X_1\|V}$ ve $P_{X_2\|V}$ matrislerinin mevcut olmasıdır. Bu durumda ilk iki eşitlik (c) şıkkındaki ilk rank eşitliğine denk olacaktır. Benzer şekilde

$$(P_{X\|V} - P_{X_1\|V} - P_{X_2\|V})V$$

$$= [X,0][X,VE_X]^{\dagger}V - [X_1,0]\,[X_1,VE_{X_1}]^{\dagger}V - [X_2,0][X_2,VE_{X_2}]^{\dagger}V$$

$$= [[X,0],[X_1,0],[X_2,0]]\begin{bmatrix} [X,VE_X] & 0 & 0 \\ 0 & -[X_1,VE_X] & 0 \\ 0 & 0 & -[X_2,VE_{X_2}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ V \\ V \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi

$$t = r\begin{bmatrix} [X,VE_X] & 0 & 0 \\ 0 & -[X_1,VE_X] & 0 \\ 0 & 0 & -[X_2,VE_{X_2}] \end{bmatrix} = r[X,V] + r[X_1,V] + r[X_2,V]$$

alalım. Bu durumda gerekli hesaplamalar yapılarak

$$r(P_{X\|V}V - P_{X_1\|V}V - P_{X_2\|V}V)$$

$$= r\begin{bmatrix} -[\mathrm{X}, VE_X] & 0 & 0 & \mathrm{V} \\ 0 & [X_1, VE_X] & 0 & V \\ 0 & 0 & [X_2\,, VE_{X_2}] & \mathrm{V} \end{bmatrix} - t$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -VE_x & X_1 & 0 & X_2 & 0 & V \\ 0 & 0 & X_1 & VE_x & 0 & 0 & V \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & VE_{X_2} & V \end{bmatrix} - t$$

$$= r[VE_{X_2}, X_1] + r[VEX_1, X_2] + r(V) + r(X) - t$$

$$= 2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} + r(V) + r(X) - r(X_1) - r(X_2) - t$$

olduğu görülebilir. Bunun sonucu olarak (3.97) daki üçüncü eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şartın

$$2r\begin{bmatrix} V & X_1 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} = r[X, V] + r[X_1, V] + r[X_2, V] + r(X_1) + r\,(X_2) - r(V) - r\,(X\,)$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (c) deki ilk rank eşitliğiyle birleştirilirse

$$(r[X, V] + r[X_1, V] + r[X_2, V] - r(V)) + r(X_1) + r(\,X_2) - r(X)) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$r[X, V] + r[X_1, V] + r[X_2, V] = r(V) \;\text{ ve }\; r(X) = r(X_1) + r(X_2)$$

olmasına denktir. Bu ifadeler (c) şıkkındaki birinci eşitlikle birleştirilirse (a) ve (c) şıklarının birbirine denk olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi V matrisinin pozitif definit olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki önemli sonuç elde edilebilir.

Sonuç 3.12 Farz edelim ki V matrisi pozitif definit olsun. Bu takdirde (3.54) ve (3.74) ile verilen $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri tek türlü olup aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır (Tian, 2007):

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$,

(b) $P_{X\|V} = P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V}$,

(c) $X_1^T V^{-1} X_2 = 0$,

(d) $E[BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = X_i\beta_i$, i = 1,2,

(e) $Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)\,] = Cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] + Cov[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)]$

Eğer (3.47) de V pozitif definit ve $r(X) = p$ alınırsa, bu takdirde (3.47) modeli altında β ve $X\beta$ parametrelerinin BLUE tahmin edicileri için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç3.14 (3.47) modelinde V nin pozitif definit bir matris ve $r(X) = p$ olduğunu varsayılsın. Bu takdirde $T_1= [I_{p_1}, 0]$ ve $T_2 = [0, I_{p_2}]$ olmak üzere

(a) $\mathcal{M}$ altında β ve $X\beta$ nın yegane BLUE tahmin edicisi (3.56) deki gibidir, burada

$$Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)] = \sigma^2(X^TV^{-1}X)^{-1}\ , Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)]= \sigma^2X(X^TV^{-1}X)^{-1}X^T$$

dir.

(b) $\mathcal{M}$ modeli altında β_1 ve β_2 parametrelerinin yegane BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i) = T_i(X^TV^{-1}X)^{-1}X^TV^{-1}y,\ i=1,2, \tag{3.99}$$

biçiminde olup burada

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)=\begin{bmatrix}BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1)\\ BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\end{bmatrix},$$

$$E[BLUE_M(\beta_i)] = \beta_i, \quad İ=1,2,$$

$$Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i)] = \sigma^2T_i(X^TV^{-1}X)^{-1}T_i^T, \quad i=1,2,$$

$$Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1),BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\}=\sigma^2T_1(X^TV^{-1}X)^{-1}T_2^T,$$

$$r(Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1),BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\}) = r(X_1^TV^{-1}X_2)$$

şeklindedir.

(c) $\mathcal{M}$ altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ nın BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)=X_iT_i(X^TV^{-1}X)^{-1}X^T V^{-1}y,\ i=1,2 \tag{3.100}$$

biçiminde olup burada

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1)+BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)=BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta),$$

$$E[BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)]=X_i\beta_i, \quad i=1,2,$$

$$Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)]=\sigma^2(X_iT_i)(X^T V^{-1}X)^{-1}(X_iT_i)^T, \quad i=1,2,$$

$$Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\} = \sigma^2(X_1T_1)(X^T \Sigma^{-1}X)^{-1}(X_2T_2)^T,$$

$$r(Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\}) = r(X^TV^{-1}X_2),$$

dir (Tian, 2007).

Sonuç3.15 BLUE$_{\mathcal{M}}(\beta)$, BLUE$_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $BLUE_{\mathcal{M}}(X_i)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i)$, i=1,2, tahmin edicileri yukarıda verildikleri şekilde olsunlar. $BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$

$$BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i) = (X_i^T\, V^{-1}X_i)^{\,-1}X_i^T\, V^{-1}y, \quad \text{i=1,2,}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i) = X_i(X_i^T\, V^{-1}\, X_i)^{-1}X_i^T\, V^{-1}y, \text{ i=1,2,}$$

verilsin. Bu durumda aşağıda verilen ifadeler birbirine denk olacaktır (Tian, 2007):

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix} BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) \\ BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \end{bmatrix}$, yani, $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i) = BLUE_{M_i}(\beta_i)$, i=1,2,

(b) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$.

(c) $BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)$ i_1,2..

(d) $E[BLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i)] = \beta_i$, i=1,2…

(e) $E\ [BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i)] = X_i\beta_i$, i=1,2…

(f) $Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\} = 0$,

(g) $Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\} = 0,$

(h) $Cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)\} = 0,$

(i) $Cov\{BLUE_{M_1}(X_1\beta_1), BLUE_{M_2}(X_2\beta_2) = 0,$

(j) $Cov[BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)] = Cov[BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)] + Cov[BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)],$

(k) $P_{X\|V} = P_{X_1\|V} + P_{X_2\|V}$,

(l) $X_1^T V^{-1} X_2 = 0.$

İspat. Bu durumda öncelikle belirtelim ki (b), (e), (i), (j), (k) ve (l) şıklarının birbirine denk olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Diğer taraftan

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = XBLUE_{\mathcal{M}}(\beta\ ),$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = X_iBLUE_{\mathcal{M}}(\beta_i),\ BLUE_{\mathcal{M}_i}(X_i\beta_i) = X_iBLUE_{\mathcal{M}_i}(\beta_i),\ \text{i = 1,2,}$$

$$X\begin{bmatrix} BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) \\ BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \end{bmatrix} = BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\ ,$$

$$Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(X_2\beta_2)\} = X_1Cov\{BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)\}X_2^T,$$

$$Cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)\} = X_1Cov\{BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1), BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)\}X_2^T,$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler dikkate alınırsa (a) da verilen eşitliğin her iki tarafı X katsayı matrisi ile soldan çarpılarak

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = XBLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = X\begin{bmatrix} BLUE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) \\ BLUE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \end{bmatrix}$$

$$= BLUE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + BLUE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) \qquad (3.101)$$

elde edilir ve bu da (b) şıkkıdır. Ayrıca $X^{\dagger} = (X^TX)^{-1}X^T$ olduğunu belirtelim. Bu durumda (b) deki eşitliğin her iki tarafı $X^{\dagger}$ ile soldan çarpılırsa (a) elde edilir. Öte yandan (a) ve (c) nin denk olduğu ise direkt olarak görülebilir. Benzer şekilde (d) ve (e) nin denkliği yukarıdaki eşitliklerden elde edilir. (f), (g), (h), ve (i) şıklarının denkliği (3.82), (3.90) ve yukarıdaki eşitliklerden yararlanılarak kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.12 $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta), OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ and $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri yukarıda verildikleri gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır:

(a)$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.

(b) $P_{X\|V} = P_{X_1} + P_{X_2}$ olacak şekilde bir $P_{X\|V}$ mevcuttur.

(c)$X_1^TX_2 = 0$ ve $\Re(VX) \subseteq \Re(X)$.

Bu durumda $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri (3.47) modeli altında $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ parametre vektörleri için yansız tahminler olacaklardır (Tian, 2007).

İspat. Bu durumda (3.51) ve (3.54) ifadelerinden kolayca görsterilebilir ki (a) şıkkının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her y $\in \Re[X, V]$ vektörü için

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) - OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) - OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2) = P_{X\|\Sigma} - P_{X_1} - P_{X_2})y = 0$$

olmasıdır. Bu ise Tanım 3.2 e göre

$$(P_{X\|V} - P_{X_1} - P_{X_2})[X, V] = [-P_{X_2}X_1, -P_{X_1}X_2, P_{X\|V}V - P_{X_1}V - P_{X_2}V] = 0$$

eşitliğinin yani

$$P_{X_2}X_1 = 0, P_{X_1}X_2 = 0,\ P_{X\|V}V - P_{X_1}V - P_{X_2}V = 0 \qquad (3.102)$$

eşitliklerinin sağlanmasına denktir. Buradaki ilk iki eşitlik $X_1^TX_2 = 0$ eşitliğine denk olacağından, $P_{X_1} + P_{X_2} = P_X$ yazılabilir ve dolayısıyla üçüncü eşitlik

$$(P_{X\|V} - P_X)V = [X,0][X, VE_X]^{\dagger}V - P_XV = 0$$

eşitliğine denk olacaktır. Böylece gerekli düzenleme yapılırsa

$$r(P_{X\|V}V - P_XV) = r([X,0][X,VE_X]^{\dagger}V - P_XV)$$

$$= r\begin{bmatrix} -[X,VE_X] & 0 & V \\ 0 & X^TX & X^TV \\ [X,0] & X & 0 \end{bmatrix} - r[X,VE_X] - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & -VE_X & X & V \\ 0 & 0 & X^TX & X^TV \\ X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X,V] - r(X)$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & X & V \\ 0 & X^TVE_x & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X,V] - r(X)$$

$$= r(E_XVX)$$

$$= r[X,VX] - r(X)$$

yazılabilir. Bu gösterimler ise $\mathfrak{R}(VX) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ ifadesine denktir. Böylece (c) şıkkı elde edilir. Buradan (b) deki içerme bağıntısının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$(P_{X_1} + P_{X_2})[X,VE_X] = [X,0],$$

başka bir deyişle,

$$P_{X_2}X_1 = 0,\ P_{X_1}X_2 = 0,\ (P_{X_1} + P_{X_2})VE_X = 0$$

olduğu görülür. Buradaki ilk eşitlik $X_1^TX_2 = 0$ eşitliğine denk olacaktır. Bu durumda, $P_{X_1} + P_{X_2} = P_X$ olup buradaki üçüncü eşitlik $P_XVE_X = 0$ eşitliğine yani, $P_XVP_X = VP_X$ eşitliğine denk olur ki bu da $\mathfrak{R}(VX) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ içermesine denktir.

Teorem 3.13 $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicileri daha önce verildikleri gibi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır:

(a) $BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) + E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$ bir olasılıkla sağlanır.

(b) $P_{X\|V} = P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}P_{X_2}$ olacak şekilde bir $P_{X\|V}$ mevcuttur.

(c) $P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1}$ ve $\mathfrak{R}(VX) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ dir (Tian, 2007).

İspat. Bu durumda (3.51) ve (3.54) eşitliklerinden kolayca görsterilebilir ki (a) şıkkının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \mathfrak{R}[X,V]$ vektörü için

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) - OLSE_{\mathcal{M}_1}(X_1\beta_1) - E_{X_1}OLSE_{\mathcal{M}_2}(X_2\beta_2)$$

$$= (P_{\mathcal{X}\|V} - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}X_2)y = 0 \quad (3.103)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durum ise Tanım 3.1 e göre

$$(P_{\mathcal{X}\|V} - P_{X_1} - P_{X_2} + P_{X_1}X_2)[X, V]$$

$$= [-P_{X_2}X_1 + P_{X_1}X_2X_1, 0, P_{X\|V}V - P_{X_1}V - P_{X_2}V + P_{X_1}X_2V] = 0,$$

eşitliğinin, yani,

$$P_{X_2}X_1 = P_{X_1}X_2X_1 \text{ ve } P_{\mathcal{X}\|V}V - P_{X_1}V - P_{X_2}V + P_{X_1}X_2V = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasına denk olacaktır. Öte yandan (3.47) deki birinci eşitlik $P_{X_1}X_2 = P_{X_2}X_1$ eşitliğine denktir. Bu durumda, $P_{X_1} + P_{X_2} - P_{X_1}X_2 = P_X$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki ikinci eşitlik $(P_{X\|V} - P_X)V = 0$ eşitliğine denktir ki bu da $\Re(VX) \subseteq \Re(X)$ içermes bağıntısına denk olacaktır. Böylece (c) şıkkı sağlanmış olur. Benzer şekilde (a) ve (b) şıklarının denkliği de gösterilebilir.

Eğer (3.47) modelinde V matrisi pozitif definit bir matris ve $r(X) = p$ alınırsa bu takdirde yukarıda verilen son iki teoremden aşağıdaki sonuçlar türetilebilir:

Sonuç3.16 $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)$ tahmin edicileri (3.56) ve (3.58) ifadelerinde verildikleri gibi olsunlar. Bu takdirde

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix} OLSE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) \\ OLSE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $X_1^T X_2 = 0$ eşitliği ve $\Re(VX) \subseteq \Re(X)$ içerme bağıntısının sağlanmasıdır (Tian, 2007).

Sonuç 3.17 $BLUE_{\mathcal{M}}(\beta)$, $OLSE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1)$ ve $OLSE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2)$ tahmin edicileri (3.56) ve (3.58) ifadelerinde verildikleri şekilde olsunlar. Bu takdirde

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \begin{bmatrix} OLSE_{\mathcal{M}_1}(\beta_1) - (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T X_2 OLSE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \\ OLSE_{\mathcal{M}_2}(\beta_2) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $P_{X_1}P_{X_2} = P_{X_2}P_{X_1}$ eşitliğinin ve $\Re(VX) \subseteq \Re(X)$ içerme bağıntısının sağlanmasıdır (Tian, 2007).

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 Parçalı ve Dönüştürülmüş Singüler Lineer Modellerde Tahminlerin Denkliği

Bu kısımda daha önce verilen

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon\ ,\ E(\varepsilon) = 0\ ,\ Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V,$$

parçalı lineer modeli tekrar göz önüne alınacaktır, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ bilinenlerin keyfi ranklı iki matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlemlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{q\times 1}$ bilinmeyenlerin iki parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı singüler bir matris ve σ^2 ise bilinmeyen pozitif bir parametredir. Bu durumda (4.1) modeline bir parçalı singüler lineer model adı verilir. Bu modeli daha önce ifade edildiği gibi $X = [X_1, X_2]$ ve $\beta = [\beta_1, \beta_2]^T$ olmak üzere

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$$

şeklinde gösterelim. Bu kısımda özellikle kısıtlayıcı rank varsayımları altında, $X\beta$, $X_1\beta_1$ ve $X_2\beta_2$ parametrelerinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri ile ilgili sonuçları karşılaştırmalı olarak verilecektir.

Teorem 4.1 Herhangi bir A matrisi için $A(A^TA)^cA^T = AA^+$ dir, burada $(A^TA)^c$, $A^TA(A^TA)^cA^TA = A^TA$ olan A^TA matrisinin bir c-inversidir (Graybill, 1976).

Eğer A matrisi tam sütun ranklı ise $A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$ ve eğer A matrisi tam satır ranklı ise $A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1}$ olacağını tekrar belirtelim. Öte yandan eğer X tasarım matrisi tam sütun ranklı ise $X^TX, X_1^TX_1$ ve $X_2^TX_2$ matrisleri nonsingüler olacaktır. Dolayısıyla X^TX matrisinin determinantı

$$|X^TX| = |X_1^TX_1||X_2^TX_2 - X_2^TX_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^TX_2|$$

ya da

$$|X^TX| = |X_2^TX_2||X_1^TX_1 - X_1^TX_2(X_2^TX_2)^{-1}X_2^TX_1|$$

dir. Böylece $(X^TX)^{-1}$ inversi $D = X_2^TX_2 - X_2^TX_1(X_1^TX_1)^{-1}X_1^TX_2 = X_2^T\left[I - X_1X_1^\dagger\right]X_2$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} (X_1^TX_1)^{-1} + (X_1^TX_1)^{-1}X_1^TX_2D^{-1}X_2^TX_1(X_1^TX_1)^{-1} & -(X_1^TX_1)^{-1}TX_2D^{-1} \\ -D^{-1}X_2^TX_1(X_1^TX_1)^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ya da buna alternatif olarak $E = X_1^T X_1 - X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T X_1 = X_1^T [I - X_2 X_2^{+}] X_1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} E^{-1} & -E^{-1} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} \\ -(X_2^T X_2)^{-1} X_2^T X_1 E^{-1} & (X_2^T X_2)^{-1} + (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T X_1 E^{-1} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

biçiminde yazılabilir. Öte yandan $I - X_1 X_1^{\dagger}$ ve $I - X_2 X_2^{\dagger}$ matrisleri idempotent matris olduğundan matris özelliklerinden,

$$M_1 = \left[I - X_1 X_1^{\dagger}\right] = Q_1 Q_1^T \text{ ve } M_2 = \left[I - X_2 X_2^{\dagger}\right] = Q_2 Q_2^T \quad (4.3)$$

olacak şekilde Q_1 ve Q_2 matrisleri vardır, burada Q_1 ve Q_2 matrisleri tam sütun ranklı matrislerdir. Ayrıca $Q_1^T Q_1 = I_{n-p}$ ve $Q_2^T Q_2 = I_{n-q}$ olduğu kolayca görülür.

Eğer X tasarım matrisi tam sütun ranklı ise, bu durumda $(X^T X)^{(i)}, i = 1,2$ inversi $W = X_1^T \left[I - X_2 (X_2^T X_2)^{(i)} X_2^T\right] X_1 = X_1^T \left[I - X_2 X_2^{\dagger}\right] X_1 = X_1^T M_2 X_1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} W^{(i)} & -W^{(i)} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{(i)} \\ -(X_2^T X_2)^{(i)} X_2^T X_1 W^{(i)} & (X_2^T X_2)^{(i)} + (X_2^T X_2)^{(i)} X_2^T X_1 W^{(i)} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ya da alternatif olarak $Z = X_2^T \left[I - X_1 (X_1^T X_1)^{(i)} X_1^T\right] X_2 = X_2^T \left[I - X_1 X_1^{\dagger}\right] X_2 = X_2^T M_1 X_2$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} (X_1^T X_1)^{(i)} + (X_1^T X_1)^{(i)} X_1^T X_2 Z^{(i)} X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{g_i} & -(X_1^T X_1)^{(i)} X_1^T X_2 Z^{(i)} \\ -Z^{(i)} X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{(i)} & Z^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $r(X^T X) = r(X_1^T X_1) + r(X_2^T X_2)$ ise bu durumda $(X^T X)^{\dagger}$ Moore-Penrose inversi W ve Z matrisleri yukarıdaki gibi olmak üzere

$$\begin{bmatrix} W^{\dagger} & -W^{\dagger} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{(i)} \\ -(X_2^T X_2)^{(i)} X_2^T X_1 W^{\dagger} & (X_2^T X_2)^{\dagger} + (X_2^T X_2)^{(i)} X_2^T X_1 W^{\dagger} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{(i)} \end{bmatrix}$$

ya da alternatif olarak

$$\begin{bmatrix} (X_1^T X_1)^{\dagger} + (X_1^T X_1)^{(i)} X_1^T X_2 Z^{\dagger} X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{(i)} & -(X_1^T X_1)^{(i)} X_1^T X_2 Z^{\dagger} \\ -Z^{\dagger} X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{(i)} & Z^{\dagger} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

biçiminde verilebilir.

Şimdi dönüştürülmüş singüler lineer modelleri elde etmek için (4.1) modelini soldan M_1 ile çarparak

$$M_1 y = M_1 X_2 \beta_2 + \varepsilon_1 \quad (4.7)$$

modelini oluşturabiliriz, burada ε_1, $E(\varepsilon_1)=0$ ve $Cov(\varepsilon_1)=\sigma^2 M_1 V M_1$ olan rastgele vektördür. Kısaca (4.7) ifadesini

$$\mathcal{M}_c=\{M_1 y, M_1 X_2 \beta_2, \sigma^2 M_1 V M_1\} \tag{4.8}$$

olarak ifade edebiliriz. Benzer şekilde

$$M_2 y=M_2 X_1 \beta_1+\varepsilon_2 \tag{4.9}$$

modeli oluşturulabilir, burada ε_2, $E(\varepsilon_2)=0$ ve $Cov(\varepsilon_2)=\sigma^2 M_2 V M_2$ olan rastgele vektördür. Ayrıca (4.9) ifadesini

$$\mathcal{B}=\{M_2 y, M_2 X_1 \beta_1, \sigma^2 M_2 V M_2\} \tag{4.10}$$

olarak yazabiliriz. Bunlara ilaveten

$$\mathcal{C}=\{M_2 y, M_2 X_1 \beta_1, \sigma^2 V\}$$

$$\mathcal{D}=\{y, M_2 X_1 \beta_1, \sigma^2 V\}$$

$$\mathcal{N}=\{y, M_1 X_2 \beta_2, \sigma^2 V\},$$

$$\mathcal{E}=\{y, M_2 X_1 \beta_1, \sigma^2 V\}, \tag{4.11}$$

modellerini tanımlayalım. Ayrıca Aşağıdaki iki Lemma $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ modelleri altında $M_1 X_2 \beta_2$ nin BLUE tahmin edicilerinin karekterizasyonunu vermektedir.

Lemma 4.1 $Z=I-P_{M_1 X_2}$ ve $V_*=M_1 V M_1$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denk olacaktır:

(i) Fy ifadesi $\mathcal{M}=\{y, X_1\beta_1+X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ modeli altında $M_1 X_2 \beta_2$ için BLUE tahmin edicidir.

(ii) F matrisi $F(X_1 : X_2)=(0 : M_1 X_2)$ ve $FVM_1 Z=0$ eşitliklerini sağlar.

(iii) $F=NM_1$ dir, burada N matrisi $NM_1 X_2=M_1 X_2$ ve $NV_* Z=0$ eşitliklerini sağlar.

(iv) Bir P için $F=[I-V_* Z(ZV_* Z)^{\dagger} Z]M_1+P[I-ZV_* Z(ZV_* Z)^{\dagger}]ZM_1$ dir.

İspat. Bir Fy tahmin edicisinin $\mathcal{M}$ deki model altında $M_1 X_2 \beta_2$ parametresnin bir BLUE tahmin edici olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$(X_1 : X_2)^{\perp} \ \Re((X_1 : X_2)^{\perp})=\mathcal{N}((X_1 : X_2)^T)$$

eşitliğini sağlayan keyfi bir matris olmak üzere $F(X_1 : X_2)=(0 : M_1 X_2)$ ve $FV(X_1 : X_2)^{\perp}=0$ eşitliklerinin sağlanmasıdır. Fakat

$$M_1Z = M_1(I - P_{M_1X_2}) = M_1 - P_{M_1X_2} = I - P_{(X_1:\,X_2)}$$

olduğundan (i) ve (ii) nin denk olduğu görülür. (iii) nin (ii) ye denk olduğu ise açıktır. Tersine olarak eğer (ii) sağlanırsa $FX_1 = 0$ eşitliği keyfi bir N için $F = NM_1$ olduğunu gösterir ve (iii) sağlanır. Öte yandan

$$NM_1X_2 = M_1X_2 \text{ ve } NV_*Z = 0$$

denklemlerinin N ye göre çözümü keyfi bir A için

$$N = [I - V_*Z(ZV_*Z)^{\dagger}Z] + A[I - ZV_*Z(ZV_*Z)^{\dagger}]Z$$

şeklinde olacağından (iii) ve (iv) arasındaki denkliğin sağlandığı görülür ve böylece de lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 4.2 $Z = I - P_{M_1X_2}$ alınsın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denk olacaktır:

(i) Fy ifadesi $\mathcal{M} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2V\}$ modeli altında $M_1X_2\beta_2$ için BLUE tahmin edicidir.

(ii) F matrisi $FM_1X_2 = M_1X_2$ ve $FVZ = 0$ eşitliklerini sağlar.

(iii) Bir B için $F = [I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z] + B[I - ZVZ(ZVZ)^{\dagger}]Z$ dir.

İspat. $Z = I - P_{M_1X_2}$ nin $\mathcal{N}(X_2^TM_1)$ üzerinde bir dik izdüşüm olduğu dikkate alınırsa (i) ve (ii) nin denk olacağı açıkça görülmektedir. (ii) ve (iii) arasındaki denklik ise bir önceki lemmadan kolaylıkla elde edilir.

Teorem 4.2 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ modelleri sırasıyla (4.2) ve (4.11) de verildikleri gibi olsun. Bu takdirde $M_1X_2\beta_2$ nin $\mathcal{N}$ dönüştürülmüş modeli altındaki her BLUE tahmin edicisinin aynı zamanda $\mathcal{M}$ modeli altında da $M_1X_2\beta_2$ nin bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart $\Re(X_1) \subseteq \Re[V(I - P_{M_1X_2})]$ olmasıdır.

İspat. F matrisi Lemma 4.2 de verildiği gibi olmak üzere farz edelim ki Fy ifadesi $M_1X_2\beta_2$ parametresinin $\mathcal{N}$ modeli altında bir BLUE tahmin edicisi olsun. Bu durumda Lemma 4.2 (ii) den $FV = FVP_{M_1X_2}$ yazılabilir. Ayrıca $P_{M_1X_2} = P_{M_1X_2}M_1$ olduğundan $FV = FVM_1$ elde edilir. Bu nedenle Lemma 4.1(ii) ye göre Fy ifadesinin $M_1X_2\beta_2$ parametresinin $\mathcal{M}$ modeli altında bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart $FX_1 = 0$ ve $FX_2 = M_1X_2$ olmasıdır. Öte yandan $FX_1 = 0$ olması için gerek ve yeter şart $FM_1 = F$ olmasıdır. Dolayısıyla $FX_1 = 0$ olması $FX_2 = FM_1X_2 = M_1X_2$

olmasını gerektirir. Bu ise $M_1X_2\beta_2$ nin $\mathcal{M}_r$ modeli altında bir BLUE tahmin edicisi olan Fy ifadesinin $\mathcal{M}$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şartın $FX_1 = 0$ olması olduğunu gösterir. Geriye $\mathfrak{R}(X_1) \subseteq \mathfrak{R}[V(I - P_{M_1X_2})]$ bağıntısının $\mathcal{N}$ modeli altındaki herhangi bir Fy BLUE tahmin edicisi için $FX_1 = 0$ eşitliğine denk olduğunu göstermek kalmıştır. Lemma 4.2(iii) formundaki herhangi bir F için $FX_1 = 0$ sağlansın. Bu takdirde $[I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z]X_1 = 0$ eşitliği $\mathfrak{R}(X_1) \subseteq \mathfrak{R}[V(I - P_{M_1X_2})]$ bağıntısının sağlandığını gösterir. Tersine olarak eğer $\mathfrak{R}(X_1) \subseteq \mathfrak{R}[V(I - P_{M_1X_2})]$ bağıntısı sağlanırsa bu takdirde $\mathfrak{R}(ZX_1) \subseteq \mathfrak{R}(ZVZ)$, yani $[ZVZ(ZVZ)^{\dagger}Z]ZX_1 = ZX_1$ olacaktır. Dolayısıyla Lemma 4.2(iii) ye göre $\mathcal{N}$ modeli altındaki herhangi bir Fy BLUE tahmin edicisi için $[I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z]X_1 = FX_1$ yazılabilir. Ancak $\mathfrak{R}(X_1) \subseteq \mathfrak{R}[V(I - P_{M_1X_2})]$ dan herhangi bir A matrisi için $X_1 = VZA$ yazılır. Diğer taraftan $VZ(ZVZ)^{\dagger}ZVZ = VZ$ olup $FX_1 = 0$ olduğu görülür.

Sonuç 4.1 $\mathcal{M}$ modeli singüler ise, bu takdirde $M_1X_2\beta_2$ nin $\mathcal{N}$ dönüştürülmüş modeli altındaki BLUE tahmin edicisinin $\mathcal{M}$ modeli altında da BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart bir V^- genelleştirilmiş inversi için $X_2^TM_1V^-X_1 = 0$ olmasıdır.

İspat. $X_2^TM_1V^-X_1$ in V^- genelleştirilmiş inversinin seçimine göre değişmez kalması

$$\mathfrak{R}(X_1) \subseteq \mathfrak{R}(V) \text{ ve } \mathfrak{R}(M_1X_2) \subseteq \mathfrak{R}(V) \tag{4.12}$$

içermelerinin sağlanmasına denktir. $X_1 \neq 0$ ve $X_2^TM_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım. (4.12) ifadesi $\mathfrak{R}(X_1 : X_2) \subseteq \mathfrak{R}(V)$ olması demektir ki bu da $\mathcal{M}$ modelinin singüler olduğu anlamına gelir. Eğer $X_2^TM_1V^-X_1 = 0$ ise $Z = I - P_{M_1X_2}$ olmak üzere herhangi bir A için $V^-X_1 = ZA$ yazılabilir. Singülerlikten $VV^-X_1 = X_1$ dolayısıyla $X_1 = VZA$ olacaktır. Böylece Teorem 4.2 ye göre $M_1X_2\beta_2$ nin $\mathcal{N}$ modeli altındaki herhangi bir BLUE tahmin edicisi $\mathcal{M}$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisi olacaktır. Tersine olarak, eğer Teorem 4.2 deki $\mathfrak{R}(X_1) \subseteq \mathfrak{R}[V(I - P_{M_1X_2})]$ içermesi sağlanırsa yani $\mathfrak{R}(X_1) \subseteq \mathfrak{R}(V)$ ise ve $\mathcal{M}$ modeli singüler yani $\mathfrak{R}(X_1 : X_2) \subseteq \mathfrak{R}(V)$ ise bu takdirde herhangi bir A matrisi için $X_2^TM_1V^-X_1 = X_2^TM_1V^-VZA = X_2^TM_1ZA = 0$ yazılabilir.

Sonuç 4.2 $\mathcal{M}$ modeli verilmiş olsun. Bu takdirde $M_1X_2\beta_2$ nin $\mathcal{N}$ dönüştürülmüş modeli altındaki herhangi bir BLUE tahmin edicisi aynı zamnda $\mathcal{M}$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisidir eğer $\mathfrak{R}(VX_1) \subseteq \mathfrak{R}(X_1)$ içermesi sağlanırsa.

İspat. Bu durumda $r(X_1) = r(VX_1)$ eşitliği sağlanacağından dolayı $\Re(VX_1) \subseteq \Re(X_1)$ içermesi $\Re(VX_1) = \Re(X_1)$ eşitliğine denktir. Bu nedenle $\Re(X_1) = \Re(VZX_1) \subseteq \Re(VZ)$ yazılabilir. Bu ise Teorem 4.2 deki $\Re(X_1) \subseteq \Re[V(I - P_{M_1X_2})]$ içermesinin $\Re(VX_1) \subseteq \Re(X_1)$ koşulu altında sağlandığını gösterir.

Lemma 4.1(ii) ve Lemma 4.2(ii) den $\Re(VX_1) \subseteq \Re(X_1)$ içerme bağıntısı altında $M_1X_2\beta_2$ nin $\mathcal{M}$ modeli altındaki herhangi bir BLUE tahmin edicisinin $\mathcal{N}$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisi olacağı görülür. Başka bir deyişle eğer $\Re(VX_1) \subseteq \Re(X_1)$ ise bu takdirde $M_1X_2\beta_2$ parametersinin $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ lineer modelleri altındaki BLUE tahmin edicileri çakışacaktır. Burada $\Re(VX_1) \subseteq \Re(X_1)$ içerme bağıntısının bir $\{y, E(y) = X_1\beta_1, Cov(y) = \sigma^2 V\}$ modeli altında $X_1\beta_1$ parametresinin OLSE ve BLUE tahmin edicilerinin eşit olması için gerek ve yeter şart olduğunu belirtelim. Bu durumda bazı kısıtlamalar altında Sonuç 4.2 tekrar verilebilir.

Sonuç 4.3 $M_1X_2\beta_2$ nin OLSE tahmin edicisi olarak $P_{M_1X_2}y$ ifadesini göz önüne alalım. Eğer $P_{M_1X_2}y$ tahmin edicisi $\mathcal{N}$ dönüştürülmüş modeli altında bir BLUE tahmin edicisi ise aynı zamanda $\mathcal{M}$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisi olacaktır.

İspat. Bu durumda $Z = I - P_{M_1X_2}$ olmak üzere $\Re(X_1) \subseteq \Re(VZ)$ içermesi yazılabilir. Öte yandan eğer $P_{M_1X_2}y$ tahmin edicisi $\mathcal{N}$ modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin BLUE tahmin edicisi ise $VZ = ZV$ olacaktır. Bu nedenle $\Re(X_1) \subseteq \Re(ZV)$ yazılabilir ki bu da Teorem 4.2 ye göre $\Re(X_1) \subseteq \Re[V(I - P_{M_1X_2})]$ içermesinin sağlandığını gösterir.

Şimdi Fy ifadesi $\mathcal{N}$ dönüştürülmüş modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin BLUE tahmin edicisi olmak üzere $M_1X_2\beta_2$ nin FM_1y formundaki tahmin edicileri göz önüne alınacaktır. FM_1y bir tahmin edicinin genelleştirilmiş versiyonu olarak da düşünülebilir. FM_1y formundaki bir tahmin edicinin $\mathcal{M}$ parçalanmış modeli altında da kullanılıp kullanılamayacağı sorusu akla gelebilir. Açıkça belirtelim ki $FM_1(X_1 : X_2) = (0 : M_1X_2)$ olacağından FM_1y tahmin edicisi $M_1X_2\beta_2$ için yansızdır. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ modelleri sırasıyla (4.2) ve (4.6) da verildikleri gibi olsun. Fy ifadesi $\mathcal{N}$ dönüştürülmüş modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin bir BLUE tahmin edicisi olsun. Bu takdirde FM_1y formundaki herhangi bir tahmin edicinin $\mathcal{M}$ parçalanmış modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin bir BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şart $Z = I - P_{M_1X_2}$ ve $P_1 = X_1X_1^{\dagger}$ olmak üzere

$$\Re(P_1VM_1Z) \subseteq \Re(VZ) \tag{4.13}$$

olmasıdır.

İspat. Bu durumda $FM_1(X_1{:}X_2) = (0{:}M_1X_2)$ özelliğini sağlayan herhangi bir F matrisi için Lemma 4.1(ii) den FM_1y ifadesinin $\mathcal{M}$ parçalanmış modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin BLUE tahmin edicisi olması için gerek ve yeter şartın $FM_1VM_1Z = 0$ olduğu görülür. Şimdi bu eşitliğin Lemma 4.2(iii) formundaki her F matrisi için sağlandığını varsayalım. Bu takdirde $B = 0$ seçilerek $[I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z]M_1VM_1Z = 0$ eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $M_1 = I - P_1$ ve $M_1Z = ZFM_1$ olduğundan $[I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z](VZM_1 - P_1VM_1Z) = 0$ yazılabilir. $VZ(ZVZ)^{\dagger}ZVZ = VZ$ olduğundan

$$[I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z]P_1VM_1Z = 0 \tag{4.14}$$

yazılabilir. $\mathcal{N}(I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z) = \Re(VZ)$ olduğundan (4.14) eşitliği (4.13) e denktir. Tersine olarak (4.13) sağlansın. Yukarıda ifade edildiği gibi (4.13) ve (4.14) denk olup bu da $[I - VZ(ZVZ)^{\dagger}Z]M_1VM_1Z = 0$ eşitliğine denktir. Bu ise

$$[Z - ZVZ(ZVZ)^{\dagger}Z]M_1VM_1Z = 0$$

olduğunu gösterir. Bu son eşitlikten Lemma 4.2(iii) formundaki F matrisi için FM_1y nin $\mathcal{M}$ parçalanmış modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin bir BLUE tahmin edicisi olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4 $\mathcal{M}$ modeli singüler olsun ve Fy ifadesi $\mathcal{N}$ dönüştürülmüş modeli altında $M_1X_2\beta_2$ nin bir BLUE tahmin edicisi olsun. Bu durumda FM_1y formundaki herhangi bir tahmin edicinin $\mathcal{M}$ de verilen parçalanmış lineer model altında $M_1X_2\beta_2$ nin bir BLUE tahmin edicisi olabilmesi için gerek ve yeter şart V^- matrisi V matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş inversi ve $Z = I - P_{M_1X_2}$ olmak üzere

$$X_2^TM_1V^-P_1VM_1Z = 0 \tag{4.15}$$

olmasıdır.

İspat. Sonuç 4.1 den $X_2^TM_1V^-X_1$ ifadesinin V^- genelleştirilmiş inversinin seçimine göre değişmez kalması

$\Re(X_1) \subseteq \Re(V)$ ve $\Re(M_1X_2) \subseteq \Re(V)$

içermelerinin sağlanmasına denktir. Bu nedenle (4.10) in sol tarafı V^- nin seçiminden bağımsızdır. Teorem 4.3 e göre (4.15) ifadesinin $\Re(X_1) \subseteq \Re[V(I - P_{M_1X_2})]$ ye denk olduğu gösterilirse iddia tamamlanmış olur. Eğer $\Re(X_1) \subseteq \Re[V(I - P_{M_1X_2})]$ içermesi sağlanırsa (4.15) eşitliğinin gerçekleneceği açıktır. Tersine olarak (4.15) sağlanmış olsun. Bu herhangi bir A matrisi için $V^-P_1VM_1Z = ZA$ yazılabilir. $VV^-P_1 = P_1$ olduğundan bu eşitlik V ile soldan çarpılırsa $\Re(X_1) \subseteq \Re[V(I - P_{M_1X_2})]$ içermesi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.4 $\mathcal{M}_c$ modeli altında $M_1X_2\beta_2$ parametresinin herhangi bir BLUE tahmin edicisi aynı zamanda $\mathcal{M}$ modeli altında da bir BLUE tahmin edicisidir.

İspat. Herhangi bir tahmin edicinin $M_1X_2\beta_2$ parametresi için bir BLUE tahmin edicisi olabilmesi için gerek ve yeter şart $I - P_{M_1X_2}$ olmak üzere $NM_1X_2 = M_1X_2$ ve $NM_1VM_1Z = 0$ eşitliklerini sağlayan bir N matrisi için NM_1y formunda yazılmasıdır. Bu takdirde Lemma 4.1 (iii) te göre NM_1y ifadesi $\mathcal{M}$ modeli altında da $M_1X_2\beta_2$ parametesinin bir BLUE tahmin edicisi olacaktır.

Teorem 4.4 un tersi de doğrudur, yani $\mathcal{M}$ de verilen model altında $M_1X_2\beta_2$ parametresinin BLUE tahmin edicisi $\mathcal{M}_c$ modeli altında da BLUE tahmin edicisidir. Başka bir deyişle $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}_c$ modelleri altında BLUE tahmin ediciler çakışmaktadır.

Şimdi yukarıda tanımlanan $\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ modellerini dikkate alarak bu modeller altında $M_2X_1\beta_1$ parametresinin BLUE tahmin edicileri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Bunula ilgili olarak önce $\mathcal{M}$ modeli altında $M_2X_1\beta_1$ in BLUE tahmin edicisi ile $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ modelleri altında $M_2X_1\beta_1$ parametresinin BLUE tahmin edicileri arasındaki fark verilerek $M_2X_1\beta_1$ parametresinin bu modeller altındaki BLUE tahmin edicilerinin eşit olabilmesi için bazı gerek ve yeter şartlar ortaya konulacaktır.

Teorem 4.5 $\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ modelleri verilmiş olsun. P_{M}, P_B, P_C ve P_{E} sırasıyla $P(X|V)$, $P(M_2X_1|M_2VM_2)$, $P(M_2X_1|V)$ ve $P(X_1|V)$ den keyfi fakat sabit izdüşümleri göstersin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(1) $M_2P_{\mathrm{M}}y = BLUE_{\mathcal{M}}(M_2X_1\beta_1)$,

(2) $P_BM_2y = BLUE_{\mathcal{B}}(M_2X_1\beta_1)$,

(3) $P_C M_2 y = BLUE_{\mathcal{C}}(M_2 X_1 \beta_1)$,

(4) $P_C y = BLUE_{\mathcal{D}}(M_2 X_1 \beta_1)$,

(5) $M_2 P_{\mathrm{E}} y = BLUE_{\mathcal{E}}(M_2 X_1 \beta_1)$.

İspat. $P_{\mathcal{M}} = P(X|V)$ ve $M_X = I - XX^{\dagger}$ olsun. Bu durumda $P(X|V)$ nin tanımından

$$P_{\mathrm{M}}(X{:}\,VM_X) = (X{:}\,0)$$

olduğu görülür. Böylece $M_2 P_{\mathrm{M}} y$ nin gösterimi dikkate alınırsa bunun $\mathcal{M}$ modeli altında $M_2 X_1 \beta_1$ in bir BLUE tahmin edicisi olduğu görülür. Benzer şekilde açık gösterimler göz önüne alınarak (2), (3), (4) ve (5) şıkları da gösterilebilir.

Teorem 4.6 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{B}$ modelleri yukarıdaki şekilde verilmiş olsun. Bu durumda

$$BLUE_{\mathcal{M}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{B}}(M_2 X_1 \beta_1)$$

olacaktır.

İspat. Bu durumda eşitliği göstermek için $P(M_2 X_1 | M_2 V M_2)$ den keyfi fakat sabit $P_{\mathcal{B}}$ izdüşümü için $P_{\mathcal{B}} M_2 (X{:}\,VM_X) = (M_2 X_1{:}\,0)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten $P(M_2 X_1 | M_2 V M_2)$ nin tanımı dikkate alınırsa

$$P_{\mathcal{B}} M_2 X = (P_{\mathcal{B}} M_2 X_1{:}\,0) = (M_2 X_1{:}\,0)$$

ve

$$P_{\mathcal{B}} M_2 V M_X = P_{\mathcal{B}} M_2 V M_2 M_X$$

olacağı açıktır. Bu durumda $\Re(M_2 X_1) \subseteq \Re(X)$ olduğundan $M_X = M_{M_2 X_1} M_X$ eşitliği yazılabilir. Bunun sonucu olarak $P_{\mathcal{B}} M_2 V M_X = 0$ eşitliği elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Hatırlatma 4.1 β_1 parametresiyle ilgilenildiğinde $\Re^{\perp}(X_2)$ üzerine bir izdüşüm olan M_2 ile $\mathcal{M}$ modeli soldan çarpılarak β_2 parametresi yok edilebilir. Ayrıca Teorem 4.6 e göre $\mathcal{M}$ modeli $\mathcal{B}$ modeline denk olacağından β_1 tahmin edilebilir olması durumunda $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2 X\beta)$ ve $BLUE_{\mathcal{B}}(M_2 X\beta)$ nin eşit olduğu elde edilir. Öte yandan X_1, X_2 ve V matrisleri tam ranklı ve $\Re(X_1{:}\,X_2) \subseteq \Re(V)$ olduğunda β_1 parametresinin $\mathcal{M}$ modeli altındaki tahmin edicisi karşılık gelen $\mathcal{B}$ modelindeki tahmin ediciye eşit olacaktır.

Teorem 4.7 $\mathcal{M}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ modelleri verilmiş olsun. Ayrıca P_B, P_C ve P_{E} sırasıyla $P(M_2 X_1 | M_2 V M_2)$, $P(M_2 X_1 | V)$ ve $P(X_1 | V)$ den keyfi fakat sabit izdüşümleri göstersin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(1) $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2X_1\beta_1) - BLUE_{\mathcal{C}}(M_2X_1\beta_1) = P_B(I - P_C)M_2y,$

(2) $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2X_1\beta_1) - BLUE_{\mathcal{D}}(M_2X_1\beta_1) = P_BM_2(I - P_C)y,$

(3) $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2X_1\beta_1) - BLUE_{\mathcal{E}}(M_2X_1\beta_1) = P_BM_2(I - P_E)y,$

(4) $BLUE_{\mathcal{D}}(M_2X_1\beta_1) - BLUE_{\mathcal{C}}(M_2X_1\beta_1) = P_CP_{X_2}y.$

İspat. P_B ve P_C izdüşümlerinin tanımından $P_BP_C = P_C$ olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 yardımıyla (1) in doğrulu gösterilebilir. Benzer şekilde (2), (3) ve (4) ün sağlandığı da gösterilebilir.

Teorem 4.8 $\mathcal{M}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ modelleri verilmiş olsun. Ayrıca P_C ve P_{E} sırasıyla, $P(M_2X_1|V)$ ve $P(X_1|V)$ den keyfi fakat sabit izdüşümleri göstersin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{D}}(M_2X_1\beta_1),$ (4.16)

(2) $BLUE_{\mathcal{C}}(M_2X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{D}}(M_2X_1\beta_1),$ (4.17)

(3) $P_CX_2 = 0,$ (4.18)

(4) $T_1 = V + k^2M_2X_1X_1^TM_2$ olmak üzere $X_1^TM_2T_1^{\dagger}X_2 = 0$ dir. (4.19)

İspat. P_B ve P_{C} sırasıyla $P(M_2X_1|M_2VM_2)$ ve $P(M_2X_1|V)$ den keyfi fakat sabit izdüşümler olsun. Teorem 4.7 den $BLUE_{\mathcal{C}}(M_2X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{D}}(M_2X_1\beta_1)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart her $t \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $P_BM_2(I - P_C)(V{:}X)t = 0$ olmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $P_BM_2(I - P_C)(V{:}X) = 0$ dir. $P(M_2X_1|M_2VM_2)$ ve $P(M_2X_1|V)$ in tanımları, $\Re(V{:}X) = \Re(VM_X{:}M_2X_1{:}X_2)$ ve $\Re(M_X) \subseteq \Re((M_2X_1)^{\perp})$ durumları dikkate alınırsa $P_BM_2(I - P_C)(V{:}X)t = 0$ eşitliği $P_BM_2(I - P_C)(VM_X{:}M_2X_1{:}X_2) = 0$ eşitliğine denk olacaktır. Buradan

$$P_BM_2(I - P_C)M_2X_1 = 0,$$

$$P_CVM_X = P_CVM_{M_2X_1}M_X = 0,$$

$$P_BM_2VM_X = P_BM_2VM_2M_{M_2X_1}M_X = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca

$$P_BM_2P_C = P_BP_C - P_BP_{X_2}P_C = P_BP_C = P_C$$

olduğu gösterilebilir. Böylece (4.16) ve (4.19) arasındaki denklik gösterilmiş olur. Benzer şekilde her $y \in \Re(V:X)$ için (4.18) eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $P_C P_{X_2}(V:X) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Diğer taraftan $\Re(X_2) \subseteq \Re(V:X)$ ve dolayısıyla $P_{X_2} = P_{X_2} P_{(V:X)}$ olduğu dikkate alınırsa $P_C P_{X_2}(V:X) = 0$ eşitliği $P_C P_{X_2} = 0$ eşitliğine yani $P_C X_2 = 0$ eşitliğine denk olacaktır. Böylece (4.17), (4.18) ve (4.19) ün denkliği gösterilmiş olur. Özel olarak

$$P_C = M_2 X_1 (X_1^T M_2 T_1^\dagger M_2 X_1)^\dagger X_1^T M_2 T_1^\dagger \in P(M_2 X_1 | V)$$

seçilebilir. Bu durumda $P_C X_2 = 0$ eşitliği

$$M_2 X_1 (X_1^T M_2 T_1^\dagger M_2 X_1)^\dagger X_1^T M_2 T_1^\dagger X_2 = 0$$

olur. Bu son eşitlik $X_1^T M_2 T_1^\dagger$ ile soldan çarpılırsa $X_1^T M_2 T_1^\dagger X_2 = 0$ elde edilir. Bu ise $P_C X_2 = 0$ olduğunu gösterir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5 Eğer $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{D}}(M_2 X_1 \beta_1)$ ise bu takdirde

$$BLUE_{\mathcal{M}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{C}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{D}}(M_2 X_1 \beta_1) \qquad (4.20)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.9 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{C}$ modelleri verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{C}}(M_2 X_1 \beta_1)$, (4.21)

(2) $P_C V M_X = 0$, (4.22)

(3) $X_1^T M_2 T_1^\dagger P_{X_2} V M_X = 0$ dir. (4.23)

İspat. Teorem 4.7 (1) den (4.11) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şartın

$$P_B (I - P_C) M_2 (V:X) = 0, \qquad (4.24)$$

başka bir deyişle, $P_B (I - P_C) M_2 (V M_X : M_2 X_1 : X_2) = 0$ eşitliğinin sağlanması olduğu görülür. Buradan da $P_B (I - P_C) M_2 (M_2 X_1 : X_2) = 0$ ve $P_B M_2 V M_X = 0$ olduğu görülür. Bu durumda (4.19) ifadesinin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli şart

$$P_C V M_X = 0 \qquad (4.25)$$

olmasıdır. Özel olarak daha önce verildiği gibi $P_C = M_2 X_1 (X_1^T M_2 T_1^\dagger M_2 X_1)^\dagger X_1^T M_2 T_1^\dagger$ seçilirse (4.17) $X_1^T M_2 T_1^\dagger$ ile soldan çarpılarak $X_1^T M_2 T_1^\dagger V M_X = 0$ elde edilir, yani (4.23) sağlanır. Öte yandan (4.23) eşitliğinin (4.22) eşitliğini sağladığı kolayca görülebilir ve bunun sonucu olarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.10 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{E}$ modelleri verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $BLUE_{\mathcal{M}}(M_2X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{E}}(M_2X_1\beta_1)$, (4.26)

(2) $M_2P_EX_2 = 0$ dir. (4.27)

İspat. P_B ve P_E sırasıyla $P(M_2X_1|M_2VM_2)$ ve $P(X_1|V)$ den keyfi fakat sabit izdüşümler olsun. Teorem 4.7 den her $y \in \Re(V: X)$ için (4.26) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şartın

$$P_BM_2(I - P_E)(V: X) = 0, \tag{4.28}$$

başka bir deyişle,

$$P_BM_2(I - P_E)(VM_X: M_1X_2: X_1) = 0 \tag{4.29}$$

eşitliğinin sağlanması olduğu görülür. Öte yandan

$$P_EVM_X = 0,\ (I - P_E)X_1\ = 0 \text{ ve } \Re(M_X) \subseteq \Re M_1)$$

olduğundan (4.29) ün sağlanması için gerek ve yeter şart görülür. Bu durumda (4.24) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$P_BM_2(I - P_E)X_2 = 0,$$

yani

$$P_BM_2P_EX_2 = 0 \tag{4.30}$$

olmasıdır. Öte taraftan $P(M_2X_1|M_2VM_2)$ ve $P(X_1|V)$ nin tanımları dikkate alınırsa

$$P_BM_2P_E = M_2P_E$$

eşitiği elde edilir. Bu nedenle (4.30) eşitliği $M_2P_EX_2 = 0$ eşitliğine denk olur ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Yukarıdaki son teoremde özel olarak eğer $V = I$ alınırsa bu takdirde P_E bir pozitif izdüşüm olacağından (4.21) eşitliği

$$P_EP_{X_2} = P_{X_2}P_E$$

eşitliğine denk olacaktır. Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.6 Eğer $X_2\beta_2$ parametresinin $\{y, X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ ve $\{y, X_2\beta_2, \sigma^2 I\}$ modelleri altındaki BLUE tahmin edicileri eşit ise bu takdirde $M_2X_1\beta_1$ parametresinin $\mathcal{M}, \mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ modelleri altındaki BLUE tahmin edicileri çakışacaktır.

İspat. Bu durumda $X_1^T M_2 T_1^{\dagger} X_2 = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $X_2\beta_2$ parametresinin $\{y, X_2\beta_2, \sigma^2 V\}$ ve $\{y, X_2\beta_2, \sigma^2 I\}$ modelleri altındaki BLUE tahmin edicileri eşit olduğundan $M_2V = M_2VM_2$ eşitliği yazılabilir ki bu da

$$M_2T_1 = M_2T_1M_2 = T_1M_2$$

olması demektir. Buradan $\mathfrak{R}(T_1X_2) \subseteq \mathfrak{R}(X_2)$ elde edilir. Bu ise

$$X_1^T M_2 T_1^{\dagger} X_2 = 0$$

olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. Eşitlik Kısıtlamalı Parçalı Lineer Modellerde Parametre Tahminleri

Bu kısımda daha önce verilen

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon\ ,\ E(\varepsilon) = 0\ ,\ Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V,$$

parçalı lineer modeli tekrar göz önüne alınacaktır, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ keyfi ranklı bilinenlerin matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlemlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{q\times 1}$, bilinmeyenlerin parametrer vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinen keyfi ranklı bir matris ve σ^2 ise bilinmeyen bir pozitif parametredir. Bu modeli daha önce ifade edildiği gibi $X = [X_1, X_2]$ ve $\beta = [\beta_1, \beta_2]^T$ olmak üzere

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\} \tag{4.31}$$

şeklinde gösterelim. Ayrıca bilinmeyen β parametre vektörü üzerinde $R \in \mathbb{R}^{m\times(p+q)}$ bilinenler matrisi ve $r \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ bilinenler vektörü olmak üzere tutarlı $R\beta = r$ lineer matris formunda kısıtlaması verilmiş olsun. Bu kısıtlama ile birlikte (4.31) modeline kısıtlamalı lineer model veya eşitlik kısıtlamalı bir lineer model adı verilir ve bu model

$$\mathcal{M}_r = \{y, X\beta \mid R\beta = r, \sigma^2 V\} \tag{4.32}$$

kapalı formunda gösterilir. Bu durumda daha önce belirtildiği gibi V matrisi nonsingüler olmak üzere eğer $X = [X_1, X_2]$ matrisi tam sütun ranklı ise

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X(X^TV^{-1}X)^{-1}X^TV^{-1}y, \tag{4.33}$$

eğer $X = [X_1{,}X_2]$ matrisi eksik ranklı ise

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X(X^T V^{-1} X)^- X^T V^{-1} y, \tag{4.34}$$

olacaktır.

Eğer V matrisi singüler bir matris ve $X = [X_1, X_2]$ matrisi tam sütun ranklı ise

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X(X^T V^- X)^{-1} X^T V^- y \tag{4.35}$$

olması için gerek ve yeter şart $\Re(X) \subseteq \Re(V)$ olmasıdır.

Şayet $X = [X_1, X_2]$ matrisi eksik ranklı ve V matrisi singüler ise bu durumda

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X(X^T V^- X)^- X^T V^- y \tag{4.36}$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart $\Re(X) \cap \Re(V) = \emptyset$ olmasıdır. Buradan (4.1) ve (4.2) ifadelerinin yeni versiyonları kullanılarak (4.35) eşitliğinden

$$\begin{aligned} BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) &= X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1} y \\ &\quad + [I - X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1}] X_2 (X_2^T \dot{M}_1 X_2)^- X_2^T \dot{M}_1 y \end{aligned} \tag{4.37}$$

veya

$$\begin{aligned} BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) &= X_2(X_2^T V^{-1} X_2)^- X_2^T V^{-1} y \\ &\quad + [I - X_2(X_2^T V^{-1} X_2)^- X_2^T V^{-1}] X_1 (X_1^T \dot{M}_2 X_1)^- X_1^T \dot{M}_2 y \end{aligned} \tag{4.38}$$

yazılabilir, burada

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= V^{-1}[I - X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1}]\,, \\ \dot{M}_2 &= V^{-1}[I - X_2(X_2^T V^{-1} X_2)^- X_2^T V^{-1}] \end{aligned} \tag{4.39}$$

dir. Diğer taraftan

$$I - X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1} = I - X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^{\dagger} X_1^T V^{-1} \tag{4.40}$$

olduğu gösterilebilir. Öte yandan

$$M_1 = \left[I - X_1 X_1^{\dagger}\right] = Q_1 Q_1^T \text{ ve } M_2 = \left[I - X_2 X_2^{\dagger}\right] = Q_2 Q_2^T$$

olsun, burada Q_1 ve Q_2 matrisleri tam sütun ranklı matrisler olup $Q_1^T Q_1 = I$ ve $Q_2^T Q_2 = I$ matrisleri uygun mertebeden birim matrislerdir. Bu durumda

$$X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1} = X_1 X_1^{\dagger}[I - V M_1 (M_1 V M_1)^- M_1] \tag{4.41}$$

eşitliği yazılır. Eğer (4.7) ve (4.9) modelleri sırasıyla Q_1^T ve Q_2^T ile soldan çarpılırsa

$$Q_1^T y = Q_1^T X_2\beta_2 + \varepsilon_1,$$

$$Q_2^T y = Q_2^T X_1\beta_1 + \varepsilon_2$$

modelleri oluşturulabilir, bu modelleri sırasıyla

$$\mathcal{W}_1 = \{Q_1^T y, Q_1^T X_2\beta_2, \sigma^2 Q_1^T V Q_1\},$$

$$\mathcal{W}_2 = \{Q_2^T y, Q_2^T X_1\beta_1, \sigma^2 Q_2^T V Q_2\} \tag{4.42}$$

ile gösterelim. Buradan $Q_1^T = Q_1^\dagger$ eşitliği ve M_1 matrisinin singülerliği dikkate alınırsa

$$M_1(M_1VM_1)^- M_1 = (M_1VM_1)^\dagger = Q_1(Q_1^T V Q_1)^{-1} Q_1^T$$

ve dolayısıyla

$$M_1VM_1(M_1VM_1)^- M_1 = Q_1Q_1^T = M_1 \tag{4.43}$$

yazılabilir. Bu durumda (4.44) ifadesi (4.42) de yerine yazılırsa

$$X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1} = I - VQ_1(Q_1^T V Q_1)^{-1} Q_1^T \tag{4.44}$$

ve buradan da

$$I - X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1} = V(M_1VM_1)^\dagger = VQ_1(Q_1^T V Q_1)^{-1} Q_1^T = V\dot{M}_1$$

eşitliği yazılabilir. Bu gösterimler altında

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1} y + V\dot{M}_1 X_2(X_2^T \dot{M}_1 X_2)^- X_2^T \dot{M}_1 y$$

veya buna paralel olarak

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X_2(X_2^T V^{-1} X_2)^- X_2^T V^{-1} y + V\dot{M}_2 X_1(X_1^T \dot{M}_2 X_1)^- X_1^T \dot{M}_2 y$$

yazılabilir. Öte yandan $\Re(M_1VM_1) = \Re(M_1V) = \Re(M_1)$ olduğundan $\Re(M_1X_2) \subseteq \Re(M_1VM_1)$ ve $\Re(M_2X_1) \subseteq \Re(M_2VM_2)$ olacağından $\mathcal{M}_c$ ve $\mathcal{B}$ modelleri altında

$$\begin{aligned} BLUE_{\mathcal{M}_c}(M_1X_2\beta_2) &= M_1X_2[X_2^T M_1(M_1VM_1)^- M_1X_2]^- X_2^T M_1(M_1VM_1)^- M_1 y \\ &= M_1X_2[X_2^T(M_1VM_1)^\dagger X_2]^- X_2^T(M_1VM_1)^\dagger y \\ &= M_1X_2[X_2^T \dot{M}_1 X_2]^- X_2^T \dot{M}_1 y \end{aligned} \tag{4.45}$$

ve

$$BLUE_{\mathcal{D}}(M_2X_1\beta_1) = M_2X_1[X_1^T \dot{M}_2 X_1]^- X_1^T \dot{M}_2 y \tag{4.46}$$

yazılabilir. Bu nedenle $\mathcal{M}$ modeli altında $X\beta$ parametresinin BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^{-} X_1^T V^{-1} y + V\dot{M}_1 X_2\, BLUE_{\mathcal{W}_1}(\beta_2)$$

veya

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\beta) = X_2(X_2^T V^{-1} X_2)^{-} X_2^T V^{-1} y + V\dot{M}_2 X_1 BLUE_{\mathcal{W}_2}(\beta_1)$$

olarak yazılabilir, burada $BLUE_{\mathcal{W}_1}(\beta_2)$ ve $BLUE_{\mathcal{W}_2}(\beta_1)$ sırasıyla

$$(y - X_2\beta_2)^T Q_1 (Q_1^T V Q_1)^{-1} Q_1^T (y - X_2\beta_2)$$

ve

$$(y - X_1\beta_1)^T Q_2 (Q_2^T V Q_2)^{-1} Q_2^T (y - X_1\beta_1)$$

kuadratik formlarını minimim yapan β_2 ve β_1 değerleridir. Şimdi

$$\mathcal{N}_1 = \{y, M_1X_2\beta_2, \sigma^2 V\} \text{ ve } \mathcal{N}_2 = \{y, M_2X_1\beta_1, \sigma^2 V\}\,, \tag{4.47}$$

lineer modellerini oluşturalım. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.11 Yukarıda ifade edilen gösterimin ışığı altında

- **(i)** $M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) = M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}_c}(\beta_2)$ eşitliği geçerlidir.
- **(ii)** Eğer $\{y, X_1\beta_1, \sigma^2 V\}$ modeli altında $X_1\beta_1$ parametresinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri eşit ise $M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) = M_1X_2BLUE_{\mathcal{N}_1}(\beta_2)$ dir.

İspat. (i) Bu durumda $h = [h_1 : h_2]^T$ uygum mertebeden keyfi bir vektör olmak üzere

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X^T V^{-1} X)^{-} X^T V^{-1} y + [I - (X^T V^{-1} X)^{-} X^T V^{-1} X]h$$

yazılabilir. Buradan (4.1) in yeni versiyonu kullanılarak

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) = (X_2^T \dot{M}_1 X_2)^{-} X_2^T \dot{M}_1 y + [I - (X_1^T \dot{M}_2 X_1)^{-}(X_1^T \dot{M}_2 X_1)]h_2 \tag{4.48}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) = M_1X_2(X_2^T \dot{M}_1 X_2)^{-} X_2^T \dot{M}_1 y$$

olacaktır. Öte yandan $M_1X_2\beta_2$ nin $\mathcal{M}_c$ modeli altındaki BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}_c}(M_1X_2\beta_2) = M_1X_2(X_2^T \dot{M}_1 X_2)^{-} X_2^T \dot{M}_1 y$$

olacağından

$$M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_c}(M_1X_2\beta_2) \tag{4.49}$$

olup (i) şıkkının sağlandığı görülür.

(ii) $\mathcal{N}_1 = \{y, M_1X_2\beta_2, \sigma^2V\}$ modeli dikkate alınırsa

$$M_1X_2BLUE_{\mathcal{N}_1}(\beta_2) = M_1X_2(X_2^TM_1V^{-1}M_1X_2)^{-}X_2^TM_1V^{-1}M_1y$$

yazılabilir. Eğer $\{y, X_1\beta_1, \sigma^2V\}$ modeli altında $X_1\beta_1$ parametresinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri eşit ise $X_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-}X_1^TV^{-1} = X_1(X_1^TX_1)^{-}X_1^T = X_1X_1^T$ olacaktır. Bunun durumda $\dot{M}_1 = V^{-1}[I - X_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-}X_1^TV^{-1}] = V^{-1}\left[I - X_1X_1^{\dagger}\right] = V^{-1}M_1$ yazılabilir. Öte yandan $\dot{M}_1$ ve M_1 matrisleri simetrik olduğundan $V^{-1}M_1 = M_1V^{-1}$ ve dolayısıyla $\dot{M}_1 = M_1V^{-1}M_1 = M_1V^{-1}$ olacaktır. Buradan

$$M_1X_2BLUE_{\mathcal{N}_1}(\beta_2) = M_1X_2(X_2^T\dot{M}_1X_2)^{-}X_2^T\dot{M}_1y = M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)$$

elde edilir ki buda (ii) şıkkının ispatını tamamlar. Ayrıca (4.50) dan

$$M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) = M_1X_2BLUE_{\mathcal{M}_c}(\beta_2) = M_1X_2\,BLUE_{\mathcal{W}_1}(\beta_2) = M_1X_2BLUE_{\mathcal{N}_1}(\beta_2)$$

olup bu eşitliklerin her bir terimi Q_1^T ile soldan çarpılarak

$$Q_1^TX_2BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2) = Q_1^TX_2BLUE_{\mathcal{M}_c}(\beta_2) = Q_1^TX_2\,BLUE_{\mathcal{W}_1}(\beta_2) = Q_1^TX_2BLUE_{\mathcal{N}_1}(\beta_2)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Şimdi $X = [X_1, X_2]$ matrisi tam sütun ranklı bir matris ve V matrisi ise nonsingüler bir matris olmak üzere (4.32) ifadesinde verilen

$$\mathcal{M}_r = \{y, X\beta = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 \mid R\beta = r, \sigma^2V\}$$

eşitlik kısıtlamalı lineer modelini göz önüne alalım. $R = [R_1, R_2]$ matrisi β ile uyumlu olacak şekilde parçalanmış tam sütun ranklı bilinenler matrisi olsun. Burada $R\beta = r$ matris denklemi tutarlı olacağından $RR^{\dagger}r = r$ olacaktır. Bu durumda $\mathcal{M}_r$ modeli altında β parametresinin BLUE tahmin edicisi

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(\beta) = BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) \qquad (4.50)$$

$$-(X^TV^{-1}X)^{-1}R^T[R(X^TV^{-1}X)^{-1}R^T]^{-1}(R.BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) - r)$$

veya daha açık şekilde

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = BLUE_{\mathcal{M}}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}X_1^TV^{-1}X_1 & X_1^TV^{-1}X_2\\ X_2^TV^{-1}X_1 & X_2^TV^{-1}X_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}R_1^T\\ R_2^T\end{pmatrix} \qquad (4.51)$$

$$.\left[[R_1,R_2]\begin{pmatrix} X_1^TV^{-1}X_1 & X_1^TV^{-1}X_1 \\ X_2^TV^{-1}X_1 & X_2^TV^{-1}X_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} R_1^T \\ R_2^T \end{pmatrix}\right]^{-1}(R_1.BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_1)+R_2.BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)-r)$$

olarak yazılabilir. Eğer $(X^TV^{-1}X)^{-1}$ matrisi (4.5) de verilen parçalanışa paralel bir şeklinde parçalanırsa bu durumda $T=X_2^TV^{-1}X_2-X_2^TV^{-1}X_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}X_1^TV^{-1}X_2$ yani $T=X_2^T\dot{M}_1X_2$ olmak üzere

$$(X^TV^{-1}X)^{-1}=\begin{pmatrix} X_1^TV^{-1}X_1 & X_1^TV^{-1}X_2T^{-1} \\ X_2^TV^{-1}X_1 & X_2^TV^{-1}X_2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{4.52}$$

$$=\begin{pmatrix} (X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}[I+X_1^TV^{-1}X_2T^{-1}X_2^TX_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1} & -(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}X_1^TV^{-1}X_2T^{-1}] \\ -T^{-1}X_2^TV^{-1}X_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1} & T^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

olacaktır. Öte yandan eğer (4.52) eşitliğinde $R_1=0$ matrisi alınırsa bu durumda $R_2\beta_2=r$ kısıtlaması altındaki en iyi lineer yansız tahmin edicisi elde edilebilir. Bunun için

$$\mathcal{M}_E=\left\{y,X\beta=X_1\beta_1+X_2\beta_2 \mid R_2\beta_2=r,\sigma^2V\right\}$$

modelini oluşturalım. Bu durumda (4.52) den

$$BLUE_{\mathcal{M}_E}(\beta_2)=BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)-T^{-1}R_2^T(R_2T^{-1}R_2^T)^{-1}(R_2.BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)-r) \tag{4.53}$$

yazılabilir, burada $\dot{M}_1=V^{-1}-V^{-1}X_1(X_1^TV^{-1}X_1)^{-1}X_1^TV^{-1}$ olmak üzere

$$T=X_2^T\dot{M}_1X_2 \text{ ve } BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)=(X_2^T\dot{M}_1X_2)^{-1}X_2^T\dot{M}_1y$$

dir. Ayrıca $R_2\beta_2=r$ matris denklemi tutarlıdır, yani $R_2R_2^{\dagger}r=r$ eşitliği sağlanır.

Öte yandan alternatif bir gösterim olarak $X\beta$ parametresinin

$$\mathcal{M}_r=\{y,X\beta=X_1\beta_1+X_2\beta_2 \mid R\beta=r,\sigma^2V\}$$

modeli altındaki BLUE tahmin edicisi

$$\begin{aligned} BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) &= X\left(V^{-1/2}XQ_R\right)^{\dagger}V^{-1/2}(y-XR^{\dagger}r)+XR^{\dagger}r \\ &= X(Q_RX^TV^{-1}XQ_R)^{\dagger}Q_RX^TV^{-1}(y-XR^{\dagger}r)+XR^{\dagger}r \\ &= XC^{\dagger}X^TV^{-1}(y-XR^{\dagger}r)+XR^{\dagger}r \end{aligned} \tag{4.54}$$

şeklinde de yazılabilir, burada $R=[R_1{:}\,R_2]$ bilinen sabit keyfi ranklı parçalı matris olup $RR^{\dagger}r=r$, $Q_R=I-R^{\dagger}R$ ve $C=Q_RX^TV^{-1}XQ_R$ dir. Ayrıca,

$$C^{\dagger} = (C^T C)^{\dagger} C^T = (C^T C)^{-} Q_R (X^T V^{-1} X Q_R)$$
$$= (C^T C)^{-} C^T Q_R$$
$$= C^{\dagger} Q_R$$

olduğu gösterilebilir. Öte yandan C matrisi simetrik olduğundan, $C^{\dagger} = Q_R C^{\dagger}$ olur ki buradan $C^{\dagger}$ matrisi

$$C^{\dagger} = Q_R C^{\dagger} Q_R$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Bu gösterimler altında

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = [I - XC^{\dagger}X^T V^{-1}]XR^{\dagger}r + XC^{\dagger}X^T V^{-1}y$$
$$= [I - XQ_R(Q_R X^T V^{-1} X Q_R)^{\dagger} Q_R X^T V^{-1}]XR^{\dagger}r$$
$$+XQ_R(Q_R X^T V^{-1} X Q_R)^{\dagger} Q_R X^T V^{-1} y \quad (4.55)$$

ya da

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = V(M^* V M^*)^{\dagger} XR^{\dagger}r + [I - V(M^* V M^*)^{\dagger}]y \quad (4.56)$$

yazılabilir ki burada $M^* = I - XQ_R(XQ_R)^{\dagger} = I - X(Q_R X^T X Q_R)^{\dagger} X^T$ dir. Dolayısıyla $BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta)$ ifadesi soldan M_1 ile çarpılırsa

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(M_1 X_2 \beta_2) = M_1[I - XC^{\dagger}X^T V^{-1}]XR^{\dagger}r + M_1 XC^{\dagger}X^T V^{-1}y \quad (4.57)$$

ya da

$$BLUE_{\mathcal{M}_r}(M_1 X_2 \beta_2) = M_1 V(M^* V M^*)^{\dagger} XR^{\dagger}r + M_1 y - M_1 V(M^* \mathrm{V} M^*)^{\dagger} y \quad (4.58)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece eğer $\mathcal{M}_r$ modelinde $R_1 = 0$, sıfır matris olarak seçilirse

$$BLUE_{\mathcal{M}_E}(M_1 X_2 \beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(M_1 X_2 \beta_2). \quad (4.59)$$

eşitliği yazılabilir. Bunun sonucu olarak (4.55) eşitliğinden $BLUE_{\mathcal{M}_E}(M_1 X_2 \beta_2)$ ve $BLUE_{\mathcal{M}_r}(M_1 X_2 \beta_2)$ sırasıyla $\mathcal{M}_E$ ve $\mathcal{M}_r$ modelleri altında ($M_1 X_2 \beta_2$ nin en iyi yansız tahmin edicileri olmak üzere

$$BLUE_{\mathcal{M}_E}(M_1 X_2 \beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_r}(M_1 X_2 \beta_2)$$
$$= M_1 \left[I - X_2 Q_{R_2}\left(Q_{R_2} X_2^T \dot{M}_1 X_2 Q_{R_2}\right)^{\dagger} Q_{R_2} X_2^T \dot{M}_1\right] X_2 R_2^{\dagger} r$$

$$+M_1X_2Q_{R_2}\left(Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1X_2Q_{R_2}\right)^{\dagger}Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1y \qquad (4.60)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.12 $\mathcal{M}_{cE} = \{M_1y, M_1X_2\beta_2 \mid R\beta = r, \sigma^2M_1VM_1\}$ modeli verilmiş olsun. Bu takdirde $BLUE_{\mathcal{M}_E}(M_1X_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_{cE}}(M_1X_2\beta_2)$ eşitliği gerçeklenir.

İspat. Bu durumda $\mathcal{M}_{cE}$ modeli altında $M_1X_2\beta_2$ parametresinin BLUE tahmin edicisi (4.60) de verildiği gibi

$$BLUE_{\mathcal{M}_{cE}}(M_1X_2\beta_2) = M_1X_2R_2^{\dagger}r$$

$$+M_1X_2Q_{R_2}\left(Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1X_2Q_{R_2}\right)^{\dagger}Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1(y - X_2R_2^{\dagger}r)$$

$$= M_1\left[I - X_2\left(Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1X_2Q_{R_2}\right)^{\dagger}X_2^T\dot{M}_1\right]X_2R_2^{\dagger}r$$

$$+M_1X_2\left(Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1X_2Q_{R_2}\right)^{\dagger}X_2^T\dot{M}_1y$$

$$= M_1\left[I - X_2Q_{R_2}\left(Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1X_2Q_{R_2}\right)^{\dagger}Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1\right]X_2R_2^{\dagger}r$$

$$+M_1X_2Q_{R_2}\left(Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1X_2Q_{R_2}\right)^{\dagger}Q_{R_2}X_2^T\dot{M}_1y \qquad (4.61)$$

yazılabilir. Buradan (4.60) ve (4.61) ifadeleri birleştirilirse istenilen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

(4.43) ifadesinde verilen $\mathcal{W}_{1E} = \{Q_1^Ty, Q_1^TX_2\beta_2 \mid R_2\beta_2 = r, \sigma^2Q_1^TVQ_1\}$ modeli dikkate alınırsa $BLUE_{\mathcal{M}_{cE}}(M_1X_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{W}_{1E}}(M_1X_2\beta_2)$ olduğunda

$$BLUE_{\mathcal{M}_{cE}}(M_1X_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{W}_{1E}}(M_1X_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_E}(M_1X_2\beta_2)$$

ya da buna denk olarak

$$BLUE_{\mathcal{M}_{cE}}(Q_1^TX_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{W}_{1E}}(Q_1^TX_2\beta_2) = BLUE_{\mathcal{M}_E}(Q_1^TX_2\beta_2)$$

eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan benzer düşünceyle $\mathcal{M}_{E^*} = \{Y, X\beta \mid R_1\beta_1 = r, \sigma^2V\}$ modeli dikkate alınarak

$$BLUE_{\mathcal{M}_{BE}}(M_2X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{W}_{1E}}(M_2X_1\beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_{E^*}}(M_2X_1\beta_1) \quad (4.62)$$

ya da buna paralel olarak

$$BLUE_{\mathcal{M}_{BE}}(Q_2^T X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{W}_{1E}}(Q_2^T X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_{E^*}}(Q_2^T X_1 \beta_1) \quad (4.63)$$

olduğu da gösterilebilir.

Teorem 4.13 $\{y, X_1\beta_1, \sigma^2 V\}$ modeli altında $X_1\beta_1$ parametresinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri eşit ise, bu takdirde

$$BLUE_{\mathcal{M}}(M_1 X_2 \beta_2) = BLUE_{\mathcal{N}_{1E}}(M_1 X_2 \beta_2)$$

dir, burada

$$\mathcal{N}_{1E} = \{y, M_1 X_2 \beta_2 \mid R_1 \beta_1 = r, \sigma^2 V\}$$

modeli (4.48) de verilen $\mathcal{N}_1$ modelinin $R_1\beta_1 = r$ kısıtlaması altındaki uyarlamasıdır.

İspat. Bu durumda Gerig ve Gallant (1975) tarafından verilen yöntem $\mathcal{N}_{1E}$ modeline uygulayarak $M_1 X_2 BLUE_{\mathcal{N}_{1E}}(\beta_2)$ ifadesi

$$M_1 X_2 BLUE_{\mathcal{N}_{1E}}(\beta_2) = M_1 \left[I - X_2 Q_{R_2} \left(Q_{R_2} X_2^T M_1 \Omega^{-1} M_1 X_2 Q_{R_2} \right)^{\dagger} Q_{R_2} X_2^T M_1 \Omega^{-1} M_1 \right] X_2 R_2^{\dagger} r$$

$$+ M_1 X_2 Q_{R_2} \left(Q_{R_2} X_2^T M_1 \Omega^{-1} M_1 X_2 Q_{R_2} \right)^{\dagger} Q_{R_2} X_2^T M_1 \Omega^{-1} M_1 y \quad (4.64)$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan $\{y, X_1\beta_1, \sigma^2 V\}$ modeli altında $X_1\beta_1$ parametresinin OLSE ve BLUE tahmin edicileri eşit$X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1} = X_1(X_1^T X_1)^- X_1^T = X_1 X_1^T$ olacaktır. Bunun durumda $\dot{M}_1 = V^{-1}[I - X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^- X_1^T V^{-1}] = V^{-1} M_1$ eşitliği sağlanır. Ayrıca $\dot{M}_1$ ve M_1 matrisleri simetrik olduğundan $V^{-1} M_1 = M_1 V^{-1}$ olup buradan $\dot{M}_1 = M_1 V^{-1} M_1 = M_1 V^{-1}$ olacağı açıktır. Bu da $M_1 X_2 BLUE_{\mathcal{N}_{1E}}(\beta_2)$ ifadesinin $M_1 X_2 BLUE_{\mathcal{M}}(\beta_2)$ ye eşit olduğunu yani

$$BLUE_{\mathcal{M}}(M_1 X_2 \beta_2) = BLUE_{\mathcal{N}_{1E}}(M_1 X_2 \beta_2)$$

olduğunu gösterir. Böylece teorem ispatlanmış olur. Sonuç olarak (4.62), (4.63) ve (4.64) eşitlikleri birleştirilirse

$$BLUE_{\mathcal{M}_{BE}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{W}_{1E}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_{E^*}}(M_2 X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{N}_{1E}}(M_1 X_2 \beta_2)$$

ya da buna paralel olarak

$$BLUE_{\mathcal{M}_{BE}}(Q_2^T X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{W}_{1E}}(Q_2^T X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{M}_{E^*}}(Q_2^T X_1 \beta_1) = BLUE_{\mathcal{N}_{1E}}(Q_2^T X_1 \beta_1)$$

ifadeleri elde edilmiş olur.

Hatırlatma 4.2 (4.32) de verilen $\mathcal{M}_r$ modelinde β parametresinin en iyi lineer yansız tahmin edicisini aşağıdaki gibi elde edilir. β için $R\beta = r$ tutarlı denklem sisteminin çözümü h, uygun boyutlu keyfi vektör olmak üzere

$$\beta = R^{\dagger}r + Q_R h$$

olacaktır, burada $Q_R = I - R^{\dagger}R$ dir. Bu durumda verilen kısıtlama altında modeli yeniden düzenleyerek

$$y - XR^{\dagger}r = XQ_R h + \varepsilon \tag{4.65}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan (4.65) de verilen lineer model altında h parametresinin en iyi lineer yansız tahmin edicisi

$$h^{*} = (Q_R X^T \Omega^{-1} X Q_R)^{\dagger} Q_R X^T \Omega^{-1}(y - XR^{\dagger}r) + (I - C^{\dagger}C)t \tag{4.66}$$

olarak yazılabilir, burada

$$C = Q_R X^T V^{-1} X Q_R$$

olup t uygun boyutlu keyfi vektördür. Dolayısıyla $\beta = R^{\dagger}r + Q_R h$ eşitliğinde h yerine h^{*} yazılarak β parametre vektörünün en iyi lineer yansız tahmin edicisi

$$\begin{aligned} \beta^{*} &= R^{\dagger}r + Q_R C^{\dagger} Q_R X^T \Omega^{-1}(y - XR^{\dagger}r) + (I - C^{\dagger}C)t \\ &= R^{\dagger}r + C^{\dagger} X^T \Omega^{-1}(y - XR^{\dagger}r) + (I - C^{\dagger}C)t \end{aligned} \tag{4.67}$$

olacaktır. Ayrıca $XQ_R h$, (4.65) deki model altında tahmin edilebilir olduğunda

$$XQ_R(Q_R X^T \Omega^{-1} X^T Q_R)^{\dagger} Q_R X^T \Omega^{-1} X Q_R = XQ_R \tag{4.68}$$

ya da buna denk olarak

$$XQ_R C^{\dagger} C = XQ_R \tag{4.69}$$

eşitliği yazılır. Bu takdirde $\mathcal{M}_r$ modeli altında $X\beta$ nın BLUE tahmin edicisi

$$\begin{aligned} BLUE_{\mathcal{M}_r}(X\beta) = X\beta^{*} &= XR^{\dagger}r + XC^{\dagger}X^T\Omega^{-1}(y - XR^{\dagger}r) \\ &= [I - XC^{\dagger}X^T\Omega^{-1}]XR^{\dagger}r + XC^{\dagger}X^T\Omega^{-1}y \end{aligned} \tag{4.70}$$

olarak elde edilmiş olur.

4.3 Eşitsizlik Kısıtlamalı Parçalı Lineer Modellerde Parametre Tahminleri

Bu kısımda daha önce verilen

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon\ ,\ E(\varepsilon) = 0\ ,\ Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V, \tag{4.71}$$

parçalı lineer modeli tekrar göz önüne alalım, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ bilinenlerin keyfi ranklı iki matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlemlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{q\times 1}$, bilinmeyenlerin iki parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinenlerin keyfi ranklı bir matrisi ve σ^2 ise bilinmeyen bir pozitif parametredir. Ayrıca bilinmeyen β parametre vektörü üzerinde $R \in \mathbb{R}^{m\times(p+q)}$ tipinde bir bilinenler matrisi ve r ise $m \times 1$ tipinde bir bilinen vektör olmak üzere

$$R\beta \geq r \tag{4.72}$$

şeklinde bir lineer eşitsizlik kısıtlaması verilmiş olsun, burada k boyutlu t ve s vektörleri için $t \geq s$ gösterimi $i = 1,2,\dots,k$ için $t_i \geq s_i$ anlamındadır. Bu durumda

$$\mathcal{M} = \{y, X\beta, \sigma^2 V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 V\} \tag{4.73}$$

modeline paralel olarak eşitsizlik kısıtlamalı genel parçalı lineer model adı verilen bir

$$\mathcal{M}_s = \{y, X\beta |\ R\beta \geq r, \sigma^2 V\} \tag{4.74}$$

modeli tanımlanmış olsun. Bu durumda daha önce de ifade edildiği gibi

$$OLSE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = \hat{X}_i X^{\dagger} y,\ i = 1,2, \tag{4.75}$$

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X_i\beta_i) = P_{\hat{X}_i:V}\, y,\ i = 1,2, \tag{4.76}$$

olacaktır, burada $U_i, i = 1,2,$ keyfi olmak üzere

$$P_{\hat{X}_i:V} = (\hat{X}_i, 0)(X, VE_X)^{\dagger} + U_i E_{(X,VE_X)}$$

dir.

Bu kısımda X tasarım matrisi ve V kovaryans matrisinin durumuna göre tahmin problemi ele alınacaktır. Bunun için ilk olarak X tasarım matrisinin tam sütun ranklı ve $V = I$ olması durumunu ele alalım. Bu durumda daha önce de ifade edildiği gibi $\mathcal{M}$ modeli altında β parametresinin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE)

$$\hat{\beta} = OLSE_{\mathcal{M}}(\beta) = (X^T X)^{-1} X^T y$$

şeklinde olacaktır. $\mathcal{M}$ modelinde $R\beta \geq r$ kısıtlaması altındaki en küçük kareler tahmin edicisini bulmak için $Rb \geq r$ veya buna denk olarak, uygun boyutlu bir $\upsilon > 0$ vektörü için $Rb - \upsilon = r$, ye göre

$$\min_{b} Z = \frac{1}{2}(y - Xb)^T(y - Xb) \tag{4.77}$$

ifadesini minimum yapan bir b^* vektörü bulmak ya da bu optimizasyon probleminin duali olarak uygun boyutlu bir $\lambda \geq 0$ vektörü için $R^T\lambda + X^Ty = (X^TXb)$ ye göre

$$\max_{\lambda} Q = c^T\lambda + \frac{1}{2}(y^Ty - b^TX^TXb) \tag{4.78}$$

ifadesini maksimum yapan bir λ^* vektörü bulmak yeterli olacaktır. Bu problem ise $W = R(X^TX)^{-1}R^T,\ q = R\hat{\beta} - r,\ \hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$ olmak üzere

$$\upsilon = W\lambda + q \quad \text{veya} \quad [I\!:W]\begin{bmatrix}\upsilon\\ \lambda\end{bmatrix} = q \tag{4.79}$$

denkleminin $\upsilon^T\lambda = 0$, $\upsilon \geq 0$ ve $\lambda \geq 0$ kısıtlamaları altında çözülmesi problemine denk olacaktır. Bu problemin çözüme sahip olması için X^TX matrisinin pozitif definit olması yeterlidir. λ^* ve υ^* vektörleri bu temel problemin nonnegatif tamamlayıcı çözümü olsun. Bu durumda λ^* vektörü $R^T\lambda + X^Ty = (X^TXb)$ eşitliğinde yerine yazılırsa (4.78) optimizasyon probleminin çözümü olarak b^* eşitsizlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edici (ICLS) vektörü

$$b^* = (X^TX)^{-1}X^Ty + (X^TX)^{-1}XR^T\lambda^* \tag{4.80}$$

olarak elde edilmiş olur. Eğer R matrisi nonsingüler bir matris ise $Rb - \upsilon = r$ eşitliğinden $b^* = R^{-1}(\upsilon^* + \mathrm{r})$ yazılabilir.

Öte yandan eğer ICLS tahmin edicilerin hiçbiri sınırlı değil ise yani $Rb^* > r$ ise bu durumda çözümdeki λ^* dual vektörünün tüm bileşenleri sıfır olacağından $\lambda^* = 0$ alınarak (4.80) eşitliğinden

$$b^* = \hat{\beta} + (X^TX)^{-1}R^T.0 = \hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

olup ICLS tahmin edicisi OLSE tahmin edicisine dönüşecektir. Eğer ICLS tahmin edici vektörlerinin tümü sınırlı ise yani $Rb^* = r$ ise bu durumda çözümdeki λ^* dual vektörünün tüm bileşenleri pozitif olacağından b^* ICLS tahmin edicisi eşitlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edicisine dönüşecektir. Bu durumda (4.79) eşitliği ve $\lambda^* > 0$ (ki bu $\upsilon^* = 0$ olduğunu sağlar) şartından

$$0 = R(X^TX)^{-1}R^T\lambda^* + (R\hat{\beta} - r)$$

eşitliği ve bu durumda da λ^* vektörü

$$\lambda^* = -(R(X^TX)^{-1}R^T)^{-1}(R\hat{\beta} - r)$$

olacağından

$$b^* = \hat{\beta} + (X^TX)^{-1}R^T(R(X^TX)^{-1}R^T)^{-1}(r - R\hat{\beta}) \tag{4.80}$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi b^* ICLS tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi verilebilir. Bu durumda y veya ε verildiğinde

$$q = R\hat{\beta} - r = R(X^TX)^{-1}X^Ty - r$$
$$= (R\beta - r) + R(X^TX)^{-1}X^T\varepsilon$$

yazılabilir. Bu durumda $\begin{bmatrix} \upsilon^0 \\ \lambda^0 \end{bmatrix}$ temel değişkenleri vektörü, $[I_1\!: W_1]$ optimal taban, $\begin{bmatrix} \upsilon^c \\ \lambda^c \end{bmatrix}$ temel olmayan değişkenler vektörü ve $[I_2\!: W_2]$ taban olmamak üzere probem

$$[I_1\!: W_1]\begin{bmatrix} \upsilon^0 \\ \lambda^0 \end{bmatrix} + [I_2\!: W_2]\begin{bmatrix} \upsilon^c \\ \lambda^c \end{bmatrix} = q$$

olup bunun için optimal çözüm $\begin{bmatrix} \upsilon^0 \\ \lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$, $q > 0$ ve $\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = [I_1 : -W_1]^{-1}$ olacaktır. Dolayısıyla λ^0 vektörü $\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$ olmak üzere

$$\lambda^0 = M_2q = M_2(R\hat{\beta} - r)$$

elde edilir. λ^0 değeri (4.80) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$b^* = \hat{\beta} + (X^TX)^{-1}(R_1 : R_2)\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^0 \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

elde edilir, burada $(R_1\ \ R_2)$ matrisi R matrisinin $R^T\lambda^* = (R_1\ \ R_2)\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde sütun parçalanmış halidir. Buradan

$$b^* = \hat{\beta} + (X^TX)^{-1}\, R_2\lambda^0$$
$$= (I + (X^TX)^{-1}R_2^TM_2R)\hat{\beta} - (X^TX)^{-1}R_2^TM_2r \tag{4.82}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $(R_2 : M_2)$ veya optimal taban verildiğinde b^* ICLS tahmin edicisinin varyans-kovaryans matrisi

$$M = I + (X^T X)^{-1} R^T M_2 R$$

olmak üzere

$$Cov(b^*) = MCov(\hat{\beta})M^T = \sigma^2 M(X^T X)^{-1} M^T \quad (4.83)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan eğer model kısıtlamasız ise b^* ifadesi $\hat{\beta}$ ya dönüşeceğinden b^* ın varyans kovaryans matrisi $\hat{\beta}$ nın varyans kovaryans matrisine dönüşecektir. Şayet model eşitlik kısıtlamalı ise bu durumda b^* ın varyans kovaryans matrisi β^* eşitlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edicisinin varyans kovaryans matrisine dönüşecektir. Gerçekten bu durumda $\lambda = \lambda^0 > 0$ ve $\upsilon = \upsilon^0 = 0$ olup bu da (4.79) eşitliğine göre

$$M_2 = -(R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1}$$

ve (4.81) eşitliğine göre $R_2 = R$ olması demektir. Bu nedenle

$$M = I - (X^T X)^{-1} R^T (R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1} R$$

olacağından $Q = (X^T X)^{-1} R^T (R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1} R (X^T X)^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Cov(b^*) &= \sigma^2 M (X^T X)^{-1} M^T \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} [I - R^T (R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1} R (X^T X)^{-1}] \\ &= Cov(\hat{\beta}) - \sigma^2 Q \\ &= Cov(\beta^*) \end{aligned}$$

olduğu görülür, burada β^* eşitlik kısıtlaması altındaki alışılmış en küçük kareler tahmin edicisidir, yani $\beta^* = OLSE_{\mathcal{M}_r}(\beta)$ dir. Bu nedenle

$$Cov(b^*) = M[Cov(\beta^*) + \sigma^2 Q]M^T \quad (4.84)$$

olacaktır. Öte yandan herhangi bir $u^T \beta$ lineer fonksiyonu için

$$E[u^T b^*] = u^T M\beta - u^T (X^T X)^{-1} R_2^T M_2 r$$

ve

$$\begin{aligned} Cov(u^T b^*) &= u^T Cov(b^*) u \\ &= u^T M Cov(\beta^*) M^T u + \sigma^2 u^T M Q M^T u \end{aligned} \quad (4.85)$$

yazılabilir. Burada Q matris tam ranklı matrislerin çarpımı olduğundan $u^T MQM^T u$ pozitif semi definit, yani $u^T MQM^T u \geq 0$ olacaktır. Gerçekten $u^T MQM^T u = 0$ eşitliğinin doğru olması için gerek ve yeter şart $R(X^T X)^{-1} u = 0$ olmasıdır. Buradan

$$R(X^T X)^{-1} u = \begin{bmatrix} R_1 \\ \cdots \\ R_2 \end{bmatrix} (X^T X)^{-1} u = \begin{bmatrix} R_1 (X^T X)^{-1} u \\ \cdots \\ R_2 (X^T X)^{-1} u \end{bmatrix} = 0$$

yani, $R_1(X^T X)^{-1} u = 0$ ve $R_2(X^T X)^{-1} u = 0$ olacaktır. Böylece, $R(X^T X)^{-1} u = 0$ koşulu M matrisini I birim matrisine dönüştürür. Benzer şekilde $u^T Qu = 0$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şartın $R(X^T X)^{-1} u = 0$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu durumda $u^T \beta$ parametresi için alışılmış en küçük kareler, eşitlik kısıtlamalı en küçük kareler ve eşitsizlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edicileri çakışacaktır. Öte yandan $MM^* = M^*$ olduğundan,

$$\begin{aligned} u^T M Cov(\beta^*) M^T u &= \sigma^2 u^T M M^* (X^T X)^{-1} {M^*}^T M^T u \\ &= \sigma^2 u^T M^* (X^T X)^{-1} {M^*}^T u \\ &= u^T Cov(\beta^*) u \qquad (4.86) \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla u vektörünün $(X^T X)^{-1}$ metriğine göre R matrisinin satırlarına dik olması için gerek ve yeter şart $Cov(u^T \beta^*) \leq Cov(u^T b^*)$ olmasıdır. Ayrıca $R(X^T X)^{-1} u = 0$ olmak üzere eğer u vektörü R matrisinin satırlarıyla lineer bağımlıysa (yani bir d vektörü için $u^T = d^T R$ şeklinde ise) bu takdirde $Rb^* = r + v$ eşitliği dikkate alınarak $Cov(u^T \beta^*) = Cov(d^T Ab^*) = 0$ ve buradan da $Cov(u^T \beta^*) = Cov(u^T b^*) = 0$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi basit parçalı lineer modellerde MSE(ICLS) ile gösterilen eşitsizlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edicisine ilişkin Ortalama Kare Hatası ilgili olarak bir sınır belirlenebilir. Bunun için $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ bilinenlerin keyfi ranklı iki matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlemlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{q \times 1}$, bilinmeyenlerin iki parametre vektörü ve σ^2 ise bilinmeyen bir pozitif parametre olmak üzere

$$\mathcal{M}_s = \{y, X\beta \mid R\beta \geq r, \sigma^2 I\} \qquad (4.87)$$

modelini göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.14 $E[MSE(ICLS)] \geq \sigma^{2}$ dir.

İspat: Bu durumda ICLS tabanlı ortalama kare hatası

$$MSE(ICLS) = \frac{\left(y-Xb^{*}\right)^{T}\left(y-Xb^{*}\right)}{n-(p+q)+h}$$

$$= \frac{\left(y-XM\widehat{\beta}+X\left(X^{T}X\right)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c\right)^{T}\left(y-XM\widehat{\beta}+X\left(X^{T}X\right)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c\right)}{n-(p+q)+h}$$

$$= \frac{z^{T}z}{n-p+h} \tag{4.88}$$

ile verilir, burada

$$z = y - XM\hat{\beta} + X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c$$

$$= [I - XM(X^{T}X)^{-1}X^{T}]y + X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c$$

ve

$$h = iz[X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}R(X^{T}X)^{-1}X^{T}]$$

dir. Buradan z nin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$E(z) = [I - XM(X^{T}X)^{-1}X^{T}]X\beta + X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c$$

ve

$$Var(z) = E\{[Ly + X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c - LX\beta - X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c]$$

$$.[Ly + X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c - LX\beta - X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}c]^{T}\}$$

$$= E[L(y - X\beta)(y - X\beta)^{T}L^{T}]$$

$$= LE[(y - X\beta)(y - X\beta)^{T}]L^{T}$$

$$= \sigma^{2}LL^{T} \tag{4.89}$$

olarak yazılabilir, burada

$$L = I - XM(X^{T}X)^{-1}X^{T}$$

$$LL^{T} = I - X(X^{T}X)^{-1}M^{T}X^{T} - XM(X^{T}X)^{-1}X^{T} + XM(X^{T}X)^{-1}M^{T}X^{T}$$

$$= [I - X(X^{T}X)^{-1}X] + X(X^{T}X)^{-1}R_{2}^{T}M_{2}RX(X^{T}X)^{-1}R^{T}M_{2}^{T}R_{2}(X^{T}X)^{-1}X^{T}$$

dir, çünkü

$$XM(X^TX)^{-1}M^TX^T = X[I + (X^TX)^{-1}R_2^TM_2R](X^TX)^{-1}[I + R^TM_2R_2(X^TX)^{-1}]X^T$$

$$= X[(X^TX)^{-1} + (X^TX)^{-1}R_2^TM_2R(X^TX)^{-1}][I + R^TM_2^TR_2(X^TX)^{-1}]X^T$$

$$= X(X^TX)^{-1}M^TX^T + XM(X^TX)^{-1}X^T - X(X^TX)^{-1}X^T$$

$$+X(X^TX)^{-1}R_2^TM_2R(X^YX)^{-1}R^TM_2^TR_2(X^TX)^{-1}X^T \qquad (4.90)$$

dir. Buradan (4.90) eşitliğinde

$$XM(X^TX)^{-1}X^T - X(X^TX)^{-1}X^T$$

$$= X[I + (X^TX)^{-1}R_2^TM_2R](X^TX)^{-1}X^T - X(X^TX)^{-1}X^T$$

$$= X(X^TX)^{-1}R_2^TM_2R(X^TX)^{-1}X^T \qquad (4.91)$$

olduğundan $XM(X^TX)^{-1}X^T - X(X^TX)^{-1}X^T$ yerine $X(X^TX)^{-1}R_2^TM_2R(X^TX)^{-1}X^T$ yazılabilir. İkinci dereceden bir formun beklenen değerinin tanımını kullanarak

$$E[MSE(ICLS)] = \frac{\{\sigma^2.iz(LL^T)+[E(z)]^T[E(z)]\}}{n-(p+q)+h}$$

$$= \frac{\{\sigma^2 iz\left[I-X\left(X^TX\right)^{-1}X\right]+\sigma^2 izX\left(X^TX\right)^{-1}R_2^TM_2R\left(X^TX\right)^{-1}R^TM_2^TR_2\left(X^TX\right)^{-1}X^T+[E(z)]^TE(z)\}}{n-(p+q)+h}$$

$$= \frac{\{\sigma^2(n-p-q)+\sigma^2h+[E(z)]^TE(z)\}}{n-(p+q)+h}$$

$$= \sigma^2 + \frac{[E(z)]^T[E(z)]}{n-(p+q)+h} \qquad (4.92)$$

ifadesi elde ederiz ve böylece ispat tamamlanır.

Özel olarak eğer $R_2(X^TX)^{-1}R_2^T = [M_2R(X^TX)^{-1}R^TM_2^T]^-$ ise bu takdirde

$$T = X(X^TX)^{-1}R^TM_2^TR_2(X^TX)^{-1}R_2^TM_2R(X^TX)^{-1}X^T$$

matrisi simetrik ve idempotent bir matrise dönüşür ve bu durumda $h = r(T)$ olur. Eğer, model eşitlik kısıtlamalı ise $b^* = \tilde{\beta}$ olacaktır ve bundan dolayı

$$Cov(b^*) = Cov(\tilde{\beta}) = \sigma^2(X^TX)^{-1}[I - R^T(R(X^TX)^{-1}R^T)^{-1}R(X^TX)^{-1}]$$

elde edilir. Bu durumda T matrisi $X(X^TX)^{-1}R^T(R(X^TX)^{-1}R^T)^{-1}R(X^TX)^{-1}X^T$ ve $iz(T) = h$ olur. Dolayısıyla

$$E[MSE(ICLS)] = E[MSE(RLS)]$$

$$= \frac{E\left[(y - X\tilde{\beta})^T(y - X\tilde{\beta})\right]}{n - (p+q) + h}$$

$$= \sigma^2 + \frac{(R\beta - r)^T\left[R(X^TX)^{-1}R^T\right]^{-1}(R\beta - r)}{n - (p+q) + h} \tag{4.93}$$

Bu nedenle, (4.92) deki ikinci terim (4.93) deki ikinci terimle aynı olup negatif olamayacağından $E[MSE(ICLS)] = E[MSE(RLS)] \geq \sigma^2$ olduğu görülür.

Sonuç 4.7 $E[MSE(ICLS)] = \sigma^2$ eşitliğinin doğru olabilmesi için gerek ve yeter şart $E(z) = 0$ olmasıdır. Bu durumda

$$[I - XM(X^TX)^{-1}X^T]X\beta + X(X^TX)^{-1}R_2^TM_2r = 0$$

olacaktır ki bu ise

$$X(X^TX)^{-1}R_2^TM_2r = X(X^TX)^{-1}R_2^TM_2R\beta$$

olması yani,

$$R_2^TM_2R\beta = R_2^TM_2(v + c) = R_2^TM_2v + R_2^TM_2r = R_2^TM_2r$$

olması anlamına gelir ve buradan da $R_2^TM_2v = 0$ elde edilir. Öte yandan R_2^T matrisi tam sütun ranklı olduğundan $M_2v = 0$ olmak zorundadır. Ayrıca M_2 matrisi tam sütun ranklı olduğundan $v = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla MSE(ICLS) ifadesinin σ^2 bilinmeyen parametresi için bir yansız tahmin edici olabilmesi için gerek ve yeter şart $R\beta = r$ olmasıdır. Böylece aşağıdaki prensipler verilebilir:

i. Popülasyonda $v = 0$ olmadığında, yani model eşitsizlik kısıtlamalı olduğunda, ICLS tahmincisi b^* yanlı tahmin olup,

$$Bias(b^*) = X(X^TX)^{-1}R_2^TM_2(R\beta - r) \tag{4.94}$$

ile yanlıdır.

ii. $Var(b^*) - Var(\tilde{\beta})$ ifadesi pozitif semi-definittir yani herhangi bir t vektörü için, $t^T\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin varyansı $t^T b^*$ tahmin edicisinin varyansından küçük veya eşittir. Özellikle, her i için $Var(\tilde{\beta}_i) \leq Var(b_i^*)$ dir.

iii. Eğer $R(X^TX)^{-1}t = 0$ ise bu takdirde $t^T\beta$ ifadesinin RLS, OLS ve ICLS tahmin edicileri birbirine eşit olacaktır.

iv. Eğer $v = 0$ ve $\lambda > 0$ yani $R\beta = r$ ise bu takdirde $n - (p + q) + h$ serbestlik dereceli ICLS tahmincisi ilişkin MSE veya $n - (p + q) + h$ serbestlik dereceli RLS tahmincisine ilişkin MSE ortalama Kare Hataları σ^2 için yansız olacaktır. Aksi takdirde pozitif olarak yanlı olacaktır.

Son olarak X tasarım matrisinin sütun ranklı bir matris ve V matrisinin ise pozitif definit bir matris olması durumunu göz önüne alalım.

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon\,,\ E(\varepsilon) = 0\,,\ Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V, \tag{4.95}$$

parçalı lineer modeli tekrar verilmiş olsun, burada $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ve $X_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$ bilinenlerin keyfi ranklı iki matrisi, $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlemlenebilir bir rasgele vektör, $\beta_1 \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{q\times 1}$ bilinmeyenlerin iki parametre vektörü, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bilinenlerin pozitif definit bir matrisi ve σ^2 ise bilinmeyen bir pozitif parametredir. Ayrıca bilinmeyen β parametre vektörü üzerinde $R \in \mathbb{R}^{m\times(p+q)}$ bilinenler matrisi ve r $m \times 1$ tipinde bir bilinen vektör olmak üzere $R\beta \geq r$ şeklinde bir lineer eşitsizlik kısıtlaması verilmiş olsun. Burada (4.74) deki modeli

$$\mathcal{M}_S = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2 |\ R\beta \geq r, \sigma^2 V\} \tag{4.96}$$

ile yeniden gösterebiliriz. Bu durumda β parametresinin (4.96) modeli altındaki en küçük kareler tahmin edicisine eşitsizlik kısıtlamalı genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi adı verilir ve $\beta^*(\mathcal{M}_S)$ ile gösterilir. Bu kısımda eşitlik kısıtlaması durumunda verilen tahmin edicilere paralel olarak eşitsizlik kısıtlamalı durumlar dikkate alınacaktır. Bu amaçla

$$\mathcal{M}_I = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2 |\ R_2\beta_2 \geq r, \sigma^2 V\} \tag{4.97}$$

modelini tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{M}_I$ modelinde β_2 parametresinin eşitsizlik kısıtlamalı genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisini elde etmek için $\mathcal{M}$ modeli $D = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1}$ matrisi ile soldan çarpılırsa

$$\tilde{\beta}(\mathcal{M}) = BLUE_{\mathcal{M}}(\beta) = \beta + \hat{\varepsilon} \tag{4.98}$$

elde edilir, burada $\hat{\varepsilon}$ hata vektörü sıfır ortalaması ve $\sigma^2 DVD^T$ kovaryans matrisine sahip olacaktır. Eğer (4.98) denklemi R ile soldan çarpılır ve r çıkarılırsa, $\hat{\varepsilon}$ hata vektörü sıfır ortalaması ve $\sigma^2 RDVD^T R^T$ kovaryans matrisine sahip olmak üzere,

$$R\tilde{\beta}(\mathcal{M}) - r = R\beta - r + \hat{\varepsilon} \tag{4.99}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda

$$\hat{\mu} = R\tilde{\beta}(\mathcal{M}) - r \text{ ve } \mu = R\beta - r \tag{4.100}$$

denklemlerini tanımlayalım. Bu takdirde $R\beta \geq r$ olmak üzere $\mathcal{M}$ modeli altında β parametresinin $\beta^*(\mathcal{M}_S)$ eşitsizlik kısıtlamalı genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisinin elde edilmesi problemi

$$\min_{\mu \geq 0} (\hat{\mu} - \mu)^T (RDVD^T R^T)^{-1} (\hat{\mu} - \mu) \tag{4.101}$$

kuadrik programlama problemine dönüştürülür, burada

$$\hat{\mu} = [R(X^T V^{-1} X)^{-1} R^T]^{-\frac{1}{2}} (R.\tilde{\beta}(\mathcal{M}) - r)$$

$$\mu = [R(X^T V^{-1} X)^{-1} R^T]^{-\frac{1}{2}} (R\beta - r)$$

dir. Farz edelim ki $\tilde{\mu}$ vektörü (4.101) denkleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde (4.100) eşitlikleri kullanılarak

$$R\beta^*(\mathcal{M}_S) = \tilde{\mu} + r \tag{4.102}$$

ifadesi ve buradan da

$$\beta^*(\mathcal{M}_S) = R^{\dagger}(\tilde{\mu} + r) + (I - R^{\dagger}R)h \tag{4.103}$$

elde edilir, burada h, uygun boyutlu keyfi bir vektördür. Eğer h vektörü $\tilde{\beta}(\mathcal{M})$ olarak seçilirse, bu takdirde $\beta^*(\mathcal{M}_S)$ tahmin edicisi $R\beta \geq r$ olmak üzere $\mathcal{M}$ altında β parametresinin minimum varyanslı yansız tahmin edicisidir. Öte yandan $\mathcal{M}_I$ modeli altında $\beta^*(\mathcal{M}_I)$ tahmin edicisi

$$\beta^*(\mathcal{M}_I) = R^*(\tilde{\mu} + r) + (I - R^*R)\tilde{\beta}(\mathcal{M})$$

şeklinde verilebilir, burada

$$R^* = (X^T V^{-1} X)^{-1} R^T [R(X^T V^{-1} X)^{-1} R^T]^{-1}$$

dir. Bu duruma eğer $R = (0, R_2)$ alınırsa

$$R^* = \begin{bmatrix} -(X_1^T V^{-1} X_1)^{-1} X_1^T V^{-1} X_2 T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1} \\ T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$R^* R = \begin{bmatrix} 0 & -(X_1^T V^{-1} X_1)^{-1} X_1^T V^{-1} X_2 T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1} \\ 0 & T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

olacağından

$$\beta_2^*(\mathcal{M}_I) = T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1} (\tilde{\mu} + r) + (I - T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1}) \tilde{\beta}(\mathcal{M})$$

veya

$$\beta_2^*(\mathcal{M}_I) = R_2^*(\tilde{\mu} + r) + Z_{R_2} \widetilde{\beta_2}(\mathcal{M}) \tag{4.104}$$

yazılabilir, burada

$$R_2^* = T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1} \text{ ve } Z_{R_2} = (I - T^{-1} R_2^T (R_2 T^{-1} R_2^T)^{-1})$$

olacaktır.

Şimdi, $R_2 \beta_2 \geq r$ olmak üzere $\mathcal{M}$ modeli altında β_2 parametresinin $\beta_2^*(\mathcal{M}_S)$ tahmin edicisi elde edilebilir. Bu durumda (4.99) denkleminde $R_1 = 0$ alınırsa η hata vektörü sıfır ortalaması ve $R_2 (X_2^T \dot{M}_1 X_2)^{-1} R_2^T$ kovaryans matrisine sahip olmak üzere

$$R_2 \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) - r = R_2 \beta_2 - r + \eta \tag{4.105}$$

denklemi elde edilir. Öte yandan

$$\hat{\mu} = R_2 \tilde{\beta}(\mathcal{L}) - r \;\text{ ve }\; R_2 \beta_2 - r = \mu_2 \tag{4.106}$$

denklemlerini tanımlayalım. Dolayısıyla

$$\hat{\mu}_2 = \mu_2 + \eta \tag{4.107}$$

modeli oluşturulabilir. Bu nedenle, $\beta_2^*(\mathcal{M}_S)$ tahmin edicisinin elde edilmesi problemi,

$$\min_{\mu_2 \geq 0} (\hat{\mu}_2 - \mu_2)^T (R_2 (X_2^T M_1 X_2)^{-1} R_2^T)^{-1} (\hat{\mu}_2 - \mu_2) \tag{4.108}$$

kuadratik programlama problemine dönüştürülür. (4.107) denkleminin bir çözümü $\tilde{\mu}_2$ olsun. Bu takdirde (4.104) eşitliklerinden

$$\beta_2^*(\mathcal{M}_S) = R_2^{\dagger}(\tilde{\mu}_2 + r) + (I - R_2^{\dagger} R_2) \tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) \tag{4.109}$$

denklemi elde edilir.

Şimdi $R_2\beta_2 \geq r$ olmak üzere $\mathcal{M}_c = \{M_1y, M_1X_2\beta_2, \sigma^2 M_1VM_1\}$ modeli altında β_2 parametresinin eşitsizlik kısıtlamalı genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi $\beta_2^*(\mathcal{M}_c)$ ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.15 $R_2\beta_2 \geq r$ olmak üzere $\mathcal{M}$ modeli altında β_2 parametresinin tahmin edicisi $\beta_2^*(\mathcal{M}_I)$ olsun. Bu durumda $\beta_2^*(\mathcal{M}_c) = \beta_2^*(\mathcal{M}_I)$ eşitliği sağlanır.

İspat. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\dot{M}_1 &= V^{-1}[I - X_1(X_1^T V^{-1} X_1)^{-1} X_1^T V^{-1}] \\
&= V^{-1}[VM_1(M_1VM_1)^{-}M_1] \\
&= M_1(M_1VM_1)^{-}M_1 \\
&= (M_1VM_1)^{\dagger}
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınarak, $\mathcal{M}$ modeli

$$D_1 = [X_2^T(M_1\mathrm{V}M_1)^{\dagger}X_2]^{-1}X_2^T(M_1\Omega M_1)^{\dagger} = (X_2^T\dot{M}_1X_2)^{-1}X_2^T\dot{M}_1$$

ile soldan çarpılarak

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_c) = \beta_2 + \ddot{\varepsilon} \tag{4.110}$$

ifadesi yazılabilir, burada $\ddot{\varepsilon}$ hata vektörü sıfır ortalaması ve

$$Cov(\ddot{\varepsilon}) = D_1M_1\mathrm{V}M_1D_1^T = [X_2^T(M_1\mathrm{V}M_1)^{+}X_2]^{-1} = (X_2^T\dot{M}_1X_2)^{-1}$$

kovaryans matrisine sahiptir. Buradan (4.110) denklemi soldan R_2 ile çarpılıp r çıkarılır ve $R_2\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) - r = \hat{\tau}$ ve $R_2\beta_2 = \mu_2$ denklemleri dikkate alınırsa,

$$\hat{\tau} = \mu_2 + \delta \tag{4.111}$$

modeli elde edilir ki burada δ hata vektörü sıfır ortalaması ve

$$\begin{aligned}
R_2D_1M_1\mathrm{V}M_1D_1^TR_2^T &= R_2D_1\dot{M}_1^{\dagger}D_1^TR_2^T \\
&= R_2(X_2^T\dot{M}_1X_2)^{-1}X_2^T\dot{M}_1\dot{M}_1^{\dagger}\dot{M}_1X_2(X_2^T\dot{M}_1X_2)^{-1}R_2^T \\
&= R_2(X_2{}'\dot{M}_1X_2)^{-1}R_2^T
\end{aligned}$$

kovaryans matrisine sahiptir. Diğer taraftan $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}_c) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M})$ olduğundan $\hat{\mu}_2 = \hat{\tau}$ olacaktır. Ayrıca $E(\eta) = E(\delta) = 0$ ve $Cov(\eta) = Cov(\delta) = R_2(X_2^TX_2)^{-1}R_2^T$ elde edilir. Bunun sonucu olarak, (4.107) modeli (4.111) modeline denk olacaktır. Böylece,

$\beta_2^*(\mathcal{M}_c)$ tahmininin elde edilmesi problemi (4.108) minimumlaştırma problemine dönüştürülür. Dolayısıyla $\tilde{\mu}_2$ (4.108) için bir çözüm olduğundan, ayrıca (4.111) için de bir çözüm olacaktır. Buradan

$$\beta_2^*(\mathcal{M}_I) = \beta_2^*(\mathcal{M}_c)$$

olduğu görülür ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Benzer şekilde $R_2\beta_2 \geq r$ olmak üzere $\mathcal{W}_1 = \{Q_1^T y, Q_1^T X_2\beta_2, \sigma^2 Q_1^T V Q_1\}$ modeli altında β_2 parametresinin eşitsizlik kısıtlamalı genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi $\beta_2^*(\mathcal{W}_1)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.16 $R_2\beta_2 \geq r$ olmak üzere $\mathcal{M}$ modeli altında β_2 parametresinin tahmin edicisi $\beta_2^*(\mathcal{M}_I)$ olsun. Bu durumda $\beta_2^*(\mathcal{W}_1) = \beta_2^*(\mathcal{M}_I)$ eşitliği sağlanır.

İspat. Bu durumda $\mathcal{W}_1$ modeli

$$D_1 = R_2[X_2^T Q_1(Q_1^T \mathrm{V} Q_1)^{-1} Q_1^T X_2]^{-1} X_2^T Q_1(Q_1^T \mathrm{V} Q_1)^{-1}$$

ile soldan çarpıp r çıkarılarak

$$R_2\beta_2(\mathcal{W}_1) - r = R_2\beta_2 - r + \ddot{\varepsilon} \tag{4.112}$$

ifadesi yazılabilir, burada $\ddot{\varepsilon}$ hata vektörü sıfır ortalaması ve

$$Cov(\ddot{\varepsilon}) = R_2[X_2^T Q_1(Q_1^T \mathrm{V} Q_1)^{-1} Q_1^T X_2]^{-1} R_2^T$$

kovaryans matrisine sahiptir. Bu nedenle $\beta_2^*(\mathcal{W}_1)$ tahmin edicisinin elde edilmesi problemi

$$\min_{\mu \geq 0} (\hat{\mu} - \mu)^T (\hat{\mu} - \mu) \tag{4.113}$$

kuadrik programlama problemine dönüştürülür, burada

$$\hat{\mu} = [R_2[X_2^T Q_1(Q_1^T \mathrm{V} Q_1)^{-1} Q_1^T X_2]^{-1} R_2^T]^{-\frac{1}{2}} (R_2\tilde{\beta}_2(\mathcal{W}_1) - r)$$

$$\mu = [R_2[X_2^T Q_1(Q_1^T \mathrm{V} Q_1)^{-1} Q_1^T X_2]^{-1} R_2^T]^{-\frac{1}{2}} (R_2\beta_2 - r)$$

dir. Diğer taraftan $\tilde{\beta}_2(\mathcal{W}_1) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{M})$ olduğundan $\hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_2$ olacaktır. Ayrıca $E(\eta) = E(\ddot{\varepsilon}) = 0$ ve $Cov(\eta) = Cov(\ddot{\varepsilon}) = R_2[X_2^T Q_1(Q_1^T \mathrm{V} Q_1)^{-1} Q_1^T X_2]^{-1} R_2^T$ elde edilir. Bunun sonucu olarak, (4.107) modeli (4.112) modeline denk olacaktır. Böylece, $\beta_2^*(\mathcal{M}_c)$ tahmini edicisinin elde edilmesi problemi (4.113) minimumlaştırma problemine dönüştürülür. Bu durumda $\tilde{\mu}_2$ (4.108) için bir çözüm olduğundan, ayrıca (4.113) için de bir çözüm olacaktır. Buradan $R_2\beta_2^*(\mathcal{W}_1) = \mu + r$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\beta_2^*(\mathcal{W}_1) = R_2^*(\mu + r) + Z_{R_2}\widetilde{\beta_2}(\mathcal{M}) \tag{4.114}$$

yazılabilir, burada

$$R_2^* = T^{-1}R_2^T(R_2T^{-1}R_2^T)^{-1} \text{ ve } Z_{R_2} = (I - T^{-1}R_2^T(R_2T^{-1}R_2^T)^{-1})$$

olacaktır. Böylece $\beta_2^*(\mathcal{W}_1) = \beta_2^*(\mathcal{M}_I)$ olduğu gösterilmiş olur ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Son olarak $R_2\beta_2 \geq r$ olmak üzere $\mathcal{N}_1 = \{y, M_1X_2\beta_2\,, \sigma^2V\}$ modeli altında β_2 parametresinin eşitsizlik kısıtlamalı genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi $\beta_2^*\left(\mathcal{N}_{1_1}\right)$ ile gösterilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.17 Eğer, $\{Y, X_1\beta_1, \Omega\}$ altında $OLSE(\beta_1) = BLUE(\beta_1)$ ise bu takdirde $\beta_2^*(\mathcal{M}_I) = \beta_2^*(\mathcal{N}_1)$ dir.

İspat. Daha önceki kısımda Teorem 4.17 nin varsayımı altında $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1)$ ve $M_1 = M_1\mathrm{V}^{-1}M_1$ olduğu ifade edilmişti, burada

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1) = (X_2^TM_1\mathrm{V}^{-1}M_1X_2)^{-1}X_2^TM_1\mathrm{V}^{-1}M_1y \tag{4.115}$$

dir. Öte yandan verilen varsayımlara altında $\dot{M}_1 = M_1\mathrm{V}^{-1}M_1$ olduğunu ögöz önüne alınırsa $\tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1)$ tahmin edicisi

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1) = \left(X_2^T\dot{M}_1X_2\right)^{-1}X_2^T\dot{M}_1y$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $\mathcal{N}_1$ modeli soldan D_1 ile soldan çarpılırsa

$$\tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1) = \beta_2 + \delta_1$$

elde edilir. Burada δ_1 hata vektörü sıfır ortalamasına ve $D_1VD_1^T$ sıfır ve kovaryans matrisine sahiptir. Bu durumda (4.108) denkleminden

$$R_2\tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1) - r = R_2\beta_2 - r + \eta_1$$

yazılabilir, burada η_1 hata vektörü sıfır ortalamasına ve $R_2D_1VD_1^TR_2^T$ kovaryans matrisine sahip olacaktır. Öte yandan $M_1^2 = M_1M_1 = M_1$ eşitliğinden

$$\dot{M}_1V\dot{M}_1 = M_1\mathrm{V}^{-1}M_1M_1VM_1M_1\mathrm{V}^{-1}M_1$$

$$= (M_1VM_1)^{\dagger}(M_1VM_1)(M_1VM_1)^{\dagger}$$

$$= (M_1VM_1)^{\dagger}$$

$$= M_1\mathrm{V}^{-1}M_1$$

$$= \dot{M}_1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$Cov(\eta_1) = R_2\left(X_2^T\dot{M}_1X_2\right)^{-1}\left(X_2^T\dot{M}_1V\dot{M}_1X_2\right)\left(X_2^T\dot{M}_1X_2\right)^{-1}R_2^T$$

$$= R_2\left(X_2^T\dot{M}_1X_2\right)^{-1}R_2^T$$

olduğu açıktır. Bu durumda eğer

$$\hat{\mu}_3 = R_2\tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1) - r \text{ ve } \mu_3 = R_2\beta_2 - r$$

denklemleri dikkate alınırsa, bu taktirde $\tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1) = \beta_2 + \delta_1$ modeli denk olarak

$$\hat{\mu}_3 = \mu_3 + \eta_1 \tag{4.116}$$

şeklinde de yazılabilir. Bunun sonucu olarak, $\tilde{\beta}_2(\mathcal{M}) = \tilde{\beta}_2(\mathcal{N}_1)$, $\hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_3$, $\mu_2 = \mu_3$, $E(\delta) = E(\eta_1)$ ve $Cov(\eta_1) = Cov(\delta)$ olduğundan (4.111) modeli (4.116) modeline denk olacaktır. Dolayısıyla, $\beta_2^*(\mathcal{N}_1)$ tahmin edicisini bulma problemi (4.108) problemine dönüşür. Buradan $\beta_2^*(\mathcal{M}_I) = \beta_2^*(\mathcal{N}_1)$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada parçalanmış lineer modeller ve bu modellerden elde edilen bazı alt lineer modeller ele alınarak bu modeller altında bilimeyen parametre vektörleri için çeşitli tahmin ediciler belirlenmiş ve verilen bu modeler altında β ve $X\beta$ parametre vektörlerinin alışılmış en küçük kareler tahmin edicileri (OLSE), en iyi lineer yansız tahmin edicileri (BLUE), eşitlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edicileri (ECLS) ve eşitsizlik kıstlamalı en küçük kareler tahmin edicileri (ICLS) incelenerek bu tahmin edicilerin birbirine eşit olması için bazı gerek ve yeter şartlar ortaya konulmuştur. Ayrıca genel ve kısıtlamalı lineer modeller altında tahmin edicilerin belirlenmesinde model matrisinin tam ranklı olup olmama durumları, kovaryans matrisinin singüler olup olmama durumları ve parametreler üzerine konulan kısıtlamalardaki katsayı matrisinin özel durumlarına göre tahmin edicilerin karşılaştırılması problemi üzerinde durulmuştur. Yapılan bu çalışmalara ilaveten

i. Verilen herhangi bir model altında β ve $X\beta$ vektörleri için ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri (WLSE) verilerek, bu tahmin ediciler ile alışılmış en küçük kareler tahmin edicileri (OLSE) ve en iyi lineer yansız tahmin ediciler (BLUE) arasındaki ilişkiler incelenebilir.

ii. Tam lineer modeller altında β ve $X\beta$ vektörleri için ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri (WLSE) verilerek, bu tahmin edicilerle alt lineer modeler altındaki ağırlıklı en küçük kareler tahmin ediciler (WLSE) arasındaki ilişkiler incelenebilir.

iii. K matrisi uygun mertebeden herhangi bir keyfi matris olmak üzere $K\beta$ parametre vektörü için parçalı lineer modeller altında eşitlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edicileri (ECLS) ve eşitsizlik kısıtlamalı en küçük kareler tahmin edicileri (ICLS) belirlenerek bu tahmin ediciler ile alt lineer modellerdeki tahmin ediciler arasındaki ilişkiler incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

Aigner, D J. & Balestra, P. (1988). Optimal experimental design for error components models. Econometrica, 56, 955–971.

Albert, A. (1973). The Gauss–Markov theorem for regression models with possibly singular covariances. SIAM J. Appl. Math., 24, 182–187.

Baksalary, JK. (1984). A study of the equivalence between Gauss- Markoff model and its augmentation by nuisance parameters. Math. Operationsforsch stat. ser. Stat. 15:3-35.

Baksalary, JK. &, Kala, R. (1981). Linear transformations preserving best linear unbiased estimators in a general Gauss-Markoff model. Annals of Statist., 9, 913–916.

Baksalary, JK. & Mathew, T. (1986). Linear sufficiency and completeness in an incorrectly specified general Gauss – Markov model. Sankhya Ser. A: 48, 169–180.

Baksalary, JK & Markiewicz, A. (198). Admissible linear estimators in the general Gauss–Markov model, J. Statist. Plan. Inf. 19, 349–359.

Baksalary, JK. & Pordzik, PR. (1992). Implied linear restrictions in the general Gauss-Markov model. J. Stat. Plan Inference. 23: 132-143.

Baksalary, JK. & Trenkler, G. (2009). A projector oriented approach to the best linear unbiased estimator. Stat. Papers. 50: 721-733.

Ben-Israel, A. & Greville, TNE. (2003). Generalized Inverses: Theory and Applications. 2nd ed. New York: Springer.

Bhimasankaram, P. & Saharay, R. (1997). On a partitioned linear model and some associated reduced models. Linear Algebra Appl., 264, 329–339.

Chu, K.L., Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, G.P.H. (2004). On decomposing the Watson efficiency of ordinary least squares in a partitioned weakly singular linear model. Sankhya Ser. A, 66, 634–651.

Firoozi, FK. (1990). A transformation of the inequality constrained linear model, Linear Algebra and Its Applications 133, 153–163.

Gan, S., Lu, C. & Tian, Y. (2020)**.** Computation and comparison of estimators under different linear random effects models. *Comm. Stat. and Simul. Comput.* 49, No. 5: 1210-222.

Gerig, TM. & Galland, AR. (1975). Computing methods for linear models subject to linear parametric constraints, Journal of Stat. Comp. Simul., 3(3), 283-296.

Groß, J. (2004). The general Gauss–Markov model with possibly singular dispersion matrix. Stat. Pap. 45:311–336.

Groß, J. & Puntanen, S. (2000). Estimation under a general partitioned linear model. Linear Algebra and Its Applications 321, 131–144.

Groß, J. & Trenkler, G. (1998). On the equality linear statistics in General Markov model. In: Mukherjee SP, Basu SK, Sinha BK (eds) Frontiers of Statistics. Narosa Publishing House, New Delhi, pp. 189–194.

Groß, J., Trenkler, G. & Werner HJ. (2001). The equality of linear transforms of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator. *Sankhya Ser* A 63:118–127.

Güler, N., Puntanen, S. & Özdemir, H. (2014). On the BLUEs in two linear models via C.R. Rao's Pandora's Box. Commun. Statistics-Theory and Methods, 5, 43, 921–31.

Haslett, S. & Puntanen, S. (2010a). Equality of BLUEs or BLUPs under two linear models using stochastic restrictions. Statist. Papers 51:465-475.

Haslett, SJ. & Puntanen, S. (2010b). Effect of adding regressors on the equality of the BLUEs under two linear models, Journal of Statistical Planning and Inference, 140, 104–110.

Haslett, S J., Markiewicz, A. & Puntanen, S. (2020). Properties of BLUEs and BLUPs in full vs. small linear models with new observations. In Recent developments in multivariate and random matrix analysis: Festschrift in honour of Dietrich von Rosen, eds. T. Holgersson and M. Singull, 123–46. Cham: Springer.

Hauke A., Markiewicz, A. & Puntanen, S. (2012). Comparing the BLUEs Under Two Linear Models, Communications in Statistics - Theory and Methods, 41:13-14, 2405-2418.

Isolata, J. & Puntanen, S. (2009). A note on the equality of the OLSE and the BLUE of the parametric function in the general Gauss–Markov model. Stat. Papers, 50:185-193.

Isotalo, J., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2008). A useful matrix decomposition and its statistical applications in linear regression. Commun. Statist. Theor. Meth. 37:1436–1457.

Jammalamadaka, SR. & Sengupta, A. (1999). Topics in circular statistics, London: World Scientific, England.

Kesriklioğlu E. (2013). Genel parçalanmış lineer modeller altında tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Liew, CK. (1976). Inequality constrained least squares estimatin, JASA, 71(355), theory and Method section, 746-751.,

Liu, S. (2000). Efficiency comparisons between the OLSE and the BLUE in a singular linear model, Journal of Statistical Planning and Inference, 84, 191–200.

Liu, S., Ma, T., Sengupta, A., Shimizu, K. & Wang, MZ. (2017). Influence Diagnostics in Possibly Asymmetric Circular-Linear Multivariate Regression Models, Sankhya, *B*:79. 76–93.

Lu, C., Gan, S. & Tian, Y. (2015). Some remarks on general linear model with new regressors. Statistics and Probability Letters, 97, 16–24.

Maden, S. (1994). Eşitsizlik kısıtlamalı lineer modeler, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Makinen, J. (2000). Bounds for the difference between a linear unbiased estimate and the best linear unbiased estimate. Phys. Chem. Earth–Part A: Solid Earth and Geodesy 25: 693–698.

Makinen, J. (2002). A bound for the Euclidean norm of the difference between the best linear unbiased estimator and a linear unbiased estimator. Journal of Geodesy 76: 317–322.

Markiewicz, A. & Puntanen, S. (2019). Further properties of the linear sufficiency in the partitioned linear model. In Matrices, statistics and big data, eds. S. E. Ahmed, F. Carvalho and S. Puntanen, 1–22. Cham: Springer.

Markiewicz, A., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2010). A note on the interpretation of the equality of OLSE and BLUE. Pak. J. Statist. 26:127–134.

Marsaglia, G. & Styan, GPH. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. Linear and Multilinear Algebra, 2, 269-292.

Mitra, SK. & Moore, BJ. (1973). Gauss–Markov estimation with an incorrect dispersion matrix. Sankhya Ser. A, 35, 139–152.

Moore, EH. (1920). On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix. (Abstract) Bulletin of American Mathematical Society, 26, 394-395.

Moore, EH. (1935). General Analysis. Memoirs of the American Philosophical Society, I. American Philosophical Society, Philadelphia, Pennsylvania, 1935.

Nurhonen, M. & Puntanen, S. (1992). A property of partitioned generalized regression, Commun. Stat. Theory and Math. 21(6). 1579-1583.

Özkan, M. (2024). Genel lineer model altında en iyi lineer yansız tahmin edicilerinin karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 51:406–413.

Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations. Mathematical Proc. Cambridge Philos. Soc. 52: 17- 19.

Pordzik, PR. (2012). A bound for the Euclidian distance between restricted and unrestricted estimators of parametric functions in the general linear model. Stat. Papers, 53: 299-304.

Puntanen, S. (1996). Some matrix results related to a partitioned singular linear model, Commun. Statist. Theory Meth. 25, 269–279.

Puntanen, S. (1997). Some further results related to reduced singular linear models, Commun. Statist. Theory Meth. 26, 375–385.

Puntanen, S. & Styan GPH. (1989). The equality of the ordinary least squares estimator and the best linear unbiased estimator [with discussion]. Am Stat 43: 153–164.

Puntanen, S., Styan, GPH. & Tian, Y. (2005). Three rank formulas associated with the covariance matrices of the BLUE and the OLSE in the general linear model. Econometric Theor., 21, 659-664.

Rao, CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. Sankhya Ser A 30:245–252.

Rao, CR. (1971). Unified theory of linear estimation. Sankhya Ser, A 33: 371-394.

Rao, CR. (1972). A nte on the IPM method in the unified theory of linear estimation. Sankhya Ser, A 34: 371-394.

Rao, CR. (1973a). Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular disperison matrix. Journal of Multivariate Anal. 3: 276-292.

Rao, CR. (1973b). Linear statistical inference and its applications, 2nd edn. Wiley, New York

Rao CR. (1974). Projectors, generalized inverses and the BLUE's. J R Stat Soc Ser B Stat Method. 36: 442–448.

Rao, CR. (1976). Estimation of parameters in a linear model. Ann. Stat. 4:1023–1037.

Rao, CR. (1978). Choice of best linear estimators in the Gauss–Markoff model with a singular dispersion matrix. Comm Stat Theory Methods A 7:1199–1208.

Rao, CR. (1983). A unified approach to inference from linear models. In: Pukkila T, Puntanen S (eds) Proceedings of the first international tampere seminar on linear statistical models and their applications. University of Tampere, Tampere 9–36.

Rao, CR, Yanai, H. (1979). General definition and decomposition of projectors and some applications to statistical problems. J Stat Plann Infer 3:1–17

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971a). Further contributions to the theroy of generalized inverse of matrices and its applications. Sankhya, Ser. A 33,289-300.

Rao, CR.& Mitra, SK. (1971b). Generalized Inverse of Matrices and Its Applications. New York: Wiley.

Seber, GSF. (1977). Linear Regression Analysis, John Wiley and Sons Company, New York.

Sengupta, D, & Jammalamadaka, SR. (2003). Linear models: An integrated approach. River Edge: World Scientific.

Tian, Y. (2002). The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices. Southeast Asian Bull. Math, 25,745-755.

Tian, Y. (2007). Some decompositions of OLSEs and BLUEs under a partitioned linear model. Inter. Statist. Rev. 75:224-248.

Tian, Y. (2010). On equalities of estimations of parametric functions under a general linear model and its restricted models. Metrika, 72:313-330.

Tian, Y. & Wiens, DP. (2006). On equality and proportionality of ordinary of least-squares, weighted least-squares and best linear unbiased estimators in the general linear model. Statist. Probab. Lett, 76:1265-1272.

Tian, Y. & Puntanen, S. (2009). On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models, Linear Algebra and Its Applications. 430, pp. 2622–2641.

Tian, Y. & Zhang, J. P. (2011). Some equalities for estimations of partial coefficients under a general linear regression model. Statist. Papers 52:911-920.

Tian, Y. & Zhang, X. (2016). On connections among OLSEs and BLUEs of whole and partial parameters under a general linear model. Statistics & Probability Letters, 112: 105-112.

Tian, Y., Beisiegel, M. Dagenais, E. & Haines, C. (2008). On the natural restrictions in the singular Gauss–Markov model. Stat. Papers. 49:553-564.

Walker, E. & O'Brien, RG. (1992). Using restricted least squares to delinatethe effects of misspecificationin linear models, Rhe statistician, 41. 467-476.

Werner, HJ. (1990) On inequality constrained generalized least-squares estimation. Linear Algebra and its Applications, 127: 379-392.

Werner, H.J. & Yapar, C. (1995). More on partitioned possibly restricted linear regression. New Trends in Probability and Statistics, Vol. 3: Multivariate Statistics and Matrices in Statistics. Proceedings of the 5th conference, Tartu, Estonia, May 23–28, 1994. Utrecht: VSP, pp. 57–66.

Werner, HJ. & Yapar, C. (1996a) A BLUE decomposition in the general linear regression model. Linear Algebra and its Applications, 237-238.

Werner, H. J.& Yapar, C. On equality constrained generalized least squares selections in the general possibly singular Gauss-Markov model: A projector theoretical approach. Linear Algebra Appl., 237/238, 359–393 (1996b)

Trenkler, G. (1993). A note on comparing stochastically restricted linear estimators in a regression model. Biom. J. 35:125-128.

Xingwei, R. (2016). The Equalities of Estimations Under a General Partitioned Linear Model and Its Stochastically Restricted Model, Communications in Statistics - Theory and Methods, DOI: 10.1080/03610926.2014.960587.

Xu, J. & Yang, H. (2007). Estimation in singular linear models with stochastic linear restrictions. Commun. Statist. Theor. Meth. 36:1945-1951.

Zhang, B., Liu, B. & Lu, C. (2004). A study of the equivalence of the BLUEs between a partitioned singular linear model and its reduced singular linear models. Acta Math. Sinica (N.S.), 20, 557–568.

Zyskind, G. (1967). On canonical forms, nonnegative covariance matrices, and best and simple least squares estimators in linear models. Ann. Stat. 38:1092–1110.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Harun SAKA
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	× T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2012
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	
Mezuniyet Tarihi	2014
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	