T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ OPERATÖRLERİN BAZI YENİ VERSİYONLARINI İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

BARIŞ ÇELİK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

BARIŞ ÇELİK

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-2212 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖZET

KESİRLİ OPERATÖRLERİN BAZI YENİ VERSİYONLARINI İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

BARIŞ ÇELİK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 90 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ERHAN SET)

Bu tezin amacı, literatürde iyi bilinen Minkowski, Grüss, Chebyshev, Hermite-Hadamard eşitsizlikleri için farklı tipte kesirli integral ve türev operatörleri yardımıyla yeni sonuçları sunmak ve literatürle uyumunu göstermektir.

Dört bölüm olarak hazırlanan bu tezin, birinci bölümü olan giriş bölümünde kesirli analiz ve eşitsizlik teorisi ile ilgili, kronolojik süreci de içinde barındıran genel bilgilerin bir derlemesi sunulmuştur. İkinci bölümde, ilk olarak tezde kullanılan konveks fonksiyon tanımları ve özellikleri, Beta, Gama ve senkronize fonksiyonu gibi bazı özel fonksiyonlar, Minkowski eşitsizliği, Grüss eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Milne eşitsizliği ve bazı önemli eşitsizlikler verilmiştir. Ardından, kesirli integral ile kesirli türev tanımları, aralarındaki ilişkiler ve daha önce elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm olan bulgular kısmında, ilk olarak sabit orantılı kesirli integral operatörü yardımıyla sırasıyla Minkowski, Grüss ve Chebyshev eşitsizlikleri ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, sabit orantılı Caputo-hibrit operatörünü içeren s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların, bazı özel koşullar altında, literatürde var olan sonuçlara indirgendiği gözlenmiştir. Daha sonra, yeni uyumlu kesirli integral operatörlerini kullanarak diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Milne tipli yeni özdeşlik ve eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen bu eşitsizliklerde özel fonksiyon seçilip uygun değerler altında simülasyonları elde edilmiş ve bu simülasyonlar yardımıyla eşitsizliklerin sol ve sağ taraflarının karşılaştırması yapılmıştır. Dördüncü bölüm olan tartışma ve sonuç kısmında, tezde elde edilen bulgular özetlenmiş ve sonraki çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks fonksiyon, s-konveks fonksiyon, Minkowski eşitsizliği, Grüss eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Kesirli integral operatörleri, Kesirli türevler, Sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü, Orantılı Caputo-hibrit operatörü, Yeni uyumlu kesirli integral operatörü.

ABSTRACT

INTEGRAL INEQUALITIES INVOLVING SOME NEW VERSIONS OF FRACTONAL OPERATORS

BARIŞ ÇELİK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 90 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. ERHAN SET)

The aim of this thesis is to present new results for inequalities such as Minkowski, Grüss, Chebyshev, Hermite-Hadamard inequalities, which are well known in the literature with the help of different types of fractional integral and derivative operators, and to show their consistency with the literature.

In the introduction, which is the first part of this thesis that is prepared in four parts, a compilation of general information about fractional analysis and inequality theory, including the chronological process, is presented. In the second chapter, the definitions and properties of convex functions, some special functions such as Beta, Gamma and synchronized function, Minkowski inequality, Grüss inequality, Chebyshev inequality, Hermite-Hadamard inequality, Milne inequality and some important inequalities are given. Then, the definitions of fractional integral and fractional derivative, the relations between them and the results obtained previously are given. In the third part, the results section, firstly new results for the Minkowski, Grüss and Chebyshev inequalities are obtained respectivetly by using the constant proportional fractional integral operator. Then, Hermite-Hadamard type inequalities are obtained for s-convex functions involving the constant proportional Caputo-hybrid operator. Under some special conditions, it is observed that the obtained results reduce to the results existing in the literature. Then, new identities and inequalities of Milne type for differentiable convex functions are obtained by using new conformable fractional integral operators. In addition, the simulations of these inequalities were obtained under appropriate values by selecting the special function and with the help of these simulations the left and right sides of the inequalities were compared. In the fourth chapter, discussion and conclusion, the findings that obtained in the thesis are summarized and some suggestions for the future studies are given.

Keywords: Convex function, s-convex function, Minkowski inequality, Grüss inequality, Chebyshev inequality, Hermite-Hadamard inequality, Fractional integral operators, Fractional derivatives, Constant proportional (CP) fractional integral operator, Proportional Caputo-hybrid operator, New conformable fractional integral operator.

TEŞEKKÜR

Lisans eğitimim boyunca destek olan, yüksek lisansa yönlendiren ardından da doktora yapma konusunda beni motive eden ve bu uzun süre zarfında her türlü bilgisini ve emeğini paylaşmaktan kaçınmayan, yapmış olduğum tüm çalışmalarda yol gösteren, biz öğrencilerine rol model olan kıymetli hocam Prof. Dr. Erhan SET'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca zaman, fikir ve manevi desteği ile katkısı çok olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ordu Üniversitesi'nde bulunduğum süre boyunca bana yol gösteren ve yardımcı olan, bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, yardımını hiçbir zaman esirgemeyen başta değerli hocam Prof. Dr. Selahattin MADEN'e ve Ordu Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine canı gönülden teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Bana her zaman inanan ve benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen her an yanımda olduklarını bildiğim, sevgileri sayesinde moral ve güç bulduğum, bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan sevgili aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{B(a,b)}$	:	Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Gama fonksiyonu
$\boldsymbol{K_s^1}$	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
$\boldsymbol{K_s^2}$	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$		Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{I}$	:	Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
$\boldsymbol{I^\circ}$	:	I'nın içi
$\boldsymbol{f'}$		f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$\mathbf{J}_{\mathbf{a}^+}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$\mathbf{J}_{\mathbf{b}^-}^{\alpha}$	:	α. Mertebeden Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$\boldsymbol{L_1[a,b]}$	:	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{D^\alpha}$	:	Uyumlu Türev Operatörü
${}_{0}^{C}\boldsymbol{D}_t^{\alpha}$	:	Caputo Türev Operatörü
${}^{P}\boldsymbol{D}_{\alpha}$	:	Orantılı Türev Operatörü
${}^{CP}\boldsymbol{D}_{\alpha}$	:	Sabit Orantılı Türev Operatörü
${}_{a}^{CP}\boldsymbol{I}_{\alpha}$	:	Sabit Orantılı İntegral Operatörü
${}_{0}^{PC}\boldsymbol{D}_t^{\alpha}$	:	Orantılı Caputo Hibrit Operatörü
${}_{0}^{CPC}\boldsymbol{D}_t^{\alpha}$	:	Sabit Orantılı Caputo Hibrit Operatörü
${}^{\beta}\mathfrak{J}_{a^+}^{\alpha}$	:	Sol Taraflı Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü
${}^{\beta}\mathfrak{J}_{b^-}^{\alpha}$	:	Sağ Taraflı Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü

1. GİRİŞ

Kesirli analizin ortaya çıkışında önemli bir dönüm noktası kabul edilen 1695 yılındaki mektuplaşmada L'Hospital Leibniz'e bir diferansiyel denklemde türevin mertebesinin $\frac{1}{2}$ olması durumunda ne olacağını sormuştur. Leibniz bu soruya cevaben gelecekte önemli sonuçlara kapı açacak olan bu problemin kesirli analiz olarak bilinen alanın başlangıcı olabileceğini öngörmüştür [35, 38].

Kesirli analizin önemli bir dezavantajı klasik analizde türev kavramının sahip olduğu geometrik yoruma sahip olmaması olarak ifade edilebilir. Klasik türevde teğet ile kurulan ilişki kesirli analizde ortaya konulamadığı için bu alan 1900 lü yıllara oldukça yavaş ilerleme kaydetmiştir. Leibniz'den sonra 1738 yılındaki çalışmasında [35] Euler tamsayı olmayan mertebeden türev hakkında çalışma yapmıştır. 1822 yılında Fourier türevin tanımında integral takdimi kullanmış olup bu tanımlama keyfi mertebeden türevin ilk tanımı olarak literatüre girmiştir. Kesirli analiz alanındaki gelişim Abel tarafından 1826 yılında yapılan ve kesirli analiz için ilk uygulama problemi sayılan tautochrone problemiyle ilişkili bir integral eşitliğinin çözümünü içeren çalışma ile devam etmiştir [33, 35]. Kesirli analiz alanının tarihsel gelişimi 1832 yılında Liouville tarafından üstel fonksiyonun türevine dair bir formül ve yine Liouville tarafından ortaya konan günümüzde tamsayı olmayan mertebeden integraller için Liouville versiyonu olarak adlandırılan integral formuyla devam etmiştir. Liouville'nin bu alandaki çalışmalarının ardından en önemli makale Riemann tarafından yayımlanmıştır [44]. Riemann'ın bu çalışmasından sonra Grünwald [25] ve Letnikov [32] tarafından Riemann-Liouville yaklaşımından farklı olarak bir yakınsak seri açısından tam olmayan mertebeden türevlere dair yeni bir yaklaşım ortaya konmuştur. Letnikov tarafından ortaya konan tanımda mertebenin bazı özel seçimleri için Liouville tarafından verilen tanımın, tamsayı olmayan mertebe farkı ile uygun şartlar altında ise Riemann tarafından takdim edilen türev versiyonunun elde edildiği görülmüştür. 1892 yılında ise Hadamard analitik fonksiyonların tam olmayan mertebeden türevinin Taylor serisi yardımıyla ifade edileceğini ortaya koymuştur [33].

1900 yılından itibaren kesirli analizdeki devinim hızlanmış ve uygulamalı bilimlerdeki problemleri formülize etmek amacıyla farklı tanımlar sunulmaya başlanmıştır. Periyodik fonksiyonlar yardımıyla ifade edilen problemlerde oldukça efektif sonuçlar veren bir tanım Weyl tarafından verilmiştir. Riesz kesirli integraller için ortalama değer teoreminin yanısıra Fourier dönüşümü ile ilişkili yeni bir tanım ortaya koymuştur. Bu verilen yeni tanımın uygun koşullar altında Liouville tarafından verilen tanımla örtüştüğü tespit edilmiştir. Daha sonra Erdélyi–Kober tarafından integral denklemler ve diferansiyel denklemler alanlarında oldukça yararlı uygulamalara kaynaklık edecek olan tam olmayan integral mertebeli bir tanım sunulmuştur [33, 35]. 1967 yılında ise Caputo [15] Riemann-Liouville'in vermiş olduğu tanımdaki önemli bir eksiği ortadan kaldırmak suretiyle başlangıç koşullarına sahip diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini analiz etmek için uygun bir türev tanımı vermiştir [31, 42].

Caputo'nun ifade ettiği yeni türev tanımı integral ve türev operatörlerinin mertebelerini Riemann-Liouville'in tam olmayan mertebeli türevi ile ters çevirmesi esasına dayanır. Aslında temel farklılık, Caputo'nun tanımında ise öncelikle tam mertebeli türevin hesaplanması ve ardından tam olmayan mertebeli integralin hesaplanmasıdır. Riemann-Liouville'in tanımında önce tam olmayan mertebeli integral hesaplanmakta ve daha sonra tam mertebeli türev hesaplanmaktadır.

Kesirli analiz ile ilgili, Haziran 1974'te B. Ross tarafından New Haven Üniversitesi'nde düzenlenen "First Conference on Fractional Calculus and its Applications" adlı ilk konferansta birçok matematikçinin katılımıyla birlikte önemli gelişmeler katedilmiş ve çeşitli uygulamalar ortaya çıkmıştır. Daha sonra S.G. Samko, A.A. Kilbas ve O.I. Marichev, K.B. Oldham ve J. Spanier, K.S. Miller ve B. Ross gibi bilim insanları kesirli analiz ile ilgili kitaplar yazmışlardır.

Kökeni klasik analiz kadar eski olan kesirli analiz kapsamında, son yıllarda birçok matematikçinin ilgi odağı haline gelmiş olan çeşitli kesirli türevler ile tamsayı mertebeleri türevlerin ve integral operatörlerin genelleştirmeleri olan birçok operatör tanıtılmıştır. Kesirli analizin matematiksel analiz, uygulamalı matematik, fizik, istatistik, sinyal işleme, kontrol teorisi, kaos teorisi, modelleme ve matematiksel biyoloji gibi birçok farklı disiplinde oldukça etkili uygulamaları bulunmaktadır. Riemann-Liouville, uyumlu, Weyl, Liouville, Saigo, Hadamard, Katugampola gibi farklı kesirli integral ve türev operatörlerinin tanımlanması, kesirli analizi gün geçtikçe güçlendirmiştir. Zamanla bu operatöler arasıdaki ilişkiler verilmiştir ve bu türden operatörler tanımlanmaya da devam etmektedir. Örneğin son zamanlarda Anderson ve Ulness [4] tarafından sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü tanıtılmıştır. Kesirli analiz içerisinde önemli bir yere sahip olan bu kesirli integral kavramları sayesinde literatürde Riemann-Liouville integralleri için var olan sonuçların birçok yeni genelleştirmesi, genişlemesi ve yeni versiyonları elde edilmiştir.

Kesirli analizin ivme kazandırdığı alanlardan biri olan eşitsizlik teorisi alanındaki sonuçlar, uygulamalarıyla bilimsel literatüre katkı sağlamaktadır. Sayısal entegrasyon, istatistik, yaklaşım teorisi, kontrol teorisi, bilgi işleme, dinamik denklemler ve karmaşık analiz gibi birçok alanda uygulaması bulunan eşitsizlikler, son yıllarda kesirli analiz ile birlikte ele alınarak matematiğin popüler bir araştırma konusu haline gelmiştir. Literatürde Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Grüss, Chebyshev, Hölder, Cauchy-Schwarz gibi birçok önemli eşitsizlikle ilgili hem birçok araştırmacı yeni sonuçlar elde etmiş hem de bu tür eşitsizlikler matematiğin ve diğer bilimlerin farklı alanlarında kullanılmıştır. Her biri kendine özgü bir estetik yapıya sahip olan eşitsizlik türleri, uygulama alanları ile birlikte konveks analiz ve kesirli analizde yer alan yeni tanımlar kullanılarak ilerleme kaydetmektedir. Analitik ve klasik eşitsizlikler geometrik yorumlarıyla yeni ufuklar açarken cebirsel sonuçlar ve genellemeler teoride önemli bir yer tutmaya devam etmektedir.

Klasik integraller ve Riemann Liouville kesirli integralleri yardımıyla literatürdeki mevcut eşitsizliklerle ilgili sayısız makale ve tez çalışması bulunmaktadır. Yapılan ispatlarla elde edilen eşitsizliklerin, son yıllarda tanımlanan yeni kesirli integraller ve kesirli türevler yardımıyla daha genel hallerinin bulunabileceği varsayımı bu tez çalışmasının temel motivasyonunu oluşturmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde ihtiyaç duyulacak olan bilgilere yer verilecektir.

2.1 Temel Kavramlar

2.1.1 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1 (Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlıyorsa f'ye I üzerinde konveks fonksiyon denir. Burada I, $\mathbb{R}$'deki açık, yarı-açık veya kapalı, sonlu veya sonsuz bir aralıktır. Eğer (2.1.1) eşitsizliği $x \neq y$ için kesin ise f'ye kesin konveks fonksiyon denir. Öte yandan, $-f : I \to \mathbb{R}$ konveks ise, $f : I \to \mathbb{R}$ konkavdır [41].

Tanım 2.1.2 (Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır [40].

Tanım 2.1.3 (İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'ye ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu ikinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır [13, 27].

Yukarıda verilen her iki s-konveks fonksiyon tanımlarında $s = 1$ olarak alınırsa bilinen konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Teorem 2.1.1 $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ise f, $[0, \infty)$ aralığında negatif değildir [27].

Teorem 2.1.2 $f \in K_s^2$ olsun. $\forall u, v \in \mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}^+ = [0, \infty))$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere (2.1.2) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $f(0) = 0$ olmasıdır [27].

Teorem 2.1.3 (i) $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_s^1$ sınıfına ait bir fonksiyondur,

(ii) $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_{s_2}^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_{s_1}^2$ sınıfına ait bir fonksiyondur,

(iii) $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_{s_2}^1$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) \leq 0$ ise $f \in K_{s_1}^1$ sınıfına ait bir fonksiyondur [27].

2.1.2 Bazı Özel Fonksiyonlar

Tanım 2.1.4 (Senkronize Fonksiyon) f ve g fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a, b]$ için

$$\{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\} \geq 0 \tag{2.1.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara senkronize fonksiyonlar denir. Ayrıca (2.1.3) eşitsizliğinden

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geq f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

yazılabilir.

Tanım 2.1.5 n pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde ifade edilen $\Gamma(n)$ gösterimine Gama fonksiyonu denir [45]. Gama fonksiyonun önemli özelliğinden biri $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

olmasıdır.

Tanım 2.1.6 Γ, Gama fonksiyonu olmak üzere

$$\mathcal{B}(\alpha,\,\beta)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt & \alpha>0\\ \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & \left(\alpha,\,\beta\in\mathbb{R}^+\right)\end{cases}$$

fonksiyonu Beta fonksiyonudur [54, Bölüm 1.1].

2.1.3 Bazı Önemli Eşitsizlikler

Minkowski eşitsizliği eşitsizlik teorisi içerisinde hem teoride hem de uygulamada önemli bir yer tutar. Verilen bir $l\geq 1$ değeri için yakınsak integrale sahip fonksiyonların etkin bir geçişini ifade eden Minkowski eşitsizliği, Hermann Minkowski tarafından aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$0<\int_c^d f_1^k(z)dz<\infty \quad ve \quad 0<\int_c^d f_2^k(z)dz<\infty$$

olsun. Buradan

$$\left(\int_c^d (f_1(z)+f_2(z))^k dz\right)^{\frac{1}{l}}\leq\left(\int_c^d f_1^k(z)dz\right)^{\frac{1}{l}}+\left(\int_c^d f_2^k(z)dz\right)^{\frac{1}{l}}$$

eşitsizliği elde edilir [36].

Bu eşsiz eşitsizlik birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Literatürde üzerine birçok çalışma bulunan Minkowski integral eşitsizliği ile ilişkili bir diğer önemli çalışma Bougoffa tarafından [12]'de gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma, Minkowski'nin eşitsizliğinin tersini içermektedir. Dahmani [17]'de, Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla Minkowski eşitsizliklerinin kesirli versiyonlarını elde ederek bu türden yeni çalışmaların yapılmasına yol gösterici olmuştur. Benzer bir çalışma, Set ve arkadaşları [47] tarafından yapılmış ve iki fonksiyonu içeren çeşitli Minkowski tipli eşitsizlikler literatüre kazandırılmıştır. Saigo integralleri ve Hadamard kesirli integral operatörleri yardımıyla elde edilen bazı ters Minkowski tipli sonuçlar, sırasıyla Chinchane ile Pachpatte [16] ve Taf ile Brahim [52] makalelerinde sunulmuştur. Son zamanlarda, Vanterler ve Oliveira [53], ters Minkowski eşitsizliklerini ve diğer bazı ilgili eşitsizlikleri Katugampola kesirli integrali aracılığıyla sunmuşlardır. Ayrıca Rahman ve arkadaşları [43], Riemann-Liouville kesirli integralleri için Sulaiman [50] tarafından elde edilden ters Minkowski eşitsizliği ve diğer eşitsizliklerin genelleştirmelerini elde etmişlerdir. Ters Minkowski eşitsizlikleri ve ilgili sonuçlar son yıllarda birçok araştırmaya konu olmuş ve çok yakın zamanda Set ve Özdemir [49] "Fractional Order Analysis: Theory, Methods and Applications" isimli kitapta karışık uyumlu integraller yardımıyla yeni genellemeleri ve yaklaşımları bir bölüm olarak sunmuşlardır.

1935 yılında G. Grüss, iki fonksiyonun çarpımının integrali ile integrallerinin çarpımı arasındaki farkın bir tahminini veren değişik bir integral eşitsizliğini ispatladı:

Teorem 2.1.4 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonskiyonları integrallebilen iki fonksiyon olsun. Her $x \in [a, b]$, $m, M, n, N \in \mathbb{R}$ için

$$m \leq f(x) \leq M, \;\; n \leq g(x) \leq N$$

şartları altında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_a^b g(x)dx \right) \right| \\ \leq \;& \frac{1}{4}(M-m)(N-n) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Literatürde bu eşitsizlik Grüss eşitsizliği olarak bilinir [24].

Grüss tarafından elde edilen bu eşitsizliğin klasik integral yardımıyla birçok farklı versiyonu elde edilmiş olup Dahmani ve arkadaşları tarafından kesirli analiz yardımıyla genelleştirmesi literatüre kazandırılmış olup yeni çalışmalara ışık tutmuştur [19]. Tariboon ve arkadaşları da [51]'de Riemann-Liouville kesirli integral operatörlerini kullanarak Grüss tipli eşitsizliklere farklı bir bakış açısı kazandırmışlardır.

Chebyshev'nin temel matematiksel keşiflerinden biri aşağıdaki klasik integral eşitsizliğidir:

Teorem 2.1.5 f, g ve p fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir, f ve g senkronize fonksiyonlar ve p fonksiyonu pozitif değerli olsun. Bu taktirde

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \tag{2.1.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

(2.1.4) eşitsizliğinde $p(x) = 1$ olarak alınırsa

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \tag{2.1.5}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.1.5) eşitsizliğinin sağ tarafı sol tarafa atılırsa, $T(f,g)$ ile gösterilen

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \tag{2.1.6}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğe Chebyshev fonksiyoneli denir. Chebyshev, bu fonksiyoneli kullanarak kendi eşitsizliğine aşağıdaki gibi yeni bir bakış açışı kazandırmıştır [37].

Teorem 2.1.6 f ve g $[a,b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar ve f' ve g' $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı fonksiyonlar olsun. Bu taktirde $I = [a,b]$ olmak üzere

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2\left(\sup_{x\in I}|f'(x)|\right)\left(\sup_{x\in I}|g'(x)|\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

1998'de Dragomir aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizliği elde etmiştir:

Teorem 2.1.7 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığı üzerinde iki diferansiyellenebilir fonksiyon ve $p : [a,b] \to [0,\infty)$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $r > 1$ ve $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olmak üzere $f' \in L_r[a,b]$, $g' \in L_s[a,b]$ ise,

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx\right| \\ \leq\ & \frac{1}{2}||f'||_r||g'||_s \int_a^b\int_a^b |x-y|\, p(x)p(y)dxdy \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [23].

Dahmani ve arkadaşları, Chebyshev eşitsizliğinin kesirli analizin temel operatörlerinden olan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü yardımıyla genelleştirmelerini elde etmişlerdir [10, 18, 20].

Şimdi konveks fonksiyonlar kullanılarak elde edilen bir başka önemli eşitsizlik hatırlatılacaktır. Matematik literatüründe (bkz., örneğin, [22]), adını Charles Hermite (1822-1901) ve Jacques Hadamard'dan (1865-1963) alan ve bazen Hadamard eşitsizliği olarak da adlandırılan Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.1.8 $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, her a, $b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir. Bu eşitsizlik birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve özellikle son otuz yılda, bu eşitsizliğin çok sayıda genellemesi, varyantı ve uzantısı sunulmuştur (bkz., örneğin, [6, 22, 46, 48]).

Newton-Cotes formülleri ile ilgili olarak, açık tip Milne formülü ve kapalı tip Simpson formülü, aynı geçerlilik koşullarını paylaştıkları için birbirlerine paralel olarak kabul edilirler. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) üzerinde dört kez sürekli diferansiyellenebilir ve $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty = \sup\limits_{v\in(a,b)}\left|f^{(4)}(v)\right| < \infty$ olsun. Bu taktirde,

$$\left|\frac{1}{3}\left[2f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(v)dv\right| \leq \frac{7(b-a)^4}{23040}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty$$

eşitsizliği geçerlidir ve bu eşitsizlik literatürde Milne eşitsizliği olarak bilinmektedir [11].

Son zamanlarda, Milne eşitsizliği araştırmacıların büyük ilgisini çekmiştir. Budak ve arkadaşları [14] konveks fonksiyonlar, sınırlı fonksiyonlar, sınırlı varyasyon ve Lipschitz koşullarının özelliklerini kullanarak bu eşitsizliğin kesirli versiyonlarını sunmuşlardır. Meftah ve arkadaşaları [34] fonksiyonların genelleştirilmiş konvekslik özelliğini içeren lokal fraktal integralleri kullanarak Milne formüllerinin kalanı için bazı integral eşitsizlikleri elde etmişlerdir. Ali ve arkadaşları [2] konveks fonksiyonlarla ilişkili Milne eşitsizliği için kesirli hata sınırları tahminlerini araştırmışlardır.

Teorem 2.1.9 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.1 (Power-Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.10 (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği) f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel de-ğerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

Teorem 2.1.11 (Young Eşitsizliği) $a \geq 0$, $b \geq 0$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $p, q > 1$ olsun. Bu taktirde

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

eşitsizliğine Young eşitsizliği denir [55].

2.2 Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler

2.2.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegral ve Türev Operatörleri

Tanım 2.2.1 $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda sırasıyla $\alpha.(\alpha > 0)$ mertebeden sol ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a, \tag{2.2.1}$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b \tag{2.2.2}$$

tanımlanır [45]. Burada $\Gamma(t)$ Gama fonksiyonudur ve $\alpha = 1$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Ayrıca $\alpha = 0$ için $J_0^{a^+} f(x) = J_0^{b^-} f(x) = f(x)$ dir.

Bunlara ek olarak, $\alpha.$ mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli türevleri, $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(D_{a^+}^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (J_{a^+}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(D_{b^-}^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (J_{b^-}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Budak ve arkadaşları [14]'de Riemann-Liouville kesirli integral operatörü yardımıyla aşağıdaki özdeşliği ve Milne tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Lemma 2.2.1 $\mathfrak{F} : [\kappa_1, \kappa_2] \to \mathbb{R}$, (κ_1, κ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\mathfrak{F}' \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}& \frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right] \\ & -\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha}}\left[J_{\kappa_1+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_2-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right] \\ = & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\int_0^1 \left(\vartheta^{\alpha} + \frac{1}{3}\right) \\ & \times \left[\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right) - \mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right] d\vartheta\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ki burada Γ Gama fonksiyonudur.

Teorem 2.2.1 Lemma 2.2.1'in şartlarının geçerli olmak üzere $|\mathfrak{F}'|$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}& \left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right. \\ & \left. -\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha}}\left[J_{\kappa_1+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_2-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right| \\ \leq & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{12}\left(\frac{\alpha+4}{\alpha+1}\right)\left(|\mathfrak{F}'(\kappa_1)| + |\mathfrak{F}'(\kappa_2)|\right)\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada Γ Gama fonksiyonudur.

Uyarı 2.2.1 Teorem 2.2.1'de $\alpha = 1$ seçilirse, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}\left(\kappa_1\right) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}\left(\kappa_2\right)\right] - \frac{1}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta\right| \\
\leq\ & \frac{5\left(\kappa_2-\kappa_1\right)}{24}\left(\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right| + \left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.2 Lemma 2.2.1 şartları altında $q > 1$ olmak üzere, $|\mathfrak{F}'|^q$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde konveks olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}\left(\kappa_1\right) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}\left(\kappa_2\right)\right]\right. \\
&\left.-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(\kappa_2-\kappa_1\right)^{\alpha}}\left[J_{\kappa_1+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_2-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right| \qquad (2.2.4) \\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(\int_0^1\left(\vartheta^{\alpha}+\frac{1}{3}\right)^p d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left[\left(\frac{3\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^q + \left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^q + 3\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(4\int_0^1\left(\vartheta^{\alpha}+\frac{1}{3}\right)^p d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right| + \left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve Γ Gama fonksiyonudur.

Sonuç 2.2.1 Teorem 2.2.2'de $\alpha = 1$ seçilirse, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}\left(\kappa_1\right) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}\left(\kappa_2\right)\right] - \frac{1}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta\right| \\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{12}\left(\frac{4^{p+1}-1}{3\left(p+1\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{3\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^q + \left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^q + 3\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{12}\left(\frac{4^{p+2}-4}{3\left(p+1\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right| + \left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.3 Lemma 2.2.1 şartları altında $q \geq 1$ olmak üzere $|\mathfrak{F}'|^q$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$

üzerinde konveks olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}\left(\kappa_1\right)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}\left(\kappa_2\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(\kappa_2-\kappa_1\right)^{\alpha}}\left[J_{\kappa_1+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+J_{\kappa_2-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(\frac{\alpha+4}{3\left(\alpha+1\right)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{2\alpha+3}{2\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)}\right)\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^{q}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)}\right)\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left[\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)}\right)\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^{q}+\left(\frac{1}{4}+\frac{2\alpha+3}{2\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)}\right)\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada Γ Gama fonksiyonudur.

Uyarı 2.2.2 Teorem 2.2.3'de $\alpha=1$ seçilirse, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}\left(\kappa_1\right)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}\left(\kappa_2\right)\right]-\frac{1}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta\right|\\
\leq\;&\frac{5\left(\kappa_2-\kappa_1\right)}{24}\left(\left[\frac{4\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^{q}+\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^{q}}{5}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_1\right)\right|^{q}+4\left|\mathfrak{F}'\left(\kappa_2\right)\right|^{q}}{5}\right]^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.4 Lemma 2.2.1'in koşulları geçerli olsun. Eğer $\vartheta\in[\kappa_1,\kappa_2]$ için $m\leq\mathfrak{F}'(\vartheta)\leq M$ olacak şekilde $m,M\in\mathbb{R}$ varsa, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}\left(\kappa_1\right)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}\left(\kappa_2\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(\kappa_2-\kappa_1\right)^{\alpha}}\left[J_{\kappa_1+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+J_{\kappa_2-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{\kappa_2-\kappa_1}{12}\left(\frac{\alpha+4}{\alpha+1}\right)(M-m)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada Γ Gama fonksiyonudur.

Sonuç 2.2.2 Teorem 2.2.4'de $\alpha = 1$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right] - \frac{1}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta\right| \\ \leq\ & \frac{5(\kappa_2-\kappa_1)}{24}(M-m)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 2.2.3 Teorem 2.2.4 şartları geçerli olsun. Eğer her $\vartheta \in [\kappa_1, \kappa_2]$ için $|\mathfrak{F}'(\vartheta)| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ varsa, bu taktirde

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right. \\ &\left.-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha}}\left[J_{\kappa_1+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_2-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right| \\ \leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{6}\left(\frac{\alpha+4}{\alpha+1}\right)M\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Uyarı 2.2.3 Sonuç 2.2.3'de $\alpha = 1$ seçilirse, Alomari ve Liu tarafından [3]'de elde edilen

$$\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right] - \frac{1}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta\right| \leq \frac{5(\kappa_2-\kappa_1)}{12}M$$

eşitsizlik elde edilir.

Literatürde Lipschitz şartı şu şekilde bilinmektedir: $I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

eşitsizliğini sağlayan $L > 0$ sayısı varsa, f'ye Lipschitz şartını sağlayan fonksiyon denir.

Teorem 2.2.5 Lemma 2.2.1 şartları geçerli olsun. Eğer $\mathfrak{F}'$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde $L > 0$ olmak üzere Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right] \\ &-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha}}\left[J_{\kappa_1+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + J_{\kappa_2-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right] \\ \leq\ & \frac{(\kappa_2-\kappa_1)^2}{24}\left(\frac{\alpha+8}{\alpha+2}\right)L\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 2.2.4 Teorem 2.2.5'te $\alpha = 1$ olarak seçilirse, bu taktirde

$$\left|\frac{1}{3}\left[2\mathfrak{F}\left(\kappa_1\right) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}\left(\kappa_2\right)\right] - \frac{1}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{\kappa_1}^{\kappa_2}\mathfrak{F}(\vartheta)d\vartheta\right| \leq \frac{\left(\kappa_2-\kappa_1\right)^2}{8}L$$

eşitsizliği elde edilir.

2.2.2 Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü

Yeni kesirli uyumlu integral operatörleri Jarad ve arkadaşları tarafından [28]'de ele alınmıştır. Bu yazarlar ayrıca bu operatörler ile literatürdeki diğer bazı kesirli operatörler arasındaki bazı özellikleri ve ilişkileri vermişlerdir. Kesirli uyumlu integral operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.2.2 f, $[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde bir fonksiyon olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ olsun. Sol ve sağ taraflı yeni uyumlu kesirli integralleri sırasıyla

$$^{\beta}\mathfrak{J}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \left(\frac{(x-a)^\alpha - (t-a)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}}dt \qquad (2.2.5)$$

ve

$$^{\beta}\mathfrak{J}_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_x^b \left(\frac{(b-x)^\alpha - (b-t)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(b-t)^{1-\alpha}}dt \qquad (2.2.6)$$

şeklinde tanımlanır [28].

Sonuç 2.2.5 i) $\alpha = 1$ olarak alınırsa (2.2.5)'deki yeni uyumlu kesirli integral operatörü, (2.2.1)'de ifade edilen Riemann-Liouville kesirli integral operatörüne indirgenir.

ii) (2.2.6) için de benzer bağıntılar kurulabilir. (2.2.6)'da tanımlanan operatörde $\alpha = 1$ olarak alınırsa, (2.2.2)'de ifade edilen Riemann-Liouville kesirli integral operatörüne indirgenir.

2.2.3 Uyumlu Türev Operatörü

Son zamanlarda, uyumlu türevin limit yardımıyla yeni bir tanımı [1, 30]'da

$$D^\alpha f(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

veya [29]'da limitlerin mevcut olması koşuluyla

$$D^{\alpha} f(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}) - f(t)}{\varepsilon}, \quad D^{\alpha} f(0) = \lim_{t \to 0^{+}} D^{\alpha} f(t),$$

olarak formüle edilmiştir. f, t'ye göre diferansiyellenebilirse, her iki durumda da

$$D^{\alpha} f(t) = t^{1-\alpha} f'(t) \tag{2.2.7}$$

elde edilir ve burada $f'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} [f(t+\varepsilon) - f(t)]/\varepsilon$ dır. Yukarıdaki limitler mevcut ve sonlu ise f fonksiyonu $t \geq 0$ noktasında α-diferansiyellenebilirdir [4].

(2.2.7)'de $\alpha \to 0$ durumunda $D^0 f \neq f$ yani özdeş operatörün elde edilemeyişi problemi nedeniyle burada uyumlu sıfatının uygun olup olmayacağı düşüncesinden hareketle Anderson ve Ulness tarafından α. mertebeden uyumlu türevin yeni bir tanımı verilmiştir.

Uyumlu türev başlangıçta uyumlu kesirli türev olarak adlandırılmıştır [1, 29, 30]. Ancak, kesirli türevler için kabul edilen bazı özelliklerden yoksundur [39]. Anderson ve Ulness tarafından verilen tanımda uyumlu türevin mertebesinin özel durumları için özdeş operatör ve klasik türev operatörü elde edilmektedir.

Uyarı 2.2.4 $\alpha \in [0,1]$ olsun. D^{α} türev operatörünün uyumlu olması için gerek ve yeter şart D^0'ın özdeş operatör ve D^1'in klasik türev operatörü olmasıdır. Özel olarak, D^{α}'ın uyumlu olması için gerek ve yeter şart $f = f(t)$ türevlenebilir fonksiyonu için

$$D^0 f(t) = f(t) \;\; ve \;\; D^1 f(t) = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

olmasıdır. Bu tanıma göre (2.2.7) ile verilen operatörün uyumlu olmadığına dikkat edilmelidir.

Kontrol teorisinde bir algoritmayla verilen kontrolör çıkışına ilişkin bir problemin sonucu [4]'te Anderson ve Ulness tarafından verilen orantılı türev operatörü olarak adlandırılan yeni bir türev operatörünün ortaya çıkmasına motive kaynağı olmuştur.

Tanım 2.2.3 (Uyumlu Türevler Sınıfı) $\alpha \in [0,1]$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, aşağıdaki şartları sağlayan sürekli fonksiyonlar olsun:

$$\lim_{\alpha \to 0^{+}} \kappa_1(\alpha, t) = 1, \quad \lim_{\alpha \to 0^{+}} \kappa_0(\alpha, t) = 0,$$

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \kappa_1(\alpha, t) = 0, \quad \lim_{\alpha \to 1^-} \kappa_0(\alpha, t) = 1, \tag{2.2.8}$$

$$\kappa_1(\alpha, t) \neq 0, \ \alpha \in [0, 1), \ \kappa_0(\alpha, t) \neq 0, \ \alpha \in (0, 1].$$

Bu taktirde

$$D^\alpha f(t) = \kappa_1(\alpha, t) f(t) + \kappa_0(\alpha, t) f'(t) \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlanan D^α türev operatörü, f fonksiyonu t'de türevlenebilir ve $f' := \dfrac{d}{dt} f$ olmak üzere uyumlu bir operatördür.

Örneğin, herhangi bir $\omega \in (0, \infty)$ için $\kappa_1 \equiv (1 - \alpha)\omega^\alpha$ ve $\kappa_0 \equiv \alpha \omega^{1-\alpha}$ veya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde $\kappa_1 = (1 - \alpha)|t|^\alpha$ ve $\kappa_0 = \alpha |t|^{1-\alpha}$ alınabilir, böylece

$$D^\alpha f(t) = (1 - \alpha)|t|^\alpha f(t) + \alpha |t|^{1-\alpha} f'(t)$$

olur. Benzer bir uyumlu türevler sınıfı şu şekilde olabilir:

$$D^\alpha f(t) = \cos(\alpha\pi/2)|t|^\alpha f(t) + \sin(\alpha\pi/2)|t|^{1-\alpha} f'(t).$$

Genel olarak, maalesef $\alpha, \beta \in [0, 1]$ için $D^\beta D^\alpha \neq D^\alpha D^\beta$ şeklindedir. Ayrıca, $\alpha \in (0, 1)$ için, (2.2.8)'deki κ_1 üzerindeki sıfır olmayan koşulu gevşetilirse ve $t > 0$ için $\kappa_1(\alpha, t) \equiv 0$ ve $\kappa_0(\alpha, t) = \alpha t^{1-\alpha}$ alınırsa, bu durumda t yerine $\alpha^{\frac{-1}{1-\alpha}} T$ yazılırsa

$$\kappa_0(\alpha, t) = \kappa_0 \left(\alpha, \alpha^{\frac{-1}{1-\alpha}} T\right) = \alpha \left(\alpha^{\frac{-1}{1-\alpha}} T\right)^{1-\alpha} = T^{1-\alpha}$$

elde edilir ve bu da (2.2.7) eşitliğini verir. Böylece $\alpha \in (0, 1)$ için, (2.2.7) tanımı bir anlamda (2.2.9)'un özel bir durumudur [4].

Ayrıca, [9]'de Baleanu ve arkadaşları κ_0 ve κ_1 fonksiyonlarının sadece α'a bağlı olarak t'e göre sabit olduğu özel durumlar için "sabit orantılı" kesirli türev operatörünü aşağıdaki gibi vermişlerdir:

$${}^{CP}D_\alpha f(t) = \kappa_1(\alpha) f(t) + \kappa_0(\alpha) f'(t).$$

Tanım 2.2.4 (Kısmi Uyumlu Türevler) $\alpha \in [0, 1]$, $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ fonksiyonları sürekli olsun ve (2.2.8)'i sağlasın. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve her sabit $s \in R$ için $\frac{\partial}{\partial t} f(t, s)$ var olmak üzere D_t^α kısmi diferansiyel operatörü

$$D_t^\alpha f(t, s) = \kappa_1(\alpha, t) f(t, s) + \kappa_0(\alpha, t) \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) \tag{2.2.10}$$

ile tanımlanır [4].

Tanım 2.2.5 (Uyumlu Üstel Fonksiyon) $\alpha \in (0,1]$, $s,t \in \mathbb{R}$, $s \leq t$ ve $p : [s,t] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonskiyon olsun. $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ sürekli olsun ve $[s,t]$ üzerinde p/κ_0 ve κ_1/κ_0 Riemann integrallenebilir olmak üzere (2.2.8) şartları sağlansın. Bu taktirde (2.2.9)'daki D^α'ya göre üstel fonksiyon

$$e_p(t,s) := e^{\int_s^t \frac{p(\tau)-\kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d\tau}, \quad e_0(t,s) = e^{-\int_s^t \frac{\kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d\tau} \tag{2.2.11}$$

şeklinde tanımlanır [4]. (2.2.9) ve (2.2.11) kullanarak aşağıdaki temel sonuçlar elde edilir.

Lemma 2.2.2 (Temel Türevler) $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere D^α uyumlu türev operatörü (2.2.9)'daki gibi verilsin. $p : [s,t] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ sürekli olsun ve p/κ_0 ve κ_1/κ_0 Riemann integrallenebilir olmak üzere $[s,t]$ üzerinde (2.2.8)'i sağlasın. f ve g fonksiyonları gerektiği gibi diferansiyellenebilir olsun. Bu taktirde

i. $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $D^\alpha[\alpha f + bg] = aD^\alpha[f] + bD^\alpha[g]$,

ii. Tüm $c \in \mathbb{R}$ sabitleri için $D^\alpha c = c\kappa_1(\alpha,\cdot)$,

iii. $D^\alpha[fg] = fD^\alpha[g] + gD^\alpha[f] - fg\kappa_1(\alpha,\cdot)$,

iv. $D^\alpha[f/g] = \frac{gD^\alpha[f]-fD^\alpha[g]}{g^2} + \frac{f}{g}\kappa_1(\alpha,\cdot)$,

v. $\alpha \in (0,1]$ ve $s \in \mathbb{R}$ sabiti için (2.2.11)'de verilen $e_p(t,s)$ üstel fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlar:

$$D_t^\alpha[e_p(t,s)] = p(t)e_p(t,s), \tag{2.2.12}$$

vi. $\alpha \in (0,1]$ ve (2.2.11)'de verilen e_0 üstel fonksiyonu için

$$D^\alpha\left[\int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds\right] = f(t) \tag{2.2.13}$$

geçerlidir [4].

Tanım 2.2.6 (İntegraller) $\alpha \in (0,1]$ ve $t_0 \in \mathbb{R}$ olsun. (2.2.11) ve Lemma 2.2.2'deki (v) & (vi) şartları altında, anti-türev

$$\int D^\alpha f(t) d_\alpha t = f(t) + ce_0(t,t_0), \quad c \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde, f'nin $[a,b]$ üzerindeki integrali

$$\int_a^t f(s)e_0(t,s)d_\alpha s := \int_a^t \frac{f(s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds, \quad d_\alpha s := \frac{1}{\kappa_0(\alpha,s)} ds \tag{2.2.14}$$

olarak tanımlanır. (2.2.11)'den

$$e_0(t,s) = e^{-\int_s^t \frac{\kappa_1(\alpha,\tau)}{\kappa_0(\alpha,\tau)} d\tau} = e^{-\int_s^t \kappa_1(\alpha,\tau) d\tau}$$

olduğu görülebilir [4]. Buradan [9]'de Baleanu ve arkadaşları orantılı integral operatörünü ${}^P I_\alpha$ ile göstererek

$${}_a^P I_\alpha f(t) = \int_a^t \exp\left[-\int_u^t \frac{\kappa_1(\alpha,s)}{\kappa_0(\alpha,s)} ds\right] \frac{f(u)}{\kappa_0(\alpha,u)} du$$

şeklide ifade etmişlerdir.

Lemma 2.2.3 (Temel İntegraller) D^α uyumlu türev operatörü (2.2.9)'daki gibi ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere integral (2.2.14)'deki gibi verilsin. κ_0, κ_1 fonksiyonları sürekli olsun ve (2.2.8)'i sağlasın ve f ve g fonksiyonları gerektiği gibi diferansiyellenebilir olsun. Bu taktirde

(i) f'nin belirli integralinin türevi şu şekilde verilir:

$$D^\alpha\left[\int_a^t f(s) e_0(t,s) d_\alpha s\right] = f(t),$$

(ii) f'nin türevinin belirli integrali şu şekilde verilir:

$$\int_a^t D^\alpha[f(s)] e_0(t,s) d_\alpha s = f(s) e_0(t,s)\Big|_{s=a}^{t} := f(t) - f(a) e_0(t,a),$$

(iii) kısmi integrasyon formülü şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) D^\alpha[g(t)] e_0(b,t) d_\alpha t &= f(t) g(t) e_0(b,t)\Big|_{t=a}^{b} \\ &\quad - \int_a^b g(t)(D^\alpha[f(t)] - \kappa_1(\alpha,t) f(t)) e_0(b,t) d_\alpha t,\end{aligned}$$

(iv) bir integralin türevi için (2.2.10) kullanılarak Leibniz kuralı

$$\begin{aligned}D^\alpha\left[\int_a^t f(t,s) e_0(t,s) d_\alpha s\right] &= \int_a^t (D_t^\alpha[f(t,s)]) - \kappa_1(\alpha,t) f(t,s) e_0(t,s) d_\alpha s \\ &\quad + f(t,t)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada e_0 yok ise

$$D^\alpha\left[\int_a^t f(t,s) d_\alpha s\right] = f(t,t) + \int_a^t D_t^\alpha[f(t,s)] d_\alpha s$$

olur [4].

İspat. (i)'nin ispatı doğrudan (2.2.13) ve (2.2.14)'den gelmektedir. Lemma 2.2.2'deki (ii) ve $c = 1$ kullanıldığında, (ii) burada (iii)'nin özel bir durumudur. (iii)'i ispatlamak için Lemma 2.2.2'deki, (iii) ve (2.2.14)'deki integral tanımı kullanılır. (iii)'deki ikinci ifade için (2.2.9) ile (2.2.14) kullanılarak ve $\alpha \neq 0$ alınarak

$$f'(t)dt = \frac{D^\alpha f(t) - \kappa_1(\alpha,t)f(t)}{\kappa_0(\alpha,t)}dt = (D^\alpha f(t) - \kappa_1(\alpha,t)f(t))d_\alpha t$$

elde edilir. (iv)'i ifadesini ispatlamak için ($\alpha = 1$) Leibniz kuralını kullanarak

$$\begin{aligned}
D^\alpha\left[\int_a^t f(t,s)e_0(t,s)d_\alpha s\right] &= D^\alpha\left[\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right] \\
&= \kappa_0(\alpha,t)\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds \\
&\quad +\kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds \\
&= \kappa_0(\alpha,t)\int_a^t \frac{e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}\left(\frac{-\kappa_1(\alpha,t)f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,t)} + \frac{\partial}{\partial t}f(t,s)\right)ds \\
&\quad +f(t,t) + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)e_0(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds \\
&= \int_a^t (D^\alpha[f(t,s)] - \kappa_1(\alpha,t)f(t,s))e_0(t,s)d_\alpha s + f(t,t)
\end{aligned}$$

elde edilir. (iv)'deki ikinci ifade için, eğer $e_0(t,s)$ integral ifadesinde yer almıyorsa, bu taktirde

$$\begin{aligned}
D^\alpha\left[\int_a^t f(t,s)d_\alpha s\right] &= D^\alpha\left[\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right] \\
&= \kappa_0(\alpha,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds + \kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds \\
&= \kappa_0(\alpha,t)\left[\frac{f(t,t)}{\kappa_0}(\alpha,t) + \int_a^t \frac{\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds\right] \\
&\quad +\kappa_1(\alpha,t)\int_a^t \frac{f(t,s)}{\kappa_0(\alpha,s)}ds \\
&= f(t,t) + \int_a^t D_t^\alpha[f(t,s)]d_\alpha s
\end{aligned}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

2.2.4 Caputo Kesirli Türev Operatörü

Uygulamalı matematik alanı çoğunlukla adi veya kısmi diferansiyel denklem sistemleri ve çözümleri üzerine yoğunlaşmıştır. Doğada yer alan dinamik süreçler adi ve kısmi diferansiyel denklem sistemleri ile modellenebilir. Bu modellemelerde kullanılan türev operatörünün mertebesi doğal sayılar dışında seçildiğinde, diferansiyel denklemlerin kesirli versiyonları elde edilir [31, 42]. Doğada yer alan bir çok dinamik süreç lokal olmayan davranışa sahip olduğu için bu türden süreçlerin modellenmesinde lokal olmayan kesirli türevlerin kullanılması oldukça verimli uygulamalara yol açar. Riemann-Liouville, Caputo, Marchaud, tempered, Hilfer ve Atangana-Baleanu gibi farklı türev ve integral tanımları literatürde mevcuttur [5, 45]. Literatürde yer alan bu farklı operatör tanımları, çekirdek yapılarına ve sağladıkları özelliklere göre bir sınıflamaya tabii tutulabilirler [8].

Kesirli diferansiyel denklemler için özellikle ilgi çekici olan Caputo kesirli türevidir. Klasik Riemann-Liouville kesirli türevi ile karşılaştırıldığında, Caputo türevi kesirli diferansiyel denklemler için kullanıldığında daha doğal başlangıç koşulları gerektirir [21]. Bu iki operatör oldukça önemlidir, çünkü ilgili kesirli integral operatörlerinden türetildiklerinde diğer birçok kesirli türevin "Riemann-Liouville tipli" veya "Caputo tipli" olduğu söylenir. Riemann-Liouville kesirli türevi, kesirli integralin standart (tamsayı mertebeli) türevi alınarak tanımlanırken, Caputo türevi ise kesirli integralin fonksiyonun tamsayı mertebeli bir türevine uygulanmasıyla tanımlanır.

[15]'te türevlenebilir bir $f(t)$ fonksiyonunun başlangıç noktası $t = 0$ olmak üzere $\alpha \in (0, 1)$ mertebesine göre Caputo türevinin tanımı

$$ {}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau \tag{2.2.15} $$

şeklindedir. Bu tanım, Tanım 2.2.1'de verilen Riemann-Liouville integralini genişletmenin olağan yollarından biridir. Verilen tanımlardan Caputo türevi ile Riemann-Liouville integrali arasındaki ilişkinin

$$ {}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0^{RL} I_t^{1-\alpha} f'(t) $$

şeklinde olduğu açıktır. Caputo türevinin iyi bilinen diğer özellikleri

$$ \begin{aligned} {}_0^{RL} I_t^\alpha \, {}_0^C D_t^\alpha f(t) &= f(t) - f(0), \\ {}_0^C D_t^\alpha \, {}_0^{RL} I_t^\alpha f(t) &= f(t - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{t \to 0} {}_0^{RL} I_t^\alpha f(0), \\ \mathcal{L}[{}_0^C D_t^\alpha f(t)] &= s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - s^{\alpha-1} f(0) \end{aligned} $$

şeklindedir [7]. Burada $\mathcal{L}$, t'nin bir fonksiyonundan s'nin bir fonksiyonuna Laplace dönüşümünü göstermektedir.

2.2.5 Orantılı Caputo Hibrit Operatörü

[9]'da Baleanu ve arkadaşları tarafından integral formülü olarak yazılan (2.2.15)'deki Caputo kesirli türevinden yola çıkarak ve bu formülün integrandında $f'(\tau)$ yerine (2.2.9) ifadesini koyarak yeni bir kesirli türev operatörü tanıtıldı. Bu operatör, orantılı ve Caputo tanımlarının birleşiminden elde edilen aşağıdaki gibi bir hibrit kesirli operatördür:

$$ {}^{PC}_{\ 0}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (\kappa_1(\alpha,\tau) f(\tau) + \kappa_0(\alpha,\tau) f'(\tau))(t-\tau)^{-\alpha} d\tau. $$

Özellikle, ${}^{CP}D_\alpha$ operatöründe olduğu gibi κ_0 ve κ_1'in t'den bağımsız olması önemli bir özel durumdur.

Hem türev hem de integral operatör kısımlarını içeren lokal olmayan ve tekil bir operatör olarak öne sürülen ve Riemann–Liouville integrali ile Caputo türev operatörlerinin basit bir lineer birleşimi olan sabit orantılı Caputo hibrit operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [9].

Tanım 2.2.7 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde yerel olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Bu taktirde, sabit orantılı Caputo-hibrit operatörü şu şekilde tanımlanabilir:

$$ \begin{aligned} {}^{CPC}_{\ \ 0}D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (\kappa_1(\alpha) f(\tau) + \kappa_0(\alpha) f'(\tau))(t-\tau)^{-\alpha} d\tau \\ &= \kappa_1(\alpha)\, {}^{RL}_{\ 0}I_t^{1-\alpha} f(t) + \kappa_0(\alpha)\, {}^{C}_{0}D_t^{\alpha} f(t). \end{aligned} \tag{2.2.16} $$

Bu tanımda CPC Sabit Orantılı Caputo anlamına gelmektedir.

Önerme 2.2.1 PC ve CPC operatörleri lokal değildir ve tekildir [9].

İspat. Lokal olmama, bu operatörlerin integrallerle tanımlanmasından kaynaklanır. Hem ${}^{PC}_{\ 0}D_t^{\alpha} f(t)$ hem de ${}^{CPC}_{\ \ 0}D_t^{\alpha} f(t)$, 0 ile t arasındaki tüm τ için $f(\tau)$ değerlerine bağlıdır. Bu integraller de tekildir, çünkü tıpkı Riemann-Liouville operatörleri gibi çekirdekte $(t-\tau)^{-\alpha}$ fonksiyonunu kullanarak tanımlanırlar. Bu fonksiyon, $0 < \alpha < 1$ olduğundan, integralin $\tau = t$ bitiş noktasında integrallenebilir bir tekilliğe sahiptir.

Lemma 2.2.4 Orantılı türev operatörü ${}^{P}D_{\alpha}$ ile orantılı integral operatörü ${}^{P}_{a}I_{\alpha}$ arasındaki ilişki

$$ {}^{P}D_{\alpha}\,{}^{P}_{a}\mathcal{I}_{\alpha}f(t) = f(t), \quad {}^{P}_{a}\mathcal{I}_{\alpha}\,{}^{P}D_{\alpha}f(t) = f(t) - \exp\left(-\int_a^t \frac{\kappa_1(\alpha,s)}{\kappa_0(\alpha_s)}ds\right) f(a) $$

şeklindedir. Özellikle, ${}^{CP}D_{\alpha}$ sabit katsayılı operatörü için integral formülü

$$ {}^{CP}_{a}\mathcal{I}_{\alpha}f(t) = \frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_a^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-u)\right] f(u)du, \tag{2.2.17} $$

şeklindedir ve sabit katsayılı operatörün kendisi ile tersi arasındaki ilişki

$$ {}^{CP}D_{\alpha}\,{}^{CP}_{a}\mathcal{I}_{\alpha}f(t) = f(t), \quad {}^{CP}_{a}\mathcal{I}_{\alpha}\,{}^{CP}D_{\alpha}f(t) = f(t) - \exp\left(-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-a)\right) f(a) $$

ile gösterilir. $f(a) = 0$ ise, ${}^{P}D_{\alpha}$, ${}^{P}_{a}\mathcal{I}_{\alpha}$ ve ${}^{CP}D_{\alpha}$, ${}^{CP}_{a}\mathcal{I}_{\alpha}$ operatörleri birbirine iki taraflı ters çiftler oluştururlar [9].

Önerme 2.2.2 Kesirli CPC türevinin (2.2.16) ters operatörü

$$ {}^{CPC}_{\;\;0}I_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-u)\right] {}^{RL}_{\;0}D_t^{1-\alpha}f(u)du $$

şeklindedir. Bu aşağıdaki ters ilişkisini karşılamaktadır [9]:

$$ \begin{aligned} {}^{CPC}_{\;\;0}D_t^{\alpha}\,{}^{CPC}_{\;\;0}I_t^{\alpha}f(t) &= f(t) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to 0}{}^{RL}_{\;0}I_t^{\alpha}f(t), \\ {}^{CPC}_{\;\;0}I_t^{\alpha}\,{}^{CPC}_{\;\;0}D_t^{\alpha}f(t) &= f(t) - \exp\left(-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right) f(0). \end{aligned} $$

Gürbüz ve arkadaşları [26], konveks fonksiyonlar için aşağıdaki özdeşliği elde etmiştir.

Lemma 2.2.5 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Bu taktirde

$$ \begin{aligned} &\kappa_1(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}f'(ta+(1-t)x)\,dt + \kappa_0(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}f''(ta+(1-t)x)\,dt \\ &+\kappa_1(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}f'(tx+(1-t)b)\,dt + \kappa_0(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}f''(tx+(1-t)b)\,dt \\ =\;& -\frac{\kappa_1(\alpha)f(a)+\kappa_0(\alpha)f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha)f(x)+\kappa_0(\alpha)f'(x)}{b-x} \\ &+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}^{CPC}_{\;\;a}D_x^{\alpha}f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_{\;\;x}D_b^{\alpha}f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right) \end{aligned} $$

eşitliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1]$, $a < x < b$, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

Gürbüz ve arkadaşları sabit orantılı Caputo hibrit operatörü ve Lemma 2.2.5 yardımıyla Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.6 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'nin fonksiyonları olsun. Eğer, f' ve f'', I üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} & \Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + K_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\ & + \Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}} \right) \Bigg| \\ \leq \; & \frac{\kappa_1(\alpha)|f'(a)| + \kappa_0(\alpha)|f''(a)|}{(3-\alpha)} + \frac{\kappa_1(\alpha)|f'(b)| + \kappa_0(\alpha)|f''(b)|}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \\ & + \frac{\kappa_1(\alpha)|f'(x)| + \kappa_0(\alpha)|f''(x)|}{(2-\alpha)} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1]$, $a < x < b$, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır [26].

Teorem 2.2.7 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Eğer, $|f'|^q$ ve $|f''|^q$, I üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$\begin{aligned} & \Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{K_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\ & + \Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}} \right) \Bigg| \\ \leq \; & \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \Big[\kappa_1(\alpha)\left(|f'(a)|^q + |f'(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \kappa_0(\alpha)\left(|f''(a)|^q + |f''(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \kappa_1(\alpha)\left(|f'(x)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \kappa_0(\alpha)\left(|f''(x)|^q + |f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \Big] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1]$, $a < x < b$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır [26].

Teorem 2.2.8 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'nin fonksiyonları olsun. Eğer, $|f'|^q$ ve $|f''|^q$, I

üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_{x}^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_{b}^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}} \right) \Bigg| \times (2-\alpha)^{1-\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \Bigg\{ \kappa_1(\alpha) \left(\frac{|f'(a)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|f'(x)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0(\alpha) \left(\frac{|f''(a)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|f''(x)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\kappa_1(\alpha) \left(\frac{|f'(x)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|f'(b)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0(\alpha) \left(\frac{|f''(x)|^q}{(3-\alpha)} + \frac{|f''(b)|^q}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

eşitsiliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1]$, $a < x < b$, $q \geq 1$, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır [26].

Teorem 2.2.9 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Eğer, $|f'|^q$ ve $|f''|^q$, I üzerinde konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{K_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_{x}^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_{b}^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}} \right) \Bigg| \\
\leq\ & \frac{2(\kappa_1(\alpha) + \kappa_0(\alpha))}{p^2(1-\alpha) + p} + \frac{\kappa_1(\alpha)}{2q} \left(|f'(a)|^q + 2|f'(x)|^q + |f'(b)|^q \right) \\
&+\frac{\kappa_0(\alpha)}{2q} \left(|f''(a)|^q + 2|f''(x)|^q + |f''(b)|^q \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1]$, $a < x < b$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q > 1$, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır [26].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Sabit Orantılı (CP) Kesirli İntegral Operatörleri İçeren Ters Minkowski Eşitsizliği

Bu bölümünde, sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü aracılığıyla ters Minkowski integral eşitsizlikleri üzerine yeni bulgular yer almaktadır.

Teorem 3.1.1 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha > 0$, $p \geq 1$ olmak üzere, $\forall t > 0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t) < \infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t) < \infty$ olsun. Eğer $\forall \tau \in [0,t]$ için $0 < \psi \leq \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi$ ise,

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mathcal{K}_1 \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\mathcal{K}_1 = \dfrac{\Psi(\psi+1)+\Psi+1}{(\psi+1)(\Psi+1)}$ şeklindedir.

İspat. $\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi$, $\tau \in [0,t]$, $t > 0$ koşulları altında

$$(\Psi+1)^p f_1^p(\tau) \leq \Psi^p (f_1(\tau)+f_2(\tau))^p \tag{3.1.2}$$

eşitsizliği yazılır. Eğer (3.1.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılıp τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{(\Psi+1)^p}{\kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right] f_1^p(\tau)d\tau \\ \leq\ & \frac{\Psi^p}{\kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right] (f_1+f_2)^p(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü tanımından

$${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t) \leq \frac{\Psi^p}{(\Psi+1)^p}\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1+f_2)^p(t) \tag{3.1.4}$$

yazılır. Sonuç olarak

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\Psi}{\Psi+1} \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.5}$$

olur. Öte yandan, $\psi f_2(\tau) \leq f_1(\tau)$ için

$$\left(1+\frac{1}{\psi}\right)^p f_2^p(\tau) \leq \left(\frac{1}{\psi}\right)^p (f_1(\tau)+f_2(\tau))^p \tag{3.1.6}$$

yazılır. Eğer (3.1.6) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılıp τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\psi+1}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.7}$$

bulunur. Burada (3.1.5) ve (3.1.7) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa, (3.1.1) eşitsizliği elde edelir ve ispat tamamlanır.

(3.1.1) eşitsizliği, sabit orantılı kesirli integral ile ilişkili ters Minkowski eşitsizliğidir.

Teorem 3.1.2 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha>0$, $p\geq 1$ olmak üzere, $\forall t>0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)<\infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)<\infty$ olsun. Eğer $\forall \tau\in[0,t]$ için $0<\psi\leq \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}\leq \Psi$ ise,

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{2}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{2}{p}} \geq \mathcal{K}_2\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\mathcal{K}_2=\dfrac{(\Psi+1)(\psi+1)}{\Psi}-2$ şeklindedir.

İspat. (3.1.5) ve (3.1.7) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$\frac{(\Psi+1)(\psi+1)}{\Psi}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{2}{p}} \tag{3.1.9}$$

yazılır. (3.1.9)'in sağ tarafında Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{(\Psi+1)(\psi+1)}{\Psi}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq\ &\left(\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

yazılır. (3.1.10) eşitsizliğinden

$$\left(\frac{(\Psi+1)(\psi+1)}{\Psi}-2\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{2}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{2}{p}}$$

elde edilir. Böylece (3.1.8) eşitsiziği elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.1.1 Sabit Orantılı (CP) Kesirli İntegral Operatörü İle İlgili Diğer Eşitsizlikler

Bu bölümde, sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörünü içeren bazı ilgili integral eşitsizlikler için yeni sonuçlar yer almaktadır.

Teorem 3.1.3 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha>0$, $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere, $\forall t>0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)<\infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)<\infty$ olsun. Eğer $\forall\tau\in[0,t]$ için $0<\psi\leq\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}\leq\Psi$ ise,

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2(t)\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\frac{\Psi}{\psi}\right)^{\frac{1}{pq}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1^{\frac{1}{p}}(t)f_2^{\frac{1}{p}}(t)\right). \tag{3.1.11}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}\leq\Psi$, $\tau\in[0,t]$ ve $t>0$ koşulları altında

$$f_1(\tau)\leq\Psi f_2(\tau)\Rightarrow f_2^{\frac{1}{q}}(\tau)\geq\Psi^{-\frac{1}{q}}f_1^{\frac{1}{q}}(\tau) \tag{3.1.12}$$

yazılır. (3.1.12) eşitsizliğinin her iki tarafı $f_1^{\frac{1}{p}}(\tau)$ çarpılırsa,

$$f_1^{\frac{1}{p}}(\tau)f_2^{\frac{1}{q}}(\tau)\geq\Psi^{-\frac{1}{q}}f_1(\tau). \tag{3.1.13}$$

yazılır. (3.1.13) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{\Psi^{-\frac{1}{q}}}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]f_1(\tau)d\tau\\ \leq\;&\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]f_1^{\frac{1}{p}}(\tau)f_2^{\frac{1}{q}}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

yazılır. Buradan

$$\Psi^{-\frac{1}{pq}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1(t)\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1^{\frac{1}{p}}(t)f_2^{\frac{1}{q}}(t))\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\psi^{\frac{1}{p}}f_2^{\frac{1}{p}}(\tau)\leq f_1^{\frac{1}{p}}(\tau),\quad t>0 \tag{3.1.16}$$

yazılır. (3.1.16) eşitsizliğinin her iki tarafı $f_2^{\frac{1}{q}}(\tau)$ ile çarpılır ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliği kullanılırsa

$$\psi^{\frac{1}{p}}f_2(\tau)\leq f_1^{\frac{1}{p}}(\tau)f_2^{\frac{1}{q}}(\tau) \tag{3.1.17}$$

yazılır. (3.1.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\psi^{\frac{1}{pq}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2(t)\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1^{\frac{1}{p}}(t)f_2^{\frac{1}{q}}(t))\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.18}$$

elde edilir. (3.1.15) ve (3.1.18) taraf tarafa çarpılır ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ eşitliği kullanılırsa

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1(t)\right)^{\frac{1}{p}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_2(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\Psi}{\psi}\right)^{\frac{1}{pq}}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1^{\frac{1}{p}}(t)f_2^{\frac{1}{q}}(t))\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği yazılır ve istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.4 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha>0$, $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere, $\forall t>0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1^p(t)<\infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_2^p(t)<\infty$ olsun. Eğer $\forall\tau\in[0,t]$ için $0<\psi\leq\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}\leq\Psi$ ise,

$${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1(t)f_2(t) \leq \mathcal{K}_3\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1^p+f_2^p)(t)\right)+\mathcal{K}_4\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1^q+f_2^q)(t)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\mathcal{K}_3=\dfrac{2^{p-1}\Psi^p}{p(\Psi+1)^p}$ ve $\mathcal{K}_4=\dfrac{2^{q-1}}{q(\psi+1)^q}$ şeklindedir.

İspat. Hipotezi kullanarak

$$(\Psi+1)^p f_1^p(\tau) \leq \Psi^p(f_1+f_2)^p(\tau) \tag{3.1.19}$$

eşitsizliği yazılır. (3.1.19) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{(\Psi+1)^p}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]f_1^p(\tau)d(\tau)\\ \leq\;&\frac{\Psi^p}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right](f_1+f_2)^p(\tau)d\tau\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1^p(t) \leq \frac{\Psi^p}{(\Psi+1)^p}\,{}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1+f_2)^p(t) \tag{3.1.20}$$

yazılır. Öte yandan, $0<\psi<\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}$ ve $\tau\in(0,t)$ için

$$(\psi+1)^q f_2^q(\tau) \leq (f_1+f_2)^q(\tau) \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği yazılır. Tekrar (3.1.21) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_2^q(t) \leq \frac{1}{(\psi+1)^q}\,{}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1+f_2)^q(t) \tag{3.1.22}$$

elde edilir. Young eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$f_1(\tau)f_2(\tau) \leq \frac{f_1^p(\tau)}{p} + \frac{f_2^q(\tau)}{q} \tag{3.1.23}$$

yazılır. (3.1.23) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1f_2)(t) \leq \frac{1}{p}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right) + \frac{1}{q}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^q(t)\right) \tag{3.1.24}$$

elde edilir. (3.1.20), (3.1.22) ve (3.1.24) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} ^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1f_2)(t) &\leq \frac{1}{p}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right) + \frac{1}{q}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^q(t)\right) \\ &\leq \frac{\Psi^p}{p(\Psi+1)^p}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1+f_2)^p(t)\right) \\ &\quad + \frac{1}{q(\psi+1)^q}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1+f_2)^q(t)\right) \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

elde edilir. $r > 1$ ve $a, b \geq 0$ için $(a+b)^r \leq 2^{p-1}(a^r + b^r)$ eşitsizliği kullanılırsa

$$^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1+f_2)^p(t) \leq 2^{p-1}\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1^p + f_2^p)(t) \tag{3.1.26}$$

ve

$$^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1+f_2)^q(t) \leq 2^{q-1}\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1^q + f_2^q)(t) \tag{3.1.27}$$

yazılır. (3.1.26) ve (3.1.27) eşitsizlikleri (3.1.25) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1f_2)(t) \leq \frac{2^{p-1}\Psi^p}{p(\Psi+1)^p}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1^p+f_2^p)(t)\right) + \frac{2^{q-1}}{q(\psi+1)^q}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1^q+f_2^q)(t)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha > 0$, $p \geq 1$ olmak üzere, $\forall t > 0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t) < \infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t) < \infty$ olsun. Eğer $\forall \tau \in [0,t]$ için $0 < \psi \leq \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi$ ise,

$$\begin{aligned} \frac{\Psi+1}{\Psi-c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1(t)-cf_2(t))\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\psi+1}{\psi-c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1(t)-cf_2(t))\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $0 < c < \psi \leq \Psi$ olduğundan

$$\psi c \leq \Psi c \Rightarrow \psi c + \psi \leq \psi c + \Psi \leq \Psi c + \Psi \Rightarrow (\Psi+1)(\psi - c) \leq (\psi+1)(\Psi - c)$$

yazılır. Buradan

$$\frac{\Psi+1}{\Psi-c} \leq \frac{\psi+1}{\psi-c}$$

yazılır. Ayrıca

$$\psi - c \leq \frac{f_1(\tau) - cf_2(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi - c$$

yani

$$\frac{(f_1(\tau) - cf_2(\tau))^p}{(\Psi - c)^p} \leq f_2^p(\tau) \leq \frac{(f_1(\tau) - cf_2(\tau))^p}{(\psi - c)^p}. \tag{3.1.28}$$

Benzer şekilde

$$\frac{1}{\Psi} \leq \frac{f_2(\tau)}{f_1(\tau)} \leq \frac{1}{\psi} \Rightarrow \frac{\psi - c}{c\psi} \leq \frac{f_1(\tau) - cf_2(\tau)}{cf_1(\tau)} \leq \frac{\Psi - c}{c\Psi},$$

yazılır ki böylece

$$\left(\frac{\Psi}{\Psi - c}\right)^p (f_1(\tau) - cf_2(\tau))^p \leq f_1^p(\tau) \leq \left(\frac{\psi}{\psi - c}\right)^p (f_1(\tau) - cf_2(\tau))^p \tag{3.1.29}$$

elde edilir. (3.1.28) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\Psi - c)^p \kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right] (f_1(\tau) - cf_2(\tau))^p d\tau \\
\leq \quad & \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right] f_2^p(\tau) d\tau \\
\leq \quad & \frac{1}{(\psi - c)^p \kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right] (f_1(\tau) - cf_2(\tau))^p d\tau
\end{aligned}$$

olur. Böylece sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü tanımından

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Psi - c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1(t) - cf_2(t))^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad & \leq \quad \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \quad \frac{1}{\psi - c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1(t) - cf_2(t))^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

yazılır. (3.1.29) eşitsizliğinde aynı işlem gerçekleştirilirse

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi}{\Psi - c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1(t) - cf_2(t))^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad & \leq \quad \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \quad \frac{\psi}{\psi - c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (f_1(t) - cf_2(t))^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

elde edilir. (3.1.30) ve (3.1.31) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{\Psi+1}{\Psi-c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1(t)-cf_2(t))^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}+\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\psi+1}{\psi-c}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1(t)-cf_2(t))^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha>0$, $p\geq 1$ olmak üzere, $\forall t>0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)<\infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)<\infty$ olsun. Eğer, $\forall\tau\in[0,t]$ için $0\leq a\leq f_1(\tau)\leq A$ ve $0\leq b\leq f_2(\tau)\leq B$ ise

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}+\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}\leq \mathcal{K}_5\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\mathcal{K}_5=\dfrac{A(a+B)+B(A+b)}{(A+b)(a+B)}$ şeklindedir.

İspat. Hipotezden

$$\frac{1}{B}\leq\frac{1}{f_2(\tau)}\leq\frac{1}{b} \tag{3.1.32}$$

dir. (3.1.32) eşitsizliği ile $0\leq a\leq f_1(\tau)\leq A$ eşitsizliği çarpılırsa

$$\frac{a}{B}\leq\frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)}\leq\frac{A}{b} \tag{3.1.33}$$

yazılır. (3.1.33)'den

$$f_2^p(\tau)\leq\left(\frac{B}{a+B}\right)^p(f_1(\tau)+f_2(\tau))^p \tag{3.1.34}$$

ve

$$f_1^p(\tau)\leq\left(\frac{A}{b+A}\right)^p(f_1(\tau)+f_2(\tau))^p \tag{3.1.35}$$

elde edilir. (3.1.34) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]f_2^p(\tau)d\tau \\ \leq\ &\left(\frac{B}{a+B}\right)^p\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right](f_1(\tau)+f_2(\tau))^p d\tau\end{aligned}$$

olur. Böylece sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü tanımından

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{B}{a+B}\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.36}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde, (3.1.35)'de benzer hesaplamalar yapılırsa

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{A}{b+A}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.37}$$

eşitsizliği yazılır. (3.1.36) ve (3.1.37) taraf tarafa toplanırsa

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{A(a+B)+B(b+A)}{(a+B)(b+A)}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1+f_2)^p(t)\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha > 0$, $p \geq 1$ olmak üzere, $\forall t > 0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1^p(t) < \infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_2^p(t) < \infty$ olsun. Eğer $\forall \tau \in [0,t]$ için $0 < \psi \leq \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi$ ise,

$$\frac{1}{\Psi}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1(t)f_2(t)\right) \leq \frac{1}{(\psi+1)(\Psi+1)}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1+f_2)^2(t)\right) \leq \frac{1}{\psi}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1(t)f_2(t)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $0 < \psi \leq \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi$ olduğundan

$$f_2(\tau)(\psi+1) \leq f_2(\tau)+f_1(\tau) \leq f_2(\tau)(\Psi+1) \tag{3.1.38}$$

yazılır. Ayrıca $\frac{1}{\Psi} \leq \frac{f_2(\tau)}{f_1(\tau)} \leq \frac{1}{\psi}$ eşitsizliğinden

$$f_1(\tau)\left(\frac{\Psi+1}{\Psi}\right) \leq f_2(\tau)+f_1(\tau) \leq f_1(\tau)\left(\frac{\psi+1}{\psi}\right). \tag{3.1.39}$$

olur. (3.1.38) ve (3.1.39) taraf tarafa çarpılırsa

$$\frac{f_1(\tau)f_2(\tau)}{\Psi} \leq \frac{(f_2(\tau)+f_1(\tau))^2}{(\psi+1)(\Psi+1)} \leq \frac{f_1(\tau)f_2(\tau)}{\psi} \tag{3.1.40}$$

elde edilir. (3.1.40) eşitsizliğinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Psi\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]f_1(\tau)f_2(\tau)d\tau \\
\leq\ &\frac{1}{(\psi+1)(\Psi+1)\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right](f_1(\tau)+f_2(\tau))^2d\tau \\
\leq\ &\frac{1}{\psi\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]f_1(\tau)f_2(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Sabit orantılı (CP) kesirli integral operatör tanımından

$$\frac{1}{\Psi}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1(t)f_2(t)\right) \leq \frac{1}{(\psi+1)(\Psi+1)}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}(f_1+f_2)^2(t)\right) \leq \frac{1}{\psi}\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1(t)f_2(t)\right)$$

yazılır ve istenilen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 3.1.8 f_1, f_2, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı iki pozitif fonksiyon ve $\alpha > 0$, $p \geq 1$ olmak üzere, $\forall t > 0$ için ${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1^p(t) < \infty$ ve ${}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_2^p(t) < \infty$ olsun. Eğer $\forall \tau \in [0,t]$ için $0 < \psi \leq \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi$ ise,

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\left({}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f_3^p(f_1(t), f_2(t))\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$f_3(f_1(\tau), f_2(\tau)) = \max\left\{\left[\left(\frac{\Psi}{\psi}+1\right)f_1(\tau) - \Psi f_2(\tau)\right], \frac{(\Psi+\psi)f_2(\tau) - f_1(\tau)}{\psi}\right\}$$

şeklindedir.

İspat. $0 < \psi \leq \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi$ ve $\forall \tau \in [0,t]$ için

$$0 < \psi \leq \Psi + \psi - \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \tag{3.1.41}$$

ve

$$\Psi + \psi - \frac{f_1(\tau)}{f_2(\tau)} \leq \Psi \tag{3.1.42}$$

yazılır. (3.1.41) ve (3.1.42) kullanılarak

$$f_2(\tau) < \frac{(\Psi+\psi)f_2(\tau) - f_1(\tau)}{\psi} \tag{3.1.43}$$

eşitsizliği yazılır. Hipotezden $0 < \frac{1}{\Psi} \leq \frac{f_2(\tau)}{f_1(\tau)} \leq \frac{1}{\psi}$ olur. Böylece

$$\frac{1}{\Psi} \leq \frac{1}{\Psi} + \frac{1}{\psi} - \frac{f_2(\tau)}{f_1(\tau)} \tag{3.1.44}$$

ve

$$\frac{1}{\Psi} + \frac{1}{\psi} - \frac{f_2(\tau)}{f_1(\tau)} \leq \frac{1}{\psi} \tag{3.1.45}$$

yazılır. (3.1.44) ve (3.1.45) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{\Psi} \leq \frac{\left(\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\Psi}\right)f_1(\tau) - f_2(\tau)}{f_1(\tau)} \leq \frac{1}{\psi}$$

eşitsizliği yazılır ve düzenlenir yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &\leq \Psi\left(\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\Psi}\right) f_1(\tau)-\Psi f_2(\tau) \\ &= \frac{\Psi(\Psi+\psi) f_1(\tau)-\Psi^2\psi f_2(\tau)}{\Psi\psi} \\ &= \left(\frac{\Psi}{\psi}+1\right) f_1(\tau)-\Psi f_2(\tau) \end{aligned} \tag{3.1.46}$$

elde edilir. (3.1.43) ve (3.1.46) kullanılırsa

$$f_1^p(\tau) \leq f_3^p(f_1(\tau), f_2(\tau)) \tag{3.1.47}$$

ve

$$f_2^p(\tau) \leq f_3^p(f_1(\tau), f_2(\tau)) \tag{3.1.48}$$

yazılır. (3.1.47) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right]$ ile çarpılır ve τ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right] f_1^p(\tau) d\tau \\ \leq\ &\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-\tau)\right] f_3^p(f_1(\tau), f_2(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü tanımından

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_3^p(f_1(t), f_2(t))\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.49}$$

yazılır. Benzer işlemler (3.1.48) eşitsizliği için uygulanırsa

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_3^p(f_1(t), f_2(t))\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.50}$$

elde edilir. Böylece (3.1.49) ve (3.1.50) kullanılarak

$$\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2^p(t)\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_3^p(f_1(t), f_2(t))\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 Sabit Orantılı (CP) Kesirli İntegral Operatörleri İçeren Grüss Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümünde, sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü yardımıyla Grüss tipli integral eşitsizlikleri üzerine yeni bulgular yer almaktadır.

Lemma 3.2.1 f, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen ve

$$l \leq f(u) \leq L; \quad l, L \in \mathbb{R}, \quad u \in (0,\infty). \tag{3.2.1}$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde her $t>0$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t) - \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)^2 \\
&= \left(L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right) \\
&\times \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) - l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right) \\
&- \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha \big(L-f(t)\big)\big(f(t)-l\big)
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

eşitliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. (3.2.1) koşulunu sağlayan f fonksiyonu ve $x, y > 0$ için

$$\begin{aligned}
&\big(L-f(y)\big)\big(f(x)-l\big) + \big(L-f(x)\big)\big(f(y)-l\big) \\
&-\big(L-f(x)\big)\big(f(x)-l\big) - \big(L-f(y)\big)\big(f(y)-l\big) \\
=\; & f^2(x) + f^2(y) - 2f(x)f(y)
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

yazılır. (3.2.3) ifadesinin her iki tarafı $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]$ ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,t]$ aralığında x için integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\big(L-f(y)\big)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f)(t)-l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{K_1(\alpha)}{K_0(\alpha)}t\right]}{K_1(\alpha)}\right)\right)\\
&+\left(L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f)(t)\right)\big(f(y)-l\big) \qquad (3.2.4)\\
&-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\big(L-f(t)\big)\big(f(t)-l\big)-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\big(L-f(y)\big)\big(f(y)-l\big)\\
=\;&{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f^2)(t)+\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)f^2(y)-2\Big({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f)(t)\Big)f(y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]dx=\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}
$$

integrali kullanılmıştır. Ardından (3.2.4) ifadesi $\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]$ ile çarpılır ve elde edilen sonucun y için $[0,t]$ aralığında integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left(L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)-l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right)\\
&+\left(L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)-l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right)\\
&-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left(\big(L-f(t)\big)\big(f(t)-l\big)\right)\\
&-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left(\big(L-f(t)\big)\big(f(t)-l\big)\right)\\
=\;&\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)+\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)\\
&-2\Big({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\Big)\Big({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\Big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (3.2.2) eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.1 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen, $l\le f(u)\le L$, $m\le g(u)\le M$,

$l, L, m, M \in \mathbb{R}$ ve $u \in (0, \infty)$ şartlarını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu taktirde her $t > 0$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t \right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (fg)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \right| \\ \leq & \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t \right]}{\kappa_1(\alpha)} \right)^2 (L - l)(M - m) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Öncelikle

$$H(x, y) := \big(f(x) - f(y) \big) \big(g(x) - g(y) \big), \quad x \in [a, b] \tag{3.2.5}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu eşitliğin her ki tarafı

$$\frac{1}{\big(\kappa_0(\alpha)\big)^2} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} (t - x) \right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} (t - y) \right]$$

ile çarpılır ve çıkan sonucun $[0, t]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\big(\kappa_0(\alpha)\big)^2} \int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} (t - x) \right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} (t - y) \right] H(x, y) dx dy \\ = \; & 2 \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t \right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (fg)(t) - 2 \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği $\left(\int fgh = \int f^{\frac{1}{2}} g f^{\frac{1}{2}} h \leq \left(\int f g^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int f h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$, kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\big(\kappa_0(\alpha)\big)^2} \int_0^t \int_0^t \left(\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} (t - x) \right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} (t - y) \right] H(x, y) dx dy \right)^2 \right. \\ \leq & \left(2 \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t \right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t) - 2 \Big({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \Big)^2 \right) \\ \times & \left(2 \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t \right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g^2(t) - 2 \Big({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \Big)^2 \right) \end{aligned}$$

sonucu çıkar. Buradan

$$\left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)^2$$
$$\leq \left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)-\left(\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)^2\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g^2(t)-\left(\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)^2\right)$$

elde edilir. $\big(L-f(x)\big)\big(f(x)-l\big)\geq 0$ and $\big(M-g(x)\big)\big(g(x)-m\big)\geq 0$ ifadelerinden

$$\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\big(L-f(t)\big)\big(f(t)-l\big)\geq 0$$
$$\text{ve} \tag{3.2.6}$$
$$\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\big(M-g(t)\big)\big(g(t)-m\big)\geq 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla Lemma 3.2.1' den

$$\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)-\left(\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)^2 \tag{3.2.7}$$
$$\leq \left(L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)$$
$$\times\left(\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)-l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right)$$

ve

$$\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g^2(t)-\left(\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)^2 \tag{3.2.8}$$
$$\leq \left(M\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)$$
$$\times\left(\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)-m\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right)$$

elde edilir. (3.2.6), (3.2.7) ve (3.2.8) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)^2 \tag{3.2.9}$$

$$\leq \left(L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)$$

$$\times\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) - l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right)$$

$$\times\left(M\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)$$

$$\times\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) - m\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right).$$

bulunur. Ardından $4rs \leq (r+s)^2$, $r,s \in \mathbb{R}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&4\left(L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\\
&\times\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) - l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right)\\
\leq\ &\left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)(L-l)\right)^2 \qquad (3.2.10)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&4\left(M\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)\\
&\times\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) - m\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\right)\\
\leq\ &\left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)(M-m)\right)^2 \qquad (3.2.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.9), (3.2.10) ve (3.2.11) ifadelerinden istenen sonuç elde edilir.

Lemma 3.2.2 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallebilen iki fonksiyon olsun. Bu taktirde her $t>0$ ve $\alpha,\beta \in [0,1]$ için

$$\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta(fg)(t) + \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t)\right.$$
$$\left.-\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f^2(t) + \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t) \right.$$
$$\left. -2 \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t) \right)$$
$$\times \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{K_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g^2(t) + \frac{1-\exp\left[-\frac{K_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g^2(t) \right.$$
$$\left. -2 \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) \right)$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. (3.2.5) ifadesi

$$\frac{1}{\kappa_0(\alpha)\kappa_0(\beta)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right]$$

ile çarpılır ve elde edilen sonucun x ve y değişkenleri için $(0,t)^2$ bölgesinde integrali alınırsa

$$\frac{1}{\kappa_0(\alpha)\kappa_0(\beta)} \int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right] H(x,y)dxdy$$
$$= \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (fg)(t) + \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\beta (fg)(t)$$
$$- \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \; {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) - \; {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t) \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)$$

elde edilir. Daha sonra, Teorem 3.2.1'in ispatında olduğu gibi çift katlı integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa istenen sonuç elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.3 f, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen, $l, L \in \mathbb{R}$, $l \leq f(u) \leq L$ ve $u \in (0,\infty)$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde her $t>0$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ için

$$\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f^2(t) + \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} \; {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t) - 2 \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left(L\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t) - l\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right) \\
& + \left(L\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} - {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) - l\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
& - \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} {}^{CP}\mathcal{I}_\beta (L-f(t))(f(t)-l)\right) \\
& - \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (L-f(t))(f(t)-l)\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. (3.2.4) ifadesi $\frac{1}{\kappa_0(\beta)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right]$ ile çarpılır ve elde edilen sonucun y için 0'dan t'ye integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) - l\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\left(\frac{1}{\kappa_0(\beta)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right](L-f(y))dy\right) \\
& + \left(L\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left(\frac{1}{\kappa_0(\beta)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right](f(y)-l)dy\right) \\
& - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left((L-f(t))(f(t)-l)\right)\left(\frac{1}{\kappa_0(\beta)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right]dy\right) \\
& - \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\left(\frac{1}{\kappa_0(\beta)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right](L-f(y))(f(y)-l)dy\right) \\
= \quad & \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f^2(t) + \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t) - 2\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece istenen sonuca ulaşılır. İspat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen, $l \le f(u) \le L$, $m \le g(u) \le M$, $l, L, m, M \in \mathbb{R}$ ve $u \in (0,\infty)$ şatlarını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu taktirde her $t > 0$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
& \Bigg(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{K_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} {}^{CP}\mathcal{I}_\beta (fg)(t) + \frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{K_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)} {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (fg)(t) \\
& - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\Bigg)^2 \qquad (3.2.12) \\
\le \quad & \Bigg[\left(L\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t) - l\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)-l\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\left(L\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}-{}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\right)\Bigg]$$
$$\times\Bigg[\left(M\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)-m\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)$$
$$+\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)-m\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\left(M\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}-{}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)\right)\Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. $(L-f(x))(f(x)-l)\geq 0$ ve $(M-g(x))(g(x)-m)\geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\beta(L-f(t))(f(t)-l)\\&-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(L-f(t))(f(t)-l)\leq 0\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

ve

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\beta(M-g(t))(g(t)-m)\\&-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(M-g(t))(g(t)-m)\leq 0.\end{aligned}\tag{3.2.14}$$

yazılır. Lemma 3.2.3, f ve g fonksiyonlarına uygulanır ve ardından, Lemma 3.2.2, (3.2.13) ve (3.2.14) kullanılırsa (3.2.12) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.3 f, φ_1 ve φ_2, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen

$$\varphi_1(t)\leq f(t)\leq\varphi_2(t)\quad\forall t\in[0,\infty).\tag{3.2.15}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar olsun. Bu taktirde $t>0$, $\alpha,\beta\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}&{}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)+{}^{CP}\mathcal{I}_\beta\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\\\geq\ &{}^{CP}\mathcal{I}_\beta\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)+{}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (3.2.15) eşitsizliğinden, her $x \geq 0$, $y \geq 0$ için

$$(\varphi_2(x) - f(x))\,(f(y) - \varphi_1(y)) \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_2(x)f(y) + \varphi_1(y)f(x) \geq \varphi_1(y)\varphi_2(x) + f(x)f(y) \tag{3.2.16}$$

yazılır. (3.2.16) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]$, $x \in (0,t)$, $t > 0$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde x'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& f(y)\frac{1}{K_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]\varphi_2(x) \\
& +\varphi_1(y)\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]f(x) \\
\geq\ & \varphi_1(y)\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]\varphi_2(x) \\
& +f(y)\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]f(x)
\end{aligned}$$

ki buradan

$$\begin{aligned}
& f(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) + \varphi_1(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \\
\geq\ & \varphi_1(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) + f(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.17) eşitsizliğinin ner iki tarafı $\frac{1}{\kappa_0(\beta)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right]$, $y \in (0,t)$, $t > 0$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde y'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) +\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \\
\geq\ & {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) +\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 f, $t \in [0,\infty)$ ve $l, L \in \mathbb{R}$ olmak üzere $l \leq f(t) \leq L$ şartını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, $t > 0$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ ve (2.2.17) ile belirtilen operatörün hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$
\begin{aligned}
& l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)+L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t) \\
\geq\ & lL\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

Teorem 3.2.4 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. (3.2.15) şartını ve ayrıca $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen ψ_1 ve ψ_2 fonksiyonları

$$\psi_1(t)\leq g(t)\leq \psi_2(t),\quad \forall t\in[0,\infty) \tag{3.2.18}$$

şartını sağlasın. Bu taktirde, $t>0$, $\alpha,\beta\in[0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
(a)\qquad & {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\psi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) \\
& \geq\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\psi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) \\
(b)\qquad & {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t) \\
& \geq\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_2(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \\
(c)\qquad & {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\psi_2(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) \\
& \geq\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\psi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t), \\
(d)\qquad & {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\psi_1(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) \\
& \geq\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta\psi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. (a): (3.2.15) ve (3.2.18) eşitsizlikleri yardımıyla her $t\in[0,\infty)$ için

$$(\varphi_2(x)-f(x))\,(g(y)-\psi_1(y))\geq 0$$

yani

$$\varphi_2(x)g(y)+\psi_1(y)f(x)\geq\psi_1(y)\varphi_2(x)+f(x)g(y) \tag{3.2.19}$$

yazılır. (3.2.19) eşitsizliğinin her iki tarafı $x\in(0,t)$ olmak üzere

$$\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]$$

ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde x'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& g(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}\varphi_2(t) + \psi_1(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f(t) \\
\geq\ & \psi_1(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}\varphi_2(t) + g(y)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f(t)
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

elde edilir. Daha sonra (3.2.20) eşitsizliğinin her iki tarafı $y \in (0,t)$ olmak üzere

$$\frac{1}{\kappa_0(\beta)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right]$$

ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde y'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& {}^{CP}\mathcal{I}_{\beta}\psi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f(t) +\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}\varphi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\beta}g(t) \\
\geq\ & {}^{CP}\mathcal{I}_{\beta}\psi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}\varphi_2(t) +\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\beta}g(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&(b) \qquad (\psi_2(x)-g(x))\,(f(y)-\varphi_1(y)) \geq 0, \\
&(c) \qquad (\varphi_2(x)-f(x))\,(g(y)-\psi_2(y)) \leq 0, \\
&(d) \qquad (\varphi_1(x)-f(x))\,(g(y)-\psi_1(y)) \leq 0
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri kullanılarak $(b)-(d)$ ispatlanır.

Teorem 3.2.4'un özel bir durumu olarak, aşağıdaki sonucu verelim:

Sonuç 3.2.2 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon ve $l, L, m, M \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$l \leq f(t) \leq L, \quad m \leq g(t) \leq M, \quad \forall t \leq [0,\infty)$$

olsun. Bu taktirde, $t>0$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
(a_1) \qquad & m\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f(t) + L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\beta}g(t) \\
\geq\ & mL\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right) +\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\alpha}f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_{\beta}g(t),
\end{aligned}$$

$$(b_1) \quad l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)+M\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)$$

$$\geq lM\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t),$$

$$(c_1) \quad LM\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)$$

$$\geq L\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)+M\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t),$$

$$(d_1) \quad lm\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{K_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)$$

$$\geq l\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t)+m\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)$$

eşitsizlikleri elde edilir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

Lemma 3.2.4 f, φ_1 ve φ_2, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun. (3.2.15) şartları sağlansın. Bu taktirde, $t>0$, $\alpha,\beta\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)-\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)^2\\
=\ &\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2)(t)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left(({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1)(t)\right)\\
&-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2(t)-f(t))(f(t)-\varphi_1(t)))\\
&+\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1 f)(t)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\\
&+\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2 f)(t)-\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\\
&+\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1\varphi_2)(t) \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Herhangi $x>0$ ve $y>0$ için

$$\begin{aligned}
& \left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left(f(x)-\varphi_1(x)\right)+\left(\varphi_2(x)-f(x)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right) \\
& -\left(\varphi_2(x)-f(x)\right)\left(f(x)-\varphi_1(x)\right)-\left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right) \\
= \; & f^2(x)+f^2(y)-2f(x)f(y)+\varphi_2(y)f(x)+\varphi_1(x)f(y)-\varphi_1(x)\varphi_2(y) \\
& +\varphi_2(x)f(y)+\varphi_1(y)f(x)-\varphi_1(y)\varphi_2(x)-\varphi_2(x)f(x)+\varphi_1(x)\varphi_2(x) \\
& -\varphi_1(x)f(x)-\varphi_2(y)f(y)+\varphi_1(y)\varphi_2(y)-\varphi_1(y)f(y)
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

yazılır. (3.2.22) eşitliğinin her iki tarafı $x\in(0,t)$, $t>0$ olmak üzere

$$\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]$$

ile çarpılır ve 0'dan t'ye x üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\right) \\
& +\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right) \\
& - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2(t)-f(t))(f(t)-\varphi_1(t)) \\
& -\left(\varphi_2(y)-f(y)\right)\left(f(y)-\varphi_1(y)\right)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
= \; & {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)+f^2(y)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)-2f(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \\
& +\varphi_2(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)+f(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)-\varphi_2(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t) \\
& +f(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)+\varphi_1(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)-\varphi_1(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) \\
& - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2 f)(t)+ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1\varphi_2)(t)- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1 f)(t) \\
& -\varphi_2(y)f(y)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
& +\varphi_1(y)\varphi_2(y)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
& -\varphi_1(y)f(y)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

elde edilir. (3.2.23) eşitliğinin her iki tarafı $y\in(0,t)$, $t>0$ olmak üzere

$$\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]$$

ile çarpılır ve 0'dan t'ye y üzerinde integral alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\right) \\
&+ \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\right) \\
&- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2(t) - f(t))(f(t) - \varphi_1(t))\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
&- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left(\varphi_2(t) - f(t)\right)\left(f(t) - \varphi_1(t)\right)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
= \quad &\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t) + {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
&-2\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) + {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \\
&+ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t) \\
&+ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) + {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \\
&- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t) \\
&- \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2 f)(t) \\
&+ \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1\varphi_2)(t) \\
&- \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1 f)(t) \\
&- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2 f)(t)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
&+ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1\varphi_2)(t)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\
&- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1 f)(t)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve (3.2.21) elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.5 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon, $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ ve ψ_2 (3.2.15) ve (3.2.18) şartlarını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen dört fonksiyon olsun. Bu taktirde her $t > 0$, $\alpha \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \right| \\
\leq \; & \sqrt{T(f,\varphi_1,\varphi_2)T(g,\psi_1,\psi_2)} \qquad (3.2.24)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $T(u,v,\omega)$

$$\begin{aligned}
T(u,v,\omega) \; = \; & \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha \omega(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha u(t) \right) \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha u(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha v(t) \right) \\
& + \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(vu)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha v(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha u(t) \\
& + \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\omega u)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha \omega(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha u(t) \\
& + {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha v(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha \omega(t) - \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(v\omega)(t)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen iki fonkiyon olsun ve (3.2.15) ve (3.2.18) şartları sağlansın.

$$H(x,y) = (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)), \quad x, y \in (0,t), \; t > 0 \qquad (3.2.25)$$

eşitliği tanımlansın. (3.2.25) eşitliğinin her iki tarafı $x, y \in (0,t)$, $t > 0$ olmak üzere $\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]$ ile çarpılır ve 0'dan t'ye x ve y'e göre çift katlı integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^t \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] H(x,y)dxdy \\
= \; & \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \qquad (3.2.26)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.26) için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanırsa

$$\left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \right)^2$$

$$
\begin{aligned}
\leq\; & \left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)-\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)^2\right)\\
& \times\left(\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g^2(t)-\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)^2\right) \qquad (3.2.27)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(\varphi_2(t)-f(t))\,(f(t)-\varphi_1(t))\geq 0$ ve $(\psi_2(t)-g(t))\,(g(t)-\psi_1(t))\geq 0$ olduğundan $t\in[0,\infty)$ için

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left((\varphi_2(t)-f(t))(f(t)-\varphi_1(t))\right)\geq 0,\\
&\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left((\psi_2(t)-g(t))(g(t)-\psi_1(t))\right)\geq 0
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 3.2.4 yardımıyla

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f^2(t)-\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)^2\\
\leq\; & \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\right)\\
& +\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1 f)(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\\
& +\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_2 f)(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\\
& +{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\varphi_2(t)-\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\varphi_1\varphi_2)(t)\\
& =T(f,\varphi_1,\varphi_2) \qquad (3.2.28)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g^2(t)-\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)^2\\
\leq\; & \left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_2(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\right)\left({}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_1(t)\right)\\
& +\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\psi_1 g)(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_1(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)\\
& +\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\psi_2 g)(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_2(t)\ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_1(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\psi_2(t) - \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(\psi_1\psi_2)(t) \\
&= T(g,\psi_1,\psi_2) \qquad (3.2.29)
\end{aligned}
$$

yazılır. (3.2.27), (3.2.28) ve (3.2.29) yardımıyla (3.2.24) eşitsizliği elde edilir.

3.3 Sabit Orantılı (CP) Kesirli İntegral Operatörleri İçeren Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümünde, sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörünü içeren Chebyshev tipli integral eşitsizlikleri üzerine yeni bulgular sunulmuştur.

Teorem 3.3.1 p, $[0,\infty)$ aralığında pozitif ve integrallenebilir fonksiyon, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. $f' \in L_r([0,\infty))$, $g' \in L_s([0,\infty))$, $r,s,\gamma > 1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$ ve $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$ olmak üzere her $t>0$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
&2\left|{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(p)(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pfg)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pg)(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pf)(t)\right| \qquad (3.3.1) \\
\leq\ &\left(\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\right)^2 ||f'||_r ||g'||_s \int_0^t\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] \\
&\times|x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}}p(x)p(y)dxdy
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f ve g, Teorem 3.3.1'nin şartlarını sağlayan iki fonksiyon ve p, $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyon olsun.

$$
H(x,y) := (f(x)-f(y)(g(x)-g(y))); \ \ x,y \in (0,t),\ t>0. \qquad (3.3.2)
$$

(3.3.2), $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]p(x)$ ile çarpılıp ardından x'e göre $(0,t)$ üzerinde integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]p(x)H(x,y)dx \qquad (3.3.3) \\
=\ &{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pfg)(t) - g(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pf)(t) - f(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pg)(t) + f(y)g(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(p)(t)
\end{aligned}
$$

özdeşliği elde edilir. Şimdi (3.3.3) özdeşliği $\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]p(y)$ ile çarpılıp ardından y'ye göre $(0,t)$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\right)^2\int_0^t\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]p(x)p(y)H(x,y)dxdy\\ =\;& 2\left[{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(p)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pfg)(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pg)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pf)(t)\right]\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

özdeşliği elde edilir. Diğer taraftan

$$H(x,y):=\int_x^y\int_x^y f'(u)g'(w)dudw$$

olduğundan, çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^{\frac{1}{r'}}\left|\int_x^y|f'(u)|^r du\right|^{\frac{1}{r}}$$

ve

$$|g(x)-g(y)|\leq|x-y|^{\frac{1}{s'}}\left|\int_x^y|g'(w)|^s dw\right|^{\frac{1}{s}}$$

yazılır. Buradan

$$|H(x,y)|\leq|x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}}\left|\int_x^y|f'(u)|^r du\right|^{\frac{1}{r}}\left|\int_x^y|g'(w)|^s du\right|^{\frac{1}{s}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}&2\left|{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(p)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pfg)(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pg)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pf)(t)\right|\\ \leq\;&\left(\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\right)^2\int_0^t\int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]p(x)p(y)\\ &\times|x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}}\left|\int_x^y|f'(u)|^r du\right|^{\frac{1}{r}}\left|\int_x^y|g'(w)|^s dw\right|^{\frac{1}{s}}dxdy\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde eşitsizliğin sağ tarafına iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$2\left|{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(p)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pfg)(t)-{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pg)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pf)(t)\right|\tag{3.3.5}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\right)^2 \left[\int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]\right.\\
&\quad \left. \times |x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}} \left|\int_x^y |f'(u)|^r du\right|^{\frac{\gamma}{r}} p(x)p(y)dxdy\right]^{\frac{1}{\gamma}}\\
&\quad \times \left[\int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]\right.\\
&\quad \left. \times |x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}} \left|\int_x^y |g'(w)|^s dw\right|^{\frac{\gamma'}{s}} p(x)p(y)dxdy\right]^{\frac{1}{\gamma'}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi

$$
\left|\int_x^y |f'(u)|^r du\right| \leq ||f'||_r^r, \quad \left|\int_x^y |g'(w)|^s dw\right| \leq ||g'||_s^s \ ,
$$

eşitsizlikleri (3.3.5)'de kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&2\left|{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(p)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pfg)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pg)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pf)(t)\right|\\
\leq\ &\left[\frac{||f'||_r^\gamma}{\kappa_0^\gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]\right.\\
&\left. \times|x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}} p(x)p(y)dxdy\right]^{\frac{1}{\gamma}}\\
&\times\left[\frac{||g'||_s^{\gamma'}}{\kappa_0^{\gamma'}(\alpha)} \int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]\right.\\
&\left. \times|x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}} p(x)p(y)dxdy\right]^{\frac{1}{\gamma'}}
\end{aligned}
$$

yazılır. Buradan

$$
\begin{aligned}
&2\left|{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(p)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pfg)(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pg)(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(pf)(t)\right|\\
\leq\ &\left(\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\right)^2 ||f'||_r||g'||_s \int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]\\
&\times|x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}} p(x)p(y)dxdy
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 3.3.1 ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.2 p ve q, $[0,\infty)$ aralığında pozitif ve integrallenebilir fonksiyonlar, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. $f' \in L_r([0,\infty))$, $g' \in L_s([0,\infty))$,

$r, s, \gamma > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ ve $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1$ olmak üzere her $t > 0$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
&\big| {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha q(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha pfg(t) + {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha p(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha qfg(t) \\
&- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha pf(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha qg(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha qf(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha pg(t)\big| \\
\leq &\left(\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\right)^2 ||f'||_r ||g'||_s \\
&\times \int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] |x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}} p(x)q(y)dxdy
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (3.3.3) özdeşliği $\dfrac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\dfrac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] q(y)$ ile çarpılıp ardından y'ye göre $(0, t)$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\big| {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha q(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha pfg(t) + {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha p(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha qfg(t) \\
&- {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha pf(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha qg(t) - {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha qf(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha pg(t)\big| \\
\leq &\left(\frac{1}{\kappa_0(\alpha)}\right)^2 \int_0^t \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] |x-y|^{\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}} \\
&\times \left| \int_y^x |f'(u)|^r du \right|^{\frac{1}{r}} \left| \int_y^x |g'(w)|^s dw \right|^{\frac{1}{s}} p(x)q(y)dxdy
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.3.1'deki benzer yöntem kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.3 f ve g, $[0, \infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Bu taktirde, $t > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ için

$$ {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha (fg)(t) \geq \frac{\kappa_1(\alpha)}{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t\right]}\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \tag{3.3.6}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) koşullarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. f ve g, $[0, \infty)$ üzerinde senkronize fonksiyon olduğundan, $x \geq 0$, $y \geq 0$ için,

$$\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geq 0$$

yazılır. Buradan

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geq f(x)g(y) + f(y)g(x) \tag{3.3.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi (3.3.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $x \in (0,t)$ olmak üzere, $\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right]$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] f(x)g(x) \\ & +\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] f(y)g(y) \\ \geq\ & \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] f(x)g(y) \\ & +\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] f(y)g(x) \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra (3.3.8) eşitsizliğinde $(0,t)$ üzerinde x'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) + \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-x)\right] f(y)g(y)dx \\ & \geq g(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) + f(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Böylece

$${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) + f(y)g(y)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \geq g(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) + f(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \tag{3.3.9}$$

olur. (3.3.9) eşitsizliğinin her iki tarafı $y \in (0,t)$ olmak üzere, $\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right]$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) \\ & +\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] f(y)g(y)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \\ \geq\ & \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] g(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) \\ & +\frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] f(y)\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.10) eşitsizliğinde $(0,t)$ üzerinde y'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] dy\, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) \\ & + \int_0^t \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] f(y)g(y)dy \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right) \end{aligned}$$

$$\geq \int_0^t \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] g(y)dy\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) + \int_0^t \frac{1}{\kappa_0(\alpha)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}(t-y)\right] f(y)dy\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \tag{3.3.11}$$

bulunur. Sonuç olarak

$${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) \geq \frac{\kappa_1(\alpha)}{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t)$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.4 f ve g, $[0,\infty)$ üzerinde iki senkronize fonksiyon olsun. Bu taktirde her $t>0$, $\alpha,\beta\in[0,1]$ için

$$\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\beta(fg)(t) + \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}t\right]}{\kappa_1(\beta)}\right){}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t)) \geq {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\beta g(t) + {}^{CP}\mathcal{I}_\beta f(t)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \tag{3.3.12}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) koşullarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Teorem 3.3.3'de olduğu gibi, benzer argümanlar kullanılarak

$$\frac{1}{\kappa_0(\beta)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right]{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) + \frac{1}{\kappa_0(\beta)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right] f(y)g(y)\left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)$$
$$\geq \frac{1}{\kappa_0(\beta)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right] g(y)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f(t) + \frac{1}{\kappa_0(\beta)} \exp\left[-\frac{\kappa_1(\beta)}{\kappa_0(\beta)}(t-y)\right] f(y)\,{}^{CP}\mathcal{I}_\alpha g(t) \tag{3.3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.13) eşitsizliğinde $(0,t)$ üzerinde y'e göre her iki tarafın integrali alınırsa, istenilen (3.3.12) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.5 $\{f_i\}$ $(i=1,\ldots,n;\ n\in\mathbb{N})$ $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $t>0$, $\alpha\in[0,1]$ için

$${}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\Big(\prod_{i=1}^n f_i\Big)(t) \geq \left(\frac{1-\exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)}t\right]}{\kappa_1(\alpha)}\right)^{1-n} \prod_{i=1}^n {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_i(t) \tag{3.3.14}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada κ_0 ve κ_1 (2.2.8) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Bu teorem tümevarım yöntemiyle ispatlanır. Açıkca $n = 1$ ve her $t > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1(t) \geq {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1(t)$$

olduğu görülür. $n = 2$ (3.3.6)'de uygulanırsa, her $t > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$^{CP}\mathcal{I}_\alpha(f_1 f_2)(t) \geq \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right)^{-1} {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_1(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_2(t)$$

elde edilir. Şimdi $n = n - 1$ için,

$$^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i \right)(t) \geq \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right)^{2-n} \prod_{i=1}^{n-1} {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_i(t) \tag{3.3.15}$$

olduğu kabul edilsin (tümevarım hipotezi). $\{f_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ pozitif artan fonksiyonlar olduğundan, $\prod_{i=1}^{n-1} f_i$ artan fonsiyondur. Dolayısıyla $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$, $f_n = f$ fonksiyonlarına Teorem 3.3.3 uygulanırsa

$$\begin{aligned} ^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left(\prod_{i=1}^{n} f_i \right)(t) &= {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha(fg)(t) \\ &\geq \left(\frac{1 - \exp\left[-\frac{\kappa_1(\alpha)}{\kappa_0(\alpha)} t\right]}{\kappa_1(\alpha)} \right)^{-1} {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i \right)(t) \, {}^{CP}\mathcal{I}_\alpha f_n(t) \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

elde edilir. (3.3.16) eşitsizliğin sağ tarafının orta çarpanını (3.3.15) eşitsizliğin sağ elemanı ile değiştirirsek, (3.3.14) eşitsizliği elde edelir ve böylece ispat tamamlanır.

3.4 Sabit Orantılı Caputo-Hibrit Operatötürünü İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde, sabit orantılı Caputo-Hibrit kesirli integral operatörünü içeren Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri üzerine yeni bulgular sunulmuştur.

Uyarı 3.4.1 Bu bölümde

$$\begin{aligned} \kappa_0(\alpha, t) &= \alpha t^{1-\alpha} \\ \kappa_1(\alpha, t) &= (1 - \alpha) t^\alpha \end{aligned}$$

durumları göz önüne alınarak yazılmıştır [9].

Teorem 3.4.1 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Eğer, f' ve f'', I üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_a^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_x^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\Bigg| \\
\leq\ & \frac{\kappa_1(\alpha)|f'(a)| + \kappa_0(\alpha)|f''(a)|}{2+s-\alpha} \\
&+ (\kappa_1(\alpha)|f'(b)| + \kappa_0(\alpha)|f''(b)|)\,\mathcal{B}(2-\alpha, s+1) \\
&+ (\kappa_1(\alpha)|f'(x)| + \kappa_0(\alpha)|f''(x)|)\left(\mathcal{B}(2-\alpha, s+1) + \frac{1}{2+s-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1]$, $s \in (0,1]$, $a < x < b$, $\mathcal{B}(.,.)$ bir Beta fonksiyonu, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Lemma 2.2.5 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_a^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_x^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\Bigg| \qquad (3.4.1)\\
\leq\ & \kappa_1(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}|f'(ta+(1-t)x)|\,dt + \kappa_0(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}|f''(ta+(1-t)x)|\,dt \\
&+\kappa_1(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}|f'(tx+(1-t)b)|\,dt + \kappa_0(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}|f''(tx+(1-t)b)|\,dt
\end{aligned}$$

yazılır. f' ve f'', I üzerinde s-konveks fonksiyonlar olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_a^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_x^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\Bigg|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \kappa_1(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f'(a)\right|+(1-t)^s\left|f'(x)\right|\right)dt \\
&\quad +\kappa_0(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f''(a)\right|+(1-t)^s\left|f''(x)\right|\right)dt \\
&\quad +\kappa_1(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f'(x)\right|+(1-t)^s\left|f'(b)\right|\right)dt \\
&\quad +\kappa_0(\alpha)\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f''(x)\right|+(1-t)^s\left|f''(b)\right|\right)dt \\
&= \left(\kappa_1(\alpha)\left|f'(x)\right|+\kappa_0(\alpha)\left|f''(x)\right|\right)\int_0^1\left(t^{1-\alpha}(1-t)^s+t^{1+s-\alpha}\right)dt \\
&\quad +\left(\kappa_1(\alpha)\left|f'(a)\right|+\kappa_0(\alpha)\left|f''(a)\right|\right)\int_0^1 t^{1+s-\alpha}dt \\
&\quad +\left(\kappa_1(\alpha)\left|f'(b)\right|+\kappa_0(\alpha)\left|f''(b)\right|\right)\int_0^1 t^{1-\alpha}(1-t)^s\,dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2 $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Eğer, $|f'|^q$ ve $|f''|^q$, I üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$
\begin{aligned}
&\left|-\frac{\kappa_1(\alpha)f(a)+\kappa_0(\alpha)f'(a)}{x-a}-\frac{\kappa_1(\alpha)f(x)+\kappa_0(\alpha)f'(x)}{b-x}\right. \\
&\quad \left.+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_a^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}}+\frac{{}_x^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}} \\
&\quad \times\left[\kappa_1(\alpha)\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\kappa_0(\alpha)\left(\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(x)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left.+\kappa_1(\alpha)\left(\left|f'(x)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\kappa_0(\alpha)\left(\left|f''(x)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1)$, $s \in (0,1]$, $a < x < b$, $p,q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Hölder eşitsizliği (3.4.2)'ye uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_{x}^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_{b}^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right) \Bigg| \\
\leq\ & \kappa_1(\alpha)\left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f''(ta+(1-t)x)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\kappa_1(\alpha)\left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f''(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ ve $|f''|^q$'nin s-konveksliğinden,

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_{x}^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_{b}^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right) \Bigg| \\
\leq\ & \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}}}\Bigg\{\kappa_1(\alpha)\left(\int_0^1 \left(t^s |f'(a)|^q + (1-t)^s |f'(x)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\kappa_0(\alpha)\left(\int_0^1 \left(t^s |f''(a)|^q + (1-t)^s |f''(x)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\kappa_1(\alpha)\left(\int_0^1 \left(t^s |f'(x)|^q + (1-t)^s |f'(b)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\kappa_0(\alpha)\left(\int_0^1 \left(t^s |f''(x)|^q + (1-t)^s |f''(b)|^q\right) dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

yazılır. Basit hesaplamalar ile

$$
\begin{aligned}
&\left| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \right. \\
&\left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_{x}^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_{b}^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
\leq\ & \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \kappa_1(\alpha) \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&+\kappa_0(\alpha) \left(\frac{|f''(a)|^q + |f''(x)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_1(\alpha) \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left. +\kappa_0(\alpha) \left(\frac{|f''(x)|^q + |f''(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.3 $f : I \subseteq \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, I°'de iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Eğer, $|f'|^q$ ve $|f''|^q$, I üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$
\begin{aligned}
&\left| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \right. \\
&\left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_{x}^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_{b}^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}} \right) \right| \times (2-\alpha)^{1-\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \kappa_1(\alpha) \left(\frac{|f'(a)|^q}{2+s-\alpha} + |f'(x)|^q \mathcal{B}(2-\alpha, s+1) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\kappa_0(\alpha) \left(\frac{|f''(a)|^q}{2+s-\alpha} + |f''(x)|^q \mathcal{B}(2-\alpha, s+1) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\kappa_1(\alpha) \left(\frac{|f'(x)|^q}{2+s-\alpha} + |f'(b)|^q \mathcal{B}(2-\alpha, s+1) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\kappa_0(\alpha) \left(\frac{|f''(x)|^q}{2+s-\alpha} + |f''(b)|^q \mathcal{B}(2-\alpha, s+1) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha \in [0,1]$, $s \in (0,1]$, $a < x < b$, $q \geq 1$, $\mathcal{B}(.,.)$ bir Beta fonksiyonu, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. (3.4.2)'ye power-mean eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a) + \kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a} - \frac{\kappa_1(\alpha) f(x) + \kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \right. \\
&\left. +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_{x}^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}} + \frac{{}_{x}^{CPC}D_{b}^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}} \right) \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \kappa_1(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left|f'(ta+(1-t)x)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left|f''(ta+(1-t)x)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left|f'(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left|f''(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ ve $|f''|^q$'ın s-konveksliği kullanılanırsa

$$
\begin{aligned}
& \Bigg|-\frac{\kappa_1(\alpha)f(a)+\kappa_0(\alpha)f'(a)}{x-a}-\frac{\kappa_1(\alpha)f(x)+\kappa_0(\alpha)f'(x)}{b-x} \\
& +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^{\alpha}f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}}+\frac{{}_{x}^{CPC}D_b^{\alpha}f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\Bigg| \\
\leq\ & \left(\frac{1}{2-\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg\{\kappa_1(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f'(a)\right|^q+(1-t)^s\left|f'(x)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f''(a)\right|^q+(1-t)^s\left|f''(x)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_1(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f'(x)\right|^q+(1-t)^s\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\int_0^1 t^{1-\alpha}\left(t^s\left|f''(x)\right|^q+(1-t)^s\left|f''(b)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$
\begin{aligned}
& \Bigg|-\frac{\kappa_1(\alpha)f(a)+\kappa_0(\alpha)f'(a)}{x-a}-\frac{\kappa_1(\alpha)f(x)+\kappa_0(\alpha)f'(x)}{b-x} \\
& +\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^{\alpha}f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}}+\frac{{}_{x}^{CPC}D_b^{\alpha}f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\Bigg| \\
\leq\ & \left(\frac{1}{2-\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg\{\kappa_1(\alpha)\left(\frac{\left|f'(a)\right|^q}{2+s-\alpha}+\left|f'(x)\right|^q\mathcal{B}(2-\alpha,s+1)\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\kappa_0(\alpha)\left(\frac{\left|f''(a)\right|^q}{2+s-\alpha}+\left|f''(x)\right|^q\mathcal{B}(2-\alpha,s+1)\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$+\kappa_1(\alpha)\left(\frac{|f'(x)|^q}{2+s-\alpha}+|f'(b)|^q\mathcal{B}(2-\alpha,s+1)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\kappa_0(\alpha)\left(\frac{|f''(x)|^q}{2+s-\alpha}+|f''(b)|^q\mathcal{B}(2-\alpha,s+1)\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.4 $f: I\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, I°'de iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca f ve f', I üzerinde lokal olarak L_1'in fonksiyonları olsun. Eğer, $|f'|^q$ ve $|f''|^q$, I üzerinde ikinci anlamda $s-$konveks fonksiyonlar ise, bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{\kappa_1(\alpha)f(a)+\kappa_0(\alpha)f'(a)}{x-a}-\frac{\kappa_1(\alpha)f(x)+\kappa_0(\alpha)f'(x)}{b-x}\right.\\
&\left.+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}}+\frac{{}_{x}^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\right|\\
\leq\ &\frac{2(\kappa_1(\alpha)+\kappa_0(\alpha))}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{\kappa_1(\alpha)}{(s+1)q}\left(|f'(a)|^q+2|f'(x)|^q+|f'(b)|^q\right)\\
&+\frac{\kappa_0(\alpha)}{(s+1)q}\left(|f''(a)|^q+2|f''(x)|^q+|f''(b)|^q\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha\in[0,1)$, $s\in(0,1]$, $a<x<b$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $q>1$, κ_0 ve κ_1 (2.2.8)'deki koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. (3.4.2)'de bulunan eşitsizliğe Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{\kappa_1(\alpha)f(a)+\kappa_0(\alpha)f'(a)}{x-a}-\frac{\kappa_1(\alpha)f(x)+\kappa_0(\alpha)f'(x)}{b-x}\right.\\
&\left.+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^\alpha f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}}+\frac{{}_{x}^{CPC}D_b^\alpha f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right)\right|\\
\leq\ &\kappa_1(\alpha)\left[\frac{1}{p}\int_0^1 t^{p(1-\alpha)}dt+\frac{1}{q}\int_0^1|f'(ta+(1-t)x)|^q\,dt\right]\\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\frac{1}{p}\int_0^1 t^{p(1-\alpha)}dt+\frac{1}{q}\int_0^1|f''(ta+(1-t)x)|^q\,dt\right]\\
&+\kappa_1(\alpha)\left[\frac{1}{p}\int_0^1 t^{p(1-\alpha)}dt+\frac{1}{q}\int_0^1|f'(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right]\\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\frac{1}{p}\int_0^1 t^{p(1-\alpha)}dt+\frac{1}{q}\int_0^1|f''(tx+(1-t)b)|^q\,dt\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ ve $|f''|^q$'nin $s-$konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a)+\kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a}-\frac{\kappa_1(\alpha) f(x)+\kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}}+\frac{{}_{x}^{CPC}D_b^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right) \Bigg| \\
\leq\ & \kappa_1(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{1}{q}\int_0^1\left(t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(x)|^q\right)dt\right] \\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{1}{q}\int_0^1\left(t^s|f''(a)|^q+(1-t)^s|f''(x)|^q\right)dt\right] \\
&+\kappa_1(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{1}{q}\int_0^1\left(t^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right)dt\right] \\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{1}{q}\int_0^1\left(t^s|f''(x)|^q+(1-t)^s|f''(b)|^q\right)dt\right]
\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\Bigg| -\frac{\kappa_1(\alpha) f(a)+\kappa_0(\alpha) f'(a)}{x-a}-\frac{\kappa_1(\alpha) f(x)+\kappa_0(\alpha) f'(x)}{b-x} \\
&+\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{{}_{a}^{CPC}D_x^{\alpha} f(x)}{(x-a)^{2-\alpha}}+\frac{{}_{x}^{CPC}D_b^{\alpha} f(b)}{(b-x)^{2-\alpha}}\right) \Bigg| \\
\leq\ & \kappa_1(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{(s+1)q}\right] \\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{|f''(a)|^q+|f''(x)|^q}{(s+1)q}\right] \\
&+\kappa_1(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{(s+1)q}\right] \\
&+\kappa_0(\alpha)\left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p}+\frac{|f''(x)|^q+|f''(b)|^q}{(s+1)q}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.4.2 Teorem 3.4.1, Teorem 3.4.2, Teorem 3.4.3 ve Teorem 3.4.4'deki eşitsizliklerde $s=1$ olarak seçilirse, bu durumda Gürbüz ve arkadaşları [26] tarafından daha önce elde edilen sırasıyla Teorem 2.2.6, Teorem 2.2.7, Teorem 2.2.8 ve Teorem 2.2.9 elde edilir.

3.5 Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörleri İçeren Milne Tipli Eşitsizlikler

Bu kısımda, diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için Milne tipli eşitsizlikler sunulmaktadır.

Lemma 3.5.1 $\mathfrak{F} : [\kappa_1, \kappa_2] \to \mathbb{R}$, (κ_1, κ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\mathfrak{F}' \in L_1[\kappa_1, \kappa_2]$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3\alpha^\beta}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + {}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right] \\
= \; &\frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right] \\
&\times\left[\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right) - \mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right] d\vartheta
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ki burada $\alpha, \beta > 0$ ve Γ Gama fonksiyonudur.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right) d\vartheta \qquad (3.5.1) \\
&= -\frac{2}{\kappa_2-\kappa_1}\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\mathfrak{F}\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\Bigg|_0^1 \\
&\quad + \frac{2\beta}{\kappa_2-\kappa_1}\int_0^1 \left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}(1-\vartheta)^{\alpha-1}\mathfrak{F}\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right) d\vartheta \\
&= \frac{2}{3\alpha^\beta(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) - \frac{8}{3\alpha^\beta(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}(\kappa_1) \\
&\quad + \left(\frac{2}{\kappa_2-\kappa_1}\right)^2 \beta \int_{\kappa_1}^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}} \left(\frac{1-\left(\frac{2}{\kappa_2-\kappa_1}\right)^\alpha(\upsilon-\kappa_1)^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1} \\
&\quad \times\left(\frac{2}{\kappa_2-\kappa_1}\right)^{\alpha-1}(\upsilon-\kappa_1)^{\alpha-1}\mathfrak{F}(\upsilon)d\upsilon \\
&= \frac{2}{3\alpha^\beta(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) - \frac{8}{3\alpha^\beta(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}(\kappa_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2}{\kappa_2-\kappa_1}\right)^{\alpha\beta+1}\beta\int_{\kappa_1}^{\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}}\left(\frac{\left(\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2}\right)^{\alpha}-(\upsilon-\kappa_1)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{\mathfrak{F}(\upsilon)}{(\upsilon-\kappa_1)^{1-\alpha}}d\upsilon \\
=\;& \frac{2}{3\alpha^{\beta}(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)-\frac{8}{3\alpha^{\beta}(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}(\kappa_1) \\
&+\left(\frac{2}{\kappa_2-\kappa_1}\right)^{\alpha\beta+1}\Gamma(\beta+1)\,{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_1^+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 \;=\;& \int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right]\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)d\vartheta \qquad (3.5.2) \\
=\;& -\frac{2}{3\alpha^{\beta}(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+\frac{8}{3\alpha^{\beta}(\kappa_2-\kappa_1)}\mathfrak{F}(\kappa_2) \\
&-\left(\frac{2}{\kappa_2-\kappa_1}\right)^{\alpha\beta+1}\Gamma(\beta+1)\,{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_2^-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. (3.5.1) ve (3.5.2) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}[I_2-I_1] \;=\;& \frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_1^+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_2^-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.5.1'nın ispatı tamamlanır.

Teorem 3.5.1 Lemma 3.5.1'in şartları geçerli olmak üzere, $|\mathfrak{F}'|$, $[\kappa_1,\kappa_2]$ üzerinde bir konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right. \\
&\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_1^+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_2^-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\;& \frac{\kappa_2-\kappa_1}{12}\left(\frac{3\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+\alpha}{\alpha^{\beta+1}}\right)\left(|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|+|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|\right) \qquad (3.5.3)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha,\beta>0$, $\mathcal{B}(x,y)$ ve Γ sırasıyla Beta ve Gama fonksiyonlarıdır.

İspat. Lemma 3.5.1'nin her iki tarafının mutlak değeri alınarak ve $|\mathfrak{F}'|$'nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\int_0^1\left|\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right|\\
&\times\left[\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|+\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2+\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1\right)\right|\right]d\vartheta\\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right]\\
&\times\left[\frac{1+\vartheta}{2}|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|+\frac{1-\vartheta}{2}|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|+\frac{1+\vartheta}{2}|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|+\frac{1-\vartheta}{2}|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|\right]d\vartheta\\
=\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right)(|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|+|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|)\\
=\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{12}\left(\frac{3\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+\alpha}{\alpha^{\beta+1}}\right)(|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|+|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|)
\end{aligned}$$

yazılır. Burada kolayca görülebilir ki

$$\int_0^1\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}d\vartheta=\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\dfrac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}$$

dir. Böylece istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 3.5.1 $\mathfrak{F}:[1,3]\to\mathbb{R}$, olmak üzere $\mathfrak{F}(t)=\frac{t^3}{3}$ fonksiyonu ele alınsın. $|\mathfrak{F}'|$, $[1,3]$ üzerinde konveks olduğundan,

$$2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)=16$$

yazılır. (2.2.5)'den,

$$\begin{aligned}
&{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\\
=\ & {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{1^+}\mathfrak{F}(2)\\
=\ & \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^2\left(\frac{1-(t-1)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}(t-1)^{\alpha-1}\frac{t^3}{3}dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{3\alpha^{\beta}\Gamma(\beta)} \int_{1}^{2} \left(1-(t-1)^{\alpha}\right)^{\beta-1} \left[(t-1)^{\alpha+2} + 3(t-1)^{\alpha+1} + 3(t-1)^{\alpha} + (t-1)^{\alpha-1}\right] dt \\
&= \frac{1}{3\alpha^{\beta}\Gamma(\beta)} \int_{0}^{1} u^{\beta-1} \left[(1-u)^{\frac{3}{\alpha}} + 3(1-u)^{\frac{2}{\alpha}} + 3(1-u)^{\frac{1}{\alpha}} + 1\right] du \\
&= \frac{1}{3\alpha^{\beta}\Gamma(\beta)} \left[\mathcal{B}\left(\beta, \frac{3}{\alpha}+1\right) + 3\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha}+1\right) + 3\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha}+1\right) + \frac{1}{\beta}\right]
\end{aligned}
$$

yazılır ve benzer şekilde (2.2.6)'dan,

$$
\begin{aligned}
&{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) \\
&= {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{3^-}\mathfrak{F}(2) \\
&= \frac{1}{3\alpha^{\beta}\Gamma(\beta)} \left[\frac{27}{\beta} - 27\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha}+1\right) + 9\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha}+1\right) - \mathcal{B}\left(\beta, \frac{3}{\alpha}+1\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, (3.5.3) eşitsizliğin sol tarafı

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right. \\
&\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}16 - \frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{3\alpha^{\beta}\Gamma(\beta)}\left[12\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha}+1\right) - 24\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha}+1\right) + \frac{28}{\beta}\right]\right| \\
&= \left|\frac{16}{3\alpha^{\beta}} - \frac{2\beta}{3\alpha^{\beta}}\left[3\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha}+1\right) - 6\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha}+1\right) + \frac{7}{\beta}\right]\right|
\end{aligned}
$$

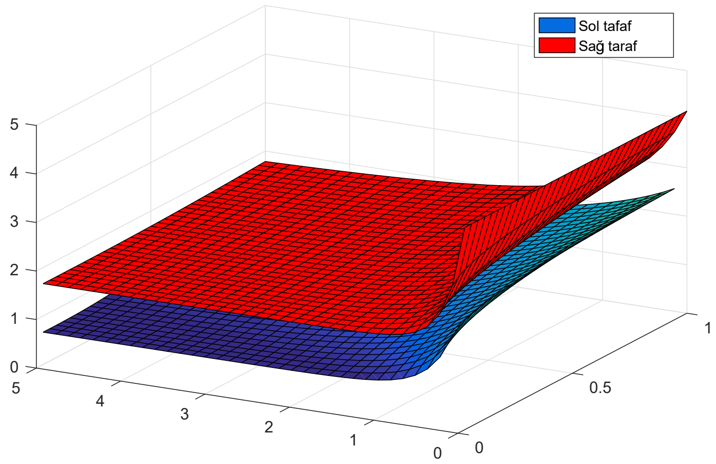
olarak hesaplanır. Öte yandan, (3.5.3) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$
\begin{aligned}
&\frac{\kappa_2-\kappa_1}{12}\left(\frac{3\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)+\alpha}{\alpha^{\beta+1}}\right)\left(|\mathfrak{F}'(\kappa_1)| + |\mathfrak{F}'(\kappa_2)|\right) \\
&= \frac{2}{12}\left(\frac{3\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)+\alpha}{\alpha^{\beta+1}}\right)(1+9) \\
&= \frac{5}{3\alpha^{\beta}}\left(\frac{1}{\alpha}3\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)+1\right).
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak, (3.5.3)'ten

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{16}{3} - \frac{2\beta}{3}\left[3\mathcal{B}\left(\beta, \frac{2}{\alpha}+1\right) - 6\mathcal{B}\left(\beta, \frac{1}{\alpha}+1\right) + \frac{7}{\beta}\right]\right| \\
&\leq \frac{5}{3}\left(\frac{1}{\alpha}3\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)+1\right)
\end{aligned} \tag{3.5.4}
$$

elde edilir. (3.5.4) eşitsizliğinin geçerliliği Şekil 3.1'de görülebilir.



Şekil 3.1: (3.5.4) eşitsizliğinin sol ve sağ taraflarının karşılaştırılması

Teorem 3.5.2 Lemma 3.5.1 şartları altında $q > 1$ olmak üzere $|\mathfrak{F}'|^q$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde konveks olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^\beta}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right.\\
&\left. -\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\alpha\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_1+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + {}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta p+1}} + \frac{1}{3^p\alpha^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left[\left(\frac{3|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|^q + |\mathfrak{F}'(\kappa_2)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|^q + 3|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
\leq\ & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta p+1}} + \frac{1}{3^p\alpha^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|\mathfrak{F}'(\kappa_1)| + |\mathfrak{F}'(\kappa_2)|\right) \qquad (3.5.5)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha, \beta > 0$, $\mathcal{B}(x, y)$ ve Γ sırasıyla Beta ve Gama fonksiyonlarıdır.

İspat. Lemma 3.5.1'nin mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^\beta}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right.\\
&\left. -\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + {}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left[\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta+\frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|d\vartheta\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta+\frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|d\vartheta\right] \quad (3.5.6)$$

elde edilir. (3.5.6) eşitsizliğinde Hölder eşitsizliği yardımıyla ve $|\mathfrak{F}'|^q$'in konveksliğinden yararlanarak

$$\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta+\frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|d\vartheta$$

$$\leq \left(\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta+\frac{1}{3\alpha^\beta}\right]^p d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.5.7)$$

$$\times\left(\int_0^1\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|^q d\vartheta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta+\frac{1}{3\alpha^\beta}\right]^p d\vartheta\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left(\frac{1+\vartheta}{2}\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q+\frac{1-\vartheta}{2}\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q\right)d\vartheta\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta p+1}}+\frac{1}{3^p\alpha^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q+\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta+\frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|d\vartheta$$

$$\leq \left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta p+1}}+\frac{1}{3^p\alpha^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q+3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.5.8)$$

elde edilir. (3.5.7) ve (3.5.8) ifadeleri (3.5.6)'da kullanılırsa

$$\left|\frac{1}{3\alpha^\beta}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_1^+}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}_{\kappa_2^-}^{\alpha}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta p+1}}+\frac{1}{3^p\alpha^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q+\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q+3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

yazılır. Dolayısıyla (3.5.5)'deki ilk eşitsizlik elde edilmiş olur. İkinci eşitsizliğin ispatı için, $a_1 = 3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q$, $b_1 = \left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q$, $a_2 = \left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q$ ve $b_2 = 3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q$ olarak seçilirse

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \le \sum_{k=1}^{n}a_k^s+\sum_{k=1}^{n}b_k^s,\ 0\le s<1$$

yazılır ve $1+3^{\frac{1}{q}} \le 4$ olduğundan istenilen sonuç doğrudan elde edilir. Böylece Teorem 3.5.2'nin ispatı tamamlanır.

Örnek 3.5.2 Örnek 3.5.1'de verilen fonksiyon ele alınsın. $p = q = 2$ olmak üzere (3.5.5)'in sol tarafı

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|\\
=\ &\left|\frac{16}{3\alpha^{\beta}}-\frac{2\beta}{3\alpha^{\beta}}\left[3\mathcal{B}\left(\beta,\frac{2}{\alpha}+1\right)-6\mathcal{B}\left(\beta,\frac{1}{\alpha}+1\right)+\frac{7}{\beta}\right]\right|
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Öte yandan, (3.5.5) eşitsiziğinin sırasıyla orta tarafı ve sağ tarafı ise

$$\begin{aligned}
&\frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta p+1}}+\frac{1}{3^p\alpha^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\times\left[\left(\frac{3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q+\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q+3\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
=\ &\frac{2}{4}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{2\beta+1}}+\frac{1}{3^2\alpha^{2\beta}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{3+9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1+27}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
=\ &\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3\alpha^{\beta}}\left(\frac{9}{\alpha}\mathcal{B}\left(2\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+1\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

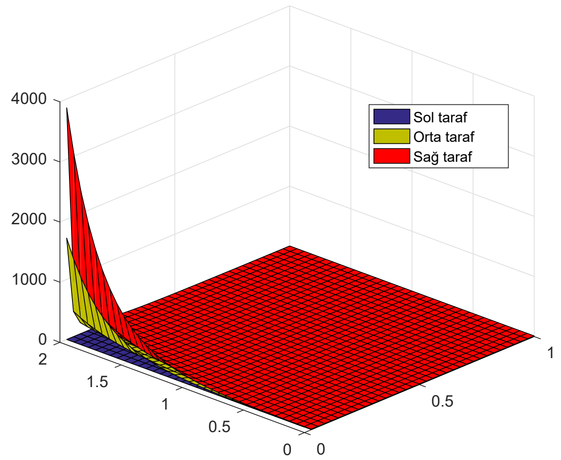
ve

$$\begin{aligned}
&\frac{\kappa_2-\kappa_1}{4^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta p+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta p+1}}+\frac{1}{3^p\alpha^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|+\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|\right)\\
=\ &\frac{2}{4^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\mathcal{B}\left(2\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{2\beta+1}}+\frac{1}{3^2\alpha^{2\beta}}\right)^{\frac{1}{2}}(1+9)\\
=\ &\frac{10}{3\alpha^{\beta}}\left(\frac{1}{\alpha}9\mathcal{B}\left(2\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+1\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak, (3.5.5)'den

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{16}{3}-\frac{2\beta}{3}\left[3\mathcal{B}\left(\beta,\frac{2}{\alpha}+1\right)-6\mathcal{B}\left(\beta,\frac{1}{\alpha}+1\right)+\frac{7}{\beta}\right]\right| \\
\leq\;& \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3\alpha^{\beta}}\left(\frac{9}{\alpha}\mathcal{B}\left(2\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+1\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\;& \frac{10}{3\alpha^{\beta}}\left(\frac{1}{\alpha}9\mathcal{B}\left(2\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+1\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.5.9) eşitsizliğinin geçerliliği Şekil 3.2'de görülebilir.



Şekil 3.2: (3.5.9) eşitsizliğinin sol, orta ve sağ taraflarının karşılaştırılması

Teorem 3.5.3 Lemma 3.5.1 şartları altında $q \geq 1$ olmak üzere $|\mathfrak{F}'|^q$ fonksiyonu $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde konveks olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right. \\
&\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right| \\
\leq\;& \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4\alpha^{\beta}}\left(\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{3}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|^q\right.\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)|\mathfrak{F}'(\kappa_1)|^q\right. \\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)|\mathfrak{F}'(\kappa_2)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha, \beta > 0$, $\mathcal{B}(x,y)$ ve Γ sırasıyla Beta ve Gama fonksiyonlarıdır.

İspat. (3.5.6) eşitsizliğinde power-mean eşitsizliği yardımıyla ve $|\mathfrak{F}'|^q$'in konveksliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right| d\vartheta \qquad (3.5.11)\\
\leq & \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right] d\vartheta\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|^q d\vartheta\right)^{\frac{1}{q}}\\
\leq & \left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times \left[\int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left(\frac{1+\vartheta}{2}\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q + \frac{1-\vartheta}{2}\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q\right)\right]\\
= & \left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times \left[\left(\frac{1}{4\alpha^\beta} + \frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} - \frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q\right.\\
&\left.+ \left(\frac{1}{12\alpha^\beta} + \frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. (3.5.11)'de kullanılan benzer yöntem ile

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha}\right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right]\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right| d\vartheta\\
\leq & \left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} + \frac{1}{3\alpha^\beta}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{1}{12\alpha^\beta} + \frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^q\right.\\
&\left.+ \left(\frac{1}{4\alpha^\beta} + \frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} - \frac{\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (3.5.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5.11) ve (3.5.12) (3.5.6)'da yerine konulursa

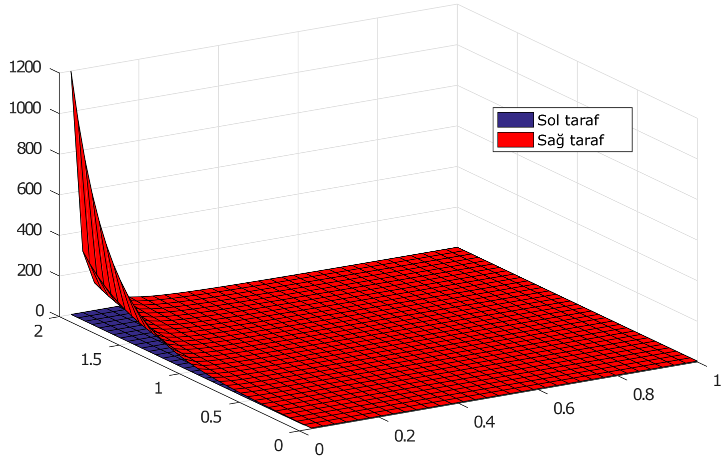
$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\left[\left(\frac{1}{4\alpha^{\beta}}+\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}-\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^{q}\right.\right.\\
&\left.+\left(\frac{1}{12\alpha^{\beta}}+\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&+\left[\left(\frac{1}{12\alpha^{\beta}}+\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_1)\right|^{q}\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{1}{4\alpha^{\beta}}+\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}-\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)}{2\alpha^{\beta+1}}\right)\left|\mathfrak{F}'(\kappa_2)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}
$$

yazılır ve bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.5.3 Örnek 3.5.1'de verilen fonksiyon ele alınsın. Bu taktirde $q=2$ olmak üzere (3.5.10) eşitsizliğinden ve basit hesaplamalar ile

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{16}{3}-\frac{2\beta}{3}\left[3\mathcal{B}\left(\beta,\frac{2}{\alpha}+1\right)-6\mathcal{B}\left(\beta,\frac{1}{\alpha}+1\right)+\frac{7}{\beta}\right]\right|\\
\leq\ &\frac{1}{4\alpha^{\beta}}\left(\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\times\left(\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)+81\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right.\\
&\left.+\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)+81\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{1}{2\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{3.5.13}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.5.13) eşitsizliğinin geçerliliği Şekil 3.3'te görülebilir.



Şekil 3.3: (3.5.13) eşitsizliğinin sol ve sağ taraflarının karşılaştırılması

Teorem 3.5.4 Lemma 3.5.1'in koşulları altında $\vartheta \in [\kappa_1, \kappa_2]$ için $m \leq \mathfrak{F}'(\vartheta) \leq M$ olacak şekilde $m, M \in \mathbb{R}$ varsa, bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{3\alpha^{\beta}} \left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}} \left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\ \leq \; & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{12\alpha^{\beta}} \left(\frac{3}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha}\right) + 1 \right)(M-m) \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha, \beta > 0$, $\mathcal{B}(x,y)$ ve Γ sırasıyla Beta ve Gama fonksiyonlarıdır.

İspat. Lemma 3.5.1 yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{3\alpha^{\beta}} \left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}} \left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) + {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right) \right] \right| \\ = \; & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4} \int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta} + \frac{1}{3\alpha^{\beta}} \right] \\ & \times \left[\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2 \right) - \mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2 \right) \right] d\vartheta \\ = \; & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4} \int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta} + \frac{1}{3\alpha^{\beta}} \right] \\ & \times \left[\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1 + \left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2 \right) - \frac{m+M}{2} \right] d\vartheta \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

$$+\int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta} \right]$$
$$\times \left[\frac{m+M}{2} - \mathfrak{F}' \left(\left(\frac{1+\vartheta}{2} \right) \kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2} \right) \kappa_2 \right) \right] d\vartheta$$

yazılır. (3.5.15)'nin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{3\alpha^\beta} \left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} \right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}} \left[{}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_1^+} \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} \right) + {}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_2^-} \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} \right) \right] \right| \\
= & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4} \int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta} \right] \\
& \times \left| \mathfrak{F}' \left(\left(\frac{1-\vartheta}{2} \right) \kappa_1 + \left(\frac{1+\vartheta}{2} \right) \kappa_2 \right) - \frac{m+M}{2} \right| d\vartheta \\
& + \int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta} \right] \\
& \times \left| \frac{m+M}{2} - \mathfrak{F}' \left(\left(\frac{1+\vartheta}{2} \right) \kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2} \right) \kappa_2 \right) \right| d\vartheta
\end{aligned}$$

elde edilir. $\vartheta \in [\kappa_1, \kappa_2]$ için $m \leq \mathfrak{F}'(\vartheta) \leq M$ olduğundan

$$\left| \mathfrak{F}' \left(\left(\frac{1-\vartheta}{2} \right) \kappa_1 + \left(\frac{1+\vartheta}{2} \right) \kappa_2 \right) - \frac{m+M}{2} \right| \leq \frac{M-m}{2} \tag{3.5.16}$$

ve

$$\left| \frac{m+M}{2} - \mathfrak{F}' \left(\left(\frac{1+\vartheta}{2} \right) \kappa_1 + \left(\frac{1-\vartheta}{2} \right) \kappa_2 \right) \right| \leq \frac{M-m}{2} \tag{3.5.17}$$

yazılır. (3.5.16) ve (3.5.17)'den

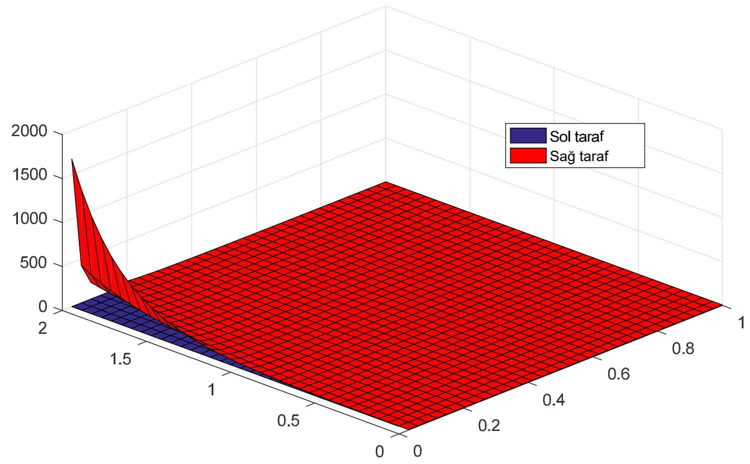
$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{3\alpha^\beta} \left[2\mathfrak{F}(\kappa_1) - \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} \right) + 2\mathfrak{F}(\kappa_2) \right] \right. \\
& \left. - \frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}} \left[{}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_1^+} \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} \right) + {}^\beta\mathfrak{J}^\alpha_{\kappa_2^-} \mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} \right) \right] \right| \\
\leq & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4} (M-m) \int_0^1 \left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta + \frac{1}{3\alpha^\beta} \right] d\vartheta \\
= & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{12} \left(\frac{3\mathcal{B}\left(\beta+1, \frac{1}{\alpha} \right) + \alpha}{\alpha^{\beta+1}} \right) (M-m)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.5.4 Örnek 3.5.1'de verilen fonksiyon ele alınsın. $m = \frac{1}{3}$ ve $M = 9$ olsun. Bu taktirde, (3.5.14) eşitsizliği ve basit hesaplamalar ile

$$\begin{aligned}&\left|\frac{16}{3}-\frac{2\beta}{3}\left[3\mathcal{B}\left(\beta,\frac{2}{\alpha}+1\right)-6\mathcal{B}\left(\beta,\frac{1}{\alpha}+1\right)+\frac{7}{\beta}\right]\right| \\ \leq\ &\frac{13}{9\alpha^{\beta}}\left(\frac{3}{\alpha}\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)+1\right)\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.5.18) eşitsizliğinin geçerliliği Şekil 3.4'de görülebilir.



Şekil 3.4: (3.5.18) eşitsizliğinin sol ve sağ taraflarının karşılaştırılması

Teorem 3.5.5 Lemma 3.5.1'in şartları geçerli olsun. Eğer $\mathfrak{F}'$, $[\kappa_1, \kappa_2]$ üzerinde Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right. \\ &\left.-\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\right| \\ \leq\ &\frac{(\kappa_2-\kappa_1)^2}{24}\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}-\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\frac{2}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}+\frac{1}{6\alpha^{\beta}}\right)L\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $\alpha, \beta > 0$, $L > 0$, $\mathcal{B}(x, y)$ ve Γ sırasıyla Beta ve Gama fonksiyonlarıdır.

İspat. Lemma 3.5.1 yardımıyla ve $\mathfrak{F}'$, Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olduğundan

$$\left|\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\left[2\mathfrak{F}(\kappa_1)-\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+2\mathfrak{F}(\kappa_2)\right]\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\frac{2^{\alpha\beta-1}\Gamma(\beta+1)}{(\kappa_2-\kappa_1)^{\alpha\beta}}\left[{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_1^+}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)+{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{\kappa_2^-}\mathfrak{F}\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}\right)\right]\Bigg| \\
= & \left|\frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right]\right. \\
& \left.\times\left[\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)-\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right]d\vartheta\right| \\
\leq & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right] \\
& \times\left|\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)-\mathfrak{F}'\left(\left(\frac{1+\vartheta}{2}\right)\kappa_1+\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)\kappa_2\right)\right|d\vartheta \\
\leq & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{4}\int_0^1\left[\left(\frac{1-(1-\vartheta)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta}+\frac{1}{3\alpha^{\beta}}\right]L\vartheta\,(\kappa_2-\kappa_1)\,d\vartheta \\
= & \frac{(\kappa_2-\kappa_1)^2}{4}L\left(\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\dfrac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}-\frac{\mathcal{B}\left(\beta+1,\dfrac{2}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}}+\frac{1}{6\alpha^{\beta}}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.5.1 Bu bölümde sunulan sonuçlarda $\alpha=1$ olarak seçilirse, bu durumda Budak ve arkadaşları [14] tarafından daha önce elde edilen sonuçlara ulaşılır.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde sunulan üçüncü bölüm elde edilen ana sonuçları içermektedir. Bu bölümde, sırasıyla sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörünü içeren ters Minkowski integral eşitsizliği, Grüss eşitsizliği ve Chebyshev eşitsizliği ile ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ardından yeni bir kesirli integral operatörü olan sabit orantılı Caputo-hibrit operatörü yardımıyla Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikleri sunulmuştur. Bunlara ek olarak yeni uyumlu kesirli integral operatörü kullanılarak Milne tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Bulunan sonuçlardan Hermite-Hadamard tipli ve Milne tipli eşitsizliklerin bazı özel halleri literatürde mevcut önceki çalışmalarda verilen sonuçlara indirgenmektedir. Elde edilen bu yeni sonuçların bir kısmı makale ve tam metin bildiri formatında hazırlanarak; "Novel generalizations for Grüss type inequalities pertaining to the constant proportional fractional integrals" başlıklı çalışma "Applied and Computational Mathematics" isimli SCI-Expanded kapsamlı dergide yayımlanmış, "On generalized Milne type inequalities for new conformable fractional integrals" başlıklı çalışma "Filomat" isimli SCI-Expanded kapsamlı dergide yayıma kabul edilmiş ve "New Integral Inequalities Involving the Proportional Caputo-Hybrid Operators for s-Convex Functions" başlıklı çalışma "5th International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2022)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup tam metin bildiri olarak yayımlanmıştır.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlarda kullanılan sabit orantılı (CP) kesirli integral operatörü, sabit orantılı Caputo-hibrit integral operatörü ve yeni uyumlu kesirli integral operatörü yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri için literatürde var olan Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Grüss, Minkowski, Chebyshev, Milne ve Simpson tipli sonuçların yeni genelleştirmeleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57–66.

[2] Ali, MA., Zhang, Z. & Feckan, M. (2023). On some error bounds for Milne's formula in fractional calculus. *Mathematics,* 11, 146.

[3] Alomari, MW. (2013). A companion of the generalized trapezoid inequality and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 36, 5–15.

[4] Anderson, DR. & Ulness, DJ. (2015). Newly defined conformable derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 10, 109–137.

[5] Atangana, A. & Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel, theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20(2), 763–769.

[6] Bakula, MK. & Pečarić, J. (2004). Note on some Hadamard-type inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 5(3), Article ID 74.

[7] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. & Trujillo JJ. (2012). Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. World Scientific Publishing, Singapore.

[8] Baleanu, D. & Fernandez, A. (2019). On fractional operators and their classifications. *Mathematics,* 7, 830.

[9] Baleanu, D., Fernandez, A. & Akgül, A. (2020). On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals. *Mathematics*, 8(30), 360.

[10] Belarbi, S. & Dahmani, Z. (2009). On some new fractional integral inequalities, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 10(3), 1–12.

[11] Booth, A.D. (1966). Numerical Methods. 3rd edn. Butter-worths, California.

[12] Bougofa, L. (2006). On Minkowski and Hardy integral inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(2), 1–3.

[13] Breckner, WW. (1978). Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen. *Publications de l'Institut Mathématique*, 23, 13–20.

[14] Budak, H., Kösem, P. & Kara, H. (2023). On new Milne-type inequalities for fractional integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, 2023(10), 1–15.

[15] Caputo, M. (1967). Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13(5), 529–539.

[16] Chinchane, VL. & Pachpatte, DB. (2014). New fractional inequalities involving Saigo fractional integral operator. *Mathematical Sciences Letters*, 3(3), 133–139.

[17] Dahmani, Z. (2010). On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, *Annals of Functional Analysis*, 1(1), 51–58.

[18] Dahmani, Z., Mechouar, O. & Brahami, S. (2011). Certain inequalities related to the Chebyshev's functional involving a Riemann-Liouville operator, *Bulletin of Mathmematical Analysis and Applications,* 3(4), 38–44.

[19] Dahmani, Z., Tabharit, L. & Taf, S. (2010). New generalizations of Grüss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals, *Bulletin of Mathmetical Analysis and Applications,* 2(3), 93–99.

[20] Dahmani, Z., Khameli, A. & Fareha, K. (2017). Some Riemann-Liouville-integral inequalities for the weighted and the extended Chebyshev functionals, *Konuralp Journal of Mathematics,* 5, 43–48.

[21] Diethelm K. (2010). The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer, Berlin, Germany, 2010.

[22] Dragomir, SS. & Pearce, CEM. (2000). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, RGMIA Monographs. Victoria University.

[23] Dragomir, SS. (2000). Some integral inequalities of Grüss type, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,* 31(4), 397–415.

[24] Grüss, G. (1935), Über das maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt - \left(\frac{1}{(b-a)^2}\right)\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt$. *Mathematische Zeitschrift*, 39(1), 215–226.

[25] Grünwald, AK. (1867). Über "begrenzte" derivationen und deren anwendung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 12, 441–480.

[26] Gürbüz, M., Akdemir, AO. & Dokuyucu, MA. (2022). Novel approaches for differentiable convex functions via the proportional Caputo-Hybrid operators. *Fractal and Fractional*, 6(5), 258.

[27] Hudzik, H. & Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 48, 100–111.

[28] Jarad, F., Uğurlu, E., Abdeljawad, T. & Baleanu, D. (2017). On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, 2017(247), 1–16.

[29] Katugampola, U. (2014). A new fractional derivative with classical properties. https://doi.org/10.48550/arXiv.1410.6535 - (Erişim tarihi: 08.11.2014).

[30] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70.

[31] Kilbas, AA., Srivastava, HM. & Trujillo, JJ. (2006). Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, Volume 204.

[32] Letnikov, AV. (1868). Theory of differentiation with an arbitrary index. *Sbornik: Mathematics*, 3, 1–66.

[33] Machado, JT., Kiryakova, V. & Mainardi, F. (2011). Recent history of fractional calculus, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3), 1140–1153.

[34] Meftah, B., Lakhdari, A., Saleh, W. & Kılıçman, A. (2023). Some new fractal Milne-type integral inequalities via generalized convexity with applications. *Fractal and Fractional*, 7, 166.

[35] Miller, KS. & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 384 pp.

[36] Mitrinović, D. (1970). Analytic Inequalities, Springer: New York, NY, USA, 400 pp.

[37] Mitrinović, D., Pečarić, J. & Fink, A. (1993). Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 740 pp.

[38] Oldhamand, KB. & Spanier, J. (1974). The fractional calculus: Theory and application of differentiation and integration to arbitrary order, Academic Press, New York, NY, USA.

[39] Ortigueira, MD. & Tenreiro Machado, JA. (2015). What is a fractional derivative?. *Journal of Computational Physics*, 293, 4–13.

[40] Orlicz, W. (1961). A note on modular spaces I. *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques,* 9, 157–162.

[41] Pečarić, JE., Prochan, F. & Tong, Y. (1992). Convex functions, partial orderings and statical applications, Academic Press, New York, USA, 467 pp.

[42] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, USA.

[43] Rahman, G., Khan, A., Abdeljawad, T. & Nisar, KS. (2019). The Minkowski inequalities via generalized proportional fractional integral operators. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 287(2019).

[44] Riemann, B. (1876). Versuch einer allgemeinen Auffassung der integration und differentiation, Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher, Teubner, Leipzig (Dover, New York, 1953), 331–344 (in German).

[45] Samko, SG., Kilbas, AA. & Marichev, OI. (1993). Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1016 pp.

[46] Sarıkaya, MZ., Set, E., Yaldız, H. & Başak, N. (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling,* 57(9), 2403–2407.

[47] Set, E., Özdemir, ME. & Dragomir, SS. (2010). On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions. *Journal of Inequalities and Applications*, 148102(2010).

[48] Set, E., Sarıkaya, MZ., Özdemir, ME. & Yıldırım, H. (2014). The Hermite-Hadamard's inequality for some convex functions via fractional integrals and related results. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 10(2), 69–83.

[49] Set, E. & Özdemir, ME. (2020). Minkowski-Type inequalities for mixed conformable fractional integrals, Fractional Order Analysis: Theory, Methods and Applications, John Wiley & Sons, Inc., 151–168.

[50] Sulaiman, WT. (2012). Reverses of Minkowski's, Hölder's, and Hardy's integral inequalities. *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 1(1), 14–24.

[51] Tariboon, J., Ntouyas, SK. & Sudsutad, W. (2014). Some new Riemann-Liouville fractional fractional integral inequalities, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* 2014, 1–7.

[52] Taf, S. & Brahim, K. (2015). Some new results using Hadamard fractional integral. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 2, 24–42.

[53] Vanterler da, J., Sousa, C. & Capelas de Oliveira, E. (2018). The Minkowski's inequality by means of a generalized fractional integral. *AIMS Mathematics*, 3(1), 131–147.

[54] Srivastava, HM. & Choi, J. (2012). Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

[55] Young, WH. (1912). On classes of summable functions and their Fourier series. *Proceedings of the Royal Society A*, 87(594), 225–229.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Barış Çelik
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	■ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	08.07.2015
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	20.12.2017
Doktora	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	

Yayınlar

[1] Set E., Çelik B., "Fractional Hermite Hadamard Type Inequalities for Quasi-Convex Functions" Ordu Univ. J. Sci. Tech., 6(1), 137–149 (2016).

[2] Set E., Çelik B., "Certain Hermite-Hadamard type inequalities associated with conformable fractional integral operators", Creative Mathematics and Informatics, 26(3), 321-330 (2017).

[3] Set E., Çelik B., "On Generalizations Related To The Left Side Of Fejer's Inequality Via Fractional Integral Operator", Miskolc Mathematical Notes, 18(2), 1043-1057 (2017). (**SCI-Expanded-Q2**)

[4] Set E., Choi J., Çelik B., "New Hermite-Hadamard type inequalities for product of different convex functions involving certain fractional integral operators", Journal of Mathematics and Computer Science, 18(1), 29-36 (2018).

[5] Set E., Çelik B., "Generalized fractional Hermite-Hadamard type inequalities for m-convex and (α,m)-convex functions", Communications Faculty of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 67(1), 333-344 (2018).

[6] Set E., Çelik B., Gözpınar A., "Conformable Fractional Integral Inequalities for Some Convex Functions", Creative Mathematics and Informatics, 27(2), 207-2013 (2018).

[7] Set E., Choi J., Çelik B., "Certain Hermite–Hadamard type inequalities involving generalized fractional integral operators", RACSAM, 112, 1539-1547 (2018). (**SCI-Expanded-Q1**)

[8] Set E., Akdemir A.O., Çelik B., "On Generalization of Fejér Type Inequalities via fractional integral operator", Filomat, 32(16), 5537-5547 (2018). (**SCI-Expanded-Q3**)

[9] Çelik B., Set E., "On New Integral Inequalities Using Mixed Conformable Fractional Integrals", Communications Faculty of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 69(2), 63-75 (2020).

[10] Çelik B., Gürbüz M.Ç., Özdemir M.E., Set E. "On integral inequalities related to the weighted and the extended Chebyshev functionals involving different fractional operators", Journal of Inequalities and Applications, 2020(246), 1-10 (2020). (**SCI-Expanded-Q1**)

[11] Butt, S.I., Özdemir M.E., Umar M., Çelik B., "Several New Integral Inequalities Via Caputo k-Fractional Derivative Operators", Asian-European Journal of Mathematics, 14(9) 2150150 (16 pages), (2021).

[12] Karaoğlan, A., Çelik, B., Set, E., Akdemir, A.O., "On New Inequalities Involving AB-fractional Integrals for Some Convexity Classes", Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences, 2(2), 127-145 (2021).

[13] Çelik, B., Özdemir, M.E., Akdemir, A.O., Set E., "Integral Inequalities for Some Convexity Classes via Atangana-Baleanu Integral Operators", Turkish J. Ineq., 5(2), 82-92 (2021).

[14] Set, E., Çelik, B., Özdemir, M.E., Aslan, M., "Some New Results on Hermite–Hadamard–Mercer-Type Inequalities Using a General Family of Fractional Integral Operators", Fractal & Fractional, 5(3), Article 68, 1-15 (2021). (**SCI-Expanded-Q1**)

[15] Alan, E.A., Çelik, B., Set, E., Dahmani, Z., "On New Chebyshev Inequalities via Fractional Operators", Miskolc Math. Notes, 22(2), 557-569 (2021). (**SCI-Expanded-Q2**)

[16] Set E., Çelik B., Alan E.A., Akdemir A.O., "Some new integral inequalities associated with generalized proportional fractional operators", Numerical Methods for Partial Differential Equations, 38, 1149-1161 (2022). (**SCI-Expanded-Q1**)

[17] Sarıkaya, M.Z., Çelik, B., Set, E., Azaklı, H., "Generalizations of different type inequalities for s-Convex, Quasi-Convex and P-Function", Konuralp Journal of Mathematics, 10(2), 351-354 (2022).

[18] Çelik B., Set, E., Akdemir, A.O., Özdemir, M.E., "Novel generalizations for Grüss type inequalities pertaining to the constant proportional fractional integrals", Appl. Comput. Math., 22(3), 275-291 (2023). (**SCI-Expanded-Q1**)

[19] Çelik B., Budak, H., Set, E., "On generalized Milne type inequalities for new conformable fractional integrals", Filomat, (2023) Accepted Paper. (**SCI-Expanded-Q3**)

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler

Özet Bildiriler

[1] Set E., Çelik B., "Certain Hermite Hadamard Type Inequalities Associated with Conformable Fractional Integral Operators", 2nd International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA-2016), Book of Abstracts, Ahi Evran University, Kırşehir, Turkey, 2016.

[2] Set E., Akdemir A.O., Çelik B., "On Generalization of Fejér Type Inequalities via Fractional Integral Operator", 2nd International Conference On Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), Book of Abstracts, Antalya, Turkey, 2017.

[3] Set E., Çelik B., Akdemir A.O., "Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities for Quasi-Convex Functions via Fractional Integral Operator", 2nd International Conference On Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), Book of Abstracts, Antalya, Turkey, 2017.

[4] Set E., Çelik B., Gözpınar A., "Conformable Fractional Integral Inequalities for Some Convex Functions", 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), Book of Abstracts, Antalya, Turkey, 2017.

[5] Set E., Çelik B., "On New Generalized Inequalities for Products of Different Convex Functions via Fractional Integral Operator", International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017), Book of Abstracts, İstanbul, Turkey, 2017.

[6] Set E., Çelik B., "On Generalizations Related to The Left Side of Fejer's Inequality via Fractional Integral Operator", International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017), Book of Abstracts, İstanbul, Turkey, 2017.

[7] Çelik B., Set E., “On new integral inequalities using mixed conformable fractional integrals”, 27th Conference on Applied and Industrial Mathematics (CAIM 2019), Book of Abstracts, Valahia University, Targoviste, Romania, 2019.

Tam Metin Bildiriler

[1] Set E., Akdemir A.O., Çelik B., “Some Hermite Hadamard Type Inequalities for Products of Two Different Convex Functions via Conformable Fractional Integrals”, Xth International Statistics Days Conference (ISDC’2016), Abstracts & Proceedings Book, Giresun University, Turkey, 2016.

[2] Set E., Çelik B., Korkut N., “On New Conformable Fractional Hermite Hadamard Type Inequalities”, Xth International Statistics Days Conference (ISDC’2016), Abstracts & Proceedings Book, Giresun University, Turkey, 2016.

[3] Gözpınar A., Çelik B., Set E., “Hermite Hadamard type inequalities for quasi convex functions via conformable fractional integrals”, Xth International Statistics Days Conference (ISDC’2016), Abstracts & Proceedings Book, Giresun University, Turkey, 2016.

[4] Set E., Çelik B., Akdemir A.O. “Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities for Quasi-Convex Functions via Fractional Integral Operator”, II. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017), AIP Conference Proceedings, 1833, 2017.

[5] Çelik B., Set E., Akdemir A.O., “On Generalizations of Hermite-Hadamard Type Inequalities for Products of Different Kinds of Convex Functions via Katugampola Fractional Integrals”, International Conference on Mathematical Studies and Applications (ICMSA 2018), Proceedings, Karamanoglu Mehmetbey University, Karaman, Turkey, 2018.

[6] Çelik B., Set E., Akdemir A.O., “New Inequalities of Ostrowski’s Type for Quasi Convex Functions Associated with New Fractional Conformable Integrals”, International Conference on Mathematical Studies and Applications (ICMSA 2018), Proceedings, Karamanoglu Mehmetbey University, Karaman, Turkey, 2018.

[7] Çelik B., Set E., Özdemir M.E., “On New Generalizations of Some Integral Inequalities via Katugampola Fractional Integrals”, 2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2019), Proceedings, Antalya, Turkey, 2019.

[8] Çelik B., Set E., Akdemir A.O., “Mixed Conformable Fractional Grüss-Type Inequalities”, 2nd International Conference on Life and Engineering Sciences (ICOLES 2019), Proceedings, İstanbul Medipol University, İstanbul, Turkey, 2019.

[9] Çelik B., Set E., Akdemir A.O., "On new inequalities for proportional Caputo-Hybrid operators", 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA-2022), Proceedings, Baku State University, Baku, Azerbaijan, 2022.

[10] Çelik B., Set E., Akdemir A.O., Özdemir M.E., "On fractional integral inequalities for s-convex function", 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA-2022), Proceedings, Baku State University, Baku, Azerbaijan, 2022.

[11] Çelik B., Set E., Akdemir A.O., "New integral inequalities involving the proportional Caputo-Hybrid operators for s-convex functions", 5th International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2022), Proceedings, Antalya, Turkey, 2022.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler

[1] Çelik, B., Özdemir, M.E., Akdemir, A.O., Set E., "Atangana-Baleanu İntegral Operatörleri Yardımıyla Bazı Konvekslik Sınıfları için İntegral Eşitsizlikleri", Prof. Dr. Cemil YAPAR Anısına Ulusal Matematik ve İstatistik Sempozyumu, Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 2021.