



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK BOYUTLU UZAYLARDA DARBOUX
VEKTÖRLERİNİN ÜRETTİĞİ EŞ UZAKLIKLI REGLE
YÜZEYLER ÜZERİNE**

CEYDA CEVAHİR YILDIZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2021

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

CEYDA CEVAHİR YILDIZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

YÜKSEK BOYUTLU UZAYLARDA DARBOUX VEKTÖRLERİNİN ÜRETTİĞİ EŞ UZAKLIKLIL REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

CEYDA CEVAHİR YILDIZ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 90 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞRETİM ÜYESİ SÜLEYMAN ŞENYURT)

(İKİNCİ TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. EMİN KASAP)

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde tezin içeriğine yol göstermiş olan kaynaklardan bahsedilmiştir. Çalışmanın amacı ve ele alınma nedeni verilmiştir.

Genel bilgiler bölümünde bulgular bölümünde kullanılacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölüm iki kısma ayrılmıştır. İlk kısımda, 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı paralel Darboux equidistant regle yüzeylerin şekil operatörlerinin değişmezleri ve dayanak eğrilerinin küresel göstergeleri ile ilgili karakteristik sonuçlar elde edilmiştir. İkinci kısımda ise 5-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan paralel Darboux equidistant regle yüzeylerin ortalama eğrilikleri, Ricci eğrilikleri, kesit eğrilikleri ve skaler eğrilikleri hesaplanmıştır. Eğrilikler arasında bağıntılar elde edilmiştir. Mapple uygulamaları bölümünde tezde verilen örneklerin Maple programla dilinde komutları verilmiştir.

Son olarak sonuç ve öneriler kısmında bulunan sonuçlar kısaca ifade edilmiş ve bir sonraki çalışmalara önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Darboux Vektör, Eş Uzaklıklılı Regle Yüzey.

ABSTRACT

ON EQUIDISTANT PARALLEL RULED SURFACES PRODUCED BY DARBOUX VECTORS IN HIGH DIMENSIONAL SPACES

CEYDA CEVAHİR YILDIZ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 90 PAGES

(SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. SÜLEYMAN ŞENYURT)

(SECOND SUPERVISOR: PROF. DR. EMİN KASAP)

This study is organized in four parts. In the introduction, the sources that have guided the content of the thesis are mentioned. The purpose of the study and the reason for its handling are given.

In the general information section, the definitions and theorems to be used in the findings section are given.

Findings section constitutes the original part of our study. This section is divided into two parts. In the first part, characteristic results are obtained for the invariants of the shape operators of parallel Darboux equidistant ruled surfaces defined in 3-dimensional Euclidean space and the spherical representations of the fulcrum curves. In the second part, mean curvatures, Ricci curvatures, section curvatures and scalar curvatures of parallel Darboux equidistant ruled surfaces defined in 5-dimensional Euclidean space are calculated. Relationships were obtained between the curvatures. In the section of Maple applications, the commands of the examples given in the thesis are given in Maple programming language.

The third and fourth chapters constitute the original part of our work. In the third chapter, characteristic results are obtained regarding the invariants of shape operators of parallel Darboux equidistant ruled surfaces defined in the 3 - n -dimensional Euclidean space and the spherical indicators of the base curves. By giving an example, the shape was drawn with the Maple program.

Finally, the results in the conclusion and recommendations section are briefly expressed and suggestions are made for the next studies.

Keywords: Euclidean Space, Darboux Vector, Equidistant Ruled Surface.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışma sürecinin yürütülmesi ve tezin yazımı esnasında bilgilerini ve fikirlerini benimle cömertçe paylaşan, bana her konuda yol gösteren ve ışık tutan, bu zor süreçte bana daima cana yakın ve anlayışlı bir tutumla yaklaşan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ŞENYURT' a, tezime yeni bakış açıları ve düzeltmeler katabilmek için değerli vaktini ayıran Erasmus danışmanım Prof. Luca GRILLI' ye ve ikinci danışmanım Prof. Dr. Emin KASAP' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda, hayatım boyunca sadece varlıklarının bile bana her zaman güç verdiği, en büyük destekçilerim olan annem Ömür CEVAHİR, abim Kaan CEVAHİR' e ve ihtiyacım olan her durumda yanımda olan eşim Nurullah YILDIZ' a en içten şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmam boyunca bilgileriyle bana destek veren bölüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1 Temel Kavramlar.....	3
2.2 Manifold ve Altmanifoldların Eğrilikleri.....	10
2.3 Üç Boyutlu Öklid Uzayında Regle Yüzeyler.....	14
2.4 E^n de Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler.....	15
2.5 Genelleştirilmiş Darboux Vektörü.....	16
2.6 Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler.....	17
3. BULGULAR	23
3.1 E^3 de Paralel Darboux Equidistant Regle Yüzeyler.....	23
3.2 E^5 de Paralel Darboux Equidistant Regle Yüzeyler.....	57
4. SONUÇ ve ÖNERİLER	82
5. Maple Uygulamaları	83
6. KAYNAKLAR	85
DİZİN.....	87
ÖZGEÇMİŞ.....	88

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Darboux Vektörü.....	6
Şekil 2.2 Regle Yüzey.....	14
Şekil 2.3 Birim Darboux Vektörleri.....	20
Şekil 2.4 C ve C^* Birim Darboux Vektörleri.....	20
Şekil 2.5 Regle Yüzeylerin Striksiyon Çizgisi.....	21
Şekil 3.1 Z ve Z^* Vektörü.....	34
Şekil 3.2 d Equidistant Regle Yüzeyler.....	54
Şekil 3.3 $t = 0$ için Uygun Noktalardaki d Uzaklığı.....	55
Şekil 3.4 $t = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ için Uygun Noktalardaki d Uzaklığı.....	56
Şekil 3.5 rr^* Vektörü.....	59
Şekil 3.6 $\{V_1, V_3, V_5\}$ ile $\{V_1^*, V_3^*, V_5^*\}$ Vektörlerinin Germiş Olduğu Oskülatör Kürelerin Uygun Noktaları Arasındaki d Uzaklığı.....	60
Şekil 3.7 V_1^* ile V_1 , V_3^* ile V_3 ve V_5^* ile V_5 , Vektörleri Arasındaki Açılar.....	62
Şekil 3.8 V_5^* ile V_1 , V_1^* ile V_3 ve V_3^* ile V_5 Vektörleri Arasındaki Açılar.....	62
Şekil 3.9 V_1^* ile V_5 , V_3^* ile V_1 ve V_5^* ile V_3 Vektörleri Arasındaki Açılar.....	63
Şekil 5.1 Equidistant Regle Yüzeyler.....	83
Şekil 5.2 Uygun A ve B Noktaları.....	84

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

E^3	: 3-Boyutlu Öklid Uzayı
E^5	: 5-Boyutlu Öklid Uzayı
E^n	: n-Boyutlu Öklid Uzayı
\langle, \rangle	: Öklid İç Çarpımı
$\ \cdot \ $: Norm
S	: Şekil Operatörü
\mathcal{S}	: Regle Yüzey
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma(torsiyon)
k_n	: n. Eğrilik
W	: Birim Darboux Vektörü
C	: Darboux Vektörü
ρ	: Eğrilik Yarıçapı
$\varphi_X(t, v)$: Regle Yüzey
γ	: Regle Yüzeyin Striksiyon Çizgisi
H	: Ortalama Eğrilik
K	: Gauss(Total) Eğrilik
K_N	: Skalar Normal Eğrilik
r_{sk}	: Ricci Eğrilik
$A(t)$: Asimptotik Demet
$T(t)$: Teğetsel Demet

1. GİRİŞ

Diferensiyel Geometride yüzeyler teorisi konusu geniş bir yer tutmaktadır. Bu konuyla ilgili yerli yabancı yazılmış bir çok kitap ve çalışma mevcuttur. Yüzeyler teorisinde olduğu gibi regle yüzeylerle ilgili yerli ve yabancı bir çok çalışma bulmak mümkündür. *Diferensiyel Geometri Dersleri*(Hacısalihoglu, 1983) kitabı bizlere öncü olmuştur.

1986 yılında yapılan "Parallel p - Aquidistante Regelflachen" isimli çalışma da Valentis, Öklid uzayında alınan iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca üretici vektör olarak dayanak eğrilerinin Frenet vektörlerinden teğet vektörleri birbirine paralel olarak alıp ve uygun noktalarda polar düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek yeni bir yüzey türünü ifade etmiştir. Bu yüzeylere eş uzaklıklı regle yüzeyler demiştir. Bu uzaklık bu uzaklık p olarak gösterilmiş olduğundan p -equidistant regle yüzey olarak literatüre girmiştir. (Valentis, 1986).

Sonraki yıllarda *Some characteristic properties of the parallel p -equidistant ruled surfaces in the Euclidean space E^3* isimli çalışmada regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin kapalı olması halinde p -equidistant regle yüzeylerin integral invaryantları arasında ki bağlantılar hesaplanmış ve yüzeylerin şekil operatörünün bazı karakteristik özellikleri verilmiştir (Masal ve Kuruoğlu, 1999).

Some characteristic properties of the spherical indicatrices of leading curves of parallel p -equidistant ruled surfaces isimli çalışmada ise yüzeylerin küresel gösterge eğrilerinin bazı karakteristik özellikleri incelenmiştir (Masal ve Kuruoğlu, 2000).

Valentis'in çalışmasından yola çıkarak *Some characteristic Properties Of Parallel z -Equidistant Ruled Surfaces* isimli çalışmada iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca üretici vektör olarak dayanak eğrilerinin Frenet vektörlerinden iki regle yüzeyin striksiyon eğrileri boyunca dayanak eğrilerinin asli normal vektörleri birbirine paralel ve uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit kabul edilerek (bu uzaklık z olarak gösterildi) z -equidistant regle yüzeyler tanımlanmış, bu yüzeyin bazı karakteristik özellikleri ve integral invaryantları arasındaki bağıntılar elde edilmiştir (Şenyurt ve As, 2013).

Equidistante regle yüzeylerin bazı yeni özellikleri isimli yüksek lisans tezinde ise üretici vektör olarak binormal ve Darboux vektörler paralel alınarak elde edilen equidistant regle yüzeyler tanımlanmıştır. Uygun noktalardaki düzlemler arasındaki uzaklık sırasıyla q ve d ile gösterildiğinden q -equidistant regle yüzeyler ve d -equidistant regle yüzeyler

olarak isimlendirilmiştir. Daha sonra bu yüzeylerin bazı karakteristik özellikleri verilmiştir. Yüzeylerinkapalı olmaları halinde integral invaryantları arasındaki bağıntılar hesaplanmıştır. Weingarten dönüşümünün matrisleri, Gauss (Total) veortalama eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulunmuştur (Özduran, 2019).

2013 yılında *Generalized parallel p_i -equidistant ruled surfaces* isimli makalede Paralel p_i equidistant regle yüzeyler n -boyutlu Öklid uzayında genelleştirilmiştir. Oluşan eş uzaklıklı regle yüzeylerin bazı eğrilikleri hesaplanmış ve bu eğrilikler arasında ilişkiler kurulmuştur (Masal ve Kuruoğlu, 2013).

Null Parallel p -Equidistant B-Scrolls adlı makalede ise Valentis'in çalışması Minkowski uzayına aktarılmıştır (Azak ve ark., 2014).

On a Generalization of the Darboux Vector in Euclidean Space E^n , isimli makalede, E^3 de iyi bilinen Darboux vektörü E^n de eğrilikler cinsinden genelleştirilmiştir (Esin, 1988).

Characterization of Curve in E^{2n+1} with 1-type Darboux Vector adlı makale de E^{2n+1} Öklid uzayında ki eğrilerin Darboux anlık rotasyon vektör alanı üzerinde Laplacian operatörü kullanılarak bazı karakterizasyonları verilmiştir. Ayrıca bizim hızlı eğrilerin 1-tip Darboux vektörüne sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir (Kocayigit ve ark., 2013).

Bu çalışma da ise 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı paralel Darboux equidistant regle yüzeylerin şekil operatörlerinin değişmezleri ve dayanak eğrilerinin küresel göstergeleri ile ilgili karakteristik sonuçlar incelenmiştir. Bir örnek verilerek Maple programı yardımıyla şekil çizilmiştir. Son olarak 5-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan paralel Darboux equidistant regle yüzeylerin ortalama eğrilikleri, Ricci eğrilikleri, kesit eğrilikleri, skaler eğrilikleri ve bu eğriliklerin arasındaki bağıntılar bulunmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 A boş olmayan bir küme V, \mathfrak{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$P, Q \in A$ için

$$f : A \times A \rightarrow V, \quad f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon

$$(A_1) : \forall P, Q \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A_2) : P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

aksiyomlarını sağlıyorsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir (Hacısağlıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.2 V bir vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun.

$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, \dots, P_0P_n\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n + 1)$ lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve $P_i, 1 \leq i \leq n$, noktalarına da çatının birim noktaları denir. Eğer $\dim V = n$ ise A ya n -boyutlu bir afin uzay denir (Hacısağlıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.3 A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V üzerinde tanımlanan

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

reel değerli fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa fonksiyona iç çarpım fonksiyonu denir: $\forall x, y, z \in V$ için

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0} \quad (\text{Hacısalihoglu, 1983}).$$

Tanım 2.1.4 V , n -boyutlu bir reel iç çarpım uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay ise A ya n -boyutlu bir Öklid uzayı denir (Hacısağlıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.5 \mathbb{R}^n standart reel afin uzay olsun. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu çarpıma \mathbb{R}^n de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu \mathbb{R}^n vektör uzayı ile birleşen afin uzayına n -boyutlu standart Öklid uzayı denir, E^n ile gösterilir (Hacısağlıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.6 E^n Öklid uzayında

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna uzaklık fonksiyonu denir ve $d(X, Y)$ reel sayısına da $X, Y \in E^n$ noktaları arasında ki uzaklık denilir (Hacısağlıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.7 $r : I \rightarrow E^n$, $r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir eğri, $\|r'(t)\| = 1$ ise eğrinin parametresine yay parametresi denir (Hacısağlıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.8 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^r\}$, $r < n$, sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^k$, $k > r$, için $\alpha^k \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ 'den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye $m \in M$ noktasındaki Serret Frenet r ayaklısı, her bir V_i , $1 \leq i \leq r$, vektörüne de Serret Frenet vektörü adı verilir (Hacısalihhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.9 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq r \tag{2.1.1}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için, $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M 'nin i -yinci eğriliği denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.1 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ise,

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_r' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & k_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_r \end{bmatrix}, \quad (2.1.2)$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.2 E^5 , 5-boyutlu bir Öklid uzayı ve $I \subset \mathbb{R}$ açık alt cümlesidir. E^5 de diferensiyellenebilir iki eğri r ve r^*

$$\begin{aligned} r &: I \rightarrow E^5 \text{ ve } r^* : I \rightarrow E^5 \\ t &\rightarrow r(t) \quad t^* \rightarrow r^*(t^*) \end{aligned}$$

olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t), V_5(t)\}$ ve $\{V_1^*(t^*), V_2^*(t^*), V_3^*(t^*), V_4^*(t^*), V_5^*(t^*)\}$, eğrilikleri k_i ve k_i^* , $1 \leq i < 5$ olsun. Frenet çatıları arasında

$$\begin{bmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \\ V_3'(t) \\ V_4'(t) \\ V_5'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \\ V_4(t) \\ V_5(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.10 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ 'ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında, M 'nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise, $H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$ şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, M 'nin 1. harmonik eğriliği denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.3 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

M bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow \forall s \in I; H_1(s) = \text{sabittir}$ (Hacısalihoglu, 1983)

Tanım 2.1.11 E^3 de bir α eğrisi yay parametresi ile verilsin. Eğrinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı da $\{V_1, V_2, V_3\}$ olsun. α eğrisi çizilirken, V_1, V_2, V_3 vektörlerinin uç noktalarının birim küre yüzeyi üzerinde meydana getirdiği eğrilere, sırasıyla α eğrisinin teğetler, asli normaller ve binormaller göstergesi denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.12 $r : I \rightarrow E^3$ eğrisinin $r(t)$ noktasındaki $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t)\}$ Frenet çatısının her t anında, bir eksen etrafında döndüğü gözlemlenmiştir. Bu eksene eğrinin $r(t)$ noktasında ki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre de Darboux vektörü adı verilir. Bu vektör $W(t)$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} W(t) &= V_2(t) \wedge V_2'(t), \\ &= \tau(t)V_1(t) + \kappa(t)V_3(t) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

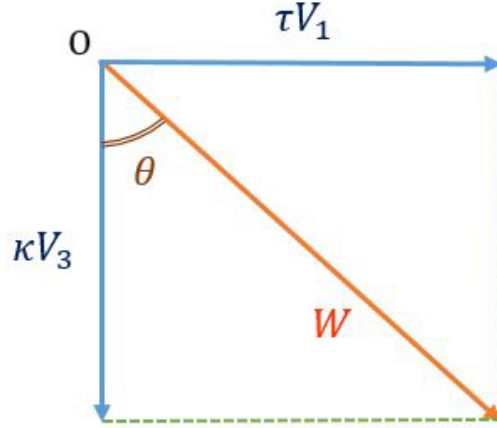
şeklinde bulunur. $W(t)$ Darboux vektörünün boyu

$$\|W(t)\| = \sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)} \quad (2.1.5)$$

dır. Darboux yönünde ki birim vektör $C(t)$ ile gösterilirse

$$C(t) = \frac{\tau(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}}V_1(t) + \frac{\kappa(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}}V_3(t) \quad (2.1.6)$$

şeklinde bulunur. $V_3(t)$ ile $W(t)$ arasındaki açığı θ ile gösterilsin (Şekil 2.1).



Şekil 2.1: Darboux Vektörü

Şekil 2.1 den

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\kappa(t)}{\|W(t)\|} = \frac{\kappa(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}}, \\ \sin \theta &= \frac{\tau(t)}{\|W(t)\|} = \frac{\tau(t)}{\sqrt{\kappa^2(t) + \tau^2(t)}} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

yazılabilir. Bu ifadeler (2.1.6) de yerine yazılırsa $C(t)$ birim Darboux vektörü

$$C(t) = \sin \theta V_1(t) + \cos \theta V_3(t) \quad (2.1.8)$$

şeklinde bulunur (Fenchel, 1951).

Tanım 2.1.13 $r : I \rightarrow E^3$ differensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} \|r'\| & : I \rightarrow R \\ t \rightarrow \|r'\|(t) & = \|r'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|r'\|$ fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu, $\|r'(t)\|$ reel sayısına r eğrisinin $r(t)$ noktasında ki skaler hızı denir. $r(t) \in E^3$ için

$$r'(t) = (r'_1(t), r'_2(t), r'_3(t))$$

vektörüne de eğrinin hız vektörü denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.14 E^n , n -boyutlu Öklid uzayı ve U da E^n de bir açık alt cümle olsun. E^n de $\forall P \in M$ için $\nabla f|_p \neq 0$ olmak üzere, E^n 'nin boş olmayan bir,

$$M = \{X \in U \subset E^n \mid f : U \rightarrow R, f(X) = c, \forall X \in U, c \in R\}$$

alt cümlesine E^n de $(n-1)$ - boyutlu bir yüzey veya $(n-1)$ -yüzey denir. Bu yüzey $n > 3$ için hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.15 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere $\chi(M)$ üzerinde,

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlı ise, M 'ye bir Riemann manifoldu ve \langle, \rangle fonksiyonuna M üzerinde Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.16 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere,

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

fonksiyonu, $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

1- Bilineer Aksiyomu,

$$\begin{aligned} \langle aX + bY, Z \rangle & = a\langle X, Z \rangle + b\langle Y, Z \rangle, \\ \langle X, aY + bZ \rangle & = a\langle X, Y \rangle + b\langle X, Z \rangle, \end{aligned}$$

2- Simetrik Aksiyomu,

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle,$$

3- $\forall X \in \chi(M); \langle X, Y \rangle = 0 \Rightarrow Y = 0$

aksiyomlarını sağlıyorsa M 'ye yarı Riemann manifoldu denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.17 M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D(X, Y) = D_X Y, \quad \forall X, Y \in \chi(M)$$

ile tanımlı bir D fonksiyonu, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$ için,

1. $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$
2. $D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y$

özelliklerini sağlıyorsa, D ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve D_X 'e de X 'e göre kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.18 M bir yarı-Riemann manifoldu ve D , M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer,

1. D , C^∞ sınıfından,
2. M 'nin bir A bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle|_p + \langle Y, D_X Z \rangle|_p, \quad \forall P \in A,$$

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

ise D konneksiyonuna, M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ve D_X 'e de X 'e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.19 E^n nin bir hiperyüzeyi M ve M 'nin birim normal vektör alanı N olsun. E^n 'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$S(X) = D_X N \tag{2.1.9}$$

ile tanımlı $S : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir. Şekil operatörü lineer bir dönüşümdür (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.20 E^n de bir hiperyüzey M olsun. $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q = \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R), \quad I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle \tag{2.1.10}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna M hiperyüzeyi üzerinde q -yuncu temel form adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.21 E^n de bir hiperyüzey M ve M 'nin şekil operatörü S olsun. M 'nin P noktasına karşılık gelen $S(P)$ 'nin karakteristik değerleri M 'nin bu noktada ki asli eğrilikleri, asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denem vektörlerin belirttiği doğrultulara da M 'nin bu P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.22 E^n de bir hiperyüzey M olsun. M 'nin bir P noktasındaki şekil operatörüne karşılık gelen matris $S(P)$ olmak üzere,

$$K : M \rightarrow R, K(P) = \det S(P) \quad (2.1.11)$$

ile tanımlanan fonksiyona, M 'nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de, M 'nin P noktasındaki Gauss eğriliği (total eğrilik) denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.4 E^n de bir hiperyüzey M olsun. M 'nin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), \dots, k_{n-1}(P)$ ise, $K(P)$ Gauss eğriliği

$$K(P) = \prod_{i=1}^{n-1} k_i(P) = k_1(P) \dots k_{n-1}(P) \quad (2.1.12)$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.23 E^n de bir hiperyüzey M olsun. M 'nin bir P noktasındaki şekil operatörüne karşılık gelen matris $S(P)$ olmak üzere,

$$H : M \rightarrow R, H(P) = \text{İz} S(P) \quad (2.1.13)$$

ile tanımlanan fonksiyona, M 'nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M 'nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.5 E^n de bir hiperyüzey M olsun. M 'nin bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P), \dots, k_{n-1}(P)$ ise, $H(P)$ ortalama eğriliği

$$H(P) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(P) \quad (2.1.14)$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.24 E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α 'nın teğet vektör alanı T ve M 'nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S 'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.25 E^n de bir hiperyüzey M ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer $X_p, Y_p \in T_M(P)$ için,

$$\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0 \quad (2.1.15)$$

ise bu iki tanjant vektöre eşleniktirler denir. Bir $X_p \neq 0$ tanjant vektörü için,

$$\langle S(X_p), X_p \rangle = 0 \quad (2.1.16)$$

ise X_p doğrultusuna, M 'nin P noktasındaki bir asimptotik doğrultusu ve X_p ' yi $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir asimptotik çizgidir denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.6 E^3 'ün bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde temel formlar, sırasıyla; I, II, III ve Gauss eğrilik fonksiyonu K , ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere,

$$III - HII + KI = 0 \quad (2.1.17)$$

dır (Hacısalihoglu, 1983).

2.2 Manifold ve Altmanifoldların Eğrilikleri

Tanım 2.2.1 E^n Öklid uzayının standart Riemann konneksiyonu \bar{D} ve M manifoldunun Riemann konneksiyonunu da D ile gösterilsin. M üzerinde her X ve Y vektör alanları için,

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + V(X, Y) \quad (2.2.1)$$

eşitliğini sağlayan vektör değerli V tensör alanına M manifoldunun ikinci temel formu, bu eşitliğe de Gauss denklemi denir (Thas, 1978). Burada $D_X Y$ ve $V(X, Y)$, sırasıyla, $\bar{D}_X Y$ 'nin teğet ve normal bileşenleridir. M 'nin normal vektör alanı ζ olsun. O zaman $\bar{D}_X \zeta$, teğet ve normal bileşenleri cinsinden ifadesi;

$$\bar{D}_X \zeta = -A_\zeta(X) + D_X^\perp \zeta \quad (2.2.2)$$

şeklinde olur. Bu eşitliğe Weingarten eşitliği denir. Burada A_ζ , M üzerinde her noktada $T_M(P) \rightarrow T_M(P)$ 'ye self-adjoint lineer bir dönüşüm ve D^\perp ise M nin normal bandılı üzerindeki metrik konneksiyondur. Bundan sonra A_ζ notasyonunu, hem lineer dönüşümler ve hem de lineer dönüşümlerin matris gösterimi için kullanacağız. X ve Y , M manifoldu

üzerindeki vektör alanları, ζ da normal vektör alanı olsun. E^n 'nin standart metrik tensörü de \langle, \rangle olmak üzere, (2.2.1) ve (2.2.2) eşitliklerinden;

$$\langle \bar{D}_X Y, \zeta \rangle = \langle V(X, Y), \zeta \rangle \quad (2.2.3)$$

$$\langle \bar{D}_X Y, \zeta \rangle = \langle A_\zeta(X), Y \rangle \quad (2.2.4)$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten,

$$\langle V(X, Y), \zeta \rangle = \langle A_\zeta(X), Y \rangle \quad (2.2.5)$$

bulunur. $X^\perp(M)$ 'in ortonormal baz vektör alanı $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-m}\}$ olsun. $V^j(X, Y)$, $(1 \leq j \leq n - m)$, fonksiyonları M ' den R ' ye diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$V(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} V^j(X, Y) \zeta_j \quad (2.2.6)$$

yazılır.(2.1.15) ve (2.1.17) eşitliklerinden ,

$$V(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} \langle \bar{D}_X Y, \zeta_j \rangle \zeta_j \quad (2.2.7)$$

veya

$$V(X, Y) = \sum_{j=1}^{n-m} \langle A_{\zeta_j}(X), Y \rangle \zeta_j \quad (2.2.8)$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2 $P \in M$ ve $X_P, Y_P \in T_M(P)$ olsun.

$$V(X_P, Y_P) = 0 \quad (2.2.9)$$

ise X_P ve Y_P vektörlerine eşlenik vektör,

$$V(X_P, X_P) = 0 \quad (2.2.10)$$

ise X_P ' ye P noktasında bir asimptotik vektör denir (Sabuncuoğlu,1982).

Tanım 2.2.3 M , m -boyutlu bir Riemann manifoldu ve V de M 'nin ikinci temel formu olsun.

$$V(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad (2.2.11)$$

oluyorsa, M 'ye E^n 'de total geodeziktir denir (Chen,1973).

Tanım 2.2.4 $\zeta \in \chi^\perp(M)$ birim normal vektör alanı ise,

$$G(P, \zeta) = \det A_\zeta, \quad P \in M \quad (2.2.12)$$

değerine M 'nin P noktasında, ζ doğrultusundaki Lipschitz-Killing eğriliği denir (Thas, 1978). Gauss eğriliği $G(P)$ olmak üzere, E^n 'deki bütün yüzeyler için,

$$G(P) = \sum_{j=1}^{n-m} G(P, \zeta_j). \quad (2.2.13)$$

$G(P) = 0$ ise $P \in M$ için M yüzeyi açılabilir denir (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

Buradan, her noktada ve her normal doğrultuda Lipschitz-Killing eğriliği sıfır ise yüzey açılabilir.

Tanım 2.2.5 $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-m}\}$, $\chi^\perp(M)$ in ortonormal vektör alan sistemi olmak üzere,

$$H = \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\dot{I}z A_{\zeta_j}}{\text{boy}M} \zeta_j \quad (2.2.14)$$

şeklinde tanımlı H vektörüne M 'nin ortalama eğrilik vektör alanı ve $\|H\|$ fonksiyonuna da ortalama eğrilik fonksiyonu, $P \in M$ noktasında $H(P)$ 'ye ortalama eğrilik vektörü, $\|H(P)\|$ 'ye de M 'nin P noktadaki ortalama eğriliği denir (Kobayashi ve Nomizu, 1963). $\forall P \in M$ için $H = 0$ ise M ye minimaldir denir (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

Tanım 2.2.6 E^n , n -boyutlu bir Öklid uzayı ve $\chi(E^n)$ de E^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı olsun. $X, Y, Z \in \chi(E^n)$ olmak üzere;

$$\bar{R} = \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \rightarrow \chi(E^n)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z) &= \bar{R}(X, Y)Z \\ &= \bar{D}_X(\bar{D}_Y Z) - \bar{D}_Y(\bar{D}_X Z) - \bar{D}_{[X, Y]}Z \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

şeklinde tanımlanan \bar{R} fonksiyonu $\chi(E^n)$ üzerinde 3. mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu kovaryant tensör alanına E^n 'nin eğrilik tensör alanı ve $\bar{R}(X_P, Y_P)Z_P$ tensörüne de E^n 'nin P noktasındaki eğrilik tensörü veya E^n 'nin P 'deki eğriliği denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.2.1 E^n , n -boyutlu Öklid uzayının her noktadaki eğriliği sıfırdır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.2.7 M , m -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun.

$$R : T_M(P) \times T_M(P) \times T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow R$$

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = \langle X_1, R(X_3, X_4)X_2 \rangle, \quad \forall X_1, X_2, X_3, X_4 \in T_M(P) \quad (2.2.16)$$

şeklinde tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensör alanına Riemann eğrilik tensör alanı, $P \in M$ noktasındaki değerine de Riemann eğriliği denir ve bu eğrilik

$$K(P) = \langle X, R(X, Y)Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad (2.2.17)$$

biçiminde gösterilir. Ayrıca V ikinci temel form olmak üzere, bu tensör alanı

$$\langle X, R(X, Y)Y \rangle = \langle V(X, X), V(Y, Y) \rangle - \langle V(X, Y), V(X, Y) \rangle \quad (2.2.18)$$

şeklinde yazılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.8 M , m -boyutlu bir Riemann manifoldu ve R de Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, \dots, e_m\}$ sistemi $T_M(P)$ 'nin bir ortonormal bazı olmak üzere;

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^m \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle, \quad \forall X, Y \in \chi(M) \quad (2.2.19)$$

şeklinde tanımlı S tensör alanına Ricci eğrilik tensör eğrilik alanı ve $P \in M$ noktasındaki değerine de Ricci eğriliği denir (Chen,1973).

Tanım 2.2.9 M , m -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $P \in M$ için, $T_M(P)$ 'nin ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_m\}$ olsun. S , M 'nin Ricci eğrilik tensör alanı olmak üzere,

$$r_{sk} = \sum_{i=1}^m S(e_i, e_i) \quad (2.2.20)$$

şeklinde tanımlı r_{sk} değerine M 'nin skalar eğriliği denir (Chen,1973). Burada (2.2.19) ifadesi göz önüne alınırsa, skalar eğrilik

$$r_{sk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j \rangle \quad (2.2.21)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.2.10 $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-m}\}$ sistemi, $\chi^\perp(M)$ in ortonormal baz vektör alanı olsun.

$$K_N = \sum_{i,j=1}^{n-m} (A_{\zeta_i} A_{\zeta_j} - A_{\zeta_j} A_{\zeta_i}) \quad (2.2.22)$$

şeklinde tanımlanan K_N fonksiyonuna M 'nin skalar normal eğriliği denir (Thas, 1978).

2.3 Üç Boyutlu Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 2.3.1 Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa, M 'ye bir regle yüzey ve $\forall P \in M$ noktasından geçen, M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir.

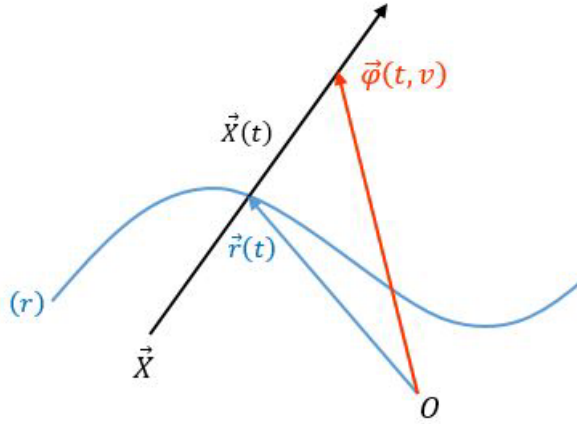
Doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir $r : I \rightarrow E^3$ eğrisine de regle yüzeyi dayanak eğrisi adı verilir. M bir regle yüzey ve r de M 'nin dayanak eğrisi olsun. $r(t)$ noktasından geçen bir X doğrultmanı üzerinde değişken bir nokta $\beta(t, v)$ regle yüzeyi,

$$\beta(t, v) = r(t) + vX(t)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre bir φ regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = r(t) + vX(t) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 2.2: Regle Yüzey

Tanım 2.3.2 Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu üzerindeki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına, regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.3 Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.1 Bir $\varphi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.4

$$\begin{aligned}\varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow E^3 \\ (t, v) &\rightarrow \varphi(t, v) = r(t) + vX(t)\end{aligned}$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için,

$$\varphi(t + 2\pi, v) = \varphi(t, v)$$

olacak şekilde periyodik ise regle yüzeye kapalıdır denir.

Kapalı regle yüzeyin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir. Bir diğer ifade ile bir periyod sonra her anadoğu kendisi üzerine gelir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.5 Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının herbirini dik olarak kesen eğriye, regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.6 Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.7 Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) denir.

Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının yer vektörü, doğrultman vektörü ve merkez noktasının dayanak eğrisine uzaklığı cinsinden,

$$\gamma(s, u) = r(s) + uX(s) \quad (2.3.2)$$

olarak ifade edilebilir. Burada s yay parametresidir (Hacısalihoglu, 1983).

2.4 E^n de Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler

E^n , n -boyutlu Öklid uzayı ve r de E^n de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin $r(t)$ noktasındaki ortonormal vektör alan sistemi $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ ile gösterilsin. E^n nin $r(t)$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(r(t))$ olmak üzere, $\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ cümlesi $T_{E^n}(r(t))$ uzayının k -boyutlu bir $E_k(t)$ alt vektör uzayını gerer. $S = \varphi(G)$ olmak üzere, $E_k(t)$

tarafından taranan bu nokta cümleleri, bir $I \times \mathbb{R}^k = G \subset E^n$ bölgesi üzerinde bulunan E^n uzayının $(k + 1)$ -boyutlu altmanifoldudur. Bu manifold için bir parametrizasyon,

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R}^k &\rightarrow E^n \\ (t, u_1, \dots, u_k) &\rightarrow \varphi(t, u_1, \dots, u_k) = r(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \text{rank}(\varphi_t, \varphi_{u_1}, \dots, \varphi_{u_k}) &= \text{rank}\{r(t) + \sum_{i=1}^k u_i e_i(t)\} \\ &= k + 1 \end{aligned}$$

ise S manifolduna $(k + 1)$ -boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey, r eğrisine genelleştirilmiş regle yüzeyin dayanak eğrisi ve $E_k(t)$ altuzayına da $r(t)$ noktasında genelleştirilmiş regle yüzeyin doğrultman uzayı veya doğrultmanı denir (Frank ve Giering, 1976).

$$A(t) = S_p\{e_1, \dots, e_k, e_1', \dots, e_k'\}, \quad \text{boy}A(t) = k + m, \quad 0 \leq m \leq k, \quad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlı $A(t)$ altvektör uzayına, genelleştirilmiş S regle yüzeyinin $E_k(t)$ 'ye göre asimptotik demeti ve

$$T(t) = S_p\{r', e_1, \dots, e_k, e_1', \dots, e_k'\}, \quad k + m \leq \text{boy}T(t) \leq k + m + 1, \quad (2.4.3)$$

şeklinde tanımlı $T(t)$ altvektör uzayına da, genelleştirilmiş S regle yüzeyinin teğetsel demeti denir (Frank ve Giering, 1976). Genelleştirilmiş bir S regle yüzeyinin doğrultman uzaylarının herbirini dik olarak kesen eğriye genelleştirilmiş regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Ergüt, 1983).

2.5 Genelleştirilmiş Darboux Vektörü

Tanım 2.5.1 $n \geq 3$ ve n tek sayı olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için Darboux vektörü

$$W = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 + \dots + a_n V_n$$

$$a_i = \begin{cases} \left(\prod_{j=1,3,5,\dots,i-2} k_j \right) \cdot \left(\prod_{j=i+1,i+3,\dots,i+(n-1-i)} k_j \right) & i \text{ tek} \\ 0 & i \text{ çift.} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

şeklindedir. Burada k_j , (X) yörüngesinin j . eğriliğidir (Esin, 1988).

Teorem 2.5.1 \vec{W} Darboux vektörü, diferansiyel hız vektörü \vec{dV} ,ye ortogonaldır, yani

$$\langle \vec{dV}, \vec{W} \rangle = 0, \quad (Esin, 1988). \quad (2.5.2)$$

2.6 Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyler

Tanım 2.6.1 $r : I \rightarrow \mathbf{E}^3$ ve $r^* : I \rightarrow \mathbf{E}^3$ diferansiyellenebilir eğrilerin $r(t)$ ve $r^*(t)$ noktalarındaki teğet vektörleri sırasıyla V_1 ve V_1^* olsun. Doğrultmanları teğet vektörleri olan iki regle yüzeyin parametrik denklemleri

$$\varphi_{V_1}(t, v) = r(t) + vV_1, \quad \varphi_{V_1^*}(t, v) = r^*(t) + vV_1^* \quad (2.6.1)$$

olsun. Eğer;

- i) striksiyon eğrileri boyunca teğet vektörleri ile paralel
 - ii) uygun noktalarda polar düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklık p ile gösterilsin)
- bu iki regle yüzey çiftine teğet vektörlerinin üretmiş olduğu(equidistant) eş uzaklıklı regle yüzeyler veya p -equidistant regle yüzeyler adı verilir (Valeontis,1986).

Tanım 2.6.2 E^3 de r ve r^* eğrilerine ait V_2 ve V_2^* asli normal vektörlerinin ürettiği regle yüzeylerin parametrik denklemi sırasıyla

$$\varphi_{V_2}(t, v) = r(t) + vV_2(t), \quad \varphi_{V_2^*}(t, v) = r(t)^* + vV_2^*(t), \quad (2.6.2)$$

olsun. Eğer;

- i) striksiyon eğrileri boyunca asli normal vektörleri paralel
- ii) uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklık z ile gösterilsin)

bu iki yüzeye z -equidistant regle yüzey adı verilir. Dayanak eğrisi olarak γ ve γ^* çizgileri alınırsa regle yüzeylerin parametrik denklemleri

$$\varphi_{V_2}(t, v) = \gamma(t) + vV_2(t), \quad \varphi_{V_2^*}(t, v) = \gamma(t)^* + vV_2^*(t), \quad (2.6.3)$$

şeklinde olur (Şenyurt ve As, 2013).

Teorem 2.6.1 z -equidistant regle yüzeylerin uygun noktalardaki merkezi düzlemler, asimptotik düzlemler ve polar düzlemler arasındaki uzaklıklar sırasıyla z , q ve p ile gösterilirse $\varphi_{V_2^*}(t, v)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin denklemi,

$$\gamma^* = \gamma + pV_1 + qV_3 + \left(\frac{k_1 \left(1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left(q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2} \right) V_2$$

şeklinde bulunur. Burada merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık

$$z = \frac{k_1 \left(1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left(q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2}$$

şeklinde verilir (Şenyurt ve As, 2013).

Teorem 2.6.2 z -equidistant regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin teğet vektörlerinin arasındaki açı ϕ ile gösterilirse Frenet çatıları, tabii eğrilikleri ve tabii torsiyonları arasında

$$V_1^* = \cos \phi V_1 + \sin \phi V_3, \quad V_2^* = V_2, \quad V_3^* = -\sin \phi V_1 + \cos \phi V_3$$

$$k_1^* = (k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi) \frac{dt}{dt^*}, \quad k_2^* = (k_1 \sin \phi + k_2 \cos \phi) \frac{dt}{dt^*}$$

bağıntıları vardır (Şenyurt ve As, 2013).

Tanım 2.6.3 r ve r^* eğrilerine ait V_3 ve V_3^* binormal vektörlerinin ürettiği regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\varphi_{V_3}(t, v) = r(t) + vV_3(t), \quad \varphi_{V_3^*}(t, v) = r(t)^* + vV_3^*(t), \quad (2.6.4)$$

olsun. Eğer;

i) striksiyon eğrileri boyunca binormal vektörleri paralel

ii) uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklık q ile gösterilsin)

bu yüzeylere q -equidistant(eş uzaklıklı) regle yüzeyler adı verilir. (Özduran, 2019)

Dayanak eğrisi olarak γ ve γ^* çizgileri alınırsa regle yüzeylerin parametrik denklemleri

$$\varphi_{V_3}(t, v) = \gamma(t) + vV_3(t), \quad \varphi_{V_3^*}(t, v) = \gamma(t)^* + vV_3^*(t), \quad (2.6.5)$$

şeklinde olur (Özduran, 2019).

Teorem 2.6.3 q -equidistant regle yüzeylerin uygun noktalardaki merkezi düzlemler, asimptotik düzlemler ve polar düzlemler arasındaki uzaklıklar sırasıyla z , q ve p ile gösterilirse $\varphi_{V_2^*}(t, v)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin denklemi,

$$\gamma^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + \left(\frac{z' + pk_1}{k_2} \right) V_3$$

ve merkezi düzlemleri arasındaki uzaklık

$$q = \frac{z' + k_1 p}{k_2}$$

bağıntısı ile verilir (Özduran, 2019).

Teorem 2.6.4 q -equidistant regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin teğet vektörlerin arasındaki açı ϕ ile gösterilirse Frenet çatıları ve eğrilikleri arasında

$$V_1^* = \cos \phi V_1 - \sin \phi V_2, \quad V_2^* = \sin \phi V_1 + \cos \phi V_2, \quad V_3^* = V_3$$

$$k_1^* = (k_1 - 1) \frac{dt}{dt^*}, \quad k_2^* = k_2 \cos \phi \frac{dt}{dt^*}$$

bağıntıları vardır (Özduran, 2019).

Tanım 2.6.4 r ve r^* eğrilerinin Frenet çatılarına ait C ve C^* birim Darboux vektörlerinin ürettiği regle yüzeylerin parametrik denklemleri sırasıyla

$$\varphi_C(t, v) = r(t) + vC(t), \quad \varphi_{C^*}(t, v) = r^*(t) + vC^*(t)$$

olsun. Eğer;

- i) striksiyon eğrisi boyunca birim Darboux vektörlerinin paralel
- ii) uygun noktolarda merkezi düzlemler arasındaki uzaklık sabit ise (bu uzaklık d olsun) bu iki yüzeye d -equidistant (eş uzaklıklı) regle yüzeyler adı verilir (Özduran, 2019).

Teorem 2.6.5 d -equidistant regle yüzeylerin C ile V_3 vektörü arasındaki açı θ ve C^* ile V_3^* vektörü arasındaki açı θ^* olsun. Bu çatılar arasında

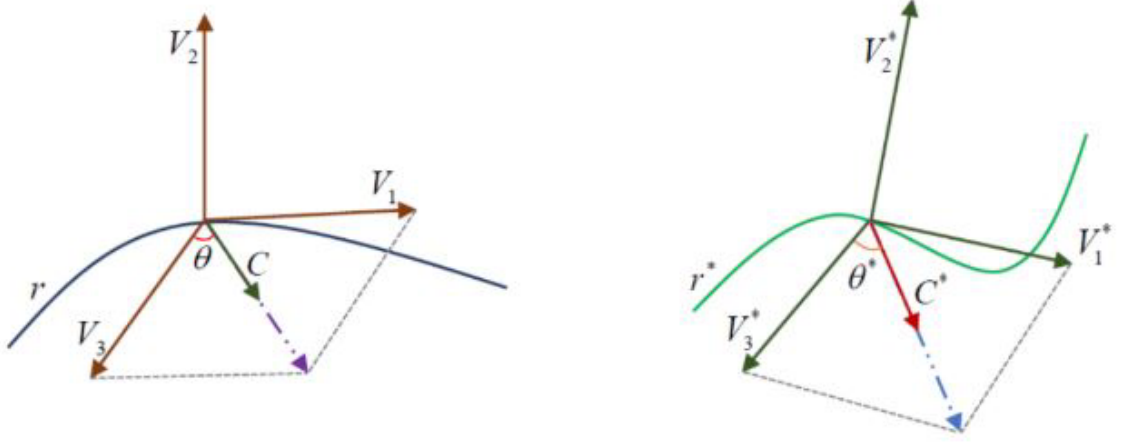
$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (2.6.6)$$

bağıntısı vardır. Burada

$$\alpha = \theta^* - \theta \quad (2.6.7)$$

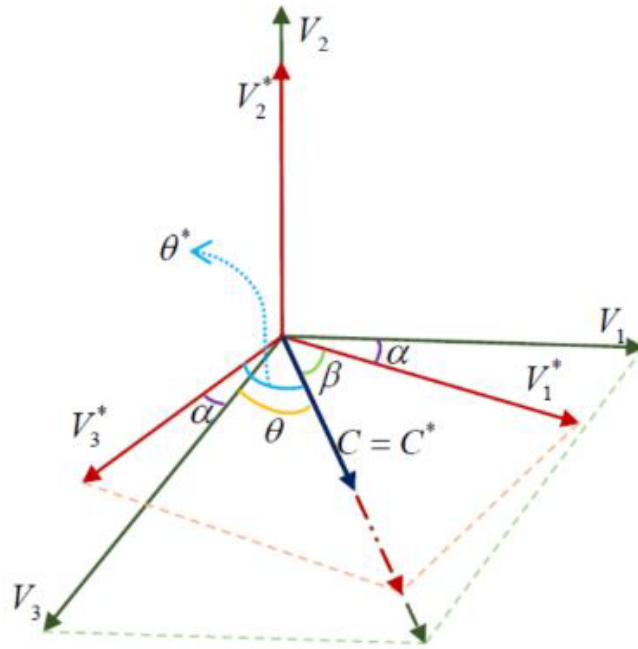
dır (Özduran, 2019).

İspat. (2.1.8) ifadesinden Darboux vektörleri $C = \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3$ ve $C^* = \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*$ şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.3: Birim Darboux Vektörleri

C ve C^* vektörleri paralel olduğundan $Sp\{V_1, V_3\}$ ve $Sp\{V_1, V_3^*\}$ merkezi düzlemleri paraleldir. Buradan $V_2 = V_2^*$ olur. Şekil 2.3'den V_3 ve V_3^* arasındaki açı α olsun.



Şekil 2.4: C ve C^* Birim Darboux Vektörleri

Şekil 2.4 'den teğetler arasındaki açı da α dır. V_1^* vektörü $V_1^* = k_1V_1 + l_1V_2 + m_1V_3$ şeklinde yazılır. Burada $k_1 = \cos \alpha$, $l_1 = 0$ ve $m_1 = \sin \alpha$ şeklinde bulunur. Benzer yöntem kullanılarak V_3^* vektörü $V_3^* = -\sin \alpha V_1 + \cos \alpha V_3$ olur. Böylece (2.6.6) bağıntısı elde edilir.

Teorem 2.6.6 d -equidistant regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin tabi eğrileri ve tabi torsiyonu sırasıyla κ, τ ve κ^*, τ^* olsun. Bu eğrilikler arasında

$$\kappa^* = (\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \frac{dt}{dt^*}, \quad \tau^* = (\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha) \frac{dt}{dt^*} \quad (2.6.8)$$

bağıntısı vardır (Özduran, 2019).

Teorem 2.6.7 d -equidistant regle yüzeylerin γ ve γ striksiyon çizgisi sırasıyla

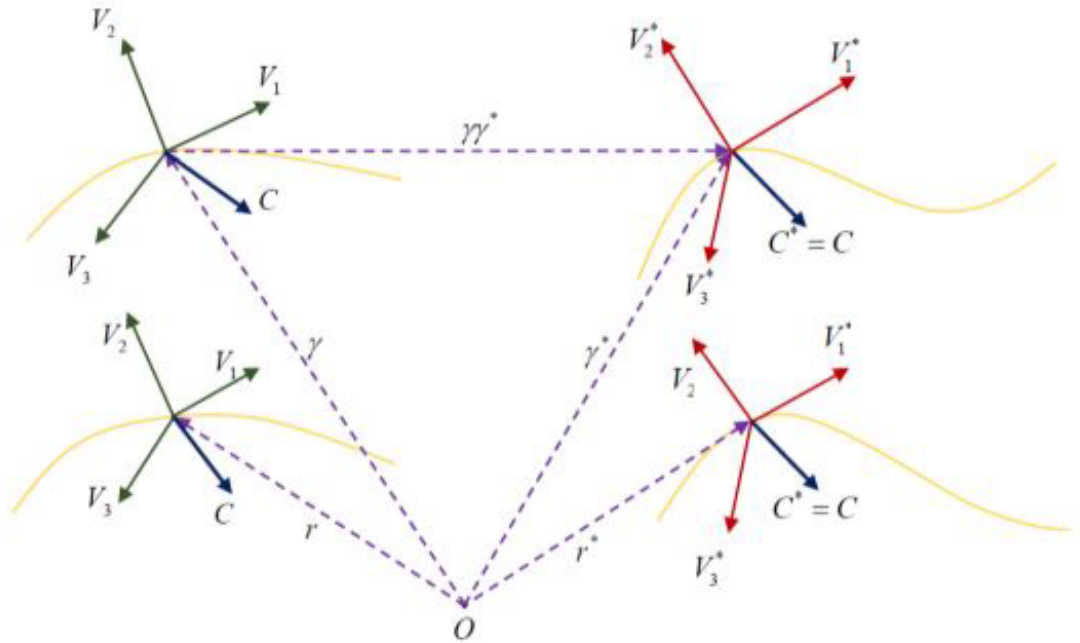
$$\gamma(t) = r(t) - \cos \theta \frac{dt}{d\theta} C(t), \quad \gamma^*(t') = r^*(t') - \cos \theta^* \frac{dt'}{d\theta^*} C(t') \quad (2.6.9)$$

şeklinde verilir (Özduran, 2019).

Dayanak eğrisi striksiyon çizgisi olarak alınırsa d -equidistant regle yüzeylerin parametrik ifadeleri

$$\varphi_C(t, v) = \gamma(t) + vC(t), \quad \varphi_{C^*}(t, v) = \gamma^*(t) + vC^*(t) \quad (2.6.10)$$

şeklinde olur. d -equidistant regle yüzeylerin merkezi, polar ve asimptotik düzlemleri arasındaki uzaklıklar sırasıyla $|z|$, $|q|$ ve $|p|$ olsun.



Şekil 2.5: Regle Yüzeylerin Striksiyon Çizgisi

Şekil (2.5) dan γ^* striksiyon çizgisinin denklemi $\gamma^* = \gamma + aV_1 + bV_2 + cV_3$ olur. Burada

$$a = \langle \overrightarrow{\gamma\gamma^*}, V_1 \rangle, \quad b = \langle \overrightarrow{\gamma\gamma^*}, V_2 \rangle, \quad c = \langle \overrightarrow{\gamma\gamma^*}, V_3 \rangle,$$

$\overrightarrow{\gamma\gamma^*}$ vektörünün V_1 vektörü üzerine izdüşümü uzunluğu olan a , uygun noktalarda polar düzlemler arasındaki $|p|$ uzaklığına; V_2 vektörü üzerine izdüşümü uzunluğu olan b , uygun noktalarda merkezi düzlemler arasındaki $|z|$ uzaklığına; V_3 vektörü üzerine izdüşümü uzunluğu olan c , uygun noktalarda asimptotik düzlemler arasındaki $|q|$ uzaklığına eşittir. Buradan $\overrightarrow{\gamma\gamma^*}$ vektörü

$$\overrightarrow{\gamma\gamma^*} = pV_1 + zV_2 + qV_3 \quad (2.6.11)$$

veya

$$\gamma^* = \gamma + pV_1 + zV_2 + qV_3 \quad (\ddot{O}zduran, 2019). \quad (2.6.12)$$

Teorem 2.6.8 d -equidistant regle yüzeylerinin striksiyon çizgileri arasında

$$\begin{aligned} \gamma^* = & \gamma + \left(p - b \sin \theta - \left((a - b) \frac{dt}{dt^*} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \sin \theta \right) V_1 \\ & + zV_2 \\ & + \left(q - b \cos \theta - \left((a - b) \frac{dt^*}{dt} + ((1 + p' - k_1 z) \cos \theta + (-q' - k_2 z) \sin \theta) \frac{dt^*}{d\theta} \right) \cos \theta \right) V_3 \end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Burada $a = -\cos \theta \frac{dt}{d\theta}$, $b = -\cos \theta^* \frac{dt^*}{d\theta^*}$ ($\ddot{O}zduran, 2019$).

Teorem 2.6.9 d -equidistant regle yüzeylerin uygun noktalarında merkezi düzlemler arasındaki d uzaklığı

$$d = \frac{(k_1(1 + p')(k_1^2 + k_2^2) - k_1^2) - k_2(q'(k_1^2 + k_2^2) + k_1k_2)}{(k_1^2 + k_2^2)^2}$$

şeklinde verilir ($\ddot{O}zduran, 2019$).

3. BULGULAR

3.1 E^3 de Paralel Darboux Equidistant Regle Yüzeyler

Bu bölümde E^3 de paralel Darboux equidistant regle yüzeylerin şekil operatörlerine karşılık gelen matrisler hesaplanarak bu regle yüzeylerin şekil operatörlerinin cebirsel değişmezleri arasındaki ilişkiler, dayanak eğrilerinin küresel göstergelerinin yay uzunlukları, küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri, eğrilik yarıçapları, arasındaki bağıntılar hesaplanacaktır.

Teorem 3.1.1 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin şekil operatörlerine karşılık gelen matrisler arasında,

$$S^* = \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'} \right) S \quad (3.1.1)$$

bağıntısı vardır.

İspat. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel Darboux equidistant regle yüzeyleri,

$$\mathcal{S} : \varphi(t, v) = \gamma(t) + v.C(t), \quad (3.1.2)$$

$$\mathcal{S}^* : \varphi^*(t^*, v) = \gamma^*(t^*) + v.C^*(t^*) \quad (3.1.3)$$

parametrik ifadeleri verilsin. (2.1.8) ifadesinden $C(t)$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} C'(t) &= \theta' \cos \theta V_1 + \kappa \sin \theta V_2 - \theta' \sin \theta V_3 - \tau \cos \theta V_2 \\ &= \theta' \cos \theta V_1 + (\kappa \sin \theta - \tau \cos \theta) V_2 - \theta' \sin \theta V_3 \\ &= \theta' \cos \theta V_1 + \left(\kappa \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} - \tau \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \right) V_2 - \theta' \sin \theta V_3 \\ &= \theta' \cos \theta V_1 - \theta' \sin \theta V_3 \end{aligned}$$

olur. Striksiyon eğrisi ifadesinde C ve C^* ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= r(t) - \frac{\langle r'(t), C'(t) \rangle}{\|C'(t)\|^2} . C(t) \\ &= r(t) - \frac{\langle V_1, \theta' \cos \theta V_1 - \theta' \sin \theta V_3 \rangle}{(\theta')^2} . (\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) \\ &= r(t) - \frac{\cos \theta \sin \theta}{\theta'} V_1 - \frac{\cos^2 \theta}{\theta'} V_3 \\ &= r(t) - \frac{\cos \theta}{\theta'} C(t) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (3.1.2) de yerine yazılırsa, $\varphi(t, v)$ regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi(t, v) &= r(t) - \frac{\cos \theta}{\theta'} C(t) + v C(t) \\ &= r(t) + \left(\frac{\cos \theta}{\theta'} + v \right) C(t) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\varphi(t, v)$ yüzeyinin t ve v ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\varphi_t(t, v) &= V_1 + \left(\frac{\theta' \cdot \sin \theta + \theta'' \cdot \cos \theta}{(\theta')^2} \right) C(t) + \left(v - \frac{\cos \theta}{\theta'} \right) C'(t) \\
&= \left(1 + \frac{\theta' \cdot \sin^2 \theta + \theta'' \cdot \cos \theta \sin \theta}{(\theta')^2} - \cos^2 \theta + v\theta' \cos \theta \right) V_1 \\
&\quad + \left(\frac{\theta' \cdot \sin \theta \cos \theta + \theta'' \cdot \cos^2 \theta}{(\theta')^2} + \cos \theta \sin \theta - v\theta' \sin \theta \right) V_3, \\
\varphi_v(t, v) &= C(t) \\
&= \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3
\end{aligned}$$

olur. Bu vektörlerin iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_t, \varphi_v \rangle &= \sin \theta + \frac{\theta' \sin^3 \theta + \theta'' \sin^2 \theta \cos \theta}{(\theta')^2} - \sin \theta \cos^2 \theta + v\theta' \sin \theta \cos \theta \\
&\quad + \frac{\theta' \sin \theta \cos^2 \theta + \theta'' \cos^3 \theta}{(\theta')^2} + \cos^2 \theta \sin \theta - v\theta' \sin \theta \cos \theta \\
&= \sin \theta + \frac{\theta' \sin^3 \theta + \theta'' \sin^2 \theta \cos \theta}{(\theta')^2} + \frac{\theta' \sin \theta \cos^2 \theta + \theta'' \cos^3 \theta}{(\theta')^2} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

O halde φ_t ve φ_v vektörlerine Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$X = \varphi_v = C(t) = \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3, \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned}
Y &= \varphi_t - \frac{\langle \varphi_t, X \rangle}{\|X\|} X \\
&= \left(1 + \frac{\theta' \sin^2 \theta + \theta'' \cos \theta \sin \theta}{(\theta')^2} - \cos^2 \theta + v\theta' \cos \theta - \sin^2 \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta' \sin^4 \theta + \theta'' \sin^3 \theta \cos \theta + \theta' \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \theta'' \cos^3 \theta \sin \theta}{(\theta')^2} \right) V_1 \\
&\quad + \left(\frac{\theta' \sin \theta \cos \theta + \theta'' \cos^2 \theta}{(\theta')^2} + \cos \theta \sin \theta - v\theta' \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta' \sin^3 \theta \cos \theta + \theta'' \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \theta' \cos^3 \theta \sin \theta + \theta'' \cos^4 \theta}{(\theta')^2} \right) V_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\theta' \sin^2 \theta + \theta'' \cos \theta \sin \theta - \theta' \sin^4 \theta - \theta'' \sin^3 \theta \cos \theta}{(\theta')^2} + v\theta' \cos \theta \right) V_1 \\
&\quad + \left(\frac{\theta' \sin \theta \cos \theta + \theta'' \cos \theta - \theta' \sin^3 \theta \cos \theta}{(\theta')^2} - v\theta' \sin \theta \right) V_3 \\
&= \left(\frac{\theta' \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{(\theta')^2} + v\theta' \cos \theta \right) V_1 \\
&\quad + \left(\frac{\theta' \sin \theta \cos \theta (1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{(\theta')^2} - v\theta' \sin \theta \right) V_3 \\
&\qquad Y = v\theta' \cos \theta V_1 - v\theta' \sin \theta V_3 \tag{3.1.5}
\end{aligned}$$

bulunur. $\{X, Y\}$ sistemi bir ortogonal sistemdir. Bu sistem $\chi(\mathcal{S})$ uzayının bir bazıdır. \mathcal{S} yüzeyinin normal vektör alanı N ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}
N &= X \wedge Y \\
&= (\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) \wedge (v\theta' \cos \theta V_1 - v\theta' \sin \theta V_3) \\
&= v\theta' \sin^2 \theta V_2 + v \cos^2 \theta V_2 \\
&= v\theta' (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) V_2 \\
&= v\theta' V_2
\end{aligned}$$

olur. Yüzeyin birim normali N_0 ile gösterilirse

$$N_0 = \frac{N}{\|N\|} = V_2 \tag{3.1.6}$$

bulunur. \mathcal{S} regle yüzeyi üzerinde şekil operatörü

$$S : \chi(\mathcal{S}) \longrightarrow \chi(\mathcal{S})$$

lineer dönüşümü $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in R$ için,

$$\begin{aligned}
S(X) &= \lambda_1 X + \lambda_2 Y, \\
S(Y) &= \mu_1 X + \mu_2 Y \tag{3.1.7}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (2.1.9), (3.1.4) ve (3.1.5) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
S(X) &= D_X N_0 \\
&= D_{\varphi_v} N_0 \\
&= \frac{dN_0}{dv} \\
&= 0, \tag{3.1.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(Y) &= D_Y N_0 \\
&= D_{\varphi_t - \varphi_v} N_0 \\
&= D_{\varphi_t} N_0 - D_{\varphi_v} N_0 \\
&= \frac{dN_0}{dt} - \frac{dN_0}{dv} \\
&= \kappa V_1 + \tau V_3
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

olur. (3.1.8) ve (3.1.9) bağıntıları yardımıyla $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ skalarları,

$$\lambda_1 = \langle S(X), X \rangle = \langle 0, X \rangle = 0,$$

$$\lambda_2 = \langle S(X), Y \rangle = \langle 0, Y \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \langle S(Y), X \rangle \\
&= \langle -\kappa V_1 + \tau V_3, \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3 \rangle \\
&= -\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta \\
&= -\kappa \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \tau \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \langle S(Y), Y \rangle \\
&= \langle -\kappa V_1 + \tau V_3, v\theta' \cos \theta V_1 - v\theta' \sin \theta V_3 \rangle \\
&= -\kappa v\theta' \cos \theta - \tau v\theta' \sin \theta \\
&= -\kappa v\theta' \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} - \tau v\theta' \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\
&= -\frac{\kappa^2 v\theta' + \tau^2 v\theta'}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\
&= \frac{-v\theta'(\kappa^2 + \tau^2)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\
&= -v\theta' \cdot \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. S lineer dönüşümünün şekil operatörüne karşılık gelen matris S ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}
S &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v\theta' \cdot \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

olur. Buradan S nin asli eğrilikleri için

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -v\theta' \cdot \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \tag{3.1.11}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde \mathcal{S}^* regle yüzeyinin S^* şekil operatörü hesaplanır.

$$C^*(t) = \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*$$

vektörünün türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} C^{*'}(t^*) &= \theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* + \kappa^* \sin \theta^* V_2^* - \theta^{*'} \sin \theta^* V_3^* - \tau^* \cos \theta^* V_2^* \\ &= \theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* + (\kappa^* \sin \theta^* - \tau^* \cos \theta^*) V_2^* - \theta^{*'} \sin \theta^* V_3^* \\ &= \theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* + \left(\kappa^* \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \tau^* \frac{\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \right) V_2^* - \theta^{*'} \sin \theta^* V_3^* \\ &= \theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* - \theta^{*'} \sin \theta^* V_3^* \end{aligned}$$

olur. Bu ifade striksiyon denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \gamma(t^*) &= r^*(t) - \frac{\langle r^{*'}(t), C^{*'}(t) \rangle}{\|C^{*'}(t)\|^2} \cdot C^*(t) \\ &= r(t^*) - \frac{\langle V_1^*, \theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* - \theta^{*'} \sin \theta^* V_3^* \rangle}{(\theta^{*'})^2} \cdot (\sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*) \\ &= r(t^*) - \frac{\cos \theta^* \sin \theta^*}{\theta^{*'}} V_1^* - \frac{\cos^2 \theta^*}{\theta^{*'}} V_3^* \\ &= r(t^*) - \frac{\cos \theta^*}{\theta^{*'}} C^*(t^*) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade (3.1.3) bağıntısında yerine yazılırsa $\varphi^*(t^*, v)$ regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi^*(t^*, v) &= r^*(t^*) - \frac{\cos \theta^*}{\theta^{*'}} C^*(t) + v C^*(t) \\ &= r^*(t^*) + \left(\frac{\cos \theta^*}{\theta^{*'}} + v \right) C^*(t) \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi^*(t, v)$ yüzeyinin t^* ve v ye göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(t^*, v) &= V_1^* + \left(\frac{\theta^{*'} \cdot \sin \theta^* + \theta^{*''} \cdot \cos \theta^*}{(\theta^{*'})^2} \right) C^*(t) + \left(v - \frac{\cos \theta^*}{\theta^{*'}} \right) C^{*'}(t) \\ &= \left(1 + \frac{\theta^{*'} \cdot \sin^2 \theta^* + \theta^{*''} \cdot \cos \theta^* \sin \theta^*}{(\theta^{*'})^2} - \cos^2 \theta^* + v \theta' \cos \theta^* \right) V_1^* \\ &\quad + \left(\frac{\theta^{*'} \cdot \sin \theta^* \cos \theta^* + \theta^{*''} \cdot \cos^2 \theta^*}{(\theta^{*'})^2} + \cos \theta^* \sin \theta^* - v \theta^{*'} \sin \theta^* \right) V_3^* \quad (3.1.12) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_v^*(t^*, v) &= C^*(t) \\ &= \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^* \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$\varphi^*(t, v)$ yüzeyinde alınan $\varphi_t^*(t^*, v)$ ve $\varphi_v^*(t^*, v)$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_t^*, \varphi_v^* \rangle &= \sin \theta^* + \frac{\theta^{*'} \sin^3 \theta^* + \theta^{*''} \sin^2 \theta^* \cos \theta^*}{(\theta^{*'})^2} - \sin \theta^* \cos^2 \theta^* + v \theta^{*'} \sin \theta^* \cos \theta^* \\
&\quad + \frac{\theta^{*'} \sin \theta^* \cos^2 \theta^* + \theta^{*''} \cos^3 \theta^*}{(\theta^{*'})^2} + \cos^2 \theta^* \sin \theta^* - v \theta^{*'} \sin \theta^* \cos \theta^* \\
&= \sin \theta^* + \frac{\theta^{*'} \sin^3 \theta^* + \theta^{*''} \sin^2 \theta^* \cos \theta^*}{(\theta^{*'})^2} + \frac{\theta^{*'} \sin \theta^* \cos^2 \theta^* + \theta^{*''} \cos^3 \theta^*}{(\theta^{*'})^2} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

olur. O halde $\{\varphi_t^*, \varphi_v^*\}$ sistemine Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$X^* = \varphi_v^* = C^*(t) = \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*, \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned}
Y^* &= \left(1 + \frac{\theta^{*'} \sin^2 \theta^* + \theta^{*''} \cos \theta^* \sin \theta^*}{(\theta^{*'})^2} - \cos^2 \theta^* + v \theta^{*'} \cos \theta^* - \sin^2 \theta^* \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta^{*'} \sin^4 \theta^* + \theta^{*''} \sin^3 \theta^* \cos \theta^* + \theta^{*'} \cos^2 \theta^* \sin^2 \theta^* + \theta^{*''} \cos^3 \theta^* \sin \theta^*}{(\theta^{*'})^2} \right) V_1^* \\
&\quad + \left(\frac{\theta^{*'} \sin \theta^* \cos \theta^* + \theta^{*''} \cos^2 \theta^*}{(\theta^{*'})^2} + \cos \theta^* \sin \theta^* - v \theta^{*'} \sin \theta^* - \sin \theta^* \cos \theta^* \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta^{*'} \sin^3 \theta^* \cos \theta^* + \theta^{*''} \sin^2 \theta^* \cos^2 \theta^* + \theta^{*'} \cos^3 \theta^* \sin \theta^* + \theta^{*''} \cos^4 \theta^*}{(\theta^{*'})^2} \right) V_3^* \\
&= \left(\frac{\theta' \sin^2 \theta^* + \theta^{*''} \cos \theta^* \sin \theta^*}{(\theta^{*'})^2} - \frac{\theta^{*'} \sin^4 \theta^* - \theta^{*''} \sin^3 \theta^* \cos \theta^*}{(\theta^{*'})^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta^{*'} \cos^2 \theta^* \sin^2 \theta^* - \theta^{*''} \cos^3 \theta^* \sin \theta^*}{(\theta^{*'})^2} + v \theta^{*'} \cos \theta^* \right) V_1^* \\
&\quad + \left(\frac{\theta^{*'} \sin \theta^* \cos \theta^* + \theta^{*''} \cos \theta^*}{(\theta^{*'})^2} - \frac{\theta^{*'} \sin^3 \theta^* \cos \theta^* - \theta^{*''} \sin^2 \theta^* \cos^2 \theta^*}{(\theta^{*'})^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\theta^{*'} \cos^3 \theta^* \sin \theta^* - \theta^{*''} \cos^4 \theta^*}{(\theta^{*'})^2} - v \theta^{*'} \sin \theta^* \right) V_3^* \\
&= \left(\frac{\theta^{*'} \sin^2 \theta^* (1 - \sin^2 \theta^* - \cos^2 \theta^*)}{(\theta^{*'})^2} + \theta^{*''} \cos \theta^* \sin \theta^* (1 - \sin^2 \theta^* - \cos^2 \theta^*) \right. \\
&\quad \left. + v \theta^{*'} \cos \theta^* \right) V_1^* \\
&\quad + \left(\frac{\theta' \sin \theta^* \cos \theta^* (1 - \sin^2 \theta^* - \cos^2 \theta^*)}{(\theta^{*'})^2} + \theta^{*''} \cos^2 \theta^* (1 - \sin^2 \theta^* - \cos^2 \theta^*) \right. \\
&\quad \left. - v \theta^{*'} \sin \theta^* \right) V_3^* \\
Y^* &= v \theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* - v \theta^{*'} \sin \theta^* V_3^* \quad (3.1.15)
\end{aligned}$$

olur. o halde $\{X^*, Y^*\}$ ortogonal sistemi, $\chi^*(\mathcal{S}^*)$ uzayının bir bazıdır. \mathcal{S}^* nin normal vektör alanı N^* olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
N^* &= X^* \wedge Y^* \\
&= (\sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*) \wedge (v\theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* - v\theta^{*'} \sin \theta^* V_3^*) \\
&= v\theta^{*'} \sin^2 \theta^* V_2^* + v \cos^2 \theta^* V_2^* \\
&= v\theta^{*'} (\sin^2 \theta^* + \cos^2 \theta^*) V_2^* \\
&= v\theta^{*'} V_2^*
\end{aligned}$$

oolur. Yüzeyin birim normali N_0^* ile gösterilirse,

$$N_0^* = \frac{N^*}{\|N^*\|} = V_2^* \quad (3.1.16)$$

bulunur. \mathcal{S}^* regle yüzeyinin S^* şekil operatörü

$$S^* : \chi^*(\mathcal{S}^*) \longrightarrow \chi(\mathcal{S}^*)$$

lineer dönüşümü $a, b, c, d \in R$ için,

$$\begin{aligned}
S^*(X^*) &= aX^* + bY^*, \\
S^*(Y^*) &= cX^* + dY^*
\end{aligned} \quad (3.1.17)$$

şeklindedir. Burada (3.1.12), (3.1.13) ve (3.1.17) bağıntılarından $S^*(X^*)$ ve $S^*(Y^*)$

$$\begin{aligned}
S^*(X^*) &= D_{X^*} N_0^* \\
&= D_{\varphi_v^*} N_0^* \\
&= \frac{dN_0^*}{dv} \\
&= 0,
\end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\begin{aligned}
S^*(Y^*) &= D_{Y^*} N_0^* \\
&= D_{\varphi_{t^*} - \varphi_v} N_0^* \\
&= D_{\varphi_{t^*}} N_0^* - D_{\varphi_v} N_0^* \\
&= \frac{dN_0^*}{dt^*} - \frac{dN_0^*}{dv} \\
&= \kappa^* V_1^* + \tau^* V_3^*
\end{aligned} \quad (3.1.19)$$

şeklinde bulunur. (3.1.18) ve (3.1.19) bağıntılarından a, b, c, d skalarları,

$$\begin{aligned}
a &= \langle S^*(X^*), X^* \rangle = \langle 0, X^* \rangle = 0, \\
b &= \langle S^*(X^*), Y^* \rangle = \langle 0, Y^* \rangle = 0, \\
c &= \langle S^*(Y^*), X \rangle = \langle -\kappa^* V_1^* + \tau V_3^*, \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^* \rangle \\
&= -\kappa^* \sin \theta^* + \tau^* \cos \theta^* \\
&= -\kappa^* \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} + \tau^* \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \\
&= 0, \\
d &= \langle S^*(Y^*), Y^* \rangle \\
&= \langle -\kappa^* V_1 + \tau^* V_3^*, v\theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* - v\theta^{*'} \sin \theta^* V_3^* \rangle \\
&= -\kappa^* v\theta^{*'} \cos \theta^* - \tau^* v\theta^{*'} \sin \theta^* \\
&= -\kappa^* v\theta^{*'} \frac{\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} - \tau^* v\theta^{*'} \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \\
&= \frac{\kappa^{*2} v\theta^{*'} + \tau^{*2} v\theta^{*'}}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \\
&= \frac{-v\theta^{*'}(\kappa^{*2} + \tau^{*2})}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\
&= -v\theta^{*'} \cdot \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. S^* lineer dönüşümünün şekil operatörüne karşılık gelen matrisi S^* ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}
S^* &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v\theta^{*'} \cdot \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

olur. Buradan \mathcal{S}^* nin k^* ve k_2^* asli eğrilikleri

$$k_1^* = 0, \quad k_2^* = -v\theta^{*'} \cdot \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \tag{3.1.21}$$

şeklinde bulunur. k_2^* eşitliğinde (2.6.7) ve (2.6.8) bağıntıları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
k_2^* &= -v\theta^{*'} \cdot \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \\
&= -v(\alpha' + \theta') \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade (3.1.20) bağıntısında yerine yazılırsa

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v(\alpha' + \theta') \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan S ve S^* şekil operatörü matrisleri arasında,

$$\begin{aligned} S^* &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v\theta' \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{bmatrix}}_S + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(\frac{\alpha'}{\theta'}\right) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -v\theta' \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{bmatrix}}_S \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) S \end{aligned}$$

bağıntısı bulunur.

Teorem 3.1.2 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla, K ve K^* ; H ve H^* ile gösterilirse bu eğrilikler arasında,

$$\begin{aligned} K^* &= K = 0, \\ H^* &= H \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 - \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 v\alpha' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2.2.13), (3.1.10) ve (3.1.20) bağıntılarından,

$$K = \det S = 0,$$

$$K^* = \det S^* = 0$$

olur. Bu durumda

$$K = K^* = 0. \quad (3.1.23)$$

Benzer olarak, (2.2.14), (3.1.10) ve (3.1.20) bağıntılarından,

$$H = \dot{I}ZS = -v\theta' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \quad (3.1.24)$$

$$H^* = -v\theta^{*'} \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}$$

olur. Burada (2.6.7) ve (2.6.8) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} H^* &= -v(\alpha' + \theta') \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(H - v\alpha' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\right)^2 \\ &= H \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 - \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 v\alpha' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

şeklinde olur.

Bu neticeler doğrultusunda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.1 :

- i) \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyleri açılabilirlerdir.
- ii) α açısı sabit ise \mathcal{S} regle yüzeyi minimal ise \mathcal{S}^* regle yüzeyide de minimaldir.

Teorem 3.1.3 $\chi(\mathcal{S})$ deki bir Z vektör alanının $\chi(\mathcal{S}^*)$ uzayında olması için $Z = aX + bY$, $Z^* = a^*X^* + b^*Y^*$ ve $\overrightarrow{\gamma\gamma^*} = pV_1 + zV_2 + qV_3$ olmak üzere katsayılar arasında

$$\begin{aligned}a^* &= a - p \sin \theta - q \cos \theta, \\z &= 0, \\b^*v\theta^{*'} &= bv\theta' - p \cos \theta + q \sin \theta\end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

İspat. $\chi(\mathcal{S})$ deki bir Z vektör alanının $\chi(\mathcal{S}^*)$ uzayında olması için hangi şartlarda sağlanması gerektiğini araştıralım: $\chi(\mathcal{S}) = Sp\{X, Y\}$ ve $\chi(\mathcal{S}^*) = Sp\{X^*, Y^*\}$ olduklarından

$$\begin{aligned}X &= \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3, \\Y &= v\theta' \cos \theta V_1 - v\theta' \sin \theta V_3, \\X^* &= \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^*, \\Y^* &= v\theta^{*'} \cos \theta^* V_1^* - v\theta^{*'} \sin \theta^* V_3^*\end{aligned}$$

yazılabilir. $\sin \theta^*$ ve $\cos \theta^*$ yerine (2.6.7) ve (2.6.8) bağıntılarından değerleri yazılırsa

$$\begin{aligned}\sin \theta^* &= \frac{\tau^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \\&= \frac{(\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha) \left(\frac{dt}{dt^*}\right)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{dt}{dt^*}\right)} \\&= \frac{\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\&= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \sin \alpha + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \cos \alpha, \\&= \cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha \\&= \sin(\theta + \alpha),\end{aligned}\tag{3.1.26}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta^* &= \frac{\kappa^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \\
&= \frac{(\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \left(\frac{dt}{dt^*} \right)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{dt}{dt^*} \right)} \\
&= \frac{\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\
&= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \cos \alpha - \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \sin \alpha, \\
&= \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\
&= \cos(\theta + \alpha)
\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

olur. X^* ve Y^* vektörleri de (2.6.6), (2.6.7),(3.1.26) ve (3.1.27) bağıntılarından

$$\begin{aligned}
X^* &= \sin \theta^* V_1^* + \cos \theta^* V_3^* \\
&= (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)(\cos \alpha V_1 + \sin \alpha V_3) \\
&\quad + (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha)(-\sin \alpha V_1 + \cos \alpha V_3) \\
&= (\cos \theta \sin \alpha \cos \alpha - \cos \theta \cos \alpha \sin \alpha + \sin \theta \cos^2 \alpha + \sin \theta \sin^2 \alpha) V_1 \\
&\quad + (\cos \theta \sin^2 \alpha + \sin \theta \cos \alpha \sin \alpha + \cos \theta \cos^2 \alpha - \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha) V_3 \\
&= \sin \theta V_1 + \cos \theta V_3 \\
&= X,
\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

$$\begin{aligned}
Y^* &= v\theta'^* (\cos \theta^* V_1^* - \sin \theta^* V_3^*) \\
&= \frac{dt}{dt^*} v(\alpha' + \theta') \left((\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha)(\cos \alpha V_1 + \sin \alpha V_3) \right. \\
&\quad \left. - (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)(-\sin \alpha V_1 + \cos \alpha V_3) \right) \\
&= \frac{dt}{dt^*} v(\alpha' + \theta') \left((\cos \theta \cos^2 \alpha - \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha + \cos \theta \sin^2 \alpha + \sin \theta \cos \alpha \sin \alpha) V_1 \right. \\
&\quad \left. + (\cos \theta \cos \alpha \sin \alpha - \sin \theta \sin^2 \alpha - \cos \theta \sin \alpha \cos \alpha - \sin \theta \cos^2 \alpha) V_3 \right) \\
&= \frac{dt}{dt^*} v(\alpha' + \theta') (\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3) \\
&= \frac{dt}{dt^*} v\theta' (\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3) + \frac{dt}{dt^*} v\alpha' (\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3) \\
&= \frac{dt}{dt^*} Y + \frac{dt}{dt^*} v\alpha' (\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3) \\
&= \frac{dt}{dt^*} \left(Y + v\alpha' (\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3) \right)
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

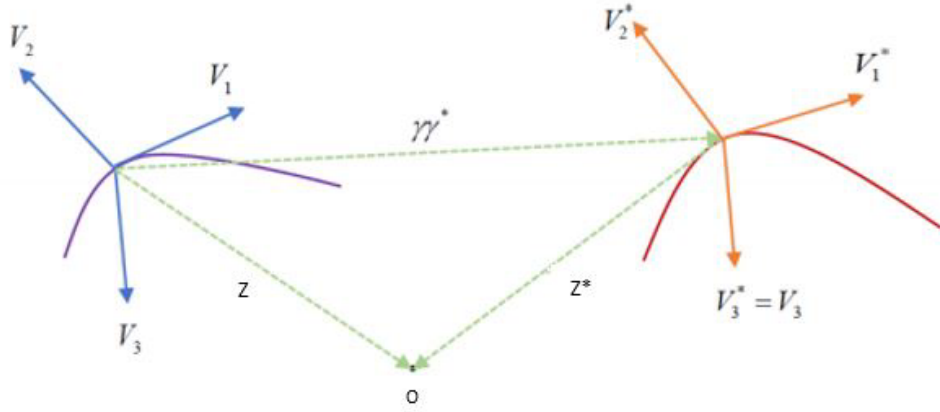
şeklinde bulunur. $Z \in \chi(\mathcal{S})$ vektörü için,

$$\begin{aligned}
Z &= aX + bY \\
&= a(\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) + b(v\theta' \cos \theta V_1 - v\theta' \sin \theta V_3) \\
&= (a \sin \theta + bv\theta' \cos \theta) V_1 + (a \cos \theta - bv\theta' \sin \theta) V_3
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

olur. Benzer şekilde $Z^* \in \chi(\mathcal{S}^*)$ vektörü için $\{X^*, Y^*\}$ bazına göre Z^* vektörü (3.1.28) ve (3.1.29) bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
Z^* &= a^* X^* + b^* Y^*, \quad a^*, b^* \in \mathbf{R}, \\
&= a^*(\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) + b^* \left(\frac{dt}{dt^*} \right) (Y + v \alpha' (\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3)) \\
&= a^*(\sin \theta V_1 + \cos \theta V_3) + b^* \left(\frac{dt}{dt^*} \right) v (\theta' + \alpha') (\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3) \quad (3.1.31) \\
&= (a^* \sin \theta + b^* v (\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \cos \theta) V_1 + (a^* \cos \theta - b^* v (\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \sin \theta) V_3
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.



Şekil 3.1: Z ve Z^* Vektörü

Şekil 3.1'den Z^* vektörü

$$Z^* = Z - \gamma \gamma^* \quad (3.1.32)$$

yazılır. Burada (3.1.30), (3.1.31) bağıntıları ve $\overrightarrow{\gamma \gamma^*} = pV_1 + zV_2 + qV_3$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$Z^* = Z - (pV_1 + zV_2 + qV_3)$$

$$\begin{aligned}
&(a^* \sin \theta + b^* v (\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \cos \theta) V_1 \\
&+ (a^* \cos \theta - b^* v (\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \sin \theta) V_3 \\
&= (a^* \sin \theta + b^* v (\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \cos \theta) V_1 \\
&+ (a^* \cos \theta - b^* v (\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \sin \theta) V_3 \\
&- pV_1 - zV_2 - qV_3 \\
&= (a \sin \theta + b \theta' v \cos \theta - p) V_1 - zV_2 \\
&+ (a \cos \theta - b \theta' v \sin \theta - p) V_3
\end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} a^* \sin \theta + b^* v(\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \cos \theta &= a \sin \theta + bv\theta' \cos \theta - p, \\ z &= 0, \\ a^* \cos \theta - b^* v(\theta' + \alpha') \frac{dt}{dt^*} \sin \theta &= a \cos \theta - bv\theta' \sin \theta - q \end{aligned}$$

ifadelerinden a^* ve $b^*v\theta'$ katsayıları

$$\begin{aligned} a^* &= a - p \sin \theta - q \cos \theta, \\ b^*v\theta^{*'} &= bv\theta' - p \cos \theta + q \sin \theta \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.4 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* regle yüzeylerin temel formları arasında,

$$I^{*q} = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^{2q-2} \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right)^{q-1} I^q, \quad 1 \leq q \leq 3 \quad (3.1.33)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2.1.10) bağıntısından $\forall Z, T \in \chi(\mathcal{S})$ için \mathcal{S} regle yüzeyinin $I.$, $II.$ ve $III.$ temel formları;

$$\begin{aligned} I(Z, T) &= \langle Z, T \rangle, \\ II(Z, T) &= \langle S(Z), T \rangle, \\ III(Z, T) &= \langle S^2(Z), T \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Benzer şekilde, \mathcal{S}^* regle yüzeyinin temel formları, sırasıyla, I^* , II^* , ve III^* ile gösterilirse (3.1.1) bağıntısından,

$$\begin{aligned} I^*(Z, T) &= \langle Z, T \rangle \\ &= I(Z, T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II^*(Z, T) &= \langle (S^*(Z), T) \rangle \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \langle (S(Z), T) \rangle \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) II(Z, T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} III^*(Z^*, T) &= \langle S^{*2}(Z), T \rangle \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right)^2 \langle S^2(Z), T \rangle \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right)^2 III(Z, T) \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

bulunur. (3.1.34) ve (3.1.35) bağıntılarından (3.1.33) şeklinde genel bir bağıntı elde edilir.

Teorem 3.1.5 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun. \mathcal{S} 'deki asli eğrilik doğrultuları \mathcal{S}^* 'da da asli eğrilik doğrultuları olması için gerek ve yeter şart α açısı sabittir.

İspat. \mathcal{S} 'deki asli eğrilik doğrultusu X olsun. Bu durumda

$$S(X) = kX$$

yazılır. (3.1.1) bağıntısından

$$\begin{aligned} S^*(X) &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) S(X) \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) kX \end{aligned}$$

olur. α açısı sabit olduğundan

$$S^*(X) = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 kX$$

bulunur. Bu ise X 'in \mathcal{S}^* 'in da asli eğrilik doğrultusu olduğunu gösterir. Tersine, \mathcal{S}^* 'in asli eğrilik doğrultusu Y olsun. Bu durumdan

$$S^*(Y) = \lambda Y$$

yazılır. (3.1.1) bağıntısından

$$\begin{aligned} S^*(Y) &= \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^2 \left(\frac{\theta' + \alpha'}{\theta'}\right) S^*(Y) \\ &= \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^2 \left(\frac{\theta' + \alpha'}{\theta'}\right) \lambda Y \end{aligned}$$

olur. α açısı sabit olduğundan

$$S^*(Y) = \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^2 \lambda Y$$

bulunur. Bu ise Y nin \mathcal{S} de de asli eğrilik doğrultusu olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.6 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun.

- i) α açısı sabit ise \mathcal{S} 'nin umbilik noktaları \mathcal{S}^* 'in da umbilik noktalarıdır.
- ii) \mathcal{S} 'nin flat(düzlemsel) noktaları \mathcal{S}^* 'in da flat noktalarıdır.

İspat.

i) P noktası \mathcal{S} 'nin bir umbilik noktası, şekil operatörü S olsun. Bu durumda $\exists \lambda \in \mathbf{R}; S = \lambda I_2$ yazılır. (3.1.1) bağıntısından,

$$\begin{aligned} S^*(X) &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) S(X) \\ &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \lambda I_2 \\ &= \underbrace{\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \lambda}_{\lambda_2} I_2 \\ &= \lambda_2 I_2, \quad \lambda_2 \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda P noktası \mathcal{S}^* 'in da umbilik noktasıdır.

ii) P, \mathcal{S} nin flat noktası olsun. Bu durumda,

$$S = 0$$

olur. (3.1.1) bağıntısından

$$\begin{aligned} S^*(X) &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) S(X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu halde P noktası \mathcal{S}^* 'in da flat noktasıdır.

Teorem 3.1.7 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun.

i) $\alpha \neq sbt$ olursa \mathcal{S} 'nin eşlenik tanjant vektörleri \mathcal{S}^* 'in da eşlenik tanjant vektörleridir.

ii) \mathcal{S} nin asimptotik doğrultuları \mathcal{S}^* 'in da asimptotik doğrultularıdır.

İspat.

i) $X_P, Y_P \in T_{\mathcal{S}} \in (P)$ eşlenik tanjant vektörleri için $\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$ olur. (3.1.1), (3.1.28) ve (3.1.29)

bağıntılarından,

$$\begin{aligned} \langle S(X_P), Y_P \rangle &= \left\langle \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^2 \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + \theta'}\right) S^*(X_P^*), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{dt^*}{dt}\right) (-v\alpha'(\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3)) Y_P^* - \left(\frac{dt^*}{dt}\right) (Y_P^*) \right\rangle \\ &= \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^3 \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + \theta'}\right) \langle S^*(X_P^*), (Y_P^*) \rangle \end{aligned}$$

olur ve

$$\alpha' \neq 0 \Rightarrow \langle S^*(X_P^*), Y_P^* \rangle = 0$$

bulunur. Yani, α' 'nin sabit olmaması durumunda X_P ve Y_P \mathcal{S}^* 'in eşlenik tanjant vektörleridir.

ii) X_P , \mathcal{S} 'nin asimptotik doğrultusu ise,

$$\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$$

yazılır. Burada (3.1.1) ve (3.1.28) bağıntıları yerine yazılırsa,

$$\left\langle \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^2 \left(\frac{\alpha'}{\alpha' + \theta'}\right) S^*(X_P), X_P \right\rangle = 0,$$

ve

$$\langle S^*(X_P), X_P \rangle = 0$$

bulunur. Bu ise X_P 'nin \mathcal{S}^* 'in da asimptotik doğrultusu olması demektir.

Sonuç 3.1.2: \mathcal{S} 'nin asimptotik çizgileri \mathcal{S}^* 'in da asimptotik çizgileridir.

Teorem 3.1.8 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin şekil operatörlerine karşılık gelen matrislerin karakteristik polinomları $P_S(\lambda)$ ve $P_{S^*}(\lambda)$ ise bu polinomlar arasında

$$P_{S^*}(\lambda) = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 P_S(\lambda) + \lambda^2 \left(1 - \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2\right) + v\alpha'\lambda\sqrt{k^2 + \tau^2} \quad (3.1.36)$$

bağıntısı vardır.

İspat. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* regle yüzeylerine karşılık gelen şekil operatörlerinin matrisleri, sırasıyla, S ve S^* olsun. Karakteristik polinomları,

$$P_S(\lambda) = \lambda^2 - (k_1 + k_2)\lambda + (k_1.k_2)$$

ve

$$P_{S^*}(\lambda) = \lambda^2 - (k_1^* + k_2^*)\lambda + (k_1^*.k_2^*).$$

şeklinde yazılır. Burada, $H = k_1 + k_2$, $H^* = k_1^* + k_2^*$, $K = k_1.k_2 = 0$ ve $K^* = k_1^*.k_2^* = 0$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_S(\lambda) &= -H\lambda + \lambda^2, \\ P_{S^*}(\lambda) &= -H^*\lambda + \lambda^2 \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

olur. (3.1.22) bağıntısı bu ifade de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_{S^*}(\lambda) &= \lambda^2 - \left(H \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \lambda - \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 v \alpha' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right) \lambda, \\
&= \lambda^2 + \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \left(-H \lambda + v \alpha' \lambda \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right), \\
&= \lambda^2 + \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \left(-H \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 + v \alpha' \lambda \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right) \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \left((P_S(\lambda)) - \lambda^2 + v \alpha' \lambda \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right) + \lambda^2 \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 P_S(\lambda) + \lambda^2 \left(1 - \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \right) + v \alpha' \lambda \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.9 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerinin şekil operatörlerine karşılık gelen matrislerin karakteristik polinomları arasında

$$P_{S^*}(S^*) = \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'} \right) (P_S(S) + S v \alpha' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}) \quad (3.1.38)$$

bağıntısı vardır ve $\left(\frac{dt}{dt^*} \right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'} \right) S v \alpha' \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 0$ dır.

İspat. (3.1.37) bağıntısı ve Cayley Hamilton teoreminden,

$$P_S(S) = S^2 - SH = 0$$

$$P_{S^*}(S^*) = S^{*2} - S^* H^* = 0 \quad (3.1.39)$$

dir. Burada (3.1.1) ve (3.1.22) bağıntıları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_{S^*}(S^*) &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right)^2 S^2 - \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) S \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 (H - v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}) \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) S^2 - \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) S (H - v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}) \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) (S^2 - S(H - v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2})) \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) (S^2 - SH - Sv\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}) \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) (P_S(S) + Sv\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}) \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) P_S(S) + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) Sv\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $P_S(S) = 0$ olduğundan

$$P_{S^*}(S^*) = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) P_S(S) = 0$$

ve

$$\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) Sv\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 0.$$

Teorem 3.1.10 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerinin temel formları ve ortalama eğrilikleri arasında

$$III^* - H^*II^* = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) (III - HII) + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \equiv 0$$

bağıntısı vardır. Burada $\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 0$ dir.

İspat. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin $I.$, $II.$, $III.$ temel formları, ortalama ve Gauss eğrilikleri arasında

$$\begin{aligned}
III - HII + KI &\equiv 0, \\
III^* - H^*II^* + K^*I^* &\equiv 0
\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

bağıntıları vardır. Burada (3.1.35) ve (3.1.22) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
III^* - H^*II^* &= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) III - \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) (H - v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}) \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) II \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) III - \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) HIII + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) (III - HIII) + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \\
&\equiv 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^4 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) v\alpha'\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.11 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerinin türev operatörleri arasında

$$D_{X^*}^* Y^* = \left(\frac{dt}{dt^*}\right) D_X Y + \left(\frac{dt}{dt^*}\right) \bar{D}_X M - \langle S(X), Y \rangle V_2 + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \langle S(X), Y + M \rangle V_2 \quad (3.1.41)$$

bağıntısı vardır. Burada $M = v\alpha'(\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3)$ dir.

İspat. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin birim normaleri sırasıyla $N_0 = V_2$ ve $N_0^* = V_2^*$ dir. E^3 'in Riemann konneksiyonu \bar{D} , \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* daki türev operatörleri de, sırasıyla, D ve D^* ile gösterilirse, yüzeylerin Gauss denklemleri,

$$D_X Y = \bar{D}_X Y + \langle S(X), Y \rangle V_2, \quad (3.1.42)$$

$$D_{X^*}^* Y^* = \bar{D}_{X^*}^* Y^* + \langle S^*(X^*), Y^* \rangle V_2^* \quad (3.1.43)$$

şeklinde yazılır. Burada (2.6.6), (3.1.1), (3.1.28), (3.1.29) ve $M = v\alpha'(\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3)$ bağıntıları dikkate alınır

$$\begin{aligned}
D_{X^*}^* Y^* &= \bar{D}_X \left(\left(\frac{dt}{dt^*}\right) Y + v\alpha'(\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3) \right) \\
&\quad + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \langle S(X), \left(\frac{dt}{dt^*}\right) (Y + v\alpha'(\cos \theta V_1 - \sin \theta V_3)) \rangle V_2 \\
&= \bar{D}_X \left(\left(\frac{dt}{dt^*}\right) Y + M \right) + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \langle S(X), \left(\frac{dt}{dt^*}\right) (Y + M) \rangle V_2 \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right) \bar{D}_X Y + \left(\frac{dt}{dt^*}\right) \bar{D}_X M + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \langle S(X), Y + M \rangle V_2
\end{aligned}$$

Burada (3.1.42) bağıntısı yerine yazılırsa

$$D_{X^*}^* Y^* = D_X Y + \bar{D}_X M - \langle S(X), Y \rangle V_2 + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \langle S(X), Y + M \rangle V_2$$

elde edilir.

Teorem 3.1.12 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun. α eğrisi \mathcal{S} de asimptotik ve geodezik ise \mathcal{S}^* da geodezik olması için gerek ve yeter şart $\overline{D}_T T = 0$ olmasıdır.

İspat. α eğrisinin teğeti T olsun. α , \mathcal{S} de asimptotik ve geodezik ise,

$$\langle S(T), T \rangle = 0$$

ve

$$D_T T = 0.$$

(3.1.41) bağıntısından $D_T^* T$ ifadesi

$$D_T^* T = D_T T - \langle S(T), T \rangle V_2 + \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^3 \left(1 + \frac{\alpha'}{\theta'}\right) \left(\langle S(T), T \rangle V_2\right) + \overline{D}_T T = 0$$

şeklinde bulunur. $\overline{D}_T T = 0$ olursa $D_T^* T = 0$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.13 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin küresel göstergelerinin yay uzunlukları arasında

$$\begin{aligned} S_{V_1^*} &= \cos \alpha S_{V_1} - \sin \alpha S_{V_3} \\ S_{V_2^*} &= S_{V_2} \\ S_{V_3^*} &= \sin \alpha S_{V_1} + \cos \alpha S_{V_3} \end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Burada α açısı sabittir.

İspat. (V_1) eğrisinin yay uzunluğu S_{V_1} ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} S_{V_1} &= \int_0^t \left\| \frac{dV_1}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \|dV_1'\| dt \\ &= \int_0^t \kappa dt, \end{aligned}$$

(V_2) eğrisinin yay uzunluğu S_{V_2} ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} S_{V_2} &= \int_0^t \left\| \frac{dV_2}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \|dV_2'\| dt \\ &= \int_0^t \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} dt, \end{aligned}$$

V_3 eğrisinin yay uzunluğu, S_{V_3} ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} S_{V_3} &= \int_0^t \left\| \frac{dV_3}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \|dV_3'\| dt \\ &= \int_0^t \tau dt, \end{aligned}$$

şeklinde bulunur (Hacısalıhoğlu, 1983). Benzer şekilde,

(V_1^*) eğrisinin yay uzunluğu $S_{V_1^*}$ ile gösterilir ve α açısı sabit alınırsa,

$$\begin{aligned} S_{V_1^*} &= \int_0^t \left\| \frac{dV_1^*}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \left\| \frac{dV_1^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \left\| V_1^{*'} \frac{dt^*}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \kappa^* dt^*, \\ &= \int_0^t (\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) dt \\ &= \int_0^t \kappa \cos \alpha dt - \int_0^t \tau \sin \alpha dt \\ &= \cos \alpha \int_0^t \kappa dt - \sin \alpha \int_0^t \tau dt \\ &= \cos \alpha S_{V_1} - \sin \alpha S_{V_3} \end{aligned}$$

olur.

(V_2^*) eğrisinin yay uzunluğu $S_{V_2^*}$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} S_{V_2^*} &= \int_0^t \left\| \frac{dV_2^*}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \left\| \frac{dV_2^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \left\| V_2^{*'} \frac{dt^*}{dt} \right\| dt \\ &= \int_0^t \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} dt^* \\ &= \int_0^t \sqrt{(\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha)^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2 + (\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha)^2 \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2} dt^* \\ &= \int_0^t \sqrt{\kappa^2 \cos^2 \alpha - 2\kappa\tau \cos \alpha \sin \alpha + \tau^2 \sin^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha + 2\kappa\tau \sin \alpha \cos \alpha + \tau^2 \cos^2 \alpha} dt \\ &= \int_0^t \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} dt \\ &= S_{V_2} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

◇ (V_3^*) eğrisinin yay uzunluğu $S_{V_3^*}$ ile gösterilir ve α açısı sabit olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
S_{V_3^*} &= \int_0^t \left\| \frac{dV_3^*}{dt} \right\| dt \\
&= \int_0^t \left\| \frac{dV_3^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} \right\| dt \\
&= \int_0^t \left\| V_3^{*'} \frac{dt^*}{dt} \right\| dt \\
&= \int_0^t \tau^* dt^* \\
&= \int_0^t (\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha) \frac{dt^*}{dt} dt \\
&= \int_0^t \kappa \sin \alpha dt + \int_0^t \tau \cos \alpha dt \\
&= \sin \alpha \int_0^t \kappa dt + \cos \alpha \int_0^t \tau dt \\
&= \sin \alpha S_{V_1} + \cos \alpha S_{V_3}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.14 E^3 de, \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyleri verilsin. V_1 ve V_1^* üretici vektörlerinin küresel gösterge eğrilikleri ve eğrilik yarıçapları sırasıyla κ_{V_1} , $\kappa_{V_1^*}$ ve ρ_{V_1} , $\rho_{V_1^*}$ olarak gösterilsin. küresel gösterge eğrilikleri ve eğrilik yarıçapları arasında

$$\kappa_{V_1^*} = \frac{\kappa \kappa_{V_1}}{\kappa^*} \frac{dt}{dt^*},$$

$$\rho_{V_1^*} = \frac{\rho_{V_1} \kappa^*}{\kappa} \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntısı vardır.

İspat.

\mathcal{S} regle yüzeyinin $r = r(t)$ dayanak eğrisinin türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{dr}{dt}, \\
V_1' &= \kappa V_2, \\
V_1'' &= -\kappa^2 V_1 + \kappa' V_2 + \kappa \tau V_3.
\end{aligned}$$

(V_1) eğrisinin eğriliği κ_{V_1} ile gösterilsin.

$$\kappa_{V_1} = \frac{\|V_1' \wedge V_1''\|}{\|V_1'\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa},$$

Darboux vektörü, $W = \tau V_1 + \kappa V_3$ olduğundan, (V_1) üretici vektörünün küresel gösterge eğrisinin eğriliği,

$$\kappa_{V_1} = \frac{\|W\|}{\kappa}$$

ve eğrilik yarıçap fonksiyonu da, ρ_{V_1} ile gösterilirse

$$\rho_{V_1} = \frac{\kappa}{\|W\|} = \frac{1}{\kappa_{V_1}}$$

bulunur (Zenciroğlu, 1988).

\mathcal{S}^* regle yüzeyinin $r^* = r^*(t)$ dayanak eğrisinin türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{dr^*}{dt^*}, \\ V_1^{*'} &= \kappa^* V_2^*, \\ V_1^{*''} &= -\kappa^{*2} V_1^* + \kappa^{*'} V_2^* + \kappa^* \tau^* V_3^* \end{aligned}$$

ve $\|V_1^{*'} \wedge V_1^{*''}\| = \kappa^{*2} \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}$ bulunur. Eğrilik fonksiyonu $\kappa_{V_1^*}$ ile gösterilsin,

$$\begin{aligned} \kappa_{V_1^*} &= \frac{\|V_1^{*'} \wedge V_1^{*''}\|}{\|V_1^{*'}\|^3} \\ &= \frac{\kappa^{*2} \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}{\kappa^{*3}} \\ &= \frac{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}}{\kappa^*} \end{aligned}$$

bulunur. Burada (2.6.8) ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \kappa_{V_1^*} &= \frac{\sqrt{\kappa^2 \cos^2 \alpha - 2\kappa\tau \cos \alpha \sin \alpha + \tau^2 \sin^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha + 2\kappa\tau \sin \alpha \cos \alpha + \tau^2 \cos^2 \alpha}}{(\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \frac{dt}{dt^*}} \\ &= \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha} \\ &= \frac{\kappa_{V_1}}{\cos \alpha - \frac{\tau}{\kappa} \sin \alpha} \\ &= \frac{\kappa \kappa_{V_1}}{\kappa^*} \frac{dt}{dt^*} \end{aligned}$$

olur. Eğrilik yarıçapı da $\rho_{V_1^*}$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}\rho_{V_1^*} &= \frac{1}{\kappa_{V_1^*}} \\ &= \frac{\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \\ &= \frac{\rho_{V_1} \kappa^* dt^*}{\kappa dt}\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.15 E^3 de, \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyleri verilsin. V_2 ve V_2^* merkezi normal vektörlerinin küresel gösterge eğrilikleri ve eğrilik yarıçapları sırasıyla κ_{V_2} , $\kappa_{V_2^*}$ ve ρ_{V_2} , $\rho_{V_2^*}$ olarak gösterilsin. küresel gösterge eğrilikleri ve eğrilik yarıçapları arasında

$$\begin{aligned}\kappa_{V_2^*} &= \kappa_{V_2} \\ \rho_{V_2^*} &= \rho_{V_2}\end{aligned}$$

bağıntısı vardır.

İspat.

(V_2) merkezi normal vektörünün küresel gösterge eğrisinin birinci ve ikinci türevi alınırsa

$$\begin{aligned}V_2' &= -\kappa V_1 + \tau V_3, \\ V_2'' &= -\kappa' V_1 - (\kappa^2 + \tau^2) V_2 + \tau' V_3\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$V_2' \wedge V_2'' = -\tau(\kappa^2 + \tau^2)V_1 + (-\kappa'\tau + \kappa\tau')V_2 + \kappa(\kappa^2 + \tau^2)V_3,$$

$$\|V_2' \wedge V_2''\| = \sqrt{\|W\|^6 + (-\kappa'\tau + \kappa\tau')^2}, \quad \|W\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2},$$

$$\|V_2'\|^3 = \|W\|^3$$

bulunur. Eğrilik fonksiyonu κ_{V_2} ve eğrilik yarıçapı ρ_{V_2} ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}\kappa_{V_2} &= \frac{\|V_2' \wedge V_2''\|}{\|V_2'\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\|W\|^6 + (-\kappa'\tau + \kappa\tau')^2}}{\|W\|^3},\end{aligned}$$

$$\rho_{V_2} = \frac{\|W\|^3}{\sqrt{\|W\|^6 + (-\kappa'\tau + \kappa\tau')^2}}$$

bulunur (Zenciroğlu, 1988).

(V_2^*) merkezi normal vektörünün küresel gösterge eğrisinin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} V_2^{*'} &= -\kappa^* V_1^* + \tau^* V_3^*, \\ V_2^{*''} &= -\kappa^{*'} V_1^* - (\kappa^{*2} + \tau^{*2}) V_2^* + \tau^{*'} V_3^* \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \|V_2^{*'}\|^3 &= (\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{\frac{3}{2}}, \\ \|W^*\| &= \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \end{aligned}$$

bulunur. Eğrilik fonksiyonu $\kappa_{V_2^*}$ ile gösterilir

$$\begin{aligned} \kappa_{V_2^*} &= \frac{\|V_2^{*'} \wedge V_2^{*''}\|}{\|V_2^{*'}\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\|W^*\|^6 + (-\kappa^{*'}\tau^* + \kappa^*\tau^{*'})^2}}{\|W^*\|^3} \end{aligned}$$

olur. Burada (2.6.8) bağıntısı yerine yazılır ve $\frac{dt}{dt^*} = sbt.$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} \kappa_{V_2^*} &= \frac{\left(\frac{dt^*}{dt}\right)^3 \sqrt{\|W^*\|^6 + (-\kappa^{*'}\tau^* + \kappa^*\tau^{*'})^2}}{\left(\frac{dt^*}{dt}\right)^3 \|W^*\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{\|W^*\|^6 \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^6 + \left(\frac{dt^*}{dt}\right)^6 (-\kappa^{*'}\tau^* + \kappa^*\tau^{*'})^2}}{\left(\frac{dt^*}{dt}\right)^3 \|W^*\|^3} \end{aligned}$$

bulunur. Burada W^* , κ^* ve τ^* ifadeleri

$$\begin{aligned} \|W^*\| &= \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}} \\ &= \underbrace{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}_{\|W\|} \frac{dt}{dt^*} \\ &= \|W\| \frac{dt}{dt^*}, \end{aligned}$$

$$\kappa^* = (\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \frac{dt}{dt^*} \Rightarrow$$

$$\kappa^{*'} = (\kappa' \cos \alpha - \kappa \sin \alpha \alpha' - \tau \sin \alpha - \tau \cos \alpha \alpha') \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2$$

$$\tau^* = (\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha) \frac{dt}{dt^*} \Rightarrow$$

$$\tau^{*'} = (\kappa' \sin \alpha + \kappa \cos \alpha \alpha' + \tau' \cos \alpha - \tau \sin \alpha \alpha') \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2$$

$$-\kappa^{*'} \tau^* + \tau^{*'} \kappa^* = \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^3 (\kappa' \tau + \kappa^2 \alpha' + \kappa \tau' + \tau^2 \alpha')$$

şeklindedir. Bu değerler (3.1.44) de yerine yazılıp $\frac{dt}{dt^*} = sbt$ ve $\alpha' = sbt$ olarak alınır

$$\kappa_{V_2^*} = \frac{\sqrt{\|W\|^6 + (-\kappa' \tau + \tau' \kappa)^2}}{\|W\|^3}$$

olur. Buradan

$$\kappa_{V_2^*} = \kappa_{V_2}$$

ve

$$\rho_{V_2^*} = \rho_{V_2}$$

bulunur.

Teorem 3.1.16 E^3 de, \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyleri verilsin. V_3 ve V_3^* merkezi teğet vektörlerinin küresel gösterge eğrilikleri ve eğrilik yarıçapları sırasıyla κ_{V_3} , $\kappa_{V_3^*}$ ve ρ_{V_3} , $\rho_{V_3^*}$ olarak gösterilsin. küresel gösterge eğrilikleri ve eğrilik yarıçapları arasında

$$\kappa_{V_3^*} = \frac{\kappa_{V_3} \tau}{\tau^*} \frac{dt}{dt^*},$$

$$\rho_{V_3^*} = \frac{\rho_{V_3} \tau^*}{\tau} \frac{dt^*}{dt}$$

bağıntısı vardır.

İspat.

(V_3) Merkezi teğet vektörünün küresel gösterge eğrisinin birinci ve ikinci türevi alınır

$$V_3' = -\tau V_2,$$

$$V_3'' = \kappa \tau V_1 - \tau' V_2 - \tau^2 V_3$$

olur. Buradan

$$V_3' \wedge V_3'' = \tau^3 V_1 + \kappa \tau^2 V_3,$$

$$\|V_3' \wedge V_3''\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \tau^2 = \tau^2 \|W\|$$

bulunur. Eğrilik fonksiyonu κ_{V_3} ve eğrilik yarıçapı ρ_{V_3} ile gösterilse,

$$\begin{aligned} \kappa_{V_3} &= \frac{V_3' \wedge V_3''}{\|V_3\|^3} \\ &= \frac{\tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau^3} \\ &= \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\tau} \\ &= \frac{\|W\|}{\tau}, \end{aligned}$$

ve W Darboux vektörü ile V_3 vektörü arasındaki açı θ ile gösterilirse,

$$\rho_{V_3} = \frac{\tau}{\|W\|} \sin \theta$$

bulunur (Zenciroğlu, 1988).

(V_3^*) gösterge eğrisinin sırasıyla birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} V_3^{*'} &= \tau' V_2^*, \\ V_3^{*''} &= \kappa^* \tau^* V_1^* - \tau^{*'} V_2^* - \tau^{*2} V_3^* \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$V_3^{*'} \wedge V_3^{*''} = \tau^{*3} V_1^* + \kappa^* \tau^{*2} V_3^*,$$

$$\|V_3^{*'} \wedge V_3^{*''}\| = \tau^{*2} \|W^*\|,$$

$$\|W^*\| = \sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}$$

bulunur. (V_3^*) eğriisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa_{V_3^*}$ ve eğrilik yarıçapı fonksiyonu $\rho_{V_3^*}$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}\kappa_{V_3^*} &= \frac{\|V_3^{*'} \wedge V_3^{*''}\|}{\|V_3^{*'}\|^3} \\ &= \frac{\tau^{*2}\|W^*\|}{\tau^{*3}} \\ &= \frac{\|W^*\|}{\tau^*}\end{aligned}$$

dir. Burada (2.6.8) ve (3.1.44) bağıntıları ve $\tau^* = (\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha)\left(\frac{dt}{dt^*}\right)$, $\|W^*\| = \|W\|\frac{dt}{dt^*}$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\kappa_{V_3^*} &= \frac{\|W\|\frac{dt}{dt^*}}{(\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha)\frac{dt}{dt^*}} \\ &= \frac{\|W\|}{\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha} \\ &= \frac{\kappa_{V_3}}{\frac{\kappa}{\tau} \sin \alpha + \cos \alpha} \\ &= \frac{\kappa_{V_3} \tau}{\tau^*} \frac{dt}{dt^*}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho_{V_3^*} &= \frac{1}{\kappa_{V_3^*}} \\ &= \frac{\kappa \sin \alpha + \tau \cos \alpha}{\|W\|} \\ &= \frac{\rho_{V_3^*} \tau^*}{\tau} \frac{dt^*}{dt}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* yüzeylerinin dayanak eğrileri sırasıyla

$$r(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right)$$

ve

$$r^*(t) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \frac{\sqrt{6}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right)$$

olsun. r ve r^* eğrilerinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= (\cos(\sqrt{3}t), 0, -\sin(\sqrt{3}t)), \\
V_2(t) &= (-\sin(\sqrt{3}t), 0, -\cos(\sqrt{3}t)), \\
V_3(t) &= (0, 1, 0), \\
k_1(t) &= \sqrt{3}, \\
k_2(t) &= 0, \\
\\
V_1^*(t) &= (\cos(\sqrt{3}t), 0, -\sin(\sqrt{3}t)), \\
V_2^*(t) &= (-\sin(\sqrt{3}t), 0, -\cos(\sqrt{3}t)), \\
V_3^*(t) &= (0, 1, 0), \\
k_1^*(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
k_2^*(t) &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan C ve C^* vektörleri $C = (0, \sqrt{3}, 0)$ ve $C^* = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ olur. Bu vektörlerin oluşturduğu regle yüzeyler sırasıyla

$$\begin{aligned}
\varphi_C(t, v) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right) + v(0, \sqrt{3}, 0), \\
\varphi_{C^*}(t, v) &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \frac{\sqrt{6}}{3}, 2\frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right) + v\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $\varphi_C(t, v)$ ve $\varphi_{C^*}(t, v)$ regle yüzeyinin $\gamma(t)$ ve $\gamma^*(t)$ striksiyon çizgileri

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= r(t) - \cos\theta \frac{dt}{d\theta} C(t) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right) - \cos\theta \frac{dt}{d\theta} (0, \sqrt{3}, 0) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \sqrt{2} - \sqrt{3} \cos\theta \frac{dt}{d\theta}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^*(t) &= r^*(t) - \cos\theta^* \frac{dt}{d\theta^*} C^*(t), \\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right) - \cos\theta^* \frac{dt}{d\theta^*} \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta^* \frac{dt}{d\theta^*}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)\right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\gamma\gamma^* = \gamma^* - \gamma$ olduğundan

$$\gamma\gamma^* = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta^* \frac{dt}{d\theta^*} + \sqrt{3} \cos\theta \frac{dt}{d\theta}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t) \right)$$

olur. Burada

$$\cos\theta = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} = 1,$$

$$\cos\theta^* = \frac{k_1^*}{\sqrt{k_1^{*2} + k_2^{*2}}} = 1$$

olur. γ , γ^* ve $\gamma\gamma^*$ eşitlikleri

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \sqrt{2} - \sqrt{3} \frac{dt}{d\theta}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t) \right),$$

$$\gamma^*(t) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dt}{d\theta^*}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t) \right),$$

$$\gamma\gamma^*(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), \frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dt}{d\theta^*} + \sqrt{3} \frac{dt}{d\theta}, \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t) \right)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda polar düzlemler arasındaki uzaklık p ve asimptotik düzlemler arasındaki uzaklık q ile gösterilirse,

$$p = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t),$$

$$q = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t)$$

olur. Merkezi düzlemler arasındaki d uzaklığı Teorem 2.6.5 den,

$$\begin{aligned} d &= \frac{k_1 * \left(1 + p' - \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) - k_2 \left(q' + \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)}{k_1^2 + k_2^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}(1 + \cos(\sqrt{3}t) - 1) - 0}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

olur. Merkezi düzlemler sırasıyla $H = Sp\{V_1, V_3\}$ ve $H^* = Sp\{V_1^*, V_3^*\}$ ile gösterilirse bu düzlemlerin denklemleri

$X \in H$ için

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{\gamma X}, \overrightarrow{C} \rangle &= 0 \\ \left\langle \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), y - \sqrt{2} + \sqrt{3} \frac{dt}{d\theta}, z - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t) \right), (0, \sqrt{3}, 0) \right\rangle &= 0 \\ y\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3 \frac{dt}{d\theta} &= 0 \end{aligned}$$

$$H...y\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3\frac{dt}{d\theta} = 0,$$

$X^* \in H^*$ için,

$$\langle \overrightarrow{\gamma^* X^*}, \overrightarrow{C^*} \rangle = 0,$$

$$\left\langle \left(x^* - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t), y^* - \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dt}{d\theta^*}, z^* - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos(\sqrt{3}t) \right) \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \right\rangle = 0,$$

$$y^* \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{18}}{6} + \frac{3}{2} \frac{dt}{d\theta^*} = 0$$

$$y^* 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3 \frac{dt}{d\theta^*} = 0$$

$$H^* ... y^* 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3 \frac{dt}{d\theta^*} = 0$$

şeklinde bulunur.

$t = 0$ için γ ve γ^* striksiyon noktaları ve d uzaklığı

$$\gamma(0) = \left(0, \sqrt{2} - \sqrt{3} \frac{dt}{d\theta}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\gamma^*(0) = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dt}{d\theta^*}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

olur. Açıkılır ki striksiyon noktasında Darboux vektörler birbirine paraleldir. Merkezi düzlemlere ait iki nokta A ve B olsun. Bu noktalar düzlem denklemini sağlar. Yani

$$A\left(0, \sqrt{2} - \sqrt{3} \frac{dt}{d\theta}, 0\right) \in H,$$

$$B\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dt}{d\theta^*}, 0\right) \in H^*$$

olur. A ve B noktaları arasındaki uzaklık $\frac{\sqrt{3}}{3}$ olduğundan

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \left| \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dt}{d\theta^*} - \sqrt{2} + \sqrt{3} \frac{dt}{d\theta} \right|,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{6} \frac{dt}{d\theta^*} - 6 \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{6} \frac{dt}{d\theta},$$

$$2\sqrt{3} = 2\sqrt{6} - 3\sqrt{3} \frac{dt}{d\theta^*} - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} \frac{dt}{d\theta}$$

olur. Buradan

$$\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\frac{dt}{d\theta} - \frac{dt}{d\theta^*}$$

bulunur. Bu ifadeden

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3},$$
$$\frac{dt}{d\theta^*} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

olarak alınırsa A ve B noktaları

$$A(0, \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}, 0),$$

$$B(0, \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}, 0)$$

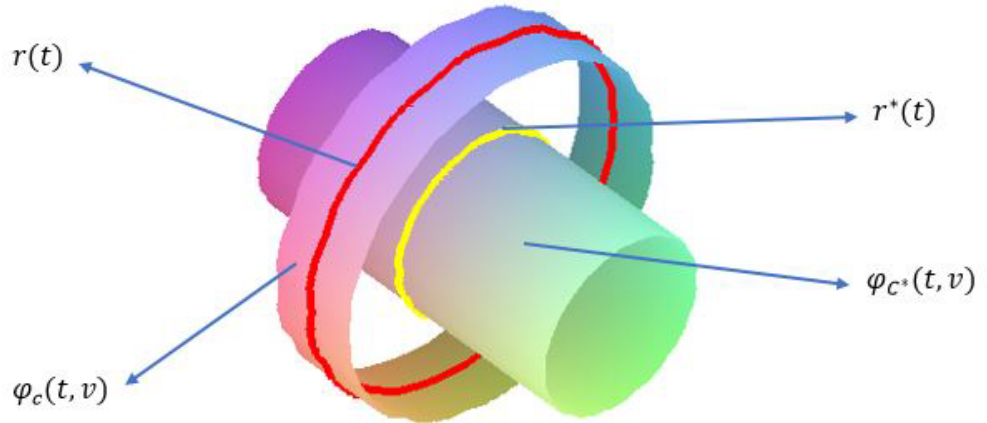
şeklinde olur. Bu noktalar Striksiyon ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\gamma(0) = (0, \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1, \frac{\sqrt{3}}{3}),$$

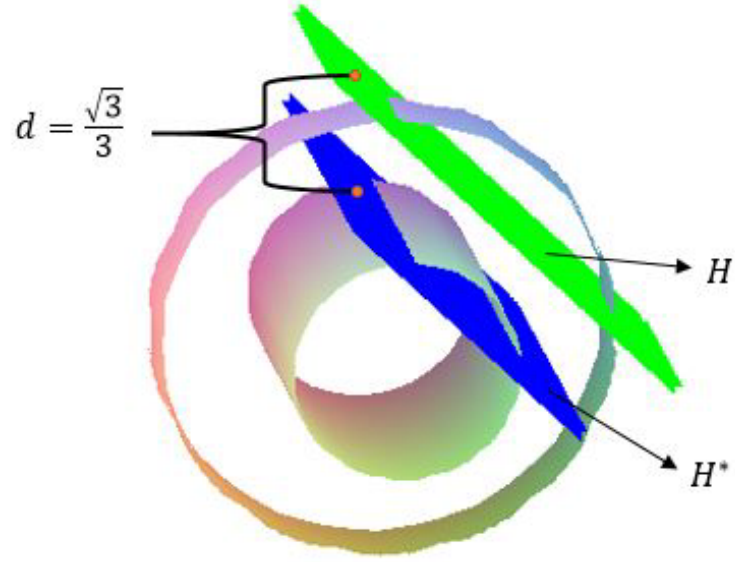
$$\gamma^*(0) = (0, \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

olur.

$t = 0$ ve $v \in (-4, 4)$ değerleri için dayanak eğrisi ve regle yüzey Şekil 3.2 ve merkezi düzlemlerin uygun noktalarda ki d uzaklığı Şekil 3.3 deki gibidir.



Şekil 3.2: d-Equidistant Regle Yüzeyler



Şekil 3.3: $t = 0$ için Uygun Noktalardaki d Uzaklığı

$t = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ için γ ve γ^* striksiyon noktaları ve d uzaklığı

$$\gamma\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{2} - \sqrt{3}\frac{dt}{d\theta}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\gamma^*\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{dt}{d\theta^*}, 1\right),$$

$$d = \frac{1}{2}$$

olur. Açıktaır ki striksiyon noktasında Darboux vektörler birbirine paraleldir. Merkezi düzlemlere ait iki nokta A ve B olsun. Bu noktalar

$$A\left(0, \sqrt{2} - \sqrt{3}\frac{dt}{d\theta}, 0\right) \in H,$$

$$B\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{d\theta^*}, 0\right) \in H^*$$

olur. A ve B noktaları arasındaki uzaklık $\frac{1}{2}$ olacak şekilde

$$\frac{1}{2} = \left| \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{d\theta^*} - \sqrt{2} + \sqrt{3}\frac{dt}{d\theta} \right|,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dt}{d\theta^*} - \sqrt{2} + \sqrt{3}\frac{dt}{d\theta},$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\frac{dt}{d\theta^*} - 2\frac{dt}{d\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{6}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\frac{dt}{d\theta^*} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

olarak alınırsa A ve B noktaları

$$A(0, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0),$$

$$B(0, \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{2}, 0)$$

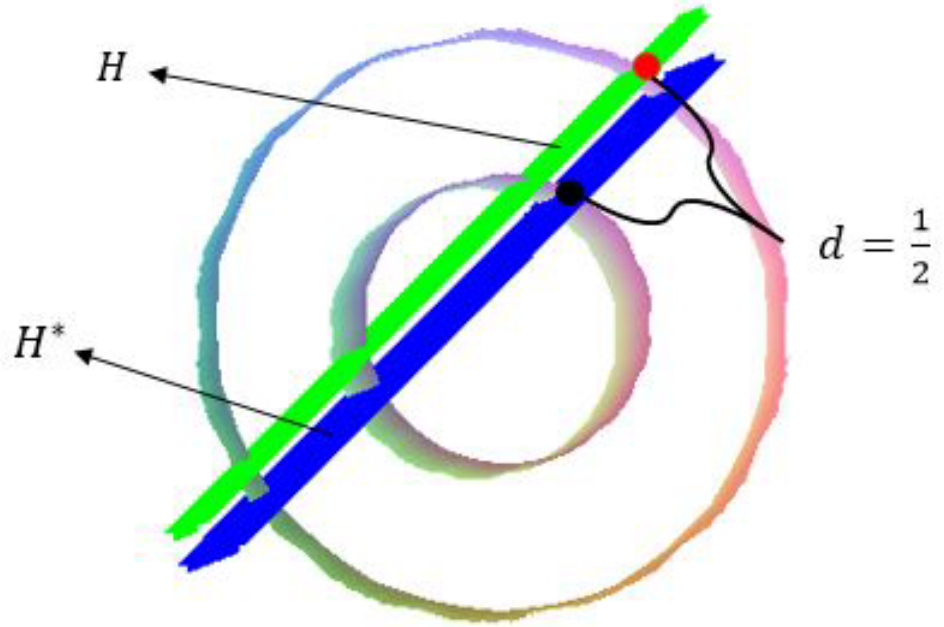
olur. Striksiyon noktalar striksiyon noktasında yerine yazılırsa

$$\gamma\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\gamma^*\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}, 1\right)$$

olur.

$t = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ ve $v \in (-4, 4)$ değerleri için merkezi düzlemlerin uygun noktalarda ki d uzaklığı Şekil 3.4 deki gibidir.



Şekil 3.4: $t = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ için Uygun Noktalardaki d Uzaklığı

3.2 E^5 de Paralel Darboux Equidistant Regle Yüzeyler

Bu kısımda E^5 de paralel Darboux equidistant regle yüzeyler tanımlanacak ve bu regle yüzeylerin ortalama eğriliği, Ricci eğriliği, kesit eğriliği, skalar eğriliği hesaplanacaktır. Son olarak bu eğrilikler arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Teorem 3.2.1 $r : I \rightarrow E^5$ eğrisinin $r(t)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t), V_5(t)\}$, eğrilikleri $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ olsun. $r(t)$ noktasındaki Darboux vektörü

$$W = k_2k_4V_1 + k_1k_4V_3 + k_1k_3V_5 \quad (3.2.1)$$

denklemleriyle verilir.

İspat. E^5 de Darboux vektörünü

$$W = aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 + eV_5$$

şeklinde alalım. (2.5.2) bağıntısından

$$\begin{aligned} \langle V'_1, W \rangle = 0 &\Rightarrow \langle k_1V_2, aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 + eV_5 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow bk_1 = 0 \\ &\Rightarrow b = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle V'_2, W \rangle = 0 &\Rightarrow \langle -k_1V_1 + k_2V_3, aV_1 + cV_3 + dV_4 + eV_5 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow -ak_1 + ck_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle V'_3, W \rangle = 0 &\Rightarrow \langle -k_2V_2 + k_3V_4, aV_1 + cV_3 + dV_4 + eV_5 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow dk_3 = 0 \\ &\Rightarrow d = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle V'_4, W \rangle = 0 &\Rightarrow \langle -k_3V_3 + k_4V_5, aV_1 + cV_3 + eV_5 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow -ck_3 + ek_4 = 0, \end{aligned}$$

$$\langle V'_5, W \rangle = 0 \Rightarrow \langle -k_4V_4, aV_1 + cV_3 + dV_4 + eV_5 \rangle = 0.$$

Buradan $a = k_2k_4$, $c = k_1k_4$ ve $e = k_1k_3$ bulunur. Bu katsayılar Darboux vektöründe yerine yazılırsa

$$W = k_2k_4V_1 + k_1k_4V_3 + k_1k_3V_5$$

elde edilir.

Tanım 3.2.1 E^5 Öklid uzayının \mathcal{S} yüzeyinde alınan r eğrisinin $r(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t), V_5(t)\}$ olsun. $r(t)$ noktasındaki tanjant uzayını $T_{E^5}(r(t))$, $\{V_1(t), V_3(t), V_5(t)\}$ alt vektör uzayını da $E_3(t)$ ile gösterelim. Bu uzay $T_{E^5}(r(t))$ uzayının bir 3-boyutlu altvektör uzayını gerer. $E_3(t)$ tarafından taranan bu nokta cümleleri, $T_{E^5}(r(t))$ uzayının bir E^5 uzayının bir 4-boyutlu alt yüzeyidir. Bu yüzey için bir parametrizasyon;

$$\begin{aligned} X : I \times R^3 &\rightarrow E^5 \\ (t, u_1, u_2, u_3) &\rightarrow X(t, u_1, u_2, u_3) = r(t) + u_1 k_2 k_4 V_1(t^*) + u_2 k_1 k_4 V_3(t^*) + u_3 k_1 k_3 V_5(t^*) \end{aligned}$$

olup

$$\text{rank}\{X_t, X_1, X_2, X_3\} = 4. \quad (3.2.2)$$

Bu yüzey \mathcal{S} ile gösterilsin. Dayanak eğrisi r , doğrultman uzayı $E_3(t)$ olan \mathcal{S} yüzeyine **hiper regle yüzey** denir.

Tanım 3.2.2 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* iki hiper regle yüzey ve \mathcal{S} yüzeyinin dayanak eğrisi r , $r(t)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{V_1(t), V_2(t), V_3(t), V_4(t), V_5(t)\}$, \mathcal{S}^* yüzeyinin dayanak eğrisi r^* , $r^*(t^*)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_4^*, V_5^*\}$ olsun. Bu çatıların tanımladığı Darboux vektörleri W ve W^* ile gösterilsin. Eğer;

1. Darboux vektörleri paralel ($W = W^*$),
2. uygun noktalarda $\text{Sp}\{V_1, V_3, V_5\}$ ve $\text{Sp}\{V_1^*, V_3^*, V_5^*\}$ oskülatör düzlemleri arasındaki uzaklık sabit ise

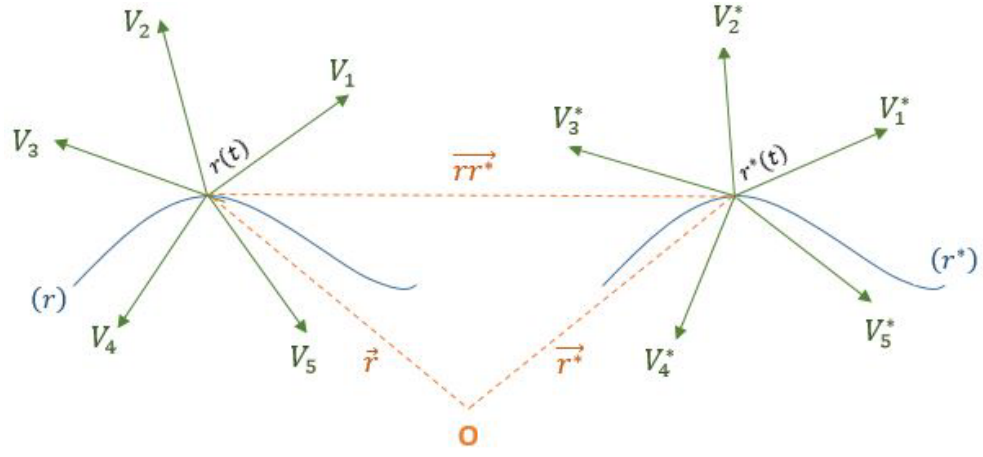
\mathcal{S} ve \mathcal{S}^* regle yüzeylerine **paralel Darboux equidistant hiper regle yüzeyler** denir.

Teorem 3.2.2 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* , paralel Darboux equidistant hiper regle yüzeyler ve oskülatör düzlemleri arasındaki uzaklık d_i , $1 < i \leq 5$, ile gösterilsin. Yüzeylerini dayanak eğrileri arasında

$$r^* = r + d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 V_3 + d_4 V_4 + d_5 V_5 \quad (3.2.3)$$

bağıntısı vardır.

İspat. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel Darboux equidistant hiper regle yüzeylerinin $r(t)$ ve $r^*(t^*)$ noktaları verilsin.



Şekil 3.5: rr^* Vektörü

Şekil 3.5'den rr^* vektörü için;

$$rr^* = a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + a_4V_4 + a_5V_5, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

yazılır. V_1 vektörünün rr^* üzerine izdüşümü d_1 ise izdüşüm bağıntısından

$$\vec{d}_1 = \frac{\langle rr^*, V_1 \rangle}{\|rr^*\|} \vec{rr^*}$$

olur. $a_1 = \langle rr^*, V_1 \rangle$ olduğundan $d_1 = a_1$ olur. Burada $d_1 \in \mathbb{R}$ sayısı $Sp\{V_2, V_3, V_4, V_5\}$ ile $Sp\{V_2^*, V_3^*, V_4^*, V_5^*\}$ oskülatör düzlemleri arasındaki uzaklıktır. Benzer şekilde, V_2 vektörünün rr^* üzerine izdüşümü d_2 ise

$$\vec{d}_2 = \frac{\langle rr^*, V_2 \rangle}{\|rr^*\|} \vec{rr^*}.$$

$a_2 = \langle rr^*, V_2 \rangle$ olduğundan $d_2 = a_2$ olur. Burada $d_2 \in \mathbb{R}$ sayısı $Sp\{V_1, V_3, V_4, V_5\}$ ile $Sp\{V_1^*, V_3^*, V_4^*, V_5^*\}$ oskülatör düzlemleri arasındaki uzaklıktır. V_3 vektörünün rr^* üzerine izdüşümü d_3 ise

$$\vec{d}_3 = \frac{\langle rr^*, V_3 \rangle}{\|rr^*\|} \vec{rr^*}.$$

$a_3 = \langle rr^*, V_3 \rangle$ olduğundan $d_3 = a_3$ olur. Burada $d_3 \in \mathbb{R}$ sayısı $Sp\{V_1, V_2, V_4, V_5\}$ ile $Sp\{V_1^*, V_2^*, V_4^*, V_5^*\}$ oskülatör düzlemleri arasındaki uzaklıktır. V_4 vektörünün rr^* üzerine izdüşümü d_4 ise

$$\vec{d}_4 = \frac{\langle rr^*, V_4 \rangle}{\|rr^*\|} \vec{rr^*}.$$

$a_4 = \langle rr^*, V_4 \rangle$ olduğundan $d_4 = a_4$ olur. Burada $d_4 \in \mathbb{R}$ sayısı $Sp\{V_1, V_2, V_3, V_5\}$ ile $Sp\{V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_5^*\}$ oskülatör düzlemleri arasındaki uzaklıktır. V_5 vektörünün rr^* üzerine izdüşümü d_5 ise

$$\vec{d}_5 = \frac{\langle rr^*, V_5 \rangle}{\|rr^*\|} \vec{rr^*}.$$

$a_5 = \langle rr^*, V_5 \rangle$ olduğundan $d_5 = a_5$ olur. Burada $d_5 \in \mathbb{R}$ sayısı $Sp\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ile $Sp\{V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_4^*\}$ oskülatör düzlemleri arasındaki uzaklıktır. a_r , $1 \leq r \leq 5$, değerleri yerine yazılırsa

$$r^* = r + d_1V_1 + d_2V_2 + d_3V_3 + d_4V_4 + d_5V_5$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel Darboux equidistant hiper regle yüzeyleri olsun.

$Sp\{V_1, V_3, V_5\}$ ve $Sp\{V_1^*, V_3^*, V_5^*\}$ oskülatör düzlemleri arasındaki uygun noktalardaki uzaklık d ile gösterilirse, bu uzaklık

$$d = k_2k_4d_1 + k_1k_4d_3 + k_1k_3d_5 \quad (3.2.4)$$

bağıntısıyla verilir.

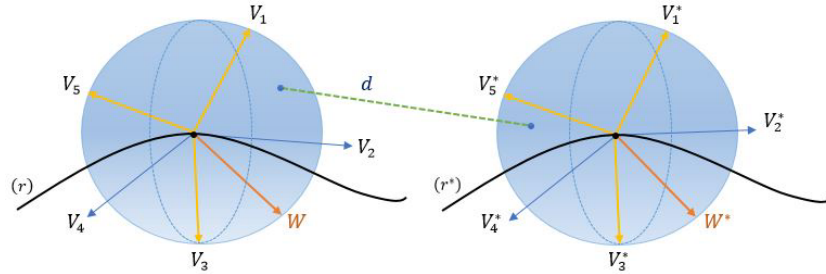
İspat. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel Darboux equidistant hiper regle yüzeylerine ait W ve W^* Darboux vektörler her t anında paralel olduğundan $W = W^*$ alınabilir. W vektörünün rr^* vektörüne izdüşümüne d dersek, bu uzaklık

$$d = \langle W, rr^* \rangle$$

dir. (3.2.1) bağıntısından

$$\begin{aligned} d &= \langle k_2k_4V_1 + k_1k_4V_3 + k_1k_3V_5, rr^* \rangle \\ &= k_2k_4\langle V_1, rr^* \rangle + k_1k_4\langle V_3, rr^* \rangle + k_1k_3\langle V_5, rr^* \rangle \\ &= k_2k_4d_1 + k_1k_4d_3 + k_1k_3d_5 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.6: $\{V_1, V_3, V_5\}$ ile $\{V_1^*, V_3^*, V_5^*\}$ Vektörlerinin Germiş Olduğu Oskülatör Kürelerin Uygun Noktaları Arasındaki d Uzaklığı

Bundan sonraki çalışmalarımız boyunca paralel Darboux equidistant hiper regle yüzeyler yerine **paralel d -equidistant regle yüzeyler** denilecektir.

Teorem 3.2.4 \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* , paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun. \mathcal{S}^* 'ın $r^*(t^*)$ noktasındaki $\{V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_4^*, V_5^*\}$ Frenet çatısı ile \mathcal{S} nin $r(t)$ noktasındaki $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ Frenet çatısı arasında

$$\begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \\ V_4^* \\ V_5^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_{31} & 0 & \cos \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta_{51} & 0 & \cos \theta_{53} & 0 & \cos \theta_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

bağıntısı vardır.

İspat. V_i^* ile V_j vektörleri arasındaki açının ölçüsünü θ_{ij} ile gösterelim. Buna göre

$$\langle V_i, V_j \rangle = \langle V_i^*, V_j^* \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise;} \\ 0, & i \neq j \text{ ise.} \end{cases}$$

ve

$$\langle V_i^*, V_j \rangle = \cos \theta_{ij}$$

olacaktır. $\cos \theta_{ij}$ doğrultman kosinüsleri olduğundan

$$\begin{aligned} V_1^* &= \cos \theta_{11} V_1 + \cos \theta_{12} V_2 + \cos \theta_{13} V_3 + \cos \theta_{14} V_4 + \cos \theta_{15} V_5 \\ V_2^* &= \cos \theta_{21} V_1 + \cos \theta_{22} V_2 + \cos \theta_{23} V_3 + \cos \theta_{24} V_4 + \cos \theta_{25} V_5 \\ V_3^* &= \cos \theta_{31} V_1 + \cos \theta_{32} V_2 + \cos \theta_{33} V_3 + \cos \theta_{34} V_4 + \cos \theta_{35} V_5 \\ V_4^* &= \cos \theta_{41} V_1 + \cos \theta_{42} V_2 + \cos \theta_{43} V_3 + \cos \theta_{44} V_4 + \cos \theta_{45} V_5 \\ V_5^* &= \cos \theta_{51} V_1 + \cos \theta_{52} V_2 + \cos \theta_{53} V_3 + \cos \theta_{54} V_4 + \cos \theta_{55} V_5 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade matris formunda yazılırsa

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \\ V_3^* \\ V_4^* \\ V_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{11} & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} & \cos \theta_{14} & \cos \theta_{15} \\ \cos \theta_{21} & \cos \theta_{22} & \cos \theta_{23} & \cos \theta_{24} & \cos \theta_{25} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & \cos \theta_{33} & \cos \theta_{34} & \cos \theta_{35} \\ \cos \theta_{41} & \cos \theta_{42} & \cos \theta_{43} & \cos \theta_{44} & \cos \theta_{45} \\ \cos \theta_{51} & \cos \theta_{52} & \cos \theta_{53} & \cos \theta_{54} & \cos \theta_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix}$$

veya

$$V^* = AV$$

şeklinde yazılabilir. A matrisi ortogonal bir matris olduğundan

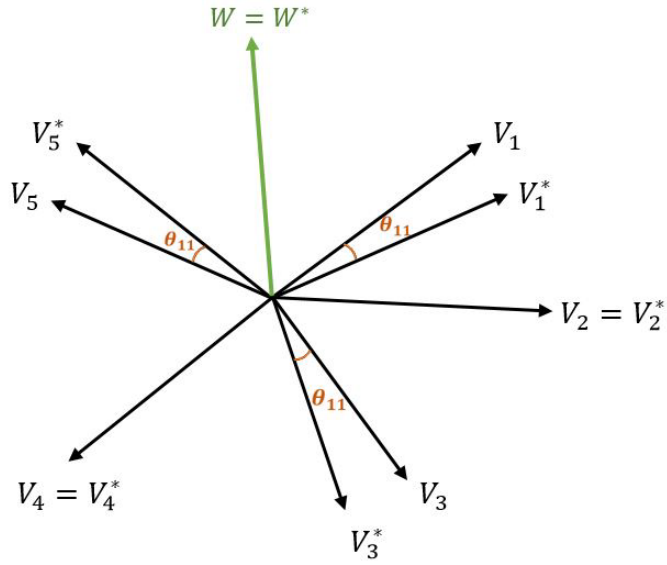
$$\begin{aligned} V_1 &= \cos \theta_{11} V_1^* + \cos \theta_{12} V_2^* + \cos \theta_{13} V_3^* + \cos \theta_{14} V_4^* + \cos \theta_{15} V_5^* \\ V_2 &= \cos \theta_{21} V_1^* + \cos \theta_{22} V_2^* + \cos \theta_{23} V_3^* + \cos \theta_{24} V_4^* + \cos \theta_{25} V_5^* \\ V_3 &= \cos \theta_{31} V_1^* + \cos \theta_{32} V_2^* + \cos \theta_{33} V_3^* + \cos \theta_{34} V_4^* + \cos \theta_{35} V_5^* \\ V_4 &= \cos \theta_{41} V_1^* + \cos \theta_{42} V_2^* + \cos \theta_{43} V_3^* + \cos \theta_{44} V_4^* + \cos \theta_{45} V_5^* \\ V_5 &= \cos \theta_{51} V_1^* + \cos \theta_{52} V_2^* + \cos \theta_{53} V_3^* + \cos \theta_{54} V_4^* + \cos \theta_{55} V_5^* \end{aligned}$$

yazılabilir. $W_1//W_1^*$ olduğundan $V_2 = V_2^*$ ve $V_4 = V_4^*$ olmayı gerektirir.

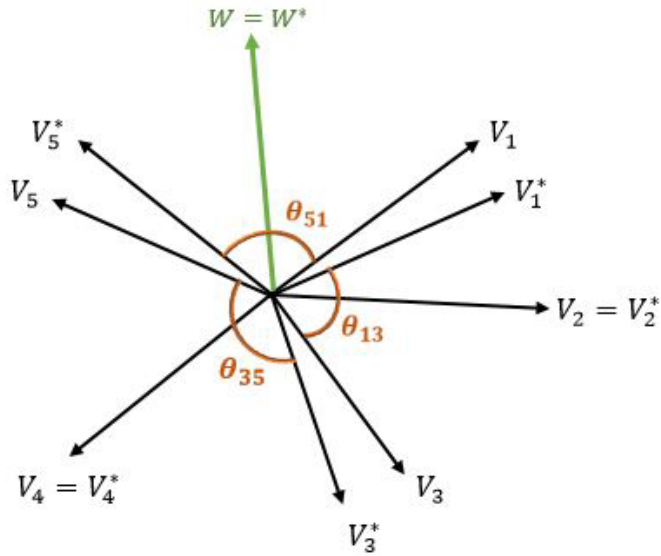
$\angle(V_1^*, V_1) = \angle(V_3^*, V_3) = \angle(V_5^*, V_5) = \theta_{11}$ olduğundan A matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_{31} & 0 & \cos \theta_{11} & 0 & \cos \theta_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta_{51} & 0 & \cos \theta_{53} & 0 & \cos \theta_{11} \end{pmatrix}$$

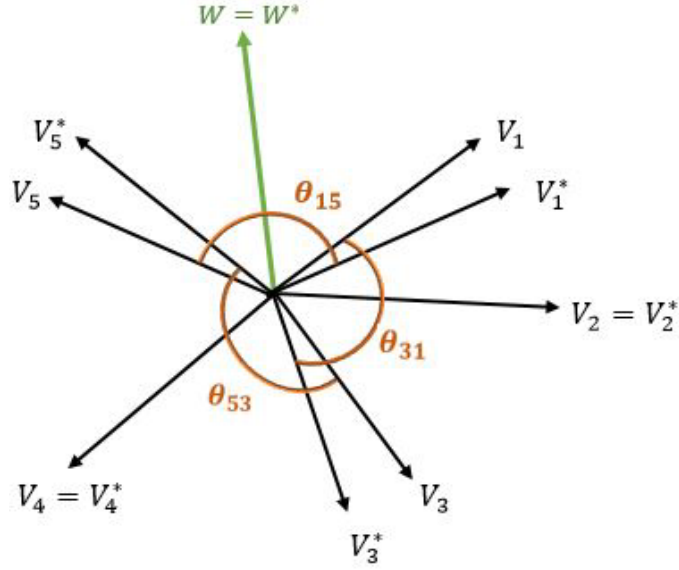
olur, Şekil 4.3, Şekil 4.4 ve Şekil 4.5.



Şekil 3.7: V_1^* ile V_1 , V_3^* ile V_3 ve V_5^* ile V_5 Vektörleri Arasındaki Açılar



Şekil 3.8: V_5^* ile V_1 , V_1^* ile V_3 ve V_3^* ile V_5 Vektörleri Arasındaki Açılar



Şekil 3.9: V_1^* ile V_5 , V_3^* ile V_1 ve V_5^* ile V_3 Vektörleri Arasındaki Açılar

Teorem 3.2.5 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin dayanak eğrilerinin eğrilikleri arasında

$$\begin{bmatrix} k_1^* \\ k_2^* \\ k_3^* \\ k_4^* \end{bmatrix} = \frac{dt}{dt^*} \begin{bmatrix} \cos \theta_{11} & -\cos \theta_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{11} & 0 & -\cos \theta_{53} \\ 0 & 0 & \cos \theta_{11} & \cos \theta_{35} \\ 0 & 0 & -\cos \theta_{53} & \cos \theta_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

bağıntısı vardır.

İspat. V_1^*, V_2^*, V_3^* ve V_4^* 'ın türevi alınırsa

$$\begin{aligned} V_1^{*'} &= \frac{dt}{dt^*} \left(-\theta'_{11} \sin \theta_{11} V_1 + \cos \theta_{11} k_1 V_2 - \theta'_{13} \sin \theta_{13} V_3 + \cos \theta_{13} (-k_2 V_2 + k_3 V_4) \right. \\ &\quad \left. - \theta'_{15} \sin \theta_{15} V_5 + \cos \theta_{15} k_4 V_4 \right), \\ V_2^{*'} &= \frac{dt}{dt^*} (-k_1 V_1 + k_2 V_3), \\ V_3^{*'} &= \frac{dt}{dt^*} \left(-\theta'_{31} \sin \theta_{31} V_1 + \cos \theta_{31} k_1 V_2 - \theta'_{11} \sin \theta_{11} V_3 + \cos \theta_{11} (-k_2 V_2 + k_3 V_4) \right. \\ &\quad \left. - \theta'_{35} \sin \theta_{35} V_5 + \cos \theta_{35} k_4 V_4 \right), \\ V_4^{*'} &= \frac{dt}{dt^*} (-k_3 V_3 + k_4 V_5) \end{aligned}$$

olur. (3.2.5) bağıntısı da kullanılarak, k_1^* eğriliği

$$\begin{aligned}
k_1^* &= \langle V_1^{*'}, V_2^* \rangle \\
&= \left\langle \left(-\theta'_{11} \sin \theta_{11} V_1 + (k_1 \cos \theta_{11} - k_2 \cos \theta_{13}) V_2 - \theta'_{13} \sin \theta_{13} V_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (k_3 \cos \theta_{13} + k_4 \cos \theta_{15}) V_4 - \theta'_{15} \sin \theta_{15} V_5 \right) \frac{dt}{dt^*}, V_2 \right\rangle \\
&= \frac{dt}{dt^*} (k_1 \cos \theta_{11} - k_2 \cos \theta_{13})
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde k_2^* , k_3^* ve k_4^* eğrilikleri

$$\begin{aligned}
k_2^* &= \langle V_2^{*'}, V_3^* \rangle \\
&= \left\langle \left(-k_1 V_1 + k_2 V_3 \right) \frac{dt}{dt^*}, \cos \theta_{31} V_1 + \cos \theta_{11} V_3 + \cos \theta_5 V_5 \right\rangle \\
&= \frac{dt}{dt^*} (-k_1 \cos \theta_{31} + k_2 \cos \theta_{11}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3^* &= \langle V_3^{*'}, V_4^* \rangle \\
&= \left\langle \left(-\theta'_{31} \sin \theta_{31} V_1 + (k_1 \cos \theta_{31} - k_2 \cos \theta_{11}) V_2 - \theta'_{11} \sin \theta_{11} V_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (k_3 \cos \theta_{11} + k_4 \cos \theta_{35}) V_4 - \theta'_{35} \sin \theta_{35} V_5 \right) \frac{dt}{dt^*}, V_4 \right\rangle \\
&= \frac{dt}{dt^*} (k_3 \cos \theta_{11} + k_4 \cos \theta_{35}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4^* &= \langle V_4^{*'}, V_5^* \rangle \\
&= \left\langle \left(-k_3 V_3 + k_4 V_5 \right) \frac{dt}{dt^*}, \cos \theta_{51} V_1 + \cos \theta_{53} V_3 + \cos \theta_{11} V_5 \right\rangle \\
&= \frac{dt}{dt^*} (-k_3 \cos \theta_{53} + k_4 \cos \theta_{11})
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.2.6 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin teğetsel demetleri ve asimptotik demetleri birbirlerine eşittir ve boyları aynıdır.

İspat. E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin asimptotik demetleri, sırasıyla, $A(t)$ ve $A^*(t^*)$ ile gösterilirse,

$$A(t) = Sp\{V_1, V_3, V_5, V_1', V_3', V_5'\}$$

dir. Burada (2.1.3) bağıntısı kullanılırsa

$$A(t) = Sp\{V_1, V_3, V_5, k_1V_2, -k_2V_2 + k_3V_4, k_4V_4\}$$

olduğundan

$$A(t) = Sp\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\} \quad (3.2.7)$$

bulunur. Buna göre asimptotik demetin boyutu,

$$boyA(t) = 5 \quad (3.2.8)$$

olur. Bu ise $A(t)$ 'nin $E_3(t)$ doğrultman uzayını kapsadığını gösterir. Benzer şekilde, $A^*(t^*)$ asimptotik demeti,

$$A^*(t^*) = Sp\{V_1^*, V_3^*, V_5^*, V_1^{*'}, V_3^{*'}, V_5^{*'}\}$$

dir. (2.1.3) bağıntısı kullanılırsa

$$A^*(t^*) = Sp\{V_1^*, V_3^*, V_5^*, k_1^*V_2^*, -k_2^*V_2^* + k_3^*V_4^*, k_4^*V_4^*\}$$

olduğundan

$$A^*(t^*) = Sp\{V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_4^*, V_5^*\} \quad (3.2.9)$$

olur ve

$$boyA^*(t^*) = 5 \quad (3.2.10)$$

olur. Bu ise $A^*(t^*)$ 'in $E_3(t^*)$ doğrultman uzayını kapsadığını gösterir. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* regle yüzeylerin teğetsel demetleri de, sırasıyla, $T(t)$ ve $T^*(t^*)$ ile gösterilirse;

$$T(t) = Sp\{r', V_1, V_3, V_5, V_1', V_3', V_5'\},$$

$$T^*(t^*) = Sp\{r^{*'}, V_1^*, V_3^*, V_5^*, V_1^{*'}, V_3^{*'}, V_5^{*'}\}$$

dir. Burada (2.1.3) bağıntısı kullanılırsa

$$T(t) = Sp\{V_1, V_1, V_3, V_5, k_1V_2, -k_2V_2 + k_3V_4, k_4V_4\},$$

$$T^*(t^*) = Sp\{V_1^*, V_1^*, V_3^*, V_5^*, k_1^*V_2^*, -k_2^*V_2^* + k_3^*V_4^*, k_4^*V_4^*\}$$

şeklinde bulunur. Buradan $T(t)$ ve $T^*(t^*)$

$$T(t) = Sp\{V_1, V_2, V_3, V_4V_5\} \quad (3.2.11)$$

$$T^*(t^*) = Sp\{V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_4^*, V_5^*\} \quad (3.2.12)$$

olur. Teğetsel demetlerin boyutu,

$$boyT(t) = boyT^*(t^*) = 5 \quad (3.2.13)$$

bulunur.

Teorem 3.2.7 E^5 ' de \mathcal{S} regle yüzeyi için şekil operatörleri arasında,

$$A_{\xi_1^*} = A_{V_2^*} = \frac{dt}{dt^*} A_{V_2} \left(\cos \theta_{11} - \frac{k_2 \cos \theta_{13}}{k_1} \right)$$

ve

$$A_{\xi_2^*} = A_{V_4^*} = \frac{dt}{dt^*} A_{V_4} \cos \theta_{11} + \frac{dt}{dt^*} \begin{pmatrix} 0 & k_4 \cos \theta_{35} & -k_3 \cos \theta_{53} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bağıntısı vardır.

İspat. \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* , E^5 de paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun. Bu yüzeyler için

$$\mathcal{S} : X(t, u_1, u_2, u_3) = r(t) + u_1V_1 + u_2V_3 + u_3V_5$$

$$\mathcal{S}^* : X^*(t^*, u_1^*, u_2^*, u_3^*) = r^*(t^*) + u_1^*V_1^* + u_2^*V_3^* + u_3^*V_5^* \quad (3.2.14)$$

yazılabilir. Yüzeylerin kısmi türevleri alınırsa,

$$X_t = V_1 + u_1k_1V_2 - u_2k_1V_2 + u_2k_3V_4 - k_4u_3V_4,$$

$$X_{u_1} = V_1, \quad X_{u_2} = V_3, \quad X_{u_3} = V_5, \quad (3.2.15)$$

$$X_t^* = V_1^* + u_1^*k_1^*V_2^* - u_2^*k_1^*V_2^* + u_2^*k_3^*V_4^* - u_3^*k_4^*V_4^*,$$

$$X_{u_1^*}^* = V_1^*, \quad X_{u_2^*}^* = V_3^*, \quad X_{u_3^*}^* = V_5^* \quad (3.2.16)$$

olur. $\{V_1, V_3, V_5\}$ cümlesi $T_{E^3}(P)$ için bir bazdır ve $\{\xi_1, \xi_2\}$ vektör alan sistemi $\forall P \in \mathcal{S}$ noktasında $T_{\mathcal{S}}^\perp(P)$ 'in ortonormal baz olur. O zaman,

$$\{V_1, V_3, V_5, \xi_1, \xi_2\}$$

cümlesi \mathcal{S} 'nin her P noktasında $T_{E^5}(P)$ 'nin bir bazı olur. Buradan,

$$\xi_1 = V_2, \quad \xi_2 = V_4$$

olur. Benzer şekilde $\{\xi_1^*, \xi_2^*\}$ cümlesi $T_{\mathcal{S}^*}^\perp(P^*)$ 'in ortonormal bazı olduğundan

$$\{V_1^*, V_3^*, V_5^*, V_2^*, V_4^*\}$$

cümlesi de $\forall P^* \in \mathcal{S}^*$ noktasında $T_{E^5}(P^*)$ in bir bazı olur. Burada,

$$\xi_1^* = V_2^*, \quad \xi_2^* = V_4^*$$

olur. $T_{E^5}(P) = T_{\mathcal{S}}(P) \oplus T_{\mathcal{S}}^\perp(P)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{V_1}\xi_j &= a_{11}^j V_1 + a_{13}^j V_3 + a_{15}^j V_5 + b_{1q}^j \xi_q \\ \bar{D}_{V_3}\xi_j &= a_{31}^j V_1 + a_{33}^j V_3 + a_{35}^j V_5 + b_{1q}^j \xi_q \\ \bar{D}_{V_5}\xi_j &= a_{51}^j V_1 + a_{53}^j V_3 + a_{55}^j V_5 + b_{1q}^j \xi_q \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

yazılabilir. Weingarten eşitliğinden,

$$\bar{D}_X \xi = -A_\xi(X) + D_X^\perp \xi, \quad \forall X \in \chi(\mathcal{S}) \text{ ve } \forall \xi \in \chi(\mathcal{S})^\perp$$

dır. Burada A_ξ matrisi açık yazılırsa

$$\begin{bmatrix} a_{11}^j & a_{13}^j & a_{15}^j \\ a_{31}^j & a_{33}^j & a_{35}^j \\ a_{51}^j & a_{53}^j & a_{55}^j \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad 1 \leq j \leq 2, \quad (3.2.18)$$

olur. (3.2.17) bağıntısından her bir bileşen $j = 1, 2$ için,

$$\begin{aligned} a_{11}^j &= \langle \bar{D}_{V_1}\xi_j, V_1 \rangle, & a_{13}^j &= \langle \bar{D}_{V_1}\xi_j, V_3 \rangle, & a_{15}^j &= \langle \bar{D}_{V_1}\xi_j, V_5 \rangle, \\ a_{31}^j &= \langle \bar{D}_{V_3}\xi_j, V_1 \rangle, & a_{33}^j &= \langle \bar{D}_{V_3}\xi_j, V_3 \rangle, & a_{35}^j &= \langle \bar{D}_{V_3}\xi_j, V_5 \rangle, \\ a_{51}^j &= \langle \bar{D}_{V_5}\xi_j, V_1 \rangle, & a_{53}^j &= \langle \bar{D}_{V_5}\xi_j, V_3 \rangle, & a_{55}^j &= \langle \bar{D}_{V_5}\xi_j, V_5 \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Şimdi A_{ξ_j} matrislerini hesaplayalım.

i) $j=1$ için

$$A_{\xi_1} = A_{V_2} = - \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{13}^1 & a_{15}^1 \\ a_{31}^1 & a_{33}^1 & a_{35}^1 \\ a_{51}^1 & a_{53}^1 & a_{55}^1 \end{bmatrix}$$

yazılır (3.2.19) bağıntısından,

$$a_{11}^1 = \langle \bar{D}_{V_1} \xi_1, V_1 \rangle = \langle \bar{D}_{V_1} V_2, V_1 \rangle = \langle k_1 V_1, V_1 \rangle = k_1,$$

$$a_{13}^1 = \langle \bar{D}_{V_1} \xi_1, V_3 \rangle = \langle \bar{D}_{V_1} V_2, V_3 \rangle = \langle k_1 V_1, V_3 \rangle = 0$$

$$a_{15}^1 = \langle \bar{D}_{V_1} V_2, V_5 \rangle = \langle k_1 V_1, V_5 \rangle = 0$$

$$a_{31}^1 = \langle \bar{D}_{V_3} V_2, V_1 \rangle = 0,$$

$$a_{33}^1 = \langle \bar{D}_{V_3} V_2, V_3 \rangle = 0,$$

$$a_{35}^1 = \langle \bar{D}_{V_3} V_2, V_5 \rangle = 0,$$

$$a_{51}^1 = \langle \bar{D}_{V_5} V_2, V_1 \rangle = 0,$$

$$a_{53}^1 = \langle \bar{D}_{V_5} V_2, V_3 \rangle = 0,$$

$$a_{55}^1 = \langle \bar{D}_{V_5} V_2, V_5 \rangle = 0$$

bulunur. Buradan A_{V_2} matrisi

$$A_{\xi_1} = A_{V_2} = - \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

olur.

ii) j=2 için

$$A_{\xi_2} = A_{V_4} = - \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{13}^2 & a_{15}^2 \\ a_{31}^2 & a_{33}^2 & a_{35}^2 \\ a_{51}^2 & a_{53}^2 & a_{55}^2 \end{bmatrix}$$

yazılır. (3.2.19) bağıntısından,

$$a_{11}^1 = \langle \bar{D}_{V_1} \xi_2, V_1 \rangle = \langle \bar{D}_{V_1} V_4, V_1 \rangle = \langle -k_3 V_3 + k_4 V_5, V_1 \rangle = 0,$$

$$a_{13}^1 = \langle \bar{D}_{V_1} \xi_2, V_3 \rangle = \langle \bar{D}_{V_1} V_4, V_3 \rangle = \langle -k_3 V_3 + k_4 V_5, V_3 \rangle = -k_3$$

$$a_{15}^1 = \langle \bar{D}_{V_1} V_4, V_5 \rangle = \langle -k_3 V_3 + k_4 V_5, V_5 \rangle = k_4$$

$$a_{31}^1 = \langle \bar{D}_{V_3} V_4, V_1 \rangle = 0,$$

$$a_{33}^1 = \langle \bar{D}_{V_3} V_4, V_3 \rangle = 0,$$

$$a_{35}^1 = \langle \bar{D}_{V_3} V_4, V_5 \rangle = 0,$$

$$a_{51}^1 = \langle \bar{D}_{V_5} V_4, V_1 \rangle = 0,$$

$$a_{53}^1 = \langle \bar{D}_{V_5} V_4, V_3 \rangle = 0,$$

$$a_{55}^1 = \langle \bar{D}_{V_5} V_4, V_5 \rangle = 0$$

bulunur. Buradan, A_{V_4} matrisi

$$A_{\xi_2} = A_{V_4} = - \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

olur.

Benzer şekilde, $\{\xi_1^*, \xi_2^*\}$ vektör alan sistemi $\forall P^* \in \mathcal{S}^*$ noktasında, $T_{\mathcal{S}^*}^\perp(P^*)$ 'in ortonormal bazı olmak üzere,

$$\{V_1^*, V_3^*, V_5^*, \xi_1^*, \xi_2^*\}$$

cümlesi, $\forall P^* \in \mathcal{S}^*$ nin her P noktasında $T_{E^5}(P^*)$ 'nin bir bazıdır. Bu durumda

$$\xi_1^* = V_2^*, \quad \xi_2^* = V_4^*$$

$$T_{E^5}(P^*) = T_{\mathcal{S}^*}(P^*) \oplus T_{\mathcal{S}^*}^\perp(P^*)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{V_1^*} \xi_j^* &= c_{11}^j V_1^* + c_{13}^j V_3^* + c_{15}^j V_5^* + d_{1q}^j \xi_q^* \\
\bar{D}_{V_3^*} \xi_j^* &= c_{31}^j V_1^* + c_{33}^j V_3^* + c_{35}^j V_5^* + d_{1q}^j \xi_q^* \\
\bar{D}_{V_5^*} \xi_j^* &= c_{51}^j V_1^* + c_{53}^j V_3^* + c_{55}^j V_5^* + d_{1q}^j \xi_q^*
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

yazılır. Weingarten eşitliğinden,

$$\bar{D}_X \xi^* = -A_{\xi^*}(X) + D_{X^*} \perp \xi^*, \quad \forall X \in \chi(\mathcal{S}^*) \text{ ve } \forall \xi^* \in \chi^\perp(\mathcal{S}^*)$$

dir. Burada A_{ξ^*} matrisi açık yazılırsa

$$\begin{bmatrix} c_{11}^j & c_{13}^j & c_{15}^j \\ c_{31}^j & c_{33}^j & c_{35}^j \\ c_{51}^j & c_{53}^j & c_{55}^j \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad 1 \leq j \leq 2 \tag{3.2.23}$$

olur. (3.2.22) bağıntısından her bir bileşen

$$\begin{aligned}
c_{11}^j &= \langle \bar{D}_{V_1^*} \xi_j^*, V_1^* \rangle, & c_{13}^j &= \langle \bar{D}_{V_1^*} \xi_j^*, V_3^* \rangle, & c_{15}^j &= \langle \bar{D}_{V_1^*} \xi_j^*, V_5^* \rangle, \\
c_{31}^j &= \langle \bar{D}_{V_3^*} \xi_j^*, V_1^* \rangle, & c_{33}^j &= \langle \bar{D}_{V_3^*} \xi_j^*, V_3^* \rangle, & c_{35}^j &= \langle \bar{D}_{V_3^*} \xi_j^*, V_5^* \rangle, \\
c_{51}^j &= \langle \bar{D}_{V_5^*} \xi_j^*, V_1^* \rangle, & c_{53}^j &= \langle \bar{D}_{V_5^*} \xi_j^*, V_3^* \rangle, & c_{55}^j &= \langle \bar{D}_{V_5^*} \xi_j^*, V_5^* \rangle.
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

dir. Şimdi $A_{\xi_j^*}$ matrislerini hesaplayalım.

i) $j=1$ için

$$A_{\xi_1^*} = A_{V_2^*} = - \begin{bmatrix} c_{11}^1 & c_{13}^1 & c_{15}^1 \\ c_{31}^1 & c_{33}^1 & c_{35}^1 \\ c_{51}^1 & c_{53}^1 & c_{55}^1 \end{bmatrix}$$

matrisin bileşenlere (3.2.19) dan,

$$c_{11}^1 = \langle \bar{D}_{V_1^*} \xi_1^*, V_1^* \rangle = \langle \bar{D}_{V_1^*} V_2^*, V_1^* \rangle = \langle k_1^* V_1^*, V_1^* \rangle = k_1^*,$$

$$c_{13}^1 = \langle \bar{D}_{V_1^*} \xi_1^*, V_3^* \rangle = \langle \bar{D}_{V_1^*} V_2^*, V_3^* \rangle = \langle k_1^* V_1^*, V_3^* \rangle = 0$$

$$c_{15}^1 = \langle \bar{D}_{V_1^*} \xi_1^*, V_5^* \rangle = \langle k_1^* V_1^*, V_5^* \rangle = 0$$

$$c_{31}^1 = \langle \bar{D}_{V_3}^* V_2^*, V_1^* \rangle = 0,$$

$$c_{33}^1 = \langle \bar{D}_{V_3}^* V_2^*, V_3^* \rangle = 0,$$

$$c_{35}^1 = \langle \bar{D}_{V_3}^* V_2^*, V_5^* \rangle = 0,$$

$$c_{51}^1 = \langle \bar{D}_{V_5}^* V_2^*, V_1^* \rangle = 0,$$

$$c_{53}^1 = \langle \bar{D}_{V_5}^* V_2^*, V_3^* \rangle = 0,$$

$$c_{55}^1 = \langle \bar{D}_{V_5}^* V_2^*, V_5^* \rangle = 0$$

bulunur. Buradan $A_{V_2^*}$ matrisi,

$$A_{\xi_1^*} = A_{V_2^*} = - \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.25)$$

olur. (3.2.6) bağıntısından k_1^* in eşiti burada yerine yazılırsa

$$A_{\xi_1^*} = A_{V_2^*} = \frac{dt}{dt^*} A_{V_2} (\cos \theta_{11} - \frac{k_2 \cos \theta_{13}}{k_1})$$

bulunur.

ii) j=2 için

$$A_{\xi_2^*} = A_{V_4^*} = - \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{13}^2 & c_{15}^2 \\ c_{31}^2 & c_{33}^2 & c_{35}^2 \\ c_{51}^2 & c_{53}^2 & c_{55}^2 \end{bmatrix}$$

yazılır. (3.2.19) bağıntısından,

$$c_{11}^1 = \langle \bar{D}_{V_1}^* \xi_2^*, V_1^* \rangle = \langle \bar{D}_{V_1}^* V_4^*, V_1^* \rangle = \langle -k_3^* V_3^* + k_4^* V_5^*, V_1^* \rangle = 0,$$

$$c_{13}^1 = \langle \bar{D}_{V_1}^* \xi_2^*, V_3^* \rangle = \langle \bar{D}_{V_1}^* V_4^*, V_3^* \rangle = \langle -k_3^* V_3^* + k_4^* V_5^*, V_3^* \rangle = -k_3^*$$

$$c_{15}^1 = \langle \bar{D}_{V_1}^* V_4^*, V_5^* \rangle = \langle -k_3^* V_3^* + k_4^* V_5^*, V_5^* \rangle = k_4^*$$

$$c_{31}^1 = \langle \bar{D}_{V_3}^* V_4^*, V_1^* \rangle = 0,$$

$$c_{33}^1 = \langle \bar{D}_{V_3}^* V_4^*, V_3^* \rangle = 0,$$

$$c_{35}^1 = \langle \bar{D}_{V_3}^* V_4^*, V_5^* \rangle = 0,$$

$$c_{51}^1 = \langle \bar{D}_{V_5}^* V_4^*, V_1^* \rangle = 0,$$

$$c_{53}^1 = \langle \bar{D}_{V_5}^* V_4^*, V_3^* \rangle = 0,$$

$$c_{55}^1 = \langle \bar{D}_{V_5}^* V_4^*, V_5^* \rangle = 0$$

bulunur. Buradan $A_{V_4^*}$ matrisi

$$A_{\xi_2^*} = A_{V_4^*} = - \begin{bmatrix} 0 & -k_3^* & k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

olur. Burada k_3^* ve k_4^* ifadelerinin yerine (3.2.6) daki karşılıkları yazılırsa,

$$A_{\xi_2^*} = A_{V_4^*} = \frac{dt}{dt^*} A_{V_4} \cos \theta_{11} + \frac{dt}{dt^*} \begin{pmatrix} 0 & k_4 \cos \theta_{35} & -k_3 \cos \theta_{53} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

$A_{\xi_j^*}$ matrisinin determinanı $\det A_{\xi_j^*} = \det A_{\xi_j} = 0$, $j = 1, 2$.

Teorem 3.2.8 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin her noktada ve her normal doğrultuda Lipschitz- Killing eğrilikleri sıfır olup, regle yüzeyler açılabilirlerdir.

İspat. (2.2.12) ve (2.2.13) den, \mathcal{S} nin Lipschitz- Killing eğriliği, $\forall P \in \mathcal{S}$;

$$G(P, \xi_j) = \det A_{\xi_j} = 0, \quad j = 1, 2$$

ve Gauss eğriliği

$$G(P) = \sum_{j=1}^2 G(P, \xi_j) = 0.$$

$G(P) = 0$ olduğundan \mathcal{S} açılabilir. Benzer şekilde \mathcal{S}^* regle yüzeyinin Lipschitz- Killing eğriliği, $\forall P^* \in \mathcal{S}^*$;

$$G(P^*, \xi_j^*) = \det A_{\xi_j^*} = 0, \quad j = 1, 2$$

ve Gauss eğriliği

$$G(P^*) = \sum_{j=1}^2 G(P^*, \xi_j^*) = 0.$$

Buradan \mathcal{S}^* da açılabilir.

Teorem 3.2.9 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri arasında

$$H^* = \left(\frac{dt}{dt^*} \right) H + \left(\frac{dt}{dt^*} \right) \left(\frac{\cos \theta_{13} k_4}{4} \right) \quad (3.2.27)$$

bağıntısı vardır.

İspat. \mathcal{S} 'nin H ortalama eğriliği, (2.2.14), (3.2.20) ve (3.2.21) bağıntılarından,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\text{boy}\mathcal{S}} \sum_{j=1}^2 \dot{\text{Iz}}A_{\xi_j} \\ &= \frac{1}{\text{boy}\mathcal{S}} \left(\dot{\text{Iz}}A_{\xi_1} + \dot{\text{Iz}}A_{\xi_2} \right) \\ &= \frac{1}{\text{boy}\mathcal{S}} \left(\dot{\text{Iz}}A_{V_2} + \dot{\text{Iz}}A_{V_4} \right) \\ &= \frac{-k_1}{4} \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

olur. Benzer şekilde \mathcal{S}^* 'in H^* ortalama eğrilik vektör alanı (2.2.14), (3.2.25) ve (3.2.26) den,

$$\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{\text{boy}\mathcal{S}} \sum_{j=1}^2 \dot{\text{Iz}}A_{\xi_j^*} \\ &= \frac{1}{\text{boy}\mathcal{S}} \left(\dot{\text{Iz}}A_{\xi_1^*} + \dot{\text{Iz}}A_{\xi_2^*} \right) \\ &= \frac{1}{\text{boy}\mathcal{S}} \left(\dot{\text{Iz}}A_{V_2^*} + \dot{\text{Iz}}A_{V_4^*} \right) \\ &= \frac{-k_1^*}{4} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

şeklinde bulunur. Buradan, H ile H^* ortalama eğrilikleri arasında (3.2.6), (3.2.28) ve (3.2.29) bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
H^* &= \frac{-k_1^*}{4} \\
&= \frac{-\left(\frac{dt}{dt^*}\right)(\cos \theta_{11}k_1 - \cos \theta_{13}k_2)}{4} \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right) \left[\frac{\cos \theta_{11}k_1}{4} + \frac{\cos \theta_{13}k_2}{4} \right] \\
&= \left(\frac{dt}{dt^*}\right)H + \left(\frac{dt}{dt^*}\right) \left(\frac{\cos \theta_{13}k_2}{4} \right)
\end{aligned}$$

bağıntısı bulunur.

Teorem 3.2.10 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerin skaler normal eğrilikleri sıfırdır.

İspat. \mathcal{S} 'nin skalar normal eğriliği (2.2.20) ve (2.2.21) bağıntılarından,

$$K_N = \sum_{i,j=1}^2 M(A_{\xi_i}A_{\xi_j} - A_{\xi_j}A_{\xi_i}),$$

yazılır. (3.2.20) ve (3.2.21) bağıntılarından K_N ifadesi

$$\begin{aligned}
K_N &= M(A_{\xi_1}A_{\xi_1} - A_{\xi_1}A_{\xi_1}) + M(A_{\xi_1}A_{\xi_2} - A_{\xi_2}A_{\xi_1}) \\
&\quad + M(A_{\xi_2}A_{\xi_1} - A_{\xi_1}A_{\xi_2}) + M(A_{\xi_2}A_{\xi_2} - A_{\xi_2}A_{\xi_2}) \\
&= \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_3 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -k_1k_3 & k_1k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -k_1k_3 & k_1k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -k_1k_3 & k_1k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_1k_3 & -k_1k_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, \mathcal{S}^* 'in skalar normal eğriliği K_{N^*} ile gösterilirse

$$K_{N^*} = \sum_{i,j=1}^2 M(A_{\xi_i} A_{\xi_j} - A_{\xi_j} A_{\xi_i}),$$

(3.2.25) ve (3.2.26) bağıntılarından

$$\begin{aligned} K_{N^*} &= M(A_{\xi_1^*} A_{\xi_1^*} - A_{\xi_1^*} A_{\xi_1^*}) + M(A_{\xi_1^*} A_{\xi_2^*} - A_{\xi_2^*} A_{\xi_1^*}) \\ &\quad + M(A_{\xi_2^*} A_{\xi_1^*} - A_{\xi_1^*} A_{\xi_2^*}) + M(A_{\xi_2^*} A_{\xi_2^*} - A_{\xi_2^*} A_{\xi_2^*}) \\ &= \begin{bmatrix} -k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_3^* & -k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & k_3^* & -k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & k_3^* & -k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_3^* & -k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -k_1^* k_3^* & k_1^* k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -k_1^* k_3^* & k_1^* k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -k_1^* k_3^* & k_1^* k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_1^* k_3^* & -k_1^* k_4^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.2.11 V_1 ile V_3 ve V_1 ile V_5 vektörleri eşlenik vektörler ise V_1^* ile V_3^* ve V_1^* ile V_5^* vektörleri de eşlenik vektörlerdir.

İspat. $\forall X, Y \in \chi(\mathcal{S})$ için Gauss denklemi,

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + V(X, Y) \quad (3.2.30)$$

dir. $\xi \in \chi^\perp(\mathcal{S})$ için (2.2.3) ve (2.2.5) bağıntılarından,

$$\langle \bar{D}_X Y, \xi \rangle = \langle V(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi(X), Y \rangle \quad (3.2.31)$$

ve (2.2.8) den

$$V(X, Y) = \sum_{j=1}^2 \langle A_{\xi_j}(X), Y \rangle \xi_j = \sum_{j=1}^2 \langle \bar{D}_X Y, \xi_j \rangle \xi_j \quad (3.2.32)$$

ve

$$V(V_i, V_j) = - \sum_{l=1}^2 \langle V_j, \bar{D}_{V_i} \xi_l \rangle, \quad i, j = 1, 3, 5$$

(3.2.19) den

$$V(V_i, V_j) = - \sum_{l=1}^2 a_{ij}^l \xi_l, \quad i, j = 1, 3, 5$$

bulunur. Burada,

• l=1 için

$$a_{11}^1 = k_1, \quad a_{31}^1 = 0, \quad a_{51}^1 = 0, \\ a_{ij}^1 = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 < j \leq 3,$$

• l=2 için

$$a_{11}^2 = 0, \quad a_{13}^2 = k_3, \quad a_{15}^2 = k_4, \\ a_{ij}^2 = 0, \quad 1 < i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3$$

olur. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$V(V_1, V_1) = - \sum_{l=1}^2 a_{11}^l \xi_l = -k_1 V_2, \quad (3.2.33)$$

$$V(V_1, V_3) = - \sum_{l=1}^2 a_{13}^l \xi_l = k_3 V_4, \quad (3.2.34)$$

$$V(V_1, V_5) = - \sum_{l=1}^2 a_{15}^l \xi_l = -k_4 V_4, \quad (3.2.35)$$

$$V(V_i, V_j) = - \sum_{l=1}^2 a_{ij}^l \xi_l = 0 \quad i = 3, 5 \quad j = 1, 3, 5 \quad (3.2.36)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\forall X^*, Y^* \in \chi(\mathcal{S}^*)$ için Gauss denklemi,

$$\overline{D}_{X^*} Y^* = D_{X^*} Y^* + V(X^*, Y^*) \quad (3.2.37)$$

dır. $\xi^* \in \chi^\perp(\mathcal{S}^*)$ için (2.2.3) ve (2.2.5) bağıntılarından,

$$\langle \overline{D}_{X^*} Y^*, \xi^* \rangle = \langle V(X^*, Y^*), \xi^* \rangle = \langle A_{\xi^*}(X^*), Y^* \rangle \quad (3.2.38)$$

ve (2.2.8) den,

$$V(X^*, Y^*) = \sum_{j=1}^2 \langle A_{\xi_j^*}(X^*), Y^* \rangle \xi_j^* = \sum_{j=1}^2 \langle \overline{D}_{X^*} Y^*, \xi_j^* \rangle \xi_j^* \quad (3.2.39)$$

ve

$$V(V_i^*, V_j^*) = - \sum_{l=1}^2 \langle V_j^*, D_{V_i^*} \xi_l^* \rangle \xi_l^* \quad i, j = 1, 3, 5$$

(3.2.19) den

$$V(V_i^*, V_j^*) = - \sum_{l=1}^2 c_{ij}^l \xi_l^*, \quad i, j = 1, 3, 5$$

bulunur. Burada,

- $l = 1$ için

$$c_{11}^1 = k_1^*, c_{13}^1 = 0, c_{15}^1 = 0,$$

$$c_{ij}^1 = 0, \quad i=3,5 \quad j=1,3,5$$

- $l = 2$ için

$$c_{11}^2 = 0, c_{13}^2 = -k_3^*, c_{15}^2 = k_4^*,$$

$$c_{ij}^2 = 0, \quad i=3,5 \quad j=1,3,5$$

olur. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa,

$$V(V_1^*, V_1^*) = - \sum_{l=1}^2 c_{11}^l \xi_l^* = -k_1^* V_2^*, \quad (3.2.40)$$

$$V(V_1^*, V_3^*) = - \sum_{l=1}^2 c_{13}^l \xi_l^* = k_3^* V_4^*, \quad (3.2.41)$$

$$V(V_1^*, V_5^*) = - \sum_{l=1}^2 c_{15}^l \xi_l^* = -k_4^* V_4^*, \quad (3.2.42)$$

$$V(V_i^*, V_j^*) = - \sum_{l=1}^2 c_{ij}^l \xi_l^* = 0, \quad i = 3, 5 \quad j = 1, 3, 5 \quad (3.2.43)$$

elde edilir. (3.2.5) ve (3.2.6) bağıntısından

$$\begin{aligned} V(V_1^*, V_1^*) &= -k_1^* V_2^* \\ &= -\frac{dt}{dt^*} (\cos \theta_{11} k_1 - \cos \theta_{13} k_2) V_2 \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

$$\begin{aligned} V(V_1^*, V_3^*) &= k_3^* V_4^* \\ &= \frac{dt}{dt^*} (\cos \theta_{11} k_3 - \cos \theta_{53} k_4) V_4 \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

$$\begin{aligned} V(V_1^*, V_5^*) &= -k_4^* V_4^* \\ &= -\frac{dt}{dt^*} (-\cos \theta_{53} k_3 + \cos \theta_{11} k_4) V_4 \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

$$V(V_1^*, V_1^*) = \frac{dt}{dt^*} \cos \theta_{11} V(V_1, V_1) + \frac{dt}{dt^*} \cos \theta_{13} V_2 \quad (3.2.47)$$

$$V(V_1^*, V_3^*) = \frac{dt}{dt^*} \cos \theta_{11} V(V_1, V_3) + \frac{dt}{dt^*} \cos \theta_{53} V(V_1, V_5) \quad (3.2.48)$$

$$V(V_1^*, V_5^*) = \frac{dt}{dt^*} \cos \theta_{53} V(V_1, V_3) + \frac{dt}{dt^*} \cos \theta_{11} V(V_1, V_5) \quad (3.2.49)$$

$$V(V_i^*, V_j^*) = (V_i, V_j) = 0, \quad i = 3, 5, \quad j = 1, 3, 5 \quad (3.2.50)$$

bulunur.

V_1 ile V_3 ve V_1 ile V_5 vektörleri eşlenik vektörler olduğundan (2.2.9), (3.2.48) ve (3.2.49) bağıntılarından,

$$V(V_1, V_3) = V(V_1, V_5) = V(V_1^*, V_3^*) = V(V_1^*, V_5^*) = 0.$$

Teorem 3.2.12 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeyler olsun. \mathcal{S} yüzeyinin Riemann eğriliği,

$$K(V_1, V_1) = 0, \quad K(V_1, V_3) = -k_3^2, \quad K(V_1, V_5) = -k_4^2,$$

$$K(V_i, V_j) = 0, \quad i = 3, 5, \quad j = 1, 3, 5$$

\mathcal{S}^* regle yüzeyinin Riemann eğriliği,

$$K(V_1^*, V_1^*) = 0, \quad K(V_1^*, V_3^*) = -k_3^{*2}, \quad K(V_1^*, V_5^*) = -k_4^{*2},$$

$$K(V_i^*, V_j^*) = 0, \quad i = 3, 5, \quad j = 1, 3, 5.$$

İspat. \mathcal{S} yüzeyinin Riemann eğriliği, (2.2.16), (2.2.17) ve (2.2.18) bağıntılarından

$$\begin{aligned} K(V_i, V_j) &= \langle V_i, R(V_i, V_j)V_j \rangle, \\ &= \langle V(V_i, V_j), V(V_j, V_i) \rangle - \langle V(V_i, V_j), V(V_i, V_j) \rangle. \end{aligned}$$

olur. (3.2.33), (3.2.34), (3.2.35), (3.2.36) ve (3.2.12) bağıntılarından

$$\begin{aligned} K(V_1, V_1) &= \langle V(V_1, V_1), V(V_1, V_1) \rangle - \langle V(V_1, V_1), V(V_1, V_1) \rangle \\ &= \langle -k_2 V_2, -k_2 V_2 \rangle - \langle -k_2 V_2, -k_2 V_2 \rangle \\ &= k_2^2 - k_2^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(V_1, V_3) &= \langle V(V_1, V_3), V(V_3, V_3) \rangle - \langle V(V_1, V_3), V(V_1, V_3) \rangle \\
&= \langle k_3 V_4, 0 \rangle - \langle k_3 V_4, k_3 V_4 \rangle \\
&= k_2^2 - k_2^2 \\
&= -k_3^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(V_1, V_5) &= \langle V(V_1, V_5), V(V_5, V_5) \rangle - \langle V(V_1, V_5), V(V_1, V_5) \rangle \\
&= \langle -k_4 V_4, 0 \rangle - \langle -k_4 V_4, -k_4 V_4 \rangle \\
&= k_2^2 - k_2^2 \\
&= -k_4^2,
\end{aligned}$$

$$K(V_i, V_j) = 0, \quad i = 3, 5, \quad j = 1, 3, 5$$

bulunur. Benzer şekilde \mathcal{S}^* yüzeyinin Riemann eğriliği, (2.2.16) (2.2.17) ve (2.2.18) bağıntılarından

$$K(V_i^*, V_j^*) = \langle V_i^*, R(V_i^*, V_j^*)V_j^* \rangle,$$

$$K(V_i^*, V_j^*) = \langle V(V_i^*, V_j^*), V(V_j^*, V_i^*) \rangle - \langle V(V_i^*, V_j^*), V(V_i^*, V_j^*) \rangle.$$

olur. (3.2.44), (3.2.45) ve (3.2.46) bağıntılarından

$$\begin{aligned}
K(V_1^*, V_1^*) &= \langle V(V_1^*, V_1^*), V(V_1^*, V_1^*) \rangle - \langle V(V_1^*, V_1^*), V(V_1^*, V_1^*) \rangle \\
&= \langle -k_2^* V_2^*, -k_2^* V_2^* \rangle - \langle -k_2^* V_2^*, -k_2^* V_2^* \rangle \\
&= k_2^{*2} - k_2^{*2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(V_1^*, V_3^*) &= \langle V(V_1^*, V_3^*), V(V_3^*, V_3^*) \rangle - \langle V(V_1^*, V_3^*), V(V_1^*, V_3^*) \rangle \\
&= \langle k_3^* V_4^*, 0 \rangle - \langle k_3^* V_4^*, k_3^* V_4^* \rangle \\
&= k_2^{*2} - k_2^{*2} \\
&= -k_3^{*2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(V_1^*, V_5^*) &= \langle V(V_1^*, V_5^*), V(V_5^*, V_5^*) \rangle - \langle V(V_1^*, V_5^*), V(V_1^*, V_5^*) \rangle \\
&= \langle -k_4^* V_4^*, 0 \rangle - \langle -k_4^* V_4^*, -k_4^* V_4^* \rangle \\
&= k_2^{*2} - k_2^{*2} \\
&= -k_4^{*2},
\end{aligned}$$

$$K(V_i^*, V_j^*) = 0, \quad i = 3, 5, \quad j = 1, 3, 5$$

bulunur.

Teorem 3.2.13 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* paralel d -equidistant regle yüzeylerinin Riemann eğrilikleri arasında:

$$K(V_1^*, V_3^*) = \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \left(\cos^2 \theta_{11} K(V_1, V_3) + \cos^2 \theta_{35} K(V_1, V_5) - 2 \cos \theta_{11} \cos \theta_{35} k_3 k_4 \right)$$

$$K(V_1^*, V_5^*) = \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \left(\cos^2 \theta_7 K(V_1, V_3) + \cos^2 \theta_1 K(V_1, V_5) + 2 \cos \theta_7 \cos \theta_1 k_3 k_4 \right)$$

ve

$$K(V_1^*, V_1^*) = K(V_1, V_1) = 0,$$

$$K(V_i^*, V_j^*) = K(V_i, V_j) = 0 \quad i = 3, 5, \quad j = 1, 3, 5$$

bağıntıları vardır.

İspat.

$$\begin{aligned} K(V_1^*, V_3^*) &= -k_3^{*2} \\ &= -(\cos \theta_{11} k_3 + \cos \theta_{35} k_4)^2 \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \\ &= (-\cos^2 \theta_{11} k_3^2 - 2 \cos \theta_{11} \cos \theta_{35} k_3 k_4 - \cos^2 \theta_{35} k_4^2) \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \\ &= (\cos^2 \theta_{11} K(V_1, V_3) + \cos^2 \theta_{35} K(V_1, V_5) - 2 \cos \theta_{11} \cos \theta_{35} k_3 k_4) \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(V_1^*, V_5^*) &= -k_4^{*2} \\ &= -(\cos \theta_{53} k_3 + \cos \theta_{11} k_4)^2 \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \\ &= (-\cos^2 \theta_{53} k_3^2 + 2 \cos \theta_{53} \cos \theta_{11} k_3 k_4 - \cos^2 \theta_{11} k_4^2) \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2 \\ &= (\cos^2 \theta_{53} K(V_1, V_3) + \cos^2 \theta_{11} K(V_1, V_5) + 2 \cos \theta_{53} \cos \theta_{11} k_3 k_4) \left(\frac{dt}{dt^*} \right)^2, \end{aligned}$$

$$K(V_1^*, V_1^*) = K(V_1, V_1) = 0,$$

$$K(V_i^*, V_j^*) = K(V_i, V_j) = 0, \quad i = 3, 5 \quad j = 1, 3, 5$$

elde edilir.

Teorem 3.2.14 E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S}^* regle yüzeyinin Ricci eğriliği ve skalar eğriliği

$$S(V_i, V_i) = K(V_i, V_i) = S(V_i^*, V_i^*) = K(V_i^*, V_i^*) = 0, \quad i = 1, 3, 5$$

bağıntıları vardır.

İspat. \mathcal{S} 'nin V_i doğrultusundaki Ricci eğriliği, (2.2.19) den,

$$S(V_i, V_i) = \sum R(V_j, V_i, V_j, V_i) = \sum \langle V_j, R(V_j, V_i)V_i \rangle, \quad j = 1, 3, 5$$

yazılır. (2.2.18) bağıntısından

$$S(V_i, V_i) = \sum \{ \langle V(V_j, V_i), V(V_i, V_i) \rangle - \langle V(V_j, V_i), V(V_j, V_i) \rangle \} \quad j = 1, 3, 5$$

olur. Burada (3.2.12) ve (3.2.12) bağıntıları dikkate alınırsa

$$S(V_i, V_i) = K(V_i, V_i) = 0, \quad i = 1, 3, 5 \quad (3.2.51)$$

bulunur. (2.2.20) bağıntısından \mathcal{S} regle yüzeyinin skalar eğriliği

$$r_{sk} = \sum S(V_i, V_i), \quad i = 1, 3, 5$$

şeklinde yazılır. (3.2.51) den

$$r_{sk} = 0$$

bulunur. Benzer şekilde, (2.2.19) ve (2.2.18) bağıntılarından \mathcal{S}^* 'nin V_i doğrultusundaki Ricci eğriliği,

$$\begin{aligned} S(V_i^*, V_i^*) &= \sum R(V_j^*, V_i^*, V_j^*, V_i^*) \\ &= \sum \langle V_j^*, R(V_j^*, V_i^*)V_i^* \rangle, \quad j = 1, 3, 5 \\ &= \sum \{ \langle V(V_j^*, V_i^*), V(V_i^*, V_i^*) \rangle - \langle V(V_j^*, V_i^*), V(V_j^*, V_i^*) \rangle \} \quad j = 1, 3, 5 \end{aligned}$$

olur. (3.2.12) ve (3.2.12) bağıntılarından

$$S(V_i^*, V_i^*) = K(V_i^*, V_i^*) = 0, \quad i = 1, 3, 5$$

bulunur. (2.2.20) dan \mathcal{S} regle yüzeyinin skalar eğriliği

$$r_{sk}^* = \sum S(V_i^*, V_i^*), \quad i = 1, 3, 5$$

(3.2) den

$$r_{sk}^* = 0$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1: E^5 de \mathcal{S} ve \mathcal{S} paralel d -equidistant regle yüzeylerinin skalar eğrilikleri sıfırdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde elde edilen sonuçlar bulgular bölümünde verilmiştir. Bulgular bölümü 2 kısma ayrılmıştır. İlk kısımda, 3–boyutlu Öklid uzayında tanımlı paralel Darboux equidistant regle yüzeylerin şekil operatörlerinin değişmezleri ve dayanak eğrilerinin küresel göstergeleri ile ilgili karakteristik sonuçlar elde edilerek yorumlanmıştır. Bir örnek verilerek Maple programı ile şekli çizdirilmiş ve yüksek boyutta işlem yaparken konunun anlaşılmasına yardımcı olmuştur.

İkinci kısımda ise yüksek boyutlu uzaylarda 4 boyutlu Öklid uzayında Darboux vektörünün varlığından söz edilemediği için 5–boyutlu Öklid uzayında paralel Darboux equidistant regle yüzeyler tanımlanmıştır. Bu yüzeylerin ortalama eğrilikleri, Ricci eğrilikleri, kesit eğrilikleri, skaler eğrilikleri ve bu eğriliklerin arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Bu doğrultu da yüzeyleri hakkında bilgiler elde edilmiştir.

Bu çalışmadan ışıkla $2n + 1$ şeklinde ki yüksek boyutta Paralel Darboux equidistant regle yüzeyler tanımlanabilir. Bu yüzeylerin eğrilikleri incelenerek genelleme yapılabilir. Oluşan iki yüzey arasındaki bağlantılar bulunarak genellemeler yapılabilir. Yine bu çalışmanın benzeri Lorentz ve Dual uzaylarda çalışılabilir.

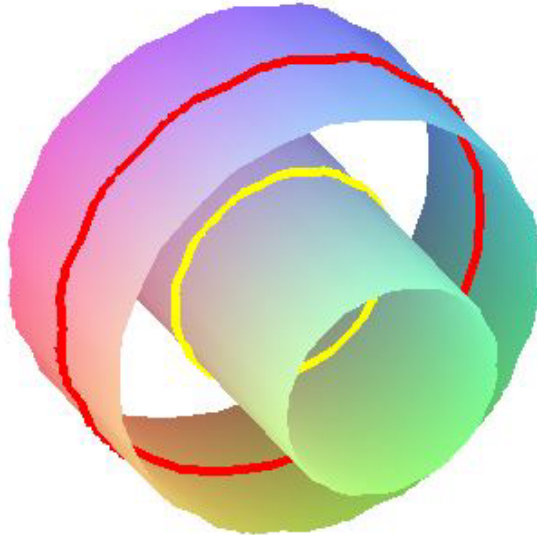
5. Maple Uygulamaları

Bu bölümde 3. bölümde verilen örneğin Maple programlama dilinde komutları verilmiştir.

```
yc := [sqrt(3)/3 * sin(sqrt(3) * t), sqrt(2) + sqrt(3) * v, sqrt(3)/3 * cos(sqrt(3) * t)];  
dc := [sqrt(3)/3 * sin(sqrt(3) * t), sqrt(2), sqrt(3)/3 * cos(sqrt(3) * t)];  
YC := [2 * sqrt(3)/3 * sin(sqrt(3) * t), sqrt(6)/3 + sqrt(3)/2 * v,  
       2 * sqrt(3)/3 * cos(sqrt(3) * t)];  
DC := [2 * sqrt(3)/3 * sin(sqrt(3) * t), sqrt(6)/3, 2 * sqrt(3)/3 * cos(sqrt(3) * t)];  
with(plots):
```

```
A := plot3d(yc, t = -2 * Pi..2 * Pi, v = -4..4) :  
B := plot3d(YC, t = -2 * Pi..2 * Pi, v = -4..4) :  
C := plot3d(dc, t = -2 * Pi..2 * Pi, v = -4..4, color = yellow, style = line,  
           thickness = 40) :  
E := plot3d(DC, t = -2 * Pi..2 * Pi, v = -4..4, color = red, style = line,  
           thickness = 40) :
```

```
display(A,B,C,E);
```



Şekil 5.1: Equidistant Regle Yüzeyler

with(plottools):

with(plots):

```
L := point([0, sqrt(2) - sqrt(3)/3 + sqrt(6)/3, sqrt(3)/3], color = black,  
          symbol = cross, symbolsize = 25), point([0, sqrt(6)/3 + sqrt(2), 2 * sqrt(3)/3],  
          color = red, symbolsize = 25, symbol = cross) :
```

```
h1 := [-v, sqrt(2) - sqrt(3)/3 + sqrt(6)/3 + sqrt(3) * t, sqrt(3)/3 - v];
```

```
h2 := [-v, sqrt(6)/3 + sqrt(2) + sqrt(3)/2 * t, 2 * sqrt(3)/3 - v];
```

```
h10 := plot3d(h1, t = -2 * Pi..2 * Pi, v = -0.3..0.8, color = blue, style = line,  
             thickness = 40) :
```

```
h20 := plot3d(h2, t = -2 * Pi..2 * Pi, v = -0.3..1.4, color = green, style = line,  
            thickness = 40) :
```

```
display(A,B,L,h10,h20);
```



Şekil 5.2: Uygun A ve B Noktaları

KAYNAKLAR

- [1] Azak, A. Z. Tosun, M. ve Masal, M. (2014). Null Parallel p -Equidistant B-Scrolls. Bol. Soc. Paran. Mat. 32(2), 23-34
- [2] Chen, B.Y. (1973). Geometry OF Manifolds, Marcel Dekkar. New York.
- [3] Esin E. (1988). On a Generalization of the Darboux Vector in Euclidean Space E^n . J.Ins. Sci. Techno. Gazi University, 1(3), January, 17-19.
- [4] Ergüt, M. (1983). Genelleştirilmiş Regle Yüzezlere Dair. Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Doktora Tezi, Elazığ.
- [5] Frank, H. ve Giering, O. (1976). Verallgemeinerte Regelflachen, Mathematische Zeitschrift. 150, 261-271
- [6] Hacısalihoğlu, H. H. (1983). Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat, No.2, Malatya.
- [7] Kobayashi, S. ve Nomizu., K. (1996). Foundations Of Differential Geometry. Vol. I, Vol II, John Wiley Sons Inc. L cccn: 63-19209.
- [8] Kocayığit H., Öztürk G. , Bayram K. B. , Bulca B. ve Arslan K. (2013). Characterization of Curves in E^{2n+1} with 1-type Darboux Vector. Mathematica Moravica Vol. 17-2,29-37.
- [9] Masal, M. ve Kuruoğlu, N. (1999). Some Characteristic Properties of the Parallel p -Equidistant Ruled Surfaces. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 19E (2): 361-364.
- [10] Masal, M. ve Kuruoğlu, N. (2000). Some characteristic properties of the Spherical Indicatrix Leading Curves of Parallel p -Equidistant Ruled Surfaces. Bulletin of Pure and Applied Sciences, 19E (2): 405-410.
- [11] Masal, M. ve Kuruoğlu, N. (2013). Generalized paralel p_i -equidistant ruled surfaces. Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, Vol.171, 18pages.
- [12] Müller, H. R.(1956). Kinematik Dersleri, (Çev: Egesoy, E. Oruç, M.) Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Um.96-Mat.27, 1963.

- [13] Özduran A. (2019). Equidistante Regle Yüzeylerin Bazı Yeni Özellikleri. Ordu Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, Ordu.
- [14] Sabuncuoğlu, A. (1982). Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler. Ankara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Doçentlik Tezi, Ankara.
- [15] Şenyurt, S. ve As, E. (2013). Some Characteristic Properties Of Parallel z-Equidistant Ruled Surfaces. Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 587289, 7 pages.
- [16] Thas, C. (1978) Minimal Monosystems. The Yokohama Math.J., XXVI(2), 157-167.
- [17] Valentis. I. (1986). Paralel p-Aquidistante Regelflachen. Manuscripta Math., 54, 391-404.
- [18] Zenciroğlu, E. (1988). Çizgiler Geometrisinde Meusnier Teoremi ve Sonuçları. Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Eskişehir

DİZİN

- Öklid uzayı, 4
şekil operatörü, 8
- afin konneksiyon, 8
afin uzay, 3
asimptotik demet, 16
asimptotik çizgi, 10
asimptotik doğrultu, 10
asimptotik vektör, 11
asli eğrilik, 9
asli eğrilik doğrultuları, 9
asli normaller göstergesi, 6
- binormaller göstergesi, 6
- dağılma parametresi, 14
Darboux vektörü, 6
- eş uzaklıklı regle yüzey, 17
eşlenik vektör, 11
eğrilik, 5
eğrilik çizgisi, 9
- Gauss denklemi, 10
Gauss eğriliği, 9
genelleştirilmiş Darboux vektörü, 17
- harmonik eğrilik, 5
hiperyüzey, 7
- iç çarpım fonksiyonu, 3
- kovaryant türev operatörü, 8
- Lipschitz-Killing eğriliği, 12
- ortalama eğrilik, 9
- regle yüzey, 14
regle yüzeyin doğrultmanı, 14
Ricci eğriliği, 13
Riemann eğriliği, 13
Riemann metriği, 7
- Serret-Frenet vektörü, 4
skalar eğriliği, 13
skalar normal eğriliği, 13
striksiyon eğrisi, 15
striksiyon noktası, 15
teğetler göstergesi, 6
teğetsel demet, 16
temel form, 9
total geodezik, 11
uzaklık fonksiyonu, 4
Weingarten dönüşümü, 8
yarı Riemann manifoldu, 8
yay parametresi, 4

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Ceyda CEVAHİR YILDIZ
Doğum Yeri : İstanbul
Doğum Tarihi : 13.09.1991
Medeni Hali : Evli
Bildiği Yabancı Dil : İngilizce
İletişim Bilgileri : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Lise : Göl Anadolu Öğretmen Lisesi, 2009.
Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fatih Eğitim Fak.
Matematik Öğretmenliği Böl., 2014.
Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Böl., Geometri, 2016.
Yayınlar :

1. Şenyurt S., Cevahir C. and Altun Y., On Spatial Quaternionic Involute Curve A New View, Adv. Appl. Clifford Algebras, 27(2), 1815-1824, 2017.
2. Şenyurt S., Cevahir C., Altun Y. and Kocayığıt H., On The Sabban Frame Belonging To Involute-Evolute Curves, Thermal Science, 2019.
3. Şenyurt S., Altun Y., Cevahir C. and Kocayığıt H., Some Special Curves Belonging To Mannheim Curves Pair, Thermal Science, 2019.
4. Şenyurt S., Cevahir C. and Altun Y., On the Smarandache Curves of Spatial Quaternionic Involute Curve, Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 2020.
5. Şenyurt S., Cevahir C. and Altun Y., Smarandache Curves of Spatial Quaternionic Bertrand Curve According to Frenet Frame, Turkish Journal of Science, 2020.
6. Şenyurt S., Altun Y., Cevahir C., Smarandache Curves for Spherical Indicatrix of the Bertrand Curves Pair, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 2020.

7. Şenyurt S., Altun Y., Cevahir C., Smarandache curves according to Sabban Frame of Fixed Pole Curve Belonging to the Bertrand Curves Pair, AIP Conf. Proc. 1726, 020045, 2016
8. S. Senyurt, Altun Y. and Cevahir C., On The Darboux Vector Belonging To Involute Curve A Different View, Mathematical Sciences & Applications E-Notes, vol.4, no.2, pp 131-138, 2016.
9. Şenyurt S., Altun Y., Cevahir C. , Smarandache Curves According to Sabban Frame for Darboux vector of Mannheim partner curve, AIP Conference Proceedings 1833, 020024 (2017); doi: 10.1063/1.4981672
10. Şenyurt S., Altun Y., Cevahir C., Mannheim Partner Curve a Different View, International J.Math. Combin. Vol.2, 84-91, 2017.

Bildiriler :

1. S. Şenyurt, Y. Altun, C. Cevahir, Smarandache Curves According to Sabban frame of Fixed Pole Curve Belonging to the Bertrand Curves Pair, ICANAS, 21-23/04/2016, Antalya/ Turkey S. Şenyurt, Y. Altun, C. Cevahir, On the Darboux Vector Belonging to Involute Curve a Different View, 14th International Geometry Symposium, 25-28/05/2016, Denizli/Turkey
2. S. Şenyurt, C. Cevahir and Y. Altun, On Spatial Quaternionic Involute Curve A New View, 14th International Geometry Symposium, 25-28/05/2016, Denizli/Turkey
3. S. Şenyurt, Y. Altun, C. Cevahir, Smarandache Curves According to Sabban Frame of Fixed Pole Curve Belonging to the Bertrand Curves Pair, ICANAS, 18-21/04/2017, Antalya/ Turkey
4. S. Şenyurt, Y. Altun, C. Cevahir, Smarandache Curves According to Sabban Frame Belonging to Mannheim Curves Pair, 15th International Geometry Symposium, 03-06/07/2017, Amasya/Turkey
5. Y Altun, S.Şenyurt, C.Cevahir, Bertrand Eğri Çiftine Ait Küresel Gösterge Eğrilerinin Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, ANTALYA

6. Y Altun, S.Şenyurt, C.Cevahir, Involüt-Evolüt Eğrilerine Ait Küresel Gösterge Eğrilerinin Sabban Çatısına Göre Smarandache Eğrileri, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, ANTALYA
7. C. Cevahir, S.Şenyurt, Y. Altun, Uzaysal Kuaterniyonik Bertrand Eğri Çiftinin Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, ANTALYA
8. C. Cevahir, S.Şenyurt, Y. Altun, Uzaysal Kuaterniyonik İnvölüt-Evolüt Eğrilerinin Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Akdeniz Üniversitesi, 07-09/09/2015, ANTALYA