T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# MN-KONVEKS FONKSİYONLAR VE İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

NESLİHAN KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**NESLİHAN KILIÇ**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

# ÖZET

**MN-KONVEKS FONKSİYONLAR VE İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

**NESLİHAN KILIÇ**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ, 34 SAYFA**

**(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR. ERHAN SET)**

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü, giriş kısmını içermekte olup, eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ilk olarak bazı konveks fonksiyonlar ve ilgili teoremlere, daha sonra ise, ağırlıklı ortalamalar ile bu ortalamalar yardımıyla tanımlanan MN-konveks fonksiyonlar sınıfına, özelliklerine ve bu fonksiyon sınıfı için ilgili eşitsizliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm ise (M,P)-fonksiyon sınıfının tanımı ve özelliklerinin verildiği, bu fonksiyon sınıfı için yeni eşitsizlikler sunulduğu araştırma bulguları bölümüdür. Dördüncü bölümde de bazı sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** MN-konveks fonksiyonlar, Hermite Hadamard eşitsizliği, ağırlıklı ortalamalar, (M,P)-fonksiyon.

## ABSTRACT

**MN-CONVEX FUNCTIONS AND INTEGRAL INEQUALITIES**

**NESLİHAN KILIÇ**

**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**MATHEMATICS**

**MASTER THESIS, 34 PAGES**

**(SUPERVISOR: PROF.DR. ERHAN SET)**

This thesis consists of four parts. The first part of the thesis includes the introduction and information about inequalities and convex functions is given. In the second part, firstly some convex functions and related theorems, then weighted averages and the class of MN-convex functions defined with the help of these averages, properties of this function class and related inequalities for this class of functions are given. The third section is the research findings section, where the definition and properties of the (M,P)-function class are given, and new inequalities are presented for this function class. In the fourth chapter, some conclusions and recommendations are mentioned.

**Keywords:** MN-convex functions, Hermite Hadamard's inequality, weighted means, (M,P)-function.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca yüksek bilgi ve tecrübeleriyle iyi bir yol gösterici olan, her zaman anlayışla yaklaşan, tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince gösterdiği her türlü destek ve sabırdan dolayı çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan SET'e ve yardımlarını hiç bir zaman esirgemeyen arkadaşım Barış ÇELİK' e teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini eksik etmeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca daima yanımda olan, sabır, sevgi ve güvenle beni destekleyen annem Necla KILIÇ, babam Sadık KILIÇ ve kardeşlerim Nuran, Berrin, Hatice ve Hasan'a yürekten teşekkür ederim.

**İÇİNDEKİLER**

## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : | Reel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{R}^{+}$ | : | Pozitif Reel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{N}$ | : | Doğal Sayılar Kümesi |
| $\boldsymbol{I}$ | : | $\mathbb{R}$'de Bir Aralık |
| $\boldsymbol{I^0}$ | : | $I$'nın İçi |
| $\boldsymbol{Sup}$ | : | Supremum |
| $\boldsymbol{f'}$ | : | $f$ Fonksiyonunun Birinci MertebedenTürevi |
| $\boldsymbol{\beta}$ | : | Beta Fonksiyonu |
| **A** | : | Aritmetik Ortalama |
| **G** | : | Geometrik Ortalama |
| **H** | : | Harmonik Ortalama |
| **I** | : | Identric(özdeş) Ortalama |
| **L** | : | Logaritmik Ortalama |

# 1. GİRİŞ

İntegral eşitsizliklerinin tarihçesi, matematik tarihindeki integral hesaplama yöntemlerinin gelişimine ve integral hesaplamalarının çeşitli uygulama alanlarına uzanır. İntegral eşitsizlikleri, integral hesaplamalarının sonuçlarını ifade eden ve bir eşitsizlik gösterimiyle ifade edilen matematiksel ifadelerdir. İntegral hesaplamalarına ilişkin ilk çalışmalar Mısır ve Babil uygarlıklarına kadar uzanır. Antik Yunan matematikçileri, bazı temel integral hesaplama yöntemlerini geliştirmiştir. Bunlara örnek olarak Eudoxus, Archimedean integral hesaplamalar, Antiphon'un kırık kısımların toplamı ile alan bulma yöntemi ve uygulamalarla Aristophanes'in eşitsizlikleri sayılabilir. Antik dönemden bu yana, Hint matematikçileri ve Arap matematikçileri de integral hesaplamaları ve onların uygulamaları üzerine çalışmalar yapmıştır. Özellikle Aryabhata, Brahmagupta, Bhaskara ve Al-Khwarizmi gibi matematikçiler, integral hesaplamalar ve eşitsizliklerin çeşitli yöntemlerini geliştirmiştir. Orta çağın sonlarına doğru, integral hesaplamaları ve eşitsizlikleri üzerine çalışmalar ışığında yeni bir anlayış ortaya çıktı. İsviçreli matematikçi Bernoulli ailesi, Newton ve Leibniz'in integral ve diferansiyel hesapları üzerine yaptıkları çalışmalar integral hesaplamalarının gelişimine büyük katkı sağlamıştır. 19. yüzyılda matematikçi Cauchy, Riemann, Weierstrass ve Lipschitz gibi isimler, integral hesaplamaları ve eşitsizliklerinin analitik açıklamalarını yaparak, temel teoremler ve teknikler geliştirdi. Bu çalışmalar, integral eşitsizliklerinin analitik temellerini atmıştır. 20. yüzyılda, integral eşitsizlikleri modern eşitsizlik teorisi içinde ele alınmış ve özellikle fonksiyonel analiz ve optimizasyon alanlarında önemli bir rol oynamıştır. Bugün integral eşitsizlikleri, matematiksel analizde, diferansiyel denklemlerde, olasılık teorisi ve optimizasyon problemlerinde yaygın olarak kullanılan bir araç haline gelmiştir.

Konveks fonksiyonlar matematiksel analizin önemli bir konusudur. Konveks fonksiyonlarla ilgili çalışmalar, 18. yüzyılda başlamış ve günümüze kadar devam etmiştir. Konveks fonksiyon kavramı, ilk kez Alman matematikçi Johann Benedict Listing tarafından 1847 yılında tanıtılmıştır. Listing, bir fonksiyonun konveks olması için, herhangi iki noktası arasında çizilen doğrunun grafik üzerinde her zaman fonksiyonun altında kalması gerektiğini ifade etmiştir. Ancak konveks fonksiyonlar üzerine daha kapsamlı çalışmalar, Fransız matematikçi Augustin-Louis Cauchy ve Alman matematikçi Karl Weierstrass gibi isimlerle devam etmiştir. Cauchy, konveks fonksiyonların türevlenebilir olduğunu ve bu türevin artan bir fonksiyon olduğunu kanıtlamıştır. Weierstrass ise konveks fonksiyonların nokta değerlerini alabileceğini ve bu noktaların türevlenebilirlik noktasında özel bir öneme sahip olduğunu göstermiştir. 21. yüzyılda ise konveks fonksiyonlar üzerine birçok önemli çalışma yapılmıştır. Bu dönemde özellikle konveks optimizasyon adı verilen bir alt dal ortaya çıkmış ve konveks fonksiyonların en aza indirgenmesi ve en iyi çözümün bulunması gibi problemler üzerine odaklanılmıştır. Bu alanda çalışan isimler arasında Dantzig, Karush-Kuhn-Tucker, Karmarkar ve Nemirovski gibi matematikçiler ön plana çıkmıştır.

Konveks fonksiyonların $s$-konveks, $m$-konveks, $(\alpha,m)$-konveks , $h$-konveks, harmonik konveks, $log$-konveks, $r$-konveks, $g$-konveks ve wright-konveks gibi literatürde birçok farklı sınıfı yer almaktadır (Breckner, 1978; Toader, 1984; Miheşan, 1993; Pecarić ve Proschan, 1992; Gill ve ark., 1997; Pearce ve ark., 1999; Pearce ve ark., 1998; Wright, 1954; İşcan, 2014). Bu tez çalışmasında $MN$-konveks fonksiyonlar üzerine yapılmış olan çalışmalar incelenmiş olup ağırlıklı ortalamalar yardımıyla $(M,P)$-fonksiyon sınıfı üzerine yeni integral eşitsizlikleri literatüre kazandırılmıştır.

## 2. LİTERATÜR TARAMASI

### 2.1 Bazı Konveks Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler

**Tanım 2.1.1** Her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa bu fonksiyona konveks fonksiyon denir. $(-f)$ konveks ise $f$ 'ye konkav denir (Peĉarić ve ark., 1992).

**Tanım 2.1.2** Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlarsa bu fonksiyona $P$ fonksiyonu denir (Dragomir ve ark., 1995).

**Teorem 2.1.1 (Hermite Hadamard Eşitsizliği):** $f$ : [a, b] → R fonksiyonu konveks olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Pearce, 2000).

**Teorem 2.1.2 (Wirtinger Tipli Eşitsizlik):** $f$ ve $f'$, $(a,b)$ aralığında sürekli fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ $ve$ $\int_a^b f(x)dx = 0$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

eşitsizliği geçerlidir ( Mitrinović ve Vasić, 1969).

Konveks fonksiyonlar matematiğin birçok alanında önemli rol oynar. Konveks fonksiyonlar, bir dizi uygun özellikleri ile ayırt edilen optimizasyon problemlerinin incelenmesinde özellikle önemlidirler (Roberts ve Varberg, 1973). Aumann, konveksliğin genelleştirilmiş şartlarını yani keyfi $M$ ve $N$ ortalamalarına göre $MN$-konveksliği 1933 yılında ortaya koymuştur (Aumann ve Akad, 1933). Son zamanlarda birçok yazar bu genellemeleri ele almıştır. Özellikle Niculescu $MN$-konvekslikle nispi (kısmi) konveksliği karşılaştırmıştır (Niculescu, 2003). Anderson ve arkadaşları pozitif değişkenin pozitif değerli bir fonksiyonu için bu kavramların belirli genellemelerini aşağıdaki gibi incelemiştir.

**Tanım 2.1.3** $M: (0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu

$(M1)$ $M(x,y) = M(y,x)$,

$(M2)$ $M(x,x) = x$,

$(M3)$ $x < M(x,y) < y, \quad x < y$

$(M4)$ $M(\lambda x, \lambda y, \lambda) = \lambda M(x,y), \quad \forall\, \lambda > 0.$

şartlarını sağlıyorsa ortalama fonksiyonu denir (Anderson ve ark., 2007).

**Örnek 2.1.1** $x, y \in (0,\infty)$ $için$;

$M(x,y) = A(x,y) = A = \frac{x+y}{2}$ aritmetik ortalama

$M(x,y) = G(x,y) = G = \sqrt{xy}$ geometrik ortalama

$M(x,y) = H(x,y) = H = A^{-1}(x^{-1}, y^{-1}) = \frac{2xy}{x+y}$ harmonik ortalama

$M(x,y) = L(x,y) = L = \begin{cases} \frac{x-y}{\ln x - lny} & x \neq y \\ x & x = y \end{cases}$ logaritmik ortalama

$M(x,y) = I(x,y) = I = \begin{cases} \frac{1}{e}\left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}} & x \neq y \\ x & x = y \end{cases}$ identrik ortalama ve

$$M(x,y) = M_p(x,y) = M_p$$
$$= \begin{cases} A^{1/p}(x^p, y^p) = \left(\dfrac{x^p + y^p}{2}\right)^{1/p} & p \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ G(x,y) = \sqrt{xy} & p = 0 \end{cases}$$

$p$-kuvvet ortalamadır. Özel olarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$M_{-1} = H \le M0 = G \le L \le I \le A = M_1$$

Anderson ve arkadaşları aşağıdaki $M$ ve $N$'nin ağırlıklı ortalaması yardımıyla orta nokta konveks olarak adlandırılan $MN$-konveks fonksiyonlarının aşağıdaki şekilde yeni bir tanımını vermiştir (Anderson ve ark., 2007).

**Tanım 2.1.4** $M$ ve $N$ sırasıyla, $I \subset (0,\infty)$ve $J \subset (0,\infty)$ aralıklarında tanımlanmış iki ortalama olsun. Her $x, y \in I$ için;

$$f\left(M(x,y)\right) \leq N\left(f(x), f(y)\right)$$

ise $f: I \to J$ fonksiyonuna $MN$-orta nokta konveks denir. $M = N = A$ olduğunda bu tanım bilinen konveksliğe (konkavlığa) indirgenmektedir (Anderson ve ark., 2007). *MN*-konvekslik kavramı, literatürde çeşitli kaynaklardan kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Aczel , 1947; Aumann ve Akad, 1933; Matkowski, 2003/2004; Niculescu, 2003).

**Teorem 2.1.3** $I$, $(0,\infty)$aralığının açık bir alt aralığı ve $f: I \to (0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. (4)'den (9)' a kadar $I = (0,b), 0 < b < \infty$ olmak üzere

*(1)* $f$ 'nin $AA$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $f$ 'nin konveks (konkav) olmasıdır,

*(2)* $f$ 'nin *AG*- konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, *logf* 'nin konveks (konkav) olmasıdır,

*(3)* $f$ 'nin *AH*-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, *1/f* 'nin konkav (konveks) olmasıdır,

*(4)* $f$ 'nin *GA*-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $f(be^{-t})$ 'nin $(0,\infty)$ aralığında konveks (konkav) olmasıdır,

*(5)* $f$ 'nin $GG$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $\log f(be^{-t})$' nin $(0,\infty)$ aralığında konveks (konkav) olmasıdır,

*(6)* $f$ 'nin *GH* -konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $1/f(be^{-t})$' nin $(0,\infty)$ aralığında konkav (konveks) olmasıdır,

*(7)* $f$ 'nin $HA$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $f\left(\frac{1}{x}\right)$'in $(1/b,\infty)$ aralığında konveks (konkav) olmasıdır,

*(8)* $f$ 'nin $HG$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $\log f\left(\frac{1}{x}\right)$'in $(1/b,\infty)$ aralığında konveks (konkav) olmasıdır,

*(9)* $f$'nin $HH$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $1/f(1/x)$ ' in $(1/b,\infty)$ aralığında konkav (konveks) olmasıdır (Anderson ve ark., 2007).

**İspat**

*(1)* Tanımdan ispat açıktır.

*(2)* $f$'nin *AG* konveksliği ve *logf* nin konveksliği dikkate alınırsa

$$f\big(A(x,y)\big) \leq (\geq) G\big(f(x), f(y)\big)$$

$$\Leftrightarrow f((x+y)/2) \ \leq \ (\geq) \sqrt{f(x)\, f(y)}$$

$$\Leftrightarrow log\, f\big((x+y)\ /\ 2\big) \leq (\geq)\ \frac{1}{2}\ (log\, f(x) + log\, f(y))$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

*(3)* $f$'nin *AH* konveksliği ve $1/f$ nin konkavlığı dikkate alınırsa

$$\big(A(x,y)\big) \leq (\geq) H\big(f(x), f(y)\big)$$

$$\Leftrightarrow f((x+y)\ /\ 2) \ \leq 2/(1/f(x) \ + 1/f(y)\ )$$

$$\Leftrightarrow 1/f((x+y)/2) \ \geq (\leq) \frac{1}{2} (1/f(x) \ + 1/f(y)\ )$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

*(4)* $f$'nin *GA* konveksliği ve $f(be^{-r})$ nin konveksliği dikkate alınırsa $x = be^{-r}$ ve $y = be^{-s}$ olmak üzere

$$f\big(G(x,y)\big) \leq (\geq) A\big(f(x) + f(y)\big)$$

$$\Leftrightarrow f(be^{-(r+s)/2}) \leq (\geq) \frac{1}{2}\big(f(be^{-r}) + f(be^{-s})\big)$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

*(5)* $f$'nin *GG* konveksliği ve *logf*$(be^{-r})$ nin konveksliği dikkate alınırsa

$x = be^{-r}$ ve $y = be^{-s}$ olmak üzere

$$f\big(G(x,y)\big) \leq (\geq) G\big(f(x), f(y)\big)$$

$$\Leftrightarrow log\, f(be^{-(r+s)/2}) \leq (\geq) 1/2(log\, f(be^{-r}) + log\, f(be^{-s})\ )$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

*(6)* $x = be^{-r}$ ve $y = be^{-s}$ olmak üzere

$$f\big(G(x,y)\big) \leq (\geq) H\big(f(x), f(y)\big)$$

$$\Leftrightarrow 1/f(be^{-(r+s)/2}) \geq (\leq)(\frac{1}{2}(1/f(be^{-r}) + 1/f(be^{-s}))$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanır.

*(7)* $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ve $x, y \in \left(\frac{1}{b}, \infty\right)$ olsun. Böylece $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in (0, b)$ olur.

Bu takdirde $(0, b)$ aralığında $f'$nin $HA$-konveks(konkav) olması için gerek ve yeter şart

$$f\left(\frac{2}{x+y}\right) \leq (\geq)(1/2)(\,f(1/x) + f(1/y))$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq (\geq)\frac{1}{2}\big(g(x) + g(y)\big)$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

*(8)* $g(x) = \log(f(1/x)$ ve $x, y \in \left(\frac{1}{b}, \infty\right)$ olsun. Böylece $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in (0, b)$ olur.

Bu takdirde $(0, b)$ aralığında $f'$nin $HG$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart

$$f\left(\frac{2}{x+y}\right) \leq (\geq) \sqrt{(f(1/x)f(1/y)}$$

$$\Leftrightarrow \log f((2/(x+y))\,) \;\leq (\geq)\left(\frac{1}{2}\right)(\log f(1/x) + \log f(1/y)\,)$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq (\geq)\frac{1}{2}\big(g(x) + g(y)\big)$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

*(9)* $g(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ ve $x, y \in \left(\frac{1}{b}, \infty\right)$ olsun. Böylece $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in (0, b)$ olur. Bu takdirde

$(0, b)$ aralığında $f'$nin $HH$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart

$$f\left(\frac{2}{x+y}\right) \leq (\geq)2/(1/f(1/x) \;+ 1/f(1/y)\,)$$

$$\Leftrightarrow 1/f(2/(x+y)) \ \geq (\leq)\ (1/2)(1/f(1/x)\ + 1/f(1/y))$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq (\leq) \left(\frac{1}{2}\right) \left(g(x) + g(y)\right)$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır (Anderson ve ark., 2007).

**Sonuç 2.1.1** $I$, $(0,\infty)$ aralığının açık bir alt aralığı ve $f: I \to (0,\infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. (4)'den (9)' a kadar olan şıklarda $I = (0,b)$, $0 < b < \infty$ olmak üzere

(1) $f$'nin $AA$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $f'(x)$ ' in artan (azalan) olmasıdır

(2) $f$'nin $AG$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $f'(x)/f(x)$ 'in artan (azalan) olmasıdır

(3) $f$'nin $AH$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $f'(x)/f(x)^2$ ' in artan (azalan) olmasıdır

(4) $f$'nin $GA$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $xf'(x)$ 'in artan (azalan) olmasıdır

(5) $f$'nin $GG$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $xf'(x)/f(x)$ 'in artan (azalan) olmasıdır

(6) $f$'nin $GH$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $xf'(x)/f(x)^2$ 'in artan (azalan) olmasıdır

(7) $f$'nin $HA$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $x^2f'(x)$ ' in artan (azalan) olmasıdır

(8) $f$'nin $HG$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $x^2f'(x)/f(x)$ 'in artan (azalan) olmasıdır

(9) $f$'nin $HH$-konveks (konkav) olması için gerek ve yeter şart, $x^2f'(x)/f(x)^2$ -in artan (azalan) olmasıdır (Anderson ve ark., 2007).

**Sonuç 2.1.2** $H(x,y) \leq G(x,y) \leq A(x,y)$ olduğundan dolayı

(1) $f$, $AH$-konveks $\Rightarrow f$, $AG$-konveks $\Rightarrow f$, $AA$-konvekstir,

(2) $f$, $GH$-konveks $\Rightarrow f$, $GG$-konveks $\Rightarrow f$, $GA$-konvekstir,

(3) $f$, $HH$-konveks $\Rightarrow f$ $HG$-konveks $\Rightarrow f$, $HA$-konvekstir

yazılabilir. Ayrıca eğer $f$ fonksiyonu artan (azalan) ise o zaman $N$ herhangi bir ortalama foksiyon olmak üzere *AN* konveks(konkav), *GN* ve *HN* konveks (konkav) anlamına gelir. Konkavlık için (1) ve (3) deki çıkarımlar tersine çevrilir (Anderson ve ark., 2007).

**Örnek 2.1.2** $(0,\infty)$ aralığında;

(1) $f(x) = coshx$ fonksiyonu $AG$-konvekstir, dolayısıyla $GG$-konveks ve $HG$-konvekstir. Fakat $AH$-konvex, $GH$-konveks ve $HH$-konveks değildir,

(2) $f(x) = sinhx$ fonksiyonu $AA$-konvekstir, fakat $AG$-konkavdır,

(3) $f(x) = e^x$ fonksiyonu $GG$-konveks ve $HG$-konvekstir, fakat $GH$-konveks ve $HH$-konveks değildir,

(4) $f(x) = \log(1+x)$ fonksiyonu $GA$-konvekstir, fakat $GG$-konkavdır,

(5) $f(x) = \arctan x$ fonksiyonu $HA$-konvekstir, fakat $HG$-konveks değildir (Anderson ve ark., 2007).

### 2.2 Ağırlıklı Ortalamalar

**Tanım 2.2.1** Bir $M : (0,\infty) \times (0,\infty) \times [0,1] \to (0,\infty)$ bir fonksiyon olmak üzere

$(WM1)$ $M(x,y,\lambda) = M(y,x,1-\lambda)$

$(WM2)$ $M(x,y,\lambda) = x$

$(WM3)$ $x < y$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $x < M(x,y,\lambda) < y$ ve $\{M(x,y,0), M(x,y,1)\} = \{x,y\}$

$(WM4)$ $\forall\, \alpha > 0$ için $M(\alpha x, \alpha y, \lambda) = \alpha M(x,y,\lambda)$

$(WM5)$ $\lambda \in [0,1]$ sabit olmak üzere

$x \leq \omega$ iken, $M(x,y,\lambda) \leq M(\omega,y,\lambda)$

$y \leq \omega$ $iken$, $M(x,y,\lambda) \leq M(x,\omega,\lambda)$

$(WM6)$ $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in (0,\infty)$ sabit olsun.

Bu takdirde $M(x, y, .)$, $[0, 1]$ üzerinde kesin monoton ve sürekli bir fonksiyondur

$(WM7)$ $\forall\, x, y, z, w \in (0, \infty)$ ve s, $\lambda \in [0, 1]$ için

$$M(M(x, y, \lambda), M(z, \omega, \lambda), s) = M(M(x, z, s), M(y, \omega, s), \lambda)$$

$(WM8)$ $\forall x, y, \in (0, \infty)$ ve s, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ için

$$M(x, y, s\lambda_1 + (1 - s)\lambda_2) = M(\, M(x, y, \lambda_1), M(x, v, \lambda_2), s)$$

şartları sağlanıyorsa M'ye ağırlıklı ortalama fonksiyonu denir (İşcan, 2021).

**Sonuç 2.2.1** Yukarıdaki tanıma göre, her ağırlıklı ortalama fonksiyonu $\lambda = 1/2$ şartıyla, bir ortalama fonksiyondur. Ayrıca, $(WM6)$ ile, her $x \in [\mathrm{x}, \mathrm{y}] \subseteq (0, \infty)$ için $x = M(x, y, \lambda)$ olacak şekilde bir $\lambda \in [0, 1]$ vardır. Bununla birlikte;

i. Eğer $M(x, y, .)$ kesin artansa, $x < y$ olması durumunda $M(x, y, 0) = x$ ve $M(x, y, 1) = y$ dir, yani $M(x, y, \lambda)$ pozitif doğrultudadır.

ii. Eğer $M(x, y, .)$ kesin azalansa $M(x, y, .)([0,1]) =$ [min{x,y}, max{x,y}] ve $x < y$ olması durumunda $M(x, y, 0) = y$ ve $M(x, y, 1) = x$, yani $M(x, y, \lambda)$ negatif doğrultudadır (İşcan, 2021).

**Uyarı 2.2.1** Bu tez boyunca, aksi belirtilmedikçe farklı ağırlıklı ortalamaların aynı doğrultuda olduğunu kabul edeceğiz.

**Örnek 2.2.1**

$M(x, y, \lambda) = A(x, y, \lambda) = A_\lambda = (1 - \lambda)x + \lambda y$ ağırlıklı aritmetik ortalamadır.

$M(x, y, \lambda) = G(x, y, \lambda) = G_\lambda = x^{1-\lambda} y^\lambda$ ağırlıklı geometrik ortalamadır.

$M(x, y, \lambda) = H(x, y, \lambda) = H_\lambda = A^{-1}(x^{-1}, y^{-1}, \lambda) = \frac{xy}{\lambda x + (1-\lambda)y}$ ağırlıklı harmonik ortalama ve

$$M(x, y, \lambda) = Mp(x, y, \lambda) = M_{p,\lambda}$$
$$= \begin{cases} A^{1/p}(x^p, y^p, \lambda) = ((1 - \lambda)x^p + \lambda y^p, & p \in \mathbb{R}/\{0\} \\ G(x, y, \lambda) = x^{1-\lambda} y^\lambda \quad , & p = 0 \end{cases}$$

$p$-kuvvet ortalamasıdır. Özel olarak, her $x, y \in (0, \infty)$, $t \in [0,1]$ ve $p \geq 1$ için

$$M_{-1,\lambda} = H_\lambda \leq M_{0,\lambda} = G_\lambda \leq M_{\,1,\lambda} = A_\lambda \leq M_{p,\lambda}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan, 2021).

$\lambda \in \mathbb{R}$ ye göre $p \in R\backslash\{0\}$ ve $y > x$ şartıyla $y, x > 0$ sabitleri için $Mp(y, x, \lambda)$ sürekli ve kesinlikle artandır. Literatürde ağırlıklı ortalama kullanılarak bir çok konvekslik türü İşcan (2014), İşcan (2016), Matkowski (2003/2004), Mirković (2019), Niculescu (2000), Niculescu (2003) gibi yazarlar tarafından tanımlanmıştır.

**Önerme 2.2.1** $M : (0,\infty) \times (0,\infty) \times [0,1] \to (0,\infty)$ bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu ise,

$$M\,(M\,(a, M(a,b,s),\lambda), M\,(b, M(a,b,s),\lambda), s) = M(a,b,s) \qquad (2.2.1)$$

$$M\,\left(M(a,b,\lambda), M(b,a,\lambda), \tfrac{1}{2}\right) = M\left(a, b, \tfrac{1}{2}\right) \qquad (2.2.2)$$

özdeşlikleri elde edilir (İşcan, 2021).

**İspat** $(WM7)$'de $y = w = M(a,b,s)$, $x = a$ ve $z = b$ alınırsa ve $(WM2)$ özelliği kullanılırsa (2.2.1) özdeşliği elde edilir. Benzer bir metot kullanılarak, $(WM7)'$de $x = w = a$, $y = z = b$ ve $s = 1/2$ alınırsa ve $(WM2)$ ve $(WM7)$ özellikleri kullanılırsa (2.2.2) özdeşliği elde edilir.

### 2.3 MN-Konveks Fonksiyonlar ve Özellikleri

**Tanım 2.3.1** $M$ ve $N$, sırasıyla $I \subseteq (0,\infty)$ve $J \subseteq (0,\infty)$ aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama olsun. $\forall\, x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\big(M(x,y,\lambda)\big) \leq (\geq) N\,(f(x), f(y), \lambda)$$

şartını sağlayan $f: I \to J$ fonksiyonuna $MN$-konveks(konkav) fonksiyon denir (İşcan, 2021).

Tanım 2.2.2'deki $(WM8)$ koşulu $x, y \in (0,\infty)$ için $M(x, y, .)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında hem $MM$-konveks hem de $MM$-konkav olduğunu gösterir. Bu, örnek 2.2.2'de verilen ağırlıklı ortalamaların $(WM8)$ koşulunu sağlamasından kolaylıkla görülebilir.

$M$ ve $N$ 'in özel durumlarını göz önünde bulundurarak, $AA$-konvekslik (klasik konvekslik), $AG$ -konvekslik (logaritmik konvekslik), $GA$-konvekslik, $GG$-konvekslik (geometrik konvekslik), $HA$-konvekslik (harmonik konvekslik) $M_pA$-

konvekslik (kuvvet konveksliği) vb. gibi bazı farklı konvekslik sınıfları elde edilir (İşcan, 2021).

**Tanım 2.3.2** $M$ ve $N$ sırasıyla $[x,y] \subseteq (0,\infty)$ ve $J \subseteq (0,\infty)$ aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama ve $f:[x,y] \to J$ bir fonksiyon olsun. Her $\lambda \in [0,1]$için

$$f\big(M(x,y,\lambda)\big) = f\big(M(x,y,1-\lambda)\big)$$

şartı sağlanıyorsa, $f$ fonksiyonuna $M(x,y,1/2)'$ye göre simetriktir denir (İşcan, 2021).

**Teorem 2.3.1** $M$ ve $N$ sırasıyla $[x,y] \subseteq (0,\infty)$ ve $J \subseteq (0,\infty)$ aralıklarında tanımlı iki ağırlıklı ortalama olsun. $f:[x,y] \to J$ fonksiyonu $MN$-konveks ise $f$ fonksiyonu sınırlıdır (İşcan, 2021).

**İspat** $K = max\,\{f(x), f(y)\}$ olsun. $[x,y]$ aralığında herhangi bir $z = M(x,y,\lambda)$ değeri için, $f'$nin $MN$-konveksliği ve $(WM3)$ koşulu kullanılarak

$$f(z) \leq N\,(f(x), f(y), \lambda) \leq K$$

elde edilir. $f$ fonksiyonu aynı zamanda alttan sınırlıdır. Herhangi bir $z \in (x,y]$ için $z = M(x,y,\lambda_0)$, olacak şekilde bir $\lambda_0 \in (0,1]$ vardır. Böylece $f'$nin $MN$-konveksliği ve (2.3.2) kullanılarak

$$f\left(M\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(M\left(z, M(y,x,\lambda_0), \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\leq N\left(f(z), f\left(M(y,x,\lambda_0)\right), \tfrac{1}{2}\right) \tag{2.3.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $f(z) = f(M\left(M(y,x,\lambda_0)\right)$ ise,

$$N\,(f(z), f\,(M(y,x,\lambda_0))\,, 1/2) = f(z)$$

olur. Böylece $f$ fonksiyonu aynı zamanda alttan sınırlı olmuş olur. $f(z) \neq f(M\,(M(y,x,\lambda_0))$ ise

$$N\left(f(z), f\left(M(y,x,\lambda_0)\right), \frac{1}{2}\right) = \mu_0 f(z) + (1-\mu_0) f\left(M(y,x,\lambda_0)\right)$$

olacak şekilde bir $\mu_0 \in (0,1)$ vardır. (2.3.1) eşitsizliği ve üst sınır olarak $K$'yı kullanarak

$$f(z) \geq \frac{1}{\lambda_0}\left[f\left(M\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) - (1-\lambda_0)f\big(M(x,y,\lambda_0)\big)\right]$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_0}\left[f\left(M\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) - (1-\lambda_0)K\right] = k$$

yazılır. Böylece herhangi bir $z \in (x,y]$ için $f(z) \geq max\{k, f(x)\}$ sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 2.3.2** $M$ ve $N$, sırasıyla $I \subseteq (0,\infty) ve\ J \subseteq (0,\infty)$ aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama olsun. $f, g: I \to J$ fonksiyonu $MN$-konveks ise $N(f(.), g(.), 1/2)$ bir $MN$-konveks fonksiyondur (İşcan, 2021).

**İspat** $f$ ve $g$ $MN$-konveks fonksiyon olduğundan her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\,\big(M(x,y,\lambda)\big) \leq\ N\,(f(x), f(y), \lambda) \quad \text{ve}$$

$$g\big(M(x,y,\lambda)\big) \leq\ N\,(g(x), g(y), \lambda)$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu durumda $(WM5)$ ve $(WM7)$ koşulları kullanılarak

$$N\left(f(.), g(.), \frac{1}{2}\right)\big(M(x,y,\lambda)\big)$$

$$= N\,\left(f\,\big(M(x,y,\lambda)\big), g\,\big(M(x,y,\lambda)\big), \frac{1}{2}\right)$$

$$\leq N\,\left(N\,(f(x), f(y), \lambda), N\,(g(x), g(y), \lambda), \frac{1}{2}\right)$$

$$= N\left(N\left(f(.), g(.), \frac{1}{2}\right)(x), N\left(f(.), g(.), \frac{1}{2}\right)(y), \lambda\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

$M$ ve $N$'nin özel durumlarını dikkate alarak farklı konvekslik sınıfları için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 2.3.1** $I, J \subseteq (0,\infty)$ ve $f, g: I \to J$ olsun;

i. $f$ ve $g$ konveks fonksiyonlar ise $A(f(.), g(.), 1/2) = (f + g)/2$ de konveks fonksiyondur,

ii. $f$ ve $g$ $GA$-konveks fonksiyonlar ise $A(f(.), g(.), 1/2) = (f + g)/2$ de $GA$-konveks fonksiyondur,

iii. $f$ ve $g$ harmonik konveks fonksiyonlar ise $A(f(.), g(.),1/2) = (f + g)/2$ de harmonik konveks fonksiyondur,

iv. $f$ ve $g$, $p$-konveks fonksiyonlar ise $A(f(.), g(.),1/2) = (f + g)/2$ de $p$-konveks fonksiyondur,

v. $f$ ve $g$ logaritmik konveks fonksiyonlar ise $G(f(.), g(.), 1/2) = \sqrt{fg}$ de harmonik logaritmik fonksiyondur,

vi. $f$ ve $g$ $GG$-konveks fonksiyonlar ise $G(f(.), g(.), 1/2) = \sqrt{fg}$ de $GG$-konveks fonksiyondur,

vii. $f$ ve $g$ $HG$-konveks fonksiyonlar ise $G(f(.), g(.), 1/2) = \sqrt{fg}$ de $HG$-konveks fonksiyondur,

viii. $f$ ve $g$ $AH$-konveks fonksiyonlar ise $H(f(.), g(.), 1/2) = 2fg/(f + g)$ de $AH$-konveks fonksiyondur (İşcan, 2021).

**Sonuç 2.3.2** Sonuç 2.3.1'de sadece bazı konvekslik türleri için sonuçlar verilmiştir. $M$ve $N$'nin diğer özel durumlarını göz önünde bulundurarak sonuçları artırmak mümkündür (İşcan, 2021).

**Teorem 2.3.3** $M$ ve $N$, sırasıyla $I \subseteq (0, \infty)$ ve $J \subseteq (0, \infty)$ aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama olsun. $f: I \to J$ fonksiyonu bir $MN$-konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise $\alpha f'$de bir $MN$-konveks fonksiyondur (İşcan, 2021) .

**İspat** $f$ ‘ nin $MN$-konveksliği ve $(WM4)$ koşulu kullanılarak

$$\alpha f\left(M(x, y, \lambda)\right) \leq \alpha N\left(f(x), f(y), \lambda\right) \leq N\left(\alpha f(x), \alpha f(y), \lambda\right)$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

**Teorem 2.3.4** $M$ , $N$ ve $K$ sırasıyla $I \subseteq (0, \infty)$, $J \subseteq (0, \infty)$ ve $L \subseteq (0, \infty)$ aralıklarında tanımlı üç ağırlıklı ortalama olsun. $f : I \to J$ fonksiyonu bir $MN$-konveks fonksiyon ve $g: J \subseteq (0, \infty) \to L$ azalmayan $NK$-konveks fonksiyon ise o zaman $g\ o\ f$, bir $MK$-konveks fonksiyondur (İşcan, 2021).

**İspat** $f$ nin $MN$-konveksliği kullanılarak

$$f\left(M(x, y, \lambda)\right) \leq N\left(f(x), f(y), \lambda\right)$$

yazılır. $NK$-konveks ve azalmayan fonksiyon olduğundan

$$g\left(f\left(M(x,y,\lambda)\right)\right) \le g\left(N\left(f(x),f(y),\lambda\right)\right) \le K\left(g\left(f(x)\right),g\left(f(y)\right),\lambda\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.3.5** $M$ ve $N$, sırasıyla $I \subseteq (0,\infty)$ve $J \subseteq (0,\infty)$aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama olsun. $f: I \to J$ fonksiyonu $MN$-konveks, $M \le A$ ve $N \le A$ ($A$, ağırlıklı aritmetik ortalamadır) ise $f$ fonksiyonu $I^0$ ‘deki herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak $f, [a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve $I^0$ ’de süreklidir (İşcan, 2021).

**İspat** $a - \varepsilon\ ve\ b + \varepsilon,\ I$’ ya ait olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçilsin ve $m_1$ ve $m_2'$de $[a-\varepsilon,\ b+\varepsilon]$ aralığında $f$‘ nin alt ve üst sınırları olsun. $u$ ve $v, [a,b]'$ nin farklı noktaları olmak üzere

$$y = M(x, z\,\lambda), \lambda = \frac{|y-x|}{\varepsilon + |y-x|},$$

olacak şekilde bir $z$ noktası seçilirse

$$f(y) \le N\left(f(x), f(z), \lambda\right) \le A(f(x), f(z), \lambda) = f(x) + \lambda\,[f(z) - f(\mathrm{x})]$$

ve $K = (m_2 - m_1)/\varepsilon$ olmak üzere

$$f(y) - f(x) \le \lambda\,[f(z) - f(x)] \le \lambda(m_2 - m_1)$$

$$< \frac{|y-x|}{\varepsilon}(m_2 - m_1) = K|y-x|$$

yazılır. Bu eşitsizlik herhangi bir $x, y \in [a,b]$ için doğru olduğundan, yani $x$ ile $y$ yer değiştirdiğinde de geçerli olduğundan

$$|f(y) - f(x)| \le K\,|y - x|$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Bir $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ise, keyfi $\varepsilon > 0$ için $[a,b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının herhangi bir $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ koleksiyonu için, $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ iken $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla $\delta = \varepsilon/K$ seçilirse $f$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli olduğu açıkça görülür.

Son olarak, $[a,b]$, $I^0$ de keyfi bir aralık olduğundan ve $f'$ de $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağladığından $I^0$ de süreklidir.

**Teorem 2.3.6** $M$ ve $N$, sırasıyla $I \subseteq (0,\infty)$ ve $J \subseteq (0,\infty)$aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama olsun. $f_\alpha: I \to J$ fonksiyonu $MN$-konveks fonksiyonlarının rastgele bir ailesi ve $f(x) = sup_\alpha f_\alpha(x)$ olsun. $K = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ boş değilse, $K$ bir aralık ve $f$, $K$ üzerinde $MN$-konveks fonksiyondur (İşcan, 2021).

**İspat** $\lambda \in [0,1]$ ve $x, y \in K$ keyfi iki eleman olsun. Bu durumda

$$f\left(M\,(x,y,\lambda)\right) = \sup_\alpha f_\alpha\big(M(x,y,\lambda)\big) \le \sup_\alpha\big(N(f_\alpha(x), f_\alpha(y), \lambda)\big)$$
$$\le N\left(\sup_\alpha f_\alpha(x)\,, \sup_\alpha f_\alpha(y)\,, \lambda\right) = N(f(x), f(y), \lambda) < \infty$$

yazılır. Bu aynı zamanda, $K$'nın herhangi iki noktası arasındaki her noktayı içerdiğinden $K$ 'nın bir aralık olduğunu ve, $f$ 'nin $K$ üzerinde $MN$-konveks fonksiyon olduğunu gösterir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

### 2.4 MN-Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizlikleri

**Teorem 2.4.1** $M$ ve $N$ sırasıyla $I \subseteq (0,\infty)$ve $J \subseteq (0,\infty)$ aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama olsun. $f: I \to J$ fonksiyonu $MN$-konveks ve aşağıdaki integral varsa, her $x, y \in I$ ve $x < y$ için

$$f\left(M\left(x,y,\tfrac{1}{2}\right)\right)$$
$$\le \int_0^1 N\left(f\big(M(x,y,\lambda)\big), f\big(M(x,y,1-\lambda)\big), \frac{1}{2}\right) d\lambda$$
$$\le N(f(x), f(y), 1/2) \qquad (2.4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan, 2021).

**İspat** $f: I \to \mathbb{R}$ bir $MN$-konveks fonksiyon olduğundan, (2.2.2) yi kullanarak her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(M\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(M(x,y,\lambda), M\left(x,y,1-\lambda,\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$\le N\left(f\big(M(x,y,\lambda)\big), f\big(M(x,y,1-\lambda)\big), \tfrac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Ayrıca $\lambda \in [0,1]$ için integral alınırsa

$$f\left(M\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) \leq \int_0^1 N\left(f\big(M(x,y,\lambda)\big), f\big(M(x,y,1-\lambda)\big), \frac{1}{2}\right) d\lambda \qquad (2.4.2)$$

yazılır. Böylece (2.4.2)'den (2.4.1) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilmiş olur. İkinci olarak $f$ fonksiyonunun $MN$-konveksliği, (2.2.2) eşitliği ve $(WM5)$ koşulu kullanılarak

$$N\left(f\big(M(x,y,\lambda)\big), f\big(M(x,y,1-\lambda)\big), \frac{1}{2}\right)$$

$$\leq N\left(N(f(x),f(y),\lambda), N(f(x),f(y),1-\lambda), \frac{1}{2}\right)$$

$$= N\left(f(x),f(y),\frac{1}{2}\right)$$

yazılır. Bu eşitsizlik [0,1] aralığı üzerinden $\lambda$'ya göre, integre edilirse, (2.4.1) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

$M$ ve $N$ özel durumlarını dikkate alarak farklı konvekslik sınıfları için aşağıdaki gibi bazı sonuçları İşcan (2021) tarafından verilmiştir.

**Sonuç 2.4.1** $I, J \subseteq (0,\infty)$ ve $f: I \to J$ olsun.

i. $f$, konveks fonksiyon (yani $M = N = A$ ($A$, ağırlıklı aritmetik ortalamadır) ise

$$f\left(A\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\leq \int_0^1 A\left(f\big(A(x,y,\lambda)\big), f\big(A(x,y,1-\lambda)\big), \frac{1}{2}\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2(y-x)}\int_x^y f(x) + f(x+y-\lambda)dx \ = \frac{1}{(y-x)}\int_x^y f(x)dx$$

$$\leq A\left(f(x),f(y),\frac{1}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. $f$, $GA$-konveks fonksiyon ise

$$f\ (G(x,y,1/2) = f\left(\sqrt{x,y}\,\right)$$

$$\leq \int_0^1 A\left(f\big(G(x,y,\lambda)\big), f\big(G(x,y,1-\lambda)\big), \frac{1}{2}\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2(\ln y - \ln x)} \int_x^y f(x) + f\left(\frac{xy}{x}\right) dx \ = \frac{1}{\ln y - \ln x} \int_x^y \frac{f(x)}{x} dx$$

$$\leq A\left(f(x), f(y), \frac{1}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan, 2014b).

iii. $f$, harmonik konveks fonksiyon ise

$$f\ \left(H\left(x,y,\tfrac{1}{2}\right)\right) = f\left(\tfrac{2xy}{x+y}\right)$$

$$\leq \int_0^1 A\left(f\big(H(x,y,\lambda)\big), f\big(H(x,y,1-\lambda)\big), \frac{1}{2}\right) d\lambda$$

$$= \frac{xy}{2(y-x)} \int_x^y f(x) + f([x^{-1} + y^{-1} - x^{-1}]^{-1}) \frac{dx}{x^2}$$

$$= \frac{xy}{y-x} \int_x^y \frac{f(x)}{x^2} dx$$

$$\leq A\left(f(x), f(y), \frac{1}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan, 2014a).

iv. $f$, $p$-konveks fonksiyon $p \neq 0$ ise

$$f\ \left(M_p\left(u,v,\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\leq \int_0^1 A\left(f\left(M_p(u,v,\lambda)\right), f\left(M_p(u,v,1-\lambda)\right), \frac{1}{2}\right) d\lambda$$

$$= \frac{p}{2(v^p - u^p)} \int_u^v f(x) + f\left([u^p + v^p - x^p]^{\frac{1}{p}}\right) \frac{dx}{x^{1-p}}$$

$$= \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx$$

$$\leq A\left(f(u), f(v), \frac{1}{2}\right) = \frac{f(u) + f(v)}{2}$$

eşitsizliği elde edili (İşcan, 2016).

v. $f$, $log$-konveks fonksiyon ise

$$f\left(A\left(u,v,\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$\leq\int_0^1 G\left(f\big(A(u,v,\lambda)\big),f\big(A(u,v,1-\lambda)\big),\frac{1}{2}\right)d\lambda$$

$$=\frac{1}{v-u}\int_u^v\sqrt{f(x)f(u+v-x)}dx$$

$$\leq G\left(f(u),f(v),\frac{1}{2}\right)=\sqrt{f(u)f(v)}$$

eşitsizliği elde edilir (Dragomir ve Mond, 1998).

vi. $f$, $GG$-konveks fonksiyon ise

$$f\left(G\left(u,v,\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\sqrt{u,v}\ \right)$$

$$\leq\int_0^1 A\left(f\big(G(u,v,\lambda)\big),f\big(G(u,v,1-\lambda)\big),\frac{1}{2}\right)d\lambda$$

$$=\frac{1}{\ln v-\ln u}\int_u^v f(x)f\left(\frac{uv}{x}\right)\frac{dx}{x}\leq G\left(f(u),f(v),\frac{1}{2}\right)=\sqrt{f(u),f(v)}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan, 2014c).

vii. $f$, $HG$-konveks fonksiyon ise

$$f\left(H\left(u,v,\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{2uv}{u+v}\right)$$

$$\leq\int_0^1 G\left(f\big(G(u,v,\lambda)\big),f\big(H(u,v,1-\lambda)\big),\frac{1}{2}\right)d\lambda$$

$$=\frac{uv}{v-u}\int_u^v\sqrt{f(x)f([u^{-1}+v^{-1}-x^{-1}]^{-1})}\frac{dx}{x^2}$$

$$\leq G\left(f(u),f(v),\frac{1}{2}\right)=\sqrt{f(u),f(v)}$$

eşitsizliği elde edilir.

viii. $f$ $AH$-konveks fonksiyon ise

$$f\left(A\left(u,v,\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$\leq\int_0^1 H\left(f\big(A(u,v,\lambda)\big),f\big(A(u,v,1-\lambda)\big),\frac{1}{2}\right)d\lambda$$

$$=\frac{2}{v-u}\int_u^v\frac{f(x)f(u+v-x)}{f(x)+f(u+v-x)}dx\ \leq H\left(f(u),f(v),\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2f(u)f(v)}{f(u)+f(v)}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan, 2021).

**Teorem 2.4.2** $M$ ve $N$, sırasıyla $[u,v]\subseteq(0,\infty)$ ve $J\subseteq(0,\infty)$ aralıklarında tanımlanan iki ağırlıklı ortalama olsun. $f:[u,v]\to J$ fonksiyonu $MN$-konveks fonksiyon ve $M(u,v,1/2)'$ye göre simetrik ise her $x\in I$ için

$$f\left(M\left(u,v,\frac{1}{2}\right)\right)\leq f(x)\leq N\left(f(u),f(v),\frac{1}{2}\right)\tag{2.4.3}$$

eşitsizliği geçerlidir (İşcan, 2021).

**İspat** $x\in[u,v]$ rastgele bir nokta olsun. Bu takdirde $x=M(u,v,\lambda)$ olacak şekilde bir $\lambda\in[0,1]$ vardır. $f:[u,v]\to J$ fonksiyonu, $MN$-konveks fonksiyon ve $M(u,v,1/2)'$ye göre simetrik olduğu için (2.2.2) eşitliği kullanılarak

$$f\left(M\left(u,v,\frac{1}{2}\right)\right)=\ f\left(M\ \left(M(u,v,\lambda),M(u,v,1-\lambda),\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\leq\left(\ f\big(M(u,v,\lambda)\big),f\big(M(u,v,1-\lambda)\big),\frac{1}{2}\right)\ =f(x)$$

yazılır. Böylece (2.4.3) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilmiş olur. İkinci olarak $f$ 'nin $MN$-konveksliği ve $(WM5)$ kullanılarak (2.2.2) eşitliği göz önüne alındığında

$$f(x)\ =\ N\ (f\ (M(u,v,\lambda))\ ,f\ (M(u,v,1-\lambda)\ ,1/2)$$

$$\leq N\ \left(N(f(u),f(v),\lambda),N(f(u),f(v),1\ -\ \lambda),\frac{1}{2}\right)$$

$$=N\ \left(f(u),f(v),\frac{1}{2}\right)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

$M$ ve $N$ özel durumlarını dikkate alarak farklı konvekslik sınıfları için aşağıdaki gibi bazı sonuçlar verilebilir. Diğer $M$ ve $N$ durumları düşünülerek sonuçları arttırmak mümkündür (İşcan, 2021).

**Sonuç 2.4.2** $I, J \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow J$ bir fonksiyon olsun.

i. $f$, konveks ve $(x + y)/2$'ye göre simetrik ise

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir (Dragomir, 2016).

ii. $f$, $GA$-konveks ve $\sqrt{xy}$ 'ye göre simetrik ise

$$f\left(\sqrt{xy}\right) \leq f(x) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan, 2019).

iii. $f$, $p$-konveks ve $\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ 'ye göre simetrik ise

$$f\left(\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq f(x) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir (İşcan, 2020).

## 3.ARAŞTIRMA BULGULARI

### 3.1 (M,P)-Fonksiyonlar ve Özellikleri

**Tanım 3.1.1** $I \subset (0,\infty)$ bir aralık $M : I \times I \times [0,1] \to (0,\infty)$ bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu ve $f : I \to \mathbb{R}$' ye bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$f\big(M(x,y,t)\big) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanırsa $f'$ye $(M,P)$-fonksiyon denir.

**Uyarı 3.1.1** Eğer $M$, ağırlıklı aritmetik ortalama olarak seçilirse, $P$-fonksiyon sınıfı elde edilir.

**Uyarı 3.1.2** Eğer $\forall x \in I$ için $f : I \to \mathbb{R}$, $I$ üzerinde bir *(M,P)*-fonksiyon ise $f(x) \geq 0$ olur.

**Teorem 3.1.1** Her $MN$-konveks fonksiyonu bir *(M,P)*-fonksiyondur.

**İspat** $M : I \times I \times [0,1] \to (0,\infty)$ ve $N : J \times J \times [0,1] \to (0,\infty)$ fonksiyonları sırasıyla $J \subset (0,\infty)$, $I \subset (0,\infty)$ aralıklarında iki ağırlıklı ortalama fonksiyonu ve $f: I \to$ J bir $MN$-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\big(M(x,y,t)\big) \leq N(f(x), f(y), t) \tag{3.1.1}$$

yazılır. Diğer taraftan

$$f(x) \leq f(x) + f(y)$$

ve

$$f(y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizlikleri dikkate alınırsa

$$N(f(x), f(y), t) \leq N(f(x) + f(y), f(x) + f(y), t) = f(x) + f(y) \tag{3.1.2}$$

ifadesi elde edilir. Böylece (3.1.1) ve (3.1.2)'yi kullanarak ispat tamamlanır.

**Teorem 3.1.2** Eğer $f: [a,b] \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir $(M,P)$-fonksiyon ise $f$, $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır.

**İspat** $f$ bir $(M,P)$-fonksiyon olduğu için Sonuç 3.1.1'e göre her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$. Bu nedenle $f$ alttan sınırlı fonksiyondur. Aynı zamanda $\forall x \in [a,b]$ ve $\exists t \in [0,1]$ için $x = M(a,b,t)$ dir. Bu durumda

$f(x) = f\big(M(a,b,t)\big) \leq f(a) + f(b) = k$ ve $f$ üstten sınırlı bir fonksiyondur. Sonuç olarak $f$ sınırlı bir fonksiyondur.

**Teorem 3.1.3** M fonksiyonu , $I \subset (0,\infty)$ aralığında tanımlı bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $(M,P)$-fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise bu durumda $\alpha f$ bir $(M,P)$-fonksiyondur.

**İspat** $f$ bir $(M,P)$-fonksiyon olduğu için

$$\alpha\big(M(x,y,t)\big) \leq \alpha\big(f(x) + f(y)\big) = \alpha f(x) + \alpha f(y)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik $\alpha f'$nin $(M,P)$-fonksiyon olduğunu gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.4** M fonksiyonu, $I \subset (0,\infty)$ aralığında tanımlı bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu olsun. $f_\alpha : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(M,P)$-fonksiyonlarının herhangi bir üyesi ve $f(x) = sup_\alpha\, f_\alpha(x)$ olsun. $K = \{u \in I : f(u) < \infty\}$ boş küme değilse, bu durumda *K* bir aralıktır ve $f$, *K* üzerinde tanımlı bir $(M,P)$-fonksiyondur.

**İspat** $t \in [0,1]\ ve\ x,y \in K$ keyfi olsun. Aynı zamanda $f_\alpha$, $(M,P)$-fonksiyon olduğundan $f_\alpha$ sınırlıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} f\big(M(x,y,t)\big) &= sup_\alpha\, f_\alpha\big(M(x,y,t)\big) \\ &\leq sup_\alpha\big(f_\alpha(x) + f_\alpha(y)\big) \\ &\leq sup_\alpha\, f_\alpha(x) + sup_\alpha\, f_\alpha(y) \\ &= f(x) + f(y) < \infty \end{aligned}$$

olur. Bu aynı anda göstermektedir ki; *K* bir aralıktır ve onun herhangi iki noktası arasındaki her noktayı kapsadığından dolayı *f*, *K* üzerinde bir $(M,P)$-fonksiyondur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.1.5** M fonksiyonu , $I \subset (0,\infty)$ aralığında tanımlı bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu olsun. $f,g\!: \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $(M,P)$-fonksiyonlar ise, o zaman $f+g$ de *(M,P)*-fonksiyon olur.

**İspat** $f$ ve $g$ *(M,P)*-fonksiyonlar olduğundan her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için.

$$f\big(M(x,y,t)\big) \leq f(x) + f(y)$$

ve

$$g\big(M(x,y,t)\big) \leq g(x) + g(y)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}(f+g)\big(M(x,y,t)\big) \\ &= f\big(M(x,y,t)\big) + g\big(M(x,y,t)\big) \\ &= f(x) + f(y) + g(x) + g(y) \\ &= (f+g)(x) + (f+g)(y)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

### 3.2. (M,P)-Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Tipli Eşitsizlikler

**Teorem 3.2.1** ($(M,P)$- fonksiyonlar için Hermite Hadamard eşitsizliği). $M, I \subset (0,\infty)$ aralığında tanımlanan bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu ve $f: I \to J$ fonksiyonu $(M,P)$-fonksiyon olsun. $x, y \in I$, $x < y$ olmak üzere $(MP)$ $-$fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} f\left(M\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right) &\leq 2\int_0^1 f\big(M(x,y,t)\big)dt \\ &\leq 2[f(x)+f(y)] \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat** $f, (M,P)$ fonksiyon olduğu için, $(WM1)$ kullanılarak her $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f\left(M\left(x,y,\tfrac{1}{2}\right)\right) &= f\left(M\left(M(x,y,t), M(x,y,1-t), \tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &\leq f\big(M(x,y,t)\big) + f\big(M(x,y,1-t)\big) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.2.2) eşitsizliğinin her iki tarafının $t \in [0,1]$ aralığı üzerinde $t'$ye göre integrali alındığında

$$\int_0^1 f\left(M\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right)dt$$

$$= f\left(M\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) \leq \int_0^1 f\big(M(x, y, t)\big)dt + \int_0^1 f\big(M(x, y, 1 - t)\big)dt$$

$$= 2\int_0^1 f\big(M(x, y, t)\big)dt \tag{3.2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her $t \in [0,1]$ için

$$f\big(M(x, y, t)\big) \leq f(x) + f(y) \tag{3.2.4}$$

ifadesi yazılabilir. (3.1.6) eşitsizliğinin her iki tarafını [0,1] aralığı üzerinde $t'$ye göre integrali alındığında

$$\int_0^1 f\big(M(x, y, t)\big)dt \leq f(x) + f(y) \tag{3.2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda (3.2.4) ve (3.2.5) eşitsizliği kullanılarak istenen sonuca ulaşılır.

**Sonuç 3.2.1** $I \subset (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f$ bir $(M, P)$-fonksiyon ve $M = A$ (A, ağırlıklı aritmetik ortalama) ise (3.1.1)'ü kullanarak

$$f\left(A\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq 2\int_0^1 f\big(A(x, y, t)\big)dt$$

$$= 2\int_0^1 f\big((1 - t)x + ty\big)dt = \frac{2}{y - x}\int_x^y f(u)du \leq 2[f(x) + f(y)]$$

eşitsizliği elde edilir (Dragomir ve ak., 1995).

**Sonuç 3.2.2** $I \subset (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f$ bir $(M, P)$-fonksiyon ve $M = G$ ($G$, ağırlıklı geometrik ortalama) ise (3.1.3)'ü kullanarak $h(t) = 1$ için

$$Mf\left(G\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) = f\big(\sqrt{xy}\big)$$

$$\leq 2\int_0^1 f\big(G(x, y, t)\big)dt$$

$$= 2\int_0^1 f(x^{1-t} + y^t)dt$$

$$= \frac{2}{\ln y - \ln x}\int_x^y \frac{f(u)}{u}du$$

$$\leq 2[f(x)+f(y)]$$

eşitsizlikleri elde edilir (Noor ve ark., 2015).

**Sonuç 3.2.3** $I \subset (0,\infty)$ *ve* $f: I \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f$ bir $(M,P)$-fonksiyon ve $M = H$ (H, ağırlıklı harmonik ortalama) ise (3.1.3)'ü kullanarak

$$\begin{aligned} f\big(h(x,y,1/2)\big) &= f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq 2\int_0^1 f\big(H(x,y,t)\big)dt \\ &= 2\int_0^1 f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)dt \\ &= \frac{2xy}{y-x}\int_x^y \frac{f(u)}{u^2}du \leq 2[f(x)+f(y)] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir (İşcan ve ark., 2014).

**Teorem 3.2.2** $M, [x,y] \subseteq (0,\infty)$ aralığında tanımlı bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu olsun. $f: [x,y] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $(M,P)$-fonksiyon ve $M(x,y,1/2)$'ye göre simetrik ise, her $u \in [x,y]$ için

$$f\big(M(x,y,1/2)\big) \leq 2f(u) \leq 2[f(x)+f(y)] \tag{3.2.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat** $u \in [x,y]$ rastgele bir nokta olsun. Bu durumda $u = M(x,y,t)$ olacak şekilde $t \in [0,1]$ noktası vardır. $f : [x,y] \to J$ fonksiyonu $M(x,y,1/2)$'ye göre simetrik bir $(M,P)$-fonksiyon olduğu için,

$$\begin{aligned} f\big(M(x,y,1/2)\big) &= f\big(M(M(x,y,t),M(x,y,1-t),1/2)\big) \\ &\leq f\big(M(x,y,t)\big)+f\big(M(x,y,1-t)\big) \\ &= f\big(M(x,y,t)\big)+f\big(M(x,y,t)\big) = 2f(u) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (3.2.2) eşitsizliğinin sol tarafını elde ederiz. İkinci olarak $f$, $(M,P)$-fonksiyon olduğu için ve $(WM5)$ ve

$$\begin{aligned} 2f(u) &= f\big(M(x,y,t)\big)+f\big(M(x,y,t)\big) \\ &\leq f(x)+f(y)+f(x)+f(y) \\ &= 2f(x)+2f(y) \end{aligned}$$

$$= 2[f(x) + f(y)]$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

### 3.3.(M,P)-Fonksiyonlar için Wirtinger Tipli Eşitsizlikler

**Teorem 3.3.1** $0 < a < b$ ve $M : [a,b] \times [a,b] \times [0,1] \to (0,\infty)$ $[\mathrm{a,b}]$ üzerinde tanımlı bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu, $f : [a,b] \to (0,\infty), f(a) = f(b)$, $f$ ve $f'$ $(a,b)$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ve $\int_0^1 f\big(M(a,b,t)\big)\,dt = 0$ olsun.

$|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $(M,P)$-fonksiyon ise bu durumda $\varphi(t) = M(a,b,t)$ ve $\forall t \in [0,1]$ olmak üzere

$$\int_0^1 f^2\big(M(a,b,t)\big)dt \le \frac{[|f'(a)| + |f'(b)|]^2}{4\pi^2}\int_0^1 \big(\varphi'(t)\big)^2 dt$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat** $\varphi(t) = M(a,b,t)$ ve $h(t) = (f \ o\ \varphi)(t)$ olsun. $\varphi$ kesin monoton olduğu için, $\varphi \in BV[0,1]$ dir ve bu durumda $\varphi' \in L[0,1]$ olur. Böylece $\varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b$ olarak alınırsa

$$h(0) = f\big(M(a,b,0)\big) = f(a) = f(b) = f\big(M(a,b,1)\big) = h(1)$$

olur. Böylece

$$\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 f\big(M(a,b,t)\big)dt = 0$$

olduğu için, $\varphi$ Teorem 3.3.1 hipotezini sağlar. Buradan

$$\int_0^1 h^2(t)dt \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2 dt$$

eşitsizliği yazılır. Bu durumda

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left|f'\big(\varphi(t)\big)\right|^2 \big(\varphi'(t)\big)^2 dt \qquad (3.3.1)$$

eşitliği elde edilir. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $(M,P)$-fonksiyon olduğu için

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 [|f'(a)| + |f'(b)|]^2 \big(\varphi'(t)\big)^2 dt$$

$$= \frac{[|f'(a)| + |f'(b)|]^2}{4\pi^2}\int_0^1 \big(\varphi'(t)\big)^2 dt \qquad (3.3.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (3.3.1) ve (3.3.2)'u kullanarak istenen sonuca ulaşılır.

**Sonuç 3.3.1** Eğer $M = A$ ($A$, ağırlıklı aritmetik ortalama) alınırsa

$$\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^3}{4\pi^2}[|f'(a)| + |f'(b)|]^2$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 3.3.2** Eğer $M = G$ ($G$, ağırlıklı harmonik ortalama) alınırsa

$$\int_a^b \frac{f^2(x)}{x}dx \leq \frac{[\ln b - \ln a]^2(b^2 - a^2)}{8\pi^2}[|f'(a)| + |f'(b)|]^2$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 3.3.3** Eğer $M = H$ ($H$, ağırlıklı geometrik ortalama) alınırsa

$$\int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2}dx \leq \frac{(b^3 - a^3)(b - a)^2}{12(ab)^2\pi^2}[|f'(a)| + |f'(b)|]^2$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 3.3.2** $0 < a < b$ ve $M : [a,b] \times [a,b] \times [0,1] \to (0,\infty)$ $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir ağırlıklı ortalama fonksiyonu, $f : [a,b] \to (0,\infty)$, $f(a) = f(b)$ , $f$ ve $f'$ $(a,b)$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ve $\int_0^1 f\big(M(a,b,t)\big)\,dt = 0$

olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $(M,P)$-fonksiyon ise $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $q>1$, $\forall t \in [0,1]$ $için\ \varphi(t)=M(a,b,t)$, olmak üzere

$$\int_0^1 f^2\big(M(a,b,t)\big)dt \le \frac{[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{2}{q}}}{4\pi^2}\left(\int_0^1 \big(\varphi'(t)\big)^{2p}\ dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat** $\varphi(t)=M(a,b,t)$ ve $h(t)=f\ o\ \varphi(t)$ olsun. $\varphi$ kesin monoton olduğu için, $\varphi \in BV[0,1]'$dir ve bu nedenle de $\varphi' \in L[0,1]$ olur. Böylece $\varphi(0)=a$, $\varphi(1)=b$ alınırsa $h(0)=f\big(M(a,b,0)\big)=f(a)=f(b)=f\big(M(a,b,1)\big)=h(1)$ olur. Ayrıca

$$\int_0^1 h(t)dt=\int_0^1 f\big(M(a,b,t)\big)\,dt=0$$

olduğu için, $\varphi$ Teorem 3.3.2 hipotezini sağlar. Böylece

$$\int_0^1 h^2(t)dt \le \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2 dt \tag{3.3.3}$$

eşitsizliği yazılır. Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \big(h'(t)\big)^2 dt$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left|f'\big(\varphi(t)\big)\right|^2 |\varphi'(t)|^2 dt$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_0^1 \left(\left|f'\big(\varphi(t)\big)\right|^2\right)^q\ dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (|\varphi'(t)|^2)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_0^1 \left(\left|f'\big(\varphi(t)\big)\right|^q\right)^2\ dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |\varphi'(t)|^{2p}\ dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ , $[a,b]$ üzerinde $(M,P)$-fonksiyon olduğu için

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \left(h'(t)\right)^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_0^1 (|f'(a)|^q + |f'(b)|^q)^2\, dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |\varphi'(t)|^{2p}\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{[|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{2}{q}}}{4\pi^2}\left(\int_0^1 |\varphi'(t)|^{2p}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.3.4)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (3.3.3) ve (3.3.4) kullanılarak istenen sonuca ulaşılır.

**Sonuç 3.3.4** Eğer $M = A$ ($A$, ağırlıklı aritmetik ortalama) alınırsa

$$\int_a^b f^2(x)dx \;\leq\; \frac{(b-a)^3}{4\pi^2}[|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{2}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 3.3.5** Eğer $M = G$ ($G$, ağırlıklı geometrik ortalama) alınırsa

$$\int_a^b \frac{f^2(x)}{x}dx \;\leq\; \frac{[\ln b - \ln a]^{3-\frac{1}{p}}(b^{2p} - a^{2p})^{\frac{1}{p}}}{4\pi^2(2p)^{\frac{1}{p}}}[|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{2}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 3.3.6** Eğer $M = H$ ($H$, ağırlıklı harmonik ortalama) alınırsa

$$\int_a^b \frac{f^2(x)}{x^2}dx \leq \frac{(b-a)^{3-\frac{1}{p}}(ab)(b^{1-4p} - a^{1-4p})^{\frac{1}{p}}}{4\pi^2(1-4p)^{\frac{1}{p}}}[|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{2}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

# 4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinin temelini oluşturan ikinci bölümde MN-konveks fonksiyonların temel özellikleri ve bu fonksiyon sınıfı için Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise (M,P)-fonksiyonlar sınıfı tanıtılarak temel özellikleri verilmiş ve (M,P)-fonksiyonlar için Hermite Hadamard tipli ve Wirtinger tipli eşitsizlikler literatüre kazandırılmıştır. Elde edilen bu yeni sonuçlar makale formatına getirilerek ‘‘ON (M;P)-FUNCTIONS WITH SOME FEATURES AND NEW INEQUALITIES’’ başlıklı çalışma altında ‘‘Miskolc Mathematical Notes’’ isimli SCI-Expanded indeksli dergide yayına kabul edilmiştir.

Konuyla ilgili araştırmacılar bu tezde kullanılan yöntem ve teknikler yardımıyla, ağırlıklı ortalamaları kullanarak yeni fonksiyon sınıfları tanımlayıp, yeni eşitsizlikler elde edebilirler.

## 5.KAYNAKLAR


Aczél, J. (1947). A generalization of the notion of convex functions, Norske Vid. Selsk. Forhd., Trondhjem, 19(24) ,87–90.

Anderson, G.D.,Vamanamurthy, M.K. & Vuorinen, M. (2007). Generalized convexity and inequalities, J. Mathematical Analysis Application, 335 , 1294–1308.

Aumann, G. (1933), Konvexe Funktionen und Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelverten, Bayer. Akad. Wiss.Math.-Natur. Kl. Abh., Math. Ann., 109 , 405–413.

Breckner, WW. (1978). Stetigkeitsaussagent ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen. Publications de l'Instıtut Mathématique, 23: 13-20.

Dragomir, S.S., Pecarić, J. & Persson, L.E. (1995). ‘‘ Some inequalities of Hadamard type,’’ Soochow Journal of Mathematics, vol.21, no.3, pp.335-341.

Dragomir, S.S. & Mond, B. (1998). İntegral inequalities of Hadamard type for log-convex functions. Demonstratio Matematica, 31(2), 354-364.

Dragomir, S.S. & Pearce, C.E.M. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA Monograms, Victoria University.

Gill, P.M. , Pearce, C.E.M. & Pecarić, J. (1997). Hadamard's inequality for r-convex functions, Journal of Math. Anal. and Appl., 461-470

Iscan, I. (2014a). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Jornal ofv Mathematics and Statistic, 43(6) , 935–942.

Iscan, I. (2014b). Hermite Hadamard type for GA-s-convexx functions, Le Matematiche, LXIX Fasc. II., 129-146

Iscan, I. (2014c). On Some New Hermite Hadamard type inequalities for s-geometrically convex functions, International Journal of Mathematics and Matematical Science, Article ID 163901,8 pages.

Iscan, I., Numan, S. & Bekar, K. (2014). ‘‘ Hermite Hadamard and Simpson type inequalities for differentiable harmonically P-functions.’’ British Journal of Mathematics and Computer Science, vol.4, no.14, pp.1908-1920.

Iscan, I. (2016). Ostrowski type inequalities for p-convex functions, New Trends in Mathematical Sciences, 4(3) , 140-150.

Iscan, İ. (2021).Turkish Journal Inequalities. On weighted means and MN- convex functions, 5(2) .

Matkowski, J. (2003-2004). Convex functions with respect to a mean and a characterization of quasi-arithmetic means, Real Anal. Exchange 29 , 229–246.

Mirkovic, T.Z. (2019). New inequalities of Wirtinger type for convex and MN-convex functions, Facta Universitatis Ser. Math. Inform. 34(2) , 165–173.

Mitrinović, DS. & Vasić PM. (1969). An integral inequality ascribed to Wirtinger and its variations and generalizations. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.,247-273, 157-170.

Mitrinović, D.S.& Laković I.B.(1985). Hermite and convexity. Aequat. Math. 28, 229-232.

Niculescu, CP. (2000). Convexity according to the geometric mean, Math. Inequal. Appl.,3(2) , 155–167.

Niculescu, CP. (2003). Convexity according to means, Mathematic Inequalities Appl. 6 , 571–579.

Noor, M.A., Noor, K.I. & Awan, M.U. (2015). ‘‘ Some inequalities for geometrically-arithmetically h-convex functions.’’ Creat. Math. İnform., vol.24, no.2, pp.193-200.

Pearce C.E.M., Pecarić J. & Simić V. (1998), Stolarsky means and Hadamard’s inequality, J. Math. Anla. Appl., 220, 99-109.

Pearce C.E.M., Pecarić J. & Simić V. (1999), Functional Stolarsky means, Math. Ineq. And Appl.4, 479-489.

Peĉarić, J.E., Proschan, F.& Tong, Y.L. (1992), Convex functions, partial orderings and statistical applications. Academic Press Inc.

Roberts, AW.& Varberg, DE. (1973). Convex Functions Academic Press, New York

Set, E., Karaoğlan, A.,Işcan, I.& Kılıç, N. (2023). On (M,P) Functions with some features and new inequalities, Miskolc Mathematics Notes.

Varośanec, S. (2007). On h-convexiety. J.Mathematical Analysis Application. 326(1), 301-311.

Wright, E.M. (1954). An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly,61, 620- 622.

# ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler | |
|---|---|
| Adı Soyadı | NESLİHAN KILIÇ |
| Doğum Yeri | |
| Doğum Tarihi | |
| Uyruğu | ❒ T.C. ❒ Diğer: |
| Telefon | |
| E-Posta Adresi | |

| Eğitim Bilgileri | |
|---|---|
| Lisans | |
| Üniversite | ERZURUM ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ |
| Fakülte | FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ |
| Bölümü | MATEMATİK |
| Mezuniyet Yılı | 03.03.2004 |
| **Yayınlar** | |
| Karaoğlan A., İşcan İ., ve Kılıç N. (2023) ‘’On (M,P)- functions with some features and new inequalities.’’ Miskolc Mathematical Notes, Accepted | |