T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARKLI TÜRDEN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ

ALİ KARAOĞLAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

ALİ KARAOĞLAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

FARKLI TÜRDEN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İLE ANALİZİ

ALİ KARAOĞLAN

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ, 118 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ERHAN SET)

(İKİNCİ TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. AHMET OCAK AKDEMİR)

Matematiğin önemli kavramlarından olan türev ve integralin, bilinen tam sayı mertebelerinin yanında kesirli mertebelerinin de hesaplanmasına olanak sağlayan kesirli türev ve integral operatörlerin matematikçiler tarafından tanımlanması; özellikle eşitsizlik teorisinde bir çok yeni sonucun elde edilmesini sağlamış ve elde edilen bu sonuçların kullanılmasıyla çok sayıda problem çözülmüştür. Dört ana bölümden oluşan bu tezde genel olarak, Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla yeni sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu tezin ilk bölümü olan giriş bölümünde; matematik ile fonksiyon kavramı hakkında kısa bir açıklamaya ve matematiğin alt alanları olan eşitsizlik teorisi ile kesirli analizin tarihi gelişim sürecine yer verilmiştir. Tezde yeni sonuçların elde edilmesi için bir materyal ve literatür taraması görevi üstlenen "Genel Bilgiler" başlıklı ikinci bölümde ise, "Bazı Fonksiyonlar ve Fonksiyon Uzayları", "Önemli Eşitsizlikler", "Kesirli Türev ve İntegral Operatörler" alt başlıklarıyla ilgili tanım, teorem, açıklamalar ve daha önce elde edilen sonuçlar verilmiştir. Araştırma bulgularının verildiği üçüncü bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla bu alt bölümlerin birinci ve ikincisinde; fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri için, üçüncüsünde; pre-inveks fonksiyonlar için, dördüncüsünde; senkronize fonksiyonlar için yeni integral eşitlikler ve eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde, elde edilen sonuçların bazılarının daha önce literatürde var olan sonuçlara indirgendiği ve elde edilen sonuçlardaki parametrelerin bazılarının özel değerleri için yeni sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Araştırma bulguları bölümünün birinci alt bölümde ayrıca Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ile Atangana-Baleanu kesirli integral operatörünün; farklı fonksiyonlar ve parametrelerin farklı değerlerine karşılık simülasyonları elde edilmiş ve bu simülasyonlar yardımıyla bu iki operatörün karşılaştırılması yapılmıştır. "Tartışma ve Sonuç" bu tezin dördüncü bölümünü oluşturmakta olup bu bölümde tezde elde edilen araştırma bulgularından bahsedilerek yeni öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, İnveks Küme, Konveks Fonksiyon, Pre-inveks Fonksiyon, Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörleri, Senkronize Fonksiyonlar.

ABSTRACT

ANALYSIS OF DIFFERENT KINDS OF INTEGRAL INEQUALITIES WITH ATANGANA-BALEANU FRACTIONAL INTEGRAL OPERATOR

ALİ KARAOĞLAN

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

PHD THESIS, 118 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. ERHAN SET)

(CO-SUPERVISOR: PROF. DR. AHMET OCAK AKDEMİR)

The definition of fractional derivative and integral operators by mathematicians, which allow the calculation of fractional orders as well as known integer orders of derivative and integral which are important concepts of mathematics, provided to obtained many new results, especially in the theory of inequality and many problems have been solved by using these results. In this thesis, which consists of four main chapters, it is generally aimed to obtain new results with the help of Atangana-Baleanu fractional integral operators. In the introduction which is first chapter of this thesis, a brief explanation about mathematics and the concept of function and the historical development process of inequality theory and fractional analysis, which are subfields of mathematics, are given. In the second chapter titled "General Information", which serves as a material and literature review for obtaining new results in the thesis, definitions, theorems, explanations and previous results related to the subheadings "Some Functions and Function Spaces", "Important Inequalities", "Fractional Derivative and Integral Operators" are given. The third section, where the research findings are presented, consists of four subsections. With the help of Atangana-Baleanu fractional integral operators, new integral equations and inequalities are obtained for the first and second derivatives of functions in the first and second of these subsections, for pre-invex functions in the third and for synchronous functions in the fourth. In addition, in this section, it has been observed that some of the results obtained have been reduced to the results already existing in the literature and new results have been obtained for special values of some of the parameters in the obtained results. In the first subsection of the research findings section, also, simulations of the Riemann-Liouville fractional integral operator and the Atangana-Baleanu fractional integral operator for different functions and different values of the parameters are obtained and a comparison of these two operators is made with the help of these simulations. "Discussion and Conclusion" constitutes the fourth chapter of this thesis and in this chapter, the research findings obtained in the thesis are mentioned and new suggestions are presented.

Keywords: Atangana-Baleanu Fractional Derivative and Integral Operators, Hermite-Hadamard Inequality, Invex Set, Convex Function, Pre-invex Function, Riemann-Liouville Fractional Integral Operators, Synchronous Functions.

TEŞEKKÜR

Bilgi ve tecrübesiyle yüksek lisans ve doktora eğitimimi en verimli şekilde tamamlamamı sağlayan; yapmış olduğum tüm çalışmalarda, doktora tez konumun belirlenmesinde ve tezimin hazırlanmasında, yardım eden, yol gösteren, rehberlik eden, destek olan, ilgisini hiç eksik etmeyen, sevgi ve sabır gösteren; insanlarla kurduğu iyi iletişimiyle, çalışkanlığıyla ve yaptığı başarılı çalışmalarıyla biz öğrencilerine örnek olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Erhan SET’e en içten duygularımla teşekkür ediyorum ve şükranlarımı sunuyorum.

Yapmış olduğum çalışmalarda ve doktora tezimin hazırlanmasında bana destek olan, katkı sunan, yardım ve rehberlik eden ikinci tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e sonsuz teşekkür ediyorum.

Doktora eğitimim boyunca bana katkı sunan ve yardımcı olan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’e, Sayın Prof. Dr. İmdat İŞCAN’a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL’a ve değerli arkadaşım Barış ÇELİK’e teşekkür ediyorum.

Hayatımın her aşamasında bana destek olan anneme ve babama; tanışdıktan sonra hayatımın her anında bana destek olan, doktora eğitimim boyunca büyük sabır ve fedakarlıkla bana yardımcı olan sevgili eşime ve değerli oğluma minnettarım ve teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	:	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	:	n Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{I}$	:	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
$\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{0}}$	:	$\boldsymbol{I}$'nın İçi
$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	:	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
$\boldsymbol{Re}(\boldsymbol{\alpha})$	:	α Kompleks Sayısının Reel Kısmı
$\boldsymbol{f}'$	:	f Fonksiyonunun Birinci MertebedenTürevi
$\boldsymbol{f}''$	:	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$\lvert\lvert\boldsymbol{f}\rvert\rvert$	:	f Fonksiyonunun Normu
$\boldsymbol{\beta}$	:	Beta Fonksiyonu
$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Euler Gama Fonksiyonu
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha})$	:	α'ya Bağlı Normalizasyon (Normalleştirme) Fonksiyonu
$\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$	:	(a,b) Aralığında Birinci Mertebeden Sobolev Uzayı
$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{1}}$**[a,b]**	:	$[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\boldsymbol{SX}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{I})$	:	h-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{s}}^{\boldsymbol{1}}$	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{s}}^{\boldsymbol{2}}$	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
RL	:	Riemann-Liouville
AB	:	Atangana-Baleanu
$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{a}^+}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{b}^-}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}^+}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sol Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{b}^-}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sağ Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}^{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Caputo Kesirli Türev Operatörü
${}^{\boldsymbol{CF}}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Caputo-Fabrizio Kesirli Türev Operatörü
${}^{\boldsymbol{CF}}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sol Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörü
${}^{\boldsymbol{CF}}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sağ Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörü
${}^{\boldsymbol{ABC}}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörü
${}^{\boldsymbol{ABR}}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Riemann-Liouville Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörü
${}^{\boldsymbol{AB}}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{I}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sol Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü
${}^{\boldsymbol{AB}}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{f}$	:	α. Mertebeden Sağ Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü

1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze, gelişimine bir çok medeniyetle birlikte bireysel olarak ilgilenen bir çok insanın katkı sunduğu matematik, doğayı ve yaşamı insan zihninin ürettiği semboller ve kavramlarla anlama-anlatma çabasıdır. Antik Yunanca'da; bilim, bilgi ve öğrenme gibi anlamlara gelen "mathema" kelimesinden türeyen ve Türkçe'ye Fransızca "mathématique" kelimesinden giren matematik bir çok alt alan ve kavramdan oluşmaktadır.

Bu kavramların en önemlilerinden biri fonksiyondur. Matematik dünyasında fonksiyon kavramı, klasik ve modern matematiği birbirinden ayıran olgulardan biri olarak görülmektedir. Matematikçiler tarafından çeşitli şekillerde tanımlanan ve geliştirilen fonksiyon kavramı ilk olarak, matematiğin temel nesnelerinin geometrik eğriler olarak alındığı 17. yüzyılda ortaya çıkmıştır. Fonksiyonlar; matematiğin hemen hemen her alt alanında yer aldığı gibi fizik, biyoloji, mühendislik gibi matematiğin dışındaki bilim dallarında da kullanılmaktadır. Bilim dünyasında bu kadar öneme sahip olan fonksiyonların, konveks fonksiyon, Euler gama fonksiyon, Euler beta fonksiyon, hypergeometrik fonksiyon, Mittag-Leffler fonksiyonu, P-fonksiyon, H-fonksiyon, Wright fonksiyonu, Bessel fonksiyonu, trigonometrik fonksiyonlar, üstel fonksiyon gibi bir çok çeşiti vardır. Bu fonksiyonların en önemlilerinden biri olan ve eşitsizlik, kesirli analiz gibi matematiğin bir çok alt alanının gelişimine de büyük katkı sunan konveks fonksiyonların da kendi içinde bir çok çeşidi vardır.

Gelişiminde konveks foksiyonların da önemli rol oynadığı ve matematiğin en önemli alt alanlarından biri ise eşitsizlik alanıdır. "Eşitsizlik alanı" diğer bir ifade ile "Eşitsizlik teorisi", önde gelenleri C.F. Gauss, L. Cauchy ve P.I. Chebyshev gibi bazı matematikçilerin yaklaşık yöntemlerin teorik temelini atmasıyla gelişmeye başlamıştır. 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyılın başlarında, bazıları klasik hale gelen ve bir çoğu izole ve ilgi görmeyen sonuçlar olarak kalan çok sayıda eşitsizlik kanıtlanmıştır. Eşitsizlikler, matematiğin hemen hemen tüm dallarında olduğu gibi bilimin diğer alanlarında da önemli bir rol oynamaktadır. G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Pólya'nın klasik eseri "Inequalities" in 1934'te çıkması bu alanın izole edilmiş formüller koleksiyonundan sistematik bir disipline dönüşmesini sağlamış ve matematikçiler için temel bir referans kaynağı olmuştur [36]. Bu kitap, yalnızca eşitsizlikler konusuna ayrılmış ilk kitaptır ve bu heyecan verici alan için faydalı bir rehberdir. Bu eser, yayımlandığı yüzyılın klasiklerinden biridir ve çeşitli analiz dallarındaki araştırmalar üzerinde büyük etkisi olmuştur. Daha sonra bu alanda, E.F. Beckenbach ve R. Bellman'ın 1961 yılında "Inequalities" adlı kitabı yayımlanmış ve 1965 yılında bu kitabın ikinci baskısı yapılmıştır [13]. Ayrıca, D.S. Mitrinović 1970 yılında “Analytic Inequalities” adlı kitabını yayımlamıştır [59]. Beckenbach ve Bellman ile Mitrinović'in eşitsizlikler alanında yayımladıkları bu kitaplar alana önemli katkılar, motivasyonlar, fikirler, teknikler ve uygulamalar sağlamıştır. Bu kitaplar, konuyu derinlemesine araştırmak isteyen okuyucu için kullanışlı referanslar sağlamış ve eşitsizlikler teorisinin uygulanabilir bir araştırma alanı olarak kurulduğunu göstermiştir. Eşitsizlik alanındaki bu kaynaklara ek olarak, “Convex Functions” [73], “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” [61], “Classical and New Inequalities in Analysis” [62], “Mathematical Inequalities” [70], “Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach” [65] gibi kaynakların yanında bu alanda çalışma yapan bir çok araştırmacının yazdığı kitap, makale ve monografi vardır ve bunlar alana önemli katkılar sunmuşlardır. Yirminci yüzyıl matematiği, çok sayıda yeni sonucun, problemin ve matematiğin yeni alanlarının ortaya çıkmasını sağlayan matematiksel eşitsizliklerin gücünü fark etmiştir. Bu gelişmelerin ardından sadece yeni bir matematik değil, taze bir bakış açısı ve bununla birlikte zor sonuçların basit yeni ispatları gelmiştir. Eşitsizlikler teorisi, geçmişten günümüze kadar matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak kabul edilmiş ve birçok bilimsel alanda sürekli artan uygulamaları ile hızla büyüyen bir disiplin olmuştur. Bu büyüme, eşitsizlikler teorisinin matematiksel analizin bağımsız bir alanı olarak ortaya çıkmasına neden olmuştur. Son yıllarda eşitsizlikler birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve literatürde çok sayıda yeni sonuç araştırılmıştır. Eşitsizlikler teorisi matematiğin dışında, matematiksel ekonomi, oyun teorisi, matematiksel programlama, kontrol teorisi, varyasyonel yöntemler, yöneylem araştırması, olasılık ve istatistik gibi çeşitli alanların da ilgi odağı olmuştur. Literatürde, Hölder Eşitsizliği, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Minkowski Eşitsizliği, Jensen Eşitsizliği, Cauchy Eşitsizliği, Young Eşitsizliği, Bernoulli Eşitsizliği, Chebyshev Eşitsizliği, Grüss Eşitsizliği, Abel Eşitsizliği, Bessel Eşitsizliği gibi bir çok önemli eşitsizlik vardır. Konveks fonksiyonun tanımı da bir eşitsizlik yardımıyla ifade edilmektedir ve özellikle konveks fonksiyonun literatürde yer almasından sonra yeni bir çok konvekslik türü tanımlanarak bir çok yeni eşitsizlik elde edilmiştir.

Matematiğin bir diğer önemli alt alanı kesirli analizdir. Kesirli analiz, bir dizi harfle kavramsallaştırılan önemli bir matematik dalıdır. Bu matematik dalı ilk olarak 1695'te L'Hopital'in, Leibniz'e “Türevin mertebesi $\frac{1}{2}$ olarak alınırsa ne olacak” sorusunu sormasıyla başlar. Bu soru karşısında Leibniz'in cevabı: “Bu paradokslardan bir gün faydalı sonuçlar çıkarılacak gibi görünüyor.” şeklinde olmuştur [53].

Kesirli türevleme ve kesirli integralleme kavramları 18. ve 19. yüzyıllar boyunca daha ayrıntılı olarak incelenmiştir. Konu, Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Lacroix (1819), Fourier (1822), Liouville (1832), Riemann (1847), Greer (1859), Holmgren (1865), Grünwald (1867), Letnikov (1868), Sonin (1869), Abel (1881), Laurent (1884), Nekrassov (1888), Krug (1890), Weyl (1917) ve Hardy ve Littlewood (1928) gibi matematikçilerin dikkatini çekmiştir ([3],[34],[35],[52],[55],[72]). Kesirli analiz tarihiyle ilgili ayrıntılı tartışmalar ([9], [28],[39],[57],[74])'de bulunabilir.

Bu alanda, Leibniz'in tanımladığı "paradokslar" daha sonraki matematikçiler tarafından çözüldü, ancak bu, kesirli analiz alanının artık tamamen açık problemlerden arınmış olduğu anlamına gelmiyordu. Yüzyıllar boyunca tekrar eden bu konuyla ilgili, birbiriyle çelişen birden çok tanım ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla 19. yüzyılın ortalarında, kesirli analizin birkaç farklı tanımı önerilmiştir. Lacroix türevlenebilen kuvvet fonksiyonlarına dayalı farklı bir tanım oluştururken, Liouville, üstel fonksiyonların türevlenmesine dayalı bir tanım ve ters kuvvet fonksiyonları için integral formülüne dayalı bir tanım oluşturmuştur. Liouville ve Lacroix'in tanımları eşdeğer değildir, bu da bazı matematik-çilerin birinin "doğru" diğerinin "yanlış" olması gerektiği sonucuna varmasına neden olmuştur. Ancak bu durum karşısında De Morgan şunu yazmıştır [23]: "O halde bu sistemlerin her ikisi de daha genel bir sistemin parçaları olabilir." De Morgan'ın bu sözleri, Leibniz'in yıllar önceki sözleri gibi geleceği görür nitelikteydi. Hem Liouville'in formülü hem de Lacroix'in formülü, aslında şimdi Riemann-Liouville kesirli analizin tanımı olarak adlandırılan kavramın özel durumlarıdır ([10]).

20. yüzyılın sonlarında; kesirli analiz, popülerlik ve araştırma çıktısı bakımından büyük bir artış göstermiştir. Kesirli matematik üzerine ilk uluslararası konferans 1974'te Bertram Ross tarafından ABD'deki "University of New Haven" de düzenlenmiş ve aynı yıl bu alana adanmış ilk ders kitabı yayımlanmıştır [67]. O zamandan beri, kesirli matematik, konuyla ilgili bir çok uzman dergi ile çok aktif bir araştırma alanı haline gelmiştir. [11],[12],[38],[79] referanslarında özetlendiği gibi, birçok bilim alanında uygulamalar keşfedilmiştir. Özellikle, kesirli operatörlerin ara özelliği, belirli ara fiziksel süreçlerin modellenmesi için hayati öneme sahiptir ve örnek olarak viskoelastiklik verilebilir ([15],[29]). Kesirli hesap, öğrenciler ve genç araştırmacılar için bir araştırma alanı ve alana giriş işlevi görebilecek birkaç ders kitabıyla birlikte, bazı üniversitelerde lisansüstü matematik müfredatının standart bir parçası haline gelmiştir ([9],[49],[57],[67],[71],[74]).

Kesirli analiz alanındaki çalışmalar, son yıllarda eşitsizlik teorisine ek olarak uygulamalı bilimlerin ve matematiğin birçok alanına yeni bir bakış açısı ve yönelim getirmiştir.

Kesirli analiz, yeni tanımlanan kesirli integral ve türev operatörlerinin uygulamalarıyla birçok probleme ışık tutmuştur. Bu nedenle bazı araştırmacılar, farklı bilim ve mühendislik alanlarındaki problemleri modellemek için gerekli olan daha fazla yeterli alan sağlamak amacıyla mevcut olanlardan farklı, tekil veya tekil olmayan çekirdeklere sahip yeni kesirli türevler tanımlamanın gerekli olduğunu ortaya koymuşlardır. Bu anlamda ortaya konulan yeni operatörlerde bazı önemli kriterler, onları farklılaştırmış ve bazılarını diğerlerine göre uygulamalarda avantajlı hale getirmiştir. Operatörlerin çekirdeğinde kullanılan "üstel fonksiyon veya kuvvet fonksiyon" ifadeleri kesirli operatörlerin yerellik (lokallik) ve tekillik(singülerlik) gibi özelliklerini ortaya çıkarmış ve tanımlamada kullanılan parametrelerin özel versiyonları için başlangıç koşullarının elde edilmesi önemli hale gelmiştir. Bir diğer önemli detay ise operatörlerin tanımlandığı uzayları ortaya çıkarmak ve problemlere uygunluğunu göstermektir. Ayrıca, kesirli türevin kullanılması, matematik ve fizik dışında bir çok bilim dalına da yayılmıştır ve bunlar, biyoloji, ekonomi, demoğrafi, jeofizik, tıp, biyomühendislik şeklinde sıralanabilir. Kesirli analizde; başta, Riemann-Liouville kesirli türev ve integral operatörleri olmak üzere, Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integral operatörleri, Hadamard kesirli türev ve integral operatörleri, conformable kesirli türev ve integral operatörleri, Katugampola kesirli türev ve integral operatörleri, Atangana-Baleanu kesirli türev ve integral operatörleri gibi bir çok farklı operatör tanımlanmıştır. Bu operatörlerin tanımlanmasının özellikle eşitsizlik teorisinin gelişimine önemli katkısı olmuştur ve matematikte bir çok yeni sonucun elde edilmesini sağlamıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Bazı Fonksiyonlar ve Fonksiyon Uzayları

2.1.1 Konveks Küme ve Konveks Fonksiyon

Eşitsizlik teorisinin en önemli kavramları arasında konvekslik kavramını söyleyebiliriz. Konvekslik kavramının tarihi geçmişi matematikçi Euclid ve Archimedes' e kadar dayansa da matematik literatürüne girişi 19. yüzyılın sonlarında olmuştur. Konvekslik kavramını ilk sistematik olarak 1905-1906 yılları arasında J.L.W.V. Jensen incelemiş olsa da ondan önce, Hölder (1889), Stolz (1893) ve Hadamard (1893) konvekslik üzerine çalışmalar yapmışlardır ([32],[40],[45],[46],[78]). Konveksiikle ilgili literatürdeki bazı kaynaklar, E.F. Beckenbach ve R. Bellman (1961), D.S. Mitrinović (1970), A.W. Roberts ve D.E. Varberg (1973), J.E. Pečarić ve ark. (1992), C.P. Niculescu ve L.E. Persson(2006) olarak sıralanabilir ([13],[59],[65],[68],[73]). Konvekslik, endüstri, ticaret, tıp ve sanat alanlarındaki çok sayıda uygulama aracılığıyla günlük yaşamımız üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Konveksliğin en önemli kavramlarından biri konveks kümedir ve tanımı aşağıdadır.

Tanım 2.1.1 L bir lineer uzay, $A \subseteq L$ ve $p, q \in A$ olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha p + (1-\alpha)q, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir ([51]).

Geometrik olarak konveks küme, "Herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını kapsayan kümeye konveks küme denir" şeklinde ifade edilir. Eğer bir küme konveks değilse bu kümeye konkav küme denir.

Bir çok fonksiyon türü vardır ve bu fonksiyon türlerinden biri de konveks fonksiyonlardır. Matematiğin; eşitsizlik teorisi, konveks programlama, istatistik, sayısal analiz gibi birçok alanındaki uygulamaları ile diğer fonksiyon sınıflarından ayrılan konveks fonksiyonun tanımı bir eşitsizlik olarak ifade edilmektedir ve bu fonksiyonlar süreklilik ve limit gibi özellikleri sağlamaktadır. Geniş uygulama alanı ve özellikleri bakımından eşitsizlik teorisi için önemli olan konveks fonksiyonlar bir çok uygulamalı alanda araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Bu ilgi çekici fonksiyonlar analitik olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 2.1.2 $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{2.1.1}$$

eşitsizliğini sağlarsa f'ye konveks fonksiyon denir. $(-f)$ konveks fonksiyon ise f'ye konkav fonksiyon denir. Eğer (2.1.1) eşitsizliğinde $x \neq y$ ve $\lambda \in (0,1)$ ise f'ye kesin konveks fonksiyon denir ([73]).

Aslında konveks fonksiyon geometrik olarak, "Eğer reel değerli bir fonksiyonun grafiğinin üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren dogru parçası, fonksiyonun bu iki noktası arasında yer alan grafiğiyle çakışıyorsa veya grafiğinin üstünde kalıyorsa bu fonksiyona konveks fonksiyon denir" şeklinde ifade edilir. Bu geometrik ifadenin eşdeğeri, "Eğer reel değerli bir fonksiyonun grafiğinin üzerinde yer alan ve grafiğinin üstündeki noktaların kümesi konveks ise bu fonksiyona konveks fonksiyon denir" şeklindedir.

Basit konveks fonksiyonlara, $x \in (-\infty,\infty)$ olmak üzere $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, 0]$ olmak üzere $g(x) = \sin x$, $x \in (-\infty,\infty)$ olmak üzere $(k(x) = |x|$ örnekleri verilebilir.

Konveks fonksiyonların kendi içinde bir çok çeşidi vardır ve bunlardan bazıları, h-konveks fonksiyonlar, birinci ve ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar, logaritmik-konveks fonksiyonlar, r-konveks fonksiyonlar, g-konveks fonksiyonlar, m-konveks fonksiyonlar, (α, m)-konveks fonksiyonlar, (k,h)-konveks fonksiyonlar, quasi-konveks fonksiyonlar, olarak sıralanabilir. Bu konveks fonksiyon sınıflarından bazılarının tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.3 $0 < s \leq 1$ olsun. Her $x, y \in [0,\infty)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s-Orlicz konveks veya s-konveks fonksiyon denir. Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı K_s^1 ile gösterilir ([25],[69]).

Tanım 2.1.4 $0 < s \leq 1$ olsun. Her $x, y \in [0,\infty)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{2.1.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s-Breckner konvex veya s-konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı K_s^2 ile gösterilir ([16],[41]).

Tanım 2.1.5 I, J $\mathbb{R}$'de bir aralık, $(0,1) \subseteq J$, $h : J \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $h \not\equiv 0$ olsun. Her $x, y \in I$, $t \in (0,1)$ için $f : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y) \tag{2.1.4}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir ([82]).

2.1.2 İnveks Küme ve Pre-inveks Fonksiyon

Literatürde önemli bir yere sahip ve açık bir geometrik yorumu olan inveks kümenin tanımı aşağıdadır.

Tanım 2.1.6 $\mathbb{X} \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mu : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n$ olsun. Her $k_1, k_2 \in \mathbb{X}$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere $k_1 + t\mu(k_2, k_1) \in \mathbb{X}$ ise $\mathbb{X}$ kümesine inveks küme denir.

İnveks küme konveks kümeden daha genel bir kümedir. Eğer $\mu(k_2, k_1) = k_2 - k_1$ ise her konveks küme bir inveks kümedir fakat her inveks kümenin bir konveks küme olması gerekmez ([7],[58],[63]).

1981 yılında M.A. Hanson [33]'te diferansiyellenebilir $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için, her $k_1, k_2 \in S$ ve $\mu(k_2, k_1)$ n-boyutlu vektör fonksiyonu olmak üzere

$$f(k_2) - f(k_1) \geq [\mu(k_2, k_1)]' \triangledown f(k_1) \tag{2.1.5}$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Ardından B.D. Craven [22]'de bu tür fonksiyonları inveks fonksiyonlar olarak adlandırmıştır. Daha sonra A. Ben-Israel ve B. Mond [14]'te, her $k_1, k_2 \in S$, $\mu(k_2, k_1)$ n-boyutlu vektör fonksiyonu ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big) \leq (1-t)f(k_1) + tf(k_2) \tag{2.1.6}$$

eşitsizliğini sağlayan diferansiyellenebilir $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının inveks fonksiyonlar olduğunu ortaya koymuştur. 1988 yılında ise T. Weir ve B. Mond [84]'te inveks fonksiyonların kısa bir tarihi sürecini ve (2.1.6) eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların pre-inveks fonksiyonlar olarak adlandırılabileceğini ifade etmiştir. $\mathbb{X} \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ invex kümesinde tanımlı pre-inveks fonksiyonun tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.7 $\mathbb{X} \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ bir inveks küme olmak üzere $\mu : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \neq \emptyset \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $t \in [0,1]$ ve $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{X}$ olmak üzere $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big) \leq (1-t)f(k_1) + tf(k_2) \tag{2.1.7}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna μ fonksiyonuna göre pre-inveks fonksiyon denir ([84]).

Eğer $(-f)$ fonksiyonu pre-inveks ise f'ye pre-incave denir. Ayrıca (2.1.7) eşitsizliğinde $\mu(k_2, k_1) = k_2 - k_1$ olarak alınırsa pre-inveks fonksiyon klasik konveks fonksiyona dönüşür. Bu durumda her konveks fonksiyonun pre-inveks fonksiyon olduğu açıktır fakat her pre-inveks fonksiyon konveks fonksiyon olmayabilir. Örneğin; $f(x) = -|x|$ fonksiyonu konveks fonksiyon değildir fakat aşağıdaki

$$\mu(k_2, k_1) = \begin{cases} k_2 - k_1, & k_1 \leq 0,\ k_2 \leq 0 \\ k_2 - k_1, & k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0 \\ k_1 - k_2, & k_1 > 0,\ k_2 < 0 \\ k_1 - k_2, & k_1 < 0,\ k_2 > 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna göre pre-inveks fonksiyondur.

Mohan and Neogy [63]'te aşağıdaki 2.1.1 koşulunu tanımlamışlardır.

Koşul 2.1.1 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ inveks bir küme olmak üzere $\mu : A \times A \to \mathbb{R}^n$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in A$ ve her $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} \mu\big(y, y + t\mu(x, y)\big) &= -t\mu(x, y) \\ \mu\big(x, y + t\mu(x, y)\big) &= (1 - t)\mu(x, y) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

eşitlikleri varsa μ fonksiyonu Koşul 2.1.1'i sağlar denir.

Her $x, y \in A$ ve her $t_1, t_2 \in [0, 1]$ için Koşul 2.1.1'den

$$\mu\big(y + t_2\mu(x, y), y + t_1\mu(x, y)\big) = (t_2 - t_1)\mu(x, y) \tag{2.1.9}$$

eşitliği yazılır $\big($(2.1.9)'un ispatı için bakınız [44]$\big)$.

2.1.3 Bazı Özel Fonksiyonlar

Senkronize fonksiyonların tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.8 (Senkronize Fonksiyonlar) Her $x, y \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ve $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ için

$$\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geq 0 \tag{2.1.10}$$

eşitsizligi geçerli ise f ve g fonksiyonlarına senkronize fonksiyonlar denir.

Kesirli analizde önemli bir yere sahip olan ve Leonhard Euler tarafından 1729 yılında tanımlanan gama fonksiyonunun tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.9 (Gama Fonksiyonu) $Re(z) > 0$ olsun. Gama fonksiyonu $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.1.11}$$

ifadesi ile tanımlanır ([49],[77]).

Gama fonksiyonu ile ilgili

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}_0\ (\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{2.1.12}$$

ve

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ Re(z) > 0 \tag{2.1.13}$$

eşitlikleri yazılır.

Ayrıca, z'nin bazı özel değerleri için (2.1.11) eşitliği kullanılarak

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

ve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunun yanında (2.1.13) eşitliği kullanılarak

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

eşitliği elde edilir.

Beta fonksiyonun tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.10 (Beta Fonksiyonu) $Re(\eta) > 0$ ve $Re(\rho) > 0$ olsun. Beta fonksiyonu $\beta(\eta, \rho)$

$$\beta(\eta, \rho) = \int_0^1 t^{\eta-1} (1-t)^{\rho-1} dt$$

ifadesi ile tanımlanır [77].

İsveçli matematikçi Gosta Mittag-Leffler tarafından 1903 yılında tanımlanan klasik ve genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.11 (Klasik Mittag-Leffler Fonksiyonu) $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere klasik Mittag-Leffler fonksiyonu $E_\alpha(z)$

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{2.1.14}$$

ifadesi ile tanımlanır ([37],[49]).

Tanım 2.1.12 (Genelleştirilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonu) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{\alpha,\beta}(z)$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{2.1.15}$$

ifadesi ile tanımlanır ([37],[49]).

Klasik Mittag-Leffler fonksiyonu $E_\alpha(z)$'nin, α'nın bazı özel değerleri için eşitleri aşağıda verilmiştir.

i. $E_0(z) = \frac{1}{1-z'}$, $|z| < 1$

ii. $E_1(z) = e^z$

iii. $E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}), z \in \mathbb{C}$

iv. $E_2(-z^2) = \cos(z), z \in \mathbb{C}$

v. $E_3(z) = \frac{1}{2}\left[e^{z^{1/3}} + 2e^{-(1/2)z^{1/3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} z^{1/3}\right)\right], z \in \mathbb{C}$

v. $E_4(z) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(z^{1/4}\right) + \cosh\left(z^{1/4}\right)\right], z \in \mathbb{C}.$

2.1.4 Sobolev Uzayları

Tanım 2.1.13 (Sobolev Uzayı) Ω, $\mathbb{R}^n$'nin açık bir alt kümesi ve çoklu indeks α için $|\alpha| \leq k$ olmak üzere $u \in L^p(\Omega)$ fonksiyonlarının zayıf türevi $D^\alpha u$ var olsun. Bu durumda $W^{k,p}(\Omega)$ sobolev uzayı

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

ifadesi ile tanımlanır ([4],[50]).

Tanım 2.1.14 (1. Mertebeden Sobolev Uzayı) (a,b), $\mathbb{R}$'nin açık aralığı olmak üzere 1. mertebeden Sobolev uzayı aşağıdaki

$$H^1(a,b) = \left\{u \in L_2(a,b) : u' \in L_2(a,b)\right\}$$

ifadesi ile tanımlanır ([18],[81]).

$W^{k,p}(\Omega)$ sobolev uzayında $p = 2$ alınrsa bu uzay Hilbert Uzayına eşit yani $W^{k,2}(\Omega) = H^1(a,b)$ olur. Bir f fonksiyonu için $f \in H^1(a,b)$ olması o fonksiyonun (a,b) aralığında kendisinin ve türevinin integrallenebildiğini garantiler.

2.2 Bazı Önemli Eşitsizlikler

Eşitsizlik teorisindeki çalışmalar bir çok yeni eşitsizliğin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu eşitsizliklerin en önemlilerinden ve literatürde en çok bilinenlerden biri Charles Hermite ve Jacques Hadamard tarafından konveks fonksiyonlar kullanılarak elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğidir ve aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.1 ***(Hermite-Hadamard Eşitsizliği)*** I, $\mathbb{R}$'nin bir aralığı olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Yukarıdaki (2.2.1) eşitsizliğinin sol tarafını; konveks fonksiyonlar resmi olarak tanıtılmadan önce, $[a, b]$ üzerinde artan f' ile birlikte f fonksiyonları için 1893 yılında Hadamard ispat etmiştir ve dolayısıyla bu eşitsizliğin sol tarafı bazen Hadamard eşitsizliği olarak da ifade edilir. Fakat 1985 yılında Mitrinović ve Lacković [60]'ta (2.2.1)'deki eşitsizlikleri Hadamard'dan on yıl önce, 1883 yılında elde edenin Charles Hermite olduğunu belirtmişlerdir. Günümüzde, Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen bu eşitsizliğin farklı fonksiyon sınıfları ile birlikte farklı kesirli türev ve integral operatörleri yardımıyla çeşitli fonksiyonlar için bir çok genelleştirilmesi yapılarak yeni varyasyonları elde edilmiştir. Dolayısıyla bu anlamda bu eşitsizliğin eşitsizlik teorisine katkısı büyük olmuştur ([27],[70]).

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin farklı fonksiyon sınıfları için elde edilen çeşitli versiyonları aşağıda verilmiştir.

Sarıkaya ve arkadaşları [75]'te h-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.2 $f \in SX(h, I)$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1([a, b])$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \left[f(a)+f(b)\right] \int_0^1 h(\alpha)d\alpha \tag{2.2.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Dragomir ve Fitzpatrick [26]'da ikinci anlamda s-konveks fonksiyonları için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.3 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyon, $s \in (0,1)$, $a,b \in [0,\infty)$ ve $a < b$ olsun. $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Noor [66]'da pre-invex fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir.

Teorem 2.2.4 $I^{\circ} \subseteq \mathbb{R}$, $k_1, k_2 \in I^{\circ}$ ve $k_1 < k_1 + \mu(k_2,k_1)$ olmak üzere $f : I = [k_1, k_1 + \mu(k_2,k_1)] \to (0,\infty)$ fonksiyonu I°'de pre-inveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{2k_1 + \mu(k_2,k_1)}{2}\right) \leq \frac{1}{\mu(k_2,k_1)} \int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)} f(x)dx \leq \frac{f(k_1)+f(k_2)}{2} \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Ayrıca, C.P. Niculescu [64]'te logaritmik konveks fonksiyonlar için, S.S. Dragomir [24]'te m-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini elde etmişlerdir. Öte yandan literatürde, yukarıda verilen fonksiyonların dışında var olan diğer bir çok farklı fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard eşitsizliği mevcuttur.

Kavurmacı ve arkadaşları [48]'de konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli bazı yeni eşitsizlikler elde etmişlerdir. Bu eşitsizliklerin bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.5 $a,b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için $|f'|$ konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \\ \leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(a)|}{6}\right] + \frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(b)|}{6}\right] \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.6 $a,b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer her $x \in [a,b]$, $q = \frac{p}{p-1}$ ve bazı sabit $q > 1$ için $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2\left[|f'(a)|^q+|f'(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2\left[|f'(b)|^q+|f'(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right] \tag{2.2.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.7 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ ve bazı sabit $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2\left[2|f'(a)|^q+|f'(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2\left[2|f'(b)|^q+|f'(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right] \tag{2.2.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.8 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer bazı sabit $q \geq 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konkav fonksiyon ise

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{x+2a}{3}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{x+2b}{3}\right)\right|}{b-a}\right] \tag{2.2.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.9 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I°'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ ve bazı sabit $q > 1$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konkav fonksiyon ise

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|}{b-a}\right] \tag{2.2.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.10 ***(Hölder Eşitsizliği)*** $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu takdirde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir ([59],[62]).

Teorem 2.2.11 ***(İntegraller için Hölder Eşitsizliği)*** $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı iki reel fonksiyon ve $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ([59],[62]).

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan ve daha iyi sonuçlar elde etmek için kullanılan power mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.2.1 ***(Power Mean Eşitsizliği)*** f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. $q \geq 1$, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.2.12 ***(Jensen Eşitsizliği)*** f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ve $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, ..., n$ olsun. Bu durumda, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği geçerlidir ([70]).

Teorem 2.2.13 ***(İntegraller için Jensen Eşitsizliği)*** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $h : [a, b] \to (0, \infty)$ ve $u : [a, b] \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right) \leq \frac{\int_a^b h(t)f(u(t))dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

eşitsizliği geçerlidir ([70]).

Teorem 2.2.14 ***(Young Eşitsizliği)*** $a, b \geq 0$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q \geq ab \tag{2.2.9}$$

eşitsizliği geçerlidir ve bu eşitsizliğe Young eşitsizliği denir ([59]).

Teorem 2.2.15 ***(Üçgen Eşitsizliği)*** Herhangi x, y reel sayıları için,

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım yoluyla

$$|x_1 + x_2 +, ...x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir ([62]).

Teorem 2.2.16 ***(İntegraller için Üçgen Eşitsizliği)*** $a < b$ olmak üzere f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eşitsizliği geçerlidir ([62]).

Chebyshev'in literatüre kazandırdığı özgün eşitsizliklerden biri aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.17 ***(Chebyshev Eşitsizliği)*** f, g ve p fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir, f ve g senkronize fonksiyonlar ve p pozitif değerli fonksiyon olsun. O halde

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \tag{2.2.10}$$

eşitsizliği geçerlidir ([21], [62]).

Yukarıdaki (2.2.10) eşitsizliğinde $p(x) = 1$ alınırsa, literatürde Chebyshev eşitsizliği olarak bilinen

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \qquad (2.2.11)$$

eşitsizliği elde edilir ([21]). (2.2.11) eşitsizliğinin sol ve sağ tarafındaki ifadeler kullanılarak

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$

eşitliği yazılır. Literatürde bu eşitliğe Chebyshev fonksiyoneli denir. Chebyshev bu fonksiyonel yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir.

Teorem 2.2.18 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mutlak sürekli ve $f', g' \in L_\infty$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)\right| \\ \leq\ & \frac{1}{12}(b-a)^2 \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ([21]).

2.3 Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri

L'Hopital'in, Leibniz'e 1695 yılında sorduğu "Türevin mertebesi $\frac{1}{2}$ olarak alınırsa ne olacak" sorusu ile tarihi süreci başlayan kesirli analiz, 300 yıldan fazla geçmişe sahip klasik analizin bir genellemesidir. Kesirli türev ve integral kavramı; klasik türev ve integral kavramlarından farklı olarak, keyfi mertebeden türev ve integralin hesaplanmasına olanak sağlayan ve bu hasaplamalara bağlı olarak yapılan uygulamaları ve araştırmaları içeren, klasik türev ve integrale göre daha kapsamlı olan matematiğin bir alt alanıdır.

Kesirli analiz kavramı, 18. ve 19. yüzyıllar boyunca bir çok matematikçinin dikkatini çekmiş ve ayrıntılı olarak incelenmiştir. Euler (1730), J.L. Lagrange (1772), P.S. Laplace (1812) kesirli analizden bahsetseler de yazılı bir metinde ilk olarak Lacroix (1819) kesirli analizi ayrıntılı olarak ele almıştır. Lacroix önce, m pozitif tam sayı ve $m \geq n$ olmak üzere $y = x^m$ fonksiyonunun n. mertebeye kadar olan türevlerini sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y &= \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1} \\ \frac{d^2}{dx^2}y &= \frac{d^2}{dx^2}x^m = m(m-1)x^{m-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}y &= \frac{d^3}{dx^3}x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3} \\
&. \\
&. \\
&. \\
\frac{d^n}{dx^n}y &= \frac{d^n}{dx^n}x^m = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n} \\
&= \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!}x^{m-n} \qquad (2.3.1) \\
&= \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}
\end{aligned}$$

şeklinde almıştır. Daha sonra (2.3.1) eşitliğini gama fonksiyonunun özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}y &= \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}
\end{aligned} \qquad (2.3.2)$$

olarak yazmıştır. Lacroix (2.3.2) eşitliğinde, $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ alarak

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx}y &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx}x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}x^{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1.\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

hesaplamasını yapmış ve $y = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$'inci mertebeden türevinin $\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$'ye eşit olduğunu bulmuştur.

Lacroix'in tam sayı mertebeden türevi genelleyerek elde ettiği sonucun, kesirli türevin günümüzdeki Riemann-Liouville tanımıyla elde edilen sonuçla aynı olması ilginçti fakat Lacroix'in elde ettiği bu sonuç kesirli türevin tanımlanması için yeterli ipucu sunmuyordu. Daha sonra kesirli türevden B. J. Fourier (1822) integrali kullanarak bahsetmiştir. Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Lacroix ve Fourier keyfi mertebeden türevlerden bahsetmişlerdir, ancak kesirli işlemlerin ilk kullanımı N.H. Abel tarafından 1823 yılında yapılmıştır. Abel özellikle ilk mühendislik problemi olan "tautochrone" problemi üzerine kesirli işlemler yapmıştır. Daha sonra J. Liouville 1832'de üç uzun anı kitabı yayımlamış ve hızlı bir şekilde art arda bir kaç yayım daha yapmıştır. Liouville'ın yaptığı bu çalışmalar kesirli analizin ilerlemesi açısından çok önemlidir. Kesirli analizin tarihi sürecine Liouville'den sonra G. F. Bernhard Riemann da katılmış ve kesirli integral teorisini öğrencilik yıllarında geliştirmesine rağmen yaptığı çalışmaları yayımlamaktan kaçınmıştır. Daha sonra yaptığı çalışmalar ölümünden sonra 1892 yılında "Gesammelte Werke" adlı kitabında yayımlanmıştır. Bu süreçte hem diğer matematikçilerin hem de Liouville ve Riemann'ın yaptığı kesirli türev tanımlamaları arasında bazı fonksiyonlar ve özel durumlar için kısıtlamalar, tutarsızlıklar vardı ve bazı özel durumlar için farklı sonuçlar elde edilmekteydi. 1869'da N. Ya. Sonin "On Differentation with arbitrary index" başlıklı bir makale yayımlamış ki bu makale kesirli integrasyonun Riemann-Liouville tanımının ilk olarak hesaplarının yapıldığı makaledir. Günümüze kadar bir çok matematikçi, adına bu gün operatör diyeceğimiz hem kesirli türev hem de kesirli integral tanımlarını yaparak alana katkılarını sunmuşlardır ([57]).

Kesirli analizin en çok kullanıldığı alanlardan biri eşitsizlik teorisi olmuştur. Kesirli analiz, eşitsizlik teorisinin gelişmesinde, tanımlanan kesirli türev ve integral operatörler yardımıyla etkili rol oynamıştır. Kesirli analizi geliştiren birçok matematikçi, problemlere çözüm bulmak için tam sayı mertebeli türev ve integral yerine daha iyi sonuçlar vereceği vurgulanan birçok kesirli türev ve integral operatör tanımlamıştır. Günümüz dünyasında kesirli analizin uygulamaları viskoelastisite, reoloji, akustik, optik, kimya ve kontrol teorisi, istatistiksel fizik, robotik, elektrik ve makine mühendisliği, biyomühendislik, yeraltı kaynakları, hastalık modelleri vb. alanlarda çok geniştir. Günümüze kadar tanımlanan bir çok kesirli türev ve integral operatörlerinin bazıları olan Riemann-Liouville kesirli türev ve integral operatörleri, Caputo-Fabrizio kesirli türev ve integral operatörleri ve Atangana-Baleanu kesirli türev ve integral operatörleri hakkında detaylı bilgiye bu tezde yer verilmiştir.

2.3.1 Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri

Rastgele bir fonksiyonun kesirli türevi ve kesirli integrali için genel Riemann-Liouville tanımı, 19. yüzyılın sonlarında karmaşık bir analiz yaklaşımıyla ortaya çıkmıştır. Riemann-Liouville formülü şimdi çoğunlukla reel analiz bağlamında kullanılmasına rağmen, orijinal motivasyonu, karmaşık bir analitik fonksiyonun tekrarlanan türevleri için Cauchy integral formülünün genelleştirilmesinden gelmiştir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integralleri aşağıdaki gibidir:

Tanım 2.3.1 (Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörleri) $f \in L_1[a,b]$ olsun. $\alpha > 0$ ve $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ reel eksen üzerinde sonlu bir aralık olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla,

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b$$

dir. Ayrıca $\alpha = 0$ için $J_{a^+}^0 f(x) = J_{b^-}^0 f(x) = f(x)$ olarak tanımlanır ([49]).

Ayrıca, Riemann-Liouville kesirli türevleri, Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.3.2 (Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörleri) $\alpha \in \mathbb{C}$ $(Re(\alpha) \geq 0)$ olmak üzere $[Re(\alpha)]$, $Re(\alpha)$ nın tam değeri olsun. α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevinin sol ve sağ tarafı sırasıyla,

$$\begin{aligned}(D_{a^+}^{\alpha} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (J_{a^+}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1} dt}, \quad (n = [Re(\alpha)] + 1;\ x > a)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(D_{b^-}^{\alpha} f)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (J_{b^-}^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1} dt}, \quad (n = [Re(\alpha)] + 1;\ x < b)\end{aligned}$$

dir ([49]).

Bu tanım, hem Liouville'in hem de Lacroix'in formüllerini kapsayacak kadar geneldir. Ancak yine de kesirli analizi tanımlamanın önerilen tek yolu bu değildir. Birden çok çelişkili formülün günümüze kadar varlığını koruyarak gelmesi, birinci dereceden türevin tek bir tanımı olduğunu bilen ve kesirli türevlerin de tek bir tanımını görmeyi bekleyen, alana yeni gelmiş birçok kişinin kafasını karıştırmaktadır. Riemann-Liouville modeli, integral dönüşümün tanımındaki kuvvet fonksiyonu içeren çekirdeği nedeniyle, kuvvet yasası davranışına sahip süreçleri tanımlamak için kullanılabilir ancak doğada meydana gelen ve basit kuvvet fonksiyonlarıyla tanımlanamayan başka birçok davranış türü vardır. Riemann-Liouville kesirli türevleriyle başlangıç-değer problemlerinin matematiksel olarak çözümü mümkündür fakat bu tür problemlerin, Riemann-Liouville kesirli türevlerinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına yol açmasından ve bu başlangıç koşullarının fiziksel yorumunun olmamasından dolayı, bu türev operatörüyle pratikte çözülmesi kullanışsızdır. Ayrıca Riemann-Liouville kesirli türev operatörlerinin olumsuz bir diğer yanı çekirdeğinin singüler olması ve bu durumun hesaplamalarda algoritma kurarken zorluk çıkarmasıdır. Dolayısıyla, daha karmaşık olan ve basit kuvvet fonksiyonları ile tanımlanamayan süreçleri ve davranış türlerini tanımlamak için farklı kesirli tanımlar ortaya çıkarılmaya devam edilmiştir.

Literatürde, Jensen, Hölder, Minkovski, Wirtinger, Young ve bilinen bir çok klasik eşitsizlik kullanarak kesirli operatörler yardımıyla elde edilmiş bir çok eşitsizlik yer almaktadır.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin farklı kesirli integral operatörleri için çeşitli versiyonları elde edilmiştir. Bunlardan ilki Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri için elde edilmiştir. Aşağıda Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ve elde edilen diğer bazı sonuçlar verilmiştir.

Sarıkaya ve arkadaşları [76]'da Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir. Onlar bu çalışmayla, Riemann-Liouville kesirli integral operatörlerini kullanarak Hermite-Hadamard integral eşitsizliği için farklı bir bakış açısı geliştirmiştir. Ayrıca bu çalışma, klasik integral eşitsizliklerinin genelleştirilmesi, geliştirilmesi ve elde edilmesinde anahtar rol oynamaktadır.

Teorem 2.3.1 $0 \leq a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif fonksiyon olsun. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise kesirli integraller için aşağıdaki

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\,(b-a)^{\alpha}}\,\left[J^{\alpha}_{a+}f(b) + J^{\alpha}_{b-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Ayrıca, Sarıkaya ve arkadaşları [76]'da Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri için aşağıdaki integral eşitliğini elde etmişlerdir.

Lemma 2.3.1 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$ ise kesirli integraller için aşağıdaki

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a+}f(b) + J^{\alpha}_{b-}f(a)\right] = \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği elde edilir.

İşcan [43]'te Riemann-Liouville kesirli integral operatörlerini kullanarak konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli ve [42]'de ise Riemann-Liouville kesirli integral operatörlerini kullanarak pre-inveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard integral eşitsizliklerini elde etmiştir ve bu eşitsizlikler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.2 $a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Eğer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $(a+b)/2$ ye göre simetrik ise $\alpha > 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{a^+}g(b) + J^{\alpha}_{b^-}g(a)\right] &\le \left[J^{\alpha}_{a^+}fg(b) + J^{\alpha}_{b^-}fg(a)\right] \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J^{\alpha}_{a^+}g(b) + J^{\alpha}_{b^-}g(a)\right] \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.3.3 $A \subseteq \mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme olmak üzere $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a, b \in A$ için $a < a + \eta(b,a)$ olsun. Eğer $f : [a, a+\eta(b,a)] \to (0,\infty)$ bir pre-inveks fonksiyon, $f \in L_1[a, a+\eta(b,a)]$ ve η fonksiyonu Koşul 2.1.1'i sağlıyorsa, $\alpha > 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) &\le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left[\mu(b,a)\right]^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^+}f\big(a+\eta(b,a)\big) + J^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-}f(a)\right] \\ &\le \frac{f(a)+f\big(a+\eta(b,a)\big)}{2} \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.3.2 Caputo-Fabrizio Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri

Yeni bir kesirli türev tanımı olarak zamansal temsili varsayan Caputo kesirli türev tanımı verilmiştir. Bu zamansal temsil, bilinen kesirli türevlerin çözümlerinde ortaya çıkan formüllerde ve hesaplamalardaki reel kuvvetlerin bazı sadeleştirmelerle birlikte tam sayı kuvvetlere dönüşeceği zaman değişkenleri üzerinde çalışır. Bu çerçevede yapılacak hesaplamalarda Laplace dönüşümü kullanmanın uygunluğu ortaya çıkmaktadır.

Bu yeni yaklaşımın ilgi alanı, klasik viskoelastik malzemelerin, termal ortamların, elektromanyetik sistemlerin davranışlarını tanımlayan bir model kullanma gerekliliğidir.

Aslında kesirli türevin orijinal tanımı, plastiklik, aşınma, hasar ve elektromanyetik histerezis ile ilgili mekanik olaylar için uygun görülmektedir.

Zamansal temsili varsayan yeni kesirli türevin tanımı M. Caputo tarafından aşağıda yapılmıştır.

Tanım 2.3.3 (Caputo Kesirli Türev Operatörü) $\alpha \in [0,1]$, $a \in (-\infty, t)$, $f \in H^1(a,b)$ ve $b > a$ olmak üzere α. mertebeden Caputo kesirli türevi

$$ {}^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \tag{2.3.4}$$

olarak verilir ([18]).

Burada, J. Losada ve J.J. Nieto [56]'da Caputo kesirli türevinin tanımını, farklı bir aralıkta aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Tanım 2.3.4 $\alpha \in (0,1)$, $f \in H^1(0,b)$ ve $b > 0$ olmak üzere α. mertebeden Caputo kesirli türevi

$$ {}^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t > 0 \tag{2.3.5}$$

olarak verilir.

Caputo kesirli türevinin temel avantajı, Caputo kesirli türev içeren diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarıyla tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. Günümüzde, kesirli matematik ve özellikle Caputo kesirli türevi, bilimin farklı alanlarında sayısız uygulama alanı bulmaktadır ve kesirli türevlerin bir çok problemde başarıyla kullanıldığı bilinmektedir ([8],[17],[20],[38]). M. Caputo'nun Tanım 2.3.3 de verdiği türev operatörü tanımının eksik yanı $t = s$ için singüler çekirdeğe sahip olmasıdır. Bu eksikliği gidermek için M. Caputo ve M. Fabrizio, (2.3.4) eşitliğindeki $(t-s)^{-\alpha}$ ifadesinin yerine $exp\left(-\frac{\alpha}{(1-\alpha)}(t-s)\right)$ üstel fonksiyonunu ve $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ ifadesi yerine $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ ifadesini kullanarak

$$ {}^{CF}D^{\alpha} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t exp\left(-\frac{\alpha}{(1-\alpha)}(t-s)\right) f'(s) ds \tag{2.3.6}$$

yeni türev operatörü tanımı vermişlerdir. Buradaki $M(\alpha)$, $M(0) = M(1) = 1$ olmak üzere α'ya bağlı normalizasyon(normalleştirme) fonksiyonudur ([18]). Ayrıca bu türevin anti-türevini J. Losada ve J.J. Nieto [56]'da vermişlerdir ve bu anti türevin birinci mertebeden integral ile verilen fonksiyon arasında bir ortalama olduğunu ifade etmişlerdir. Yeni tanımda, f sabit bir fonksiyon ise ${}^{CF}D^{\alpha} f(t) = 0$ olduğu açıktır.

Bu tezin buradan sonraki kısmında $M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonuyla aynı özelliğe sahip olan $B(\alpha)$, $B(0) = B(1) = 1$ olmak üzere α'ya bağlı normalizasyon(normalleştirme) fonksiyonu olarak kullanılacaktır.

α. mertebeden kesirli türev kavramından sonra, α. mertebeden kesirli integral doğal bir gereklilik haline gelmiştir. Dolayısıyla Caputo-Fabrizio kesirli integrali, Caputo-Fabrizio kesirli türevine göre aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.5 (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörü) $f \in H^1(a,b)$, $b > a$, $\alpha \in [0,1]$ ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu olmak üzere Caputo-Fabrizio kesirli integralinin sol ve sağ tarafı sırasıyla

$$\left({}_{a}^{CF}I^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_a^t f(y)dy,$$

ve

$$\left({}^{CF}I_b^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_t^b f(y)dy$$

dir ([1]).

Aşağıda Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri için bazı sonuçlar verilmiştir.

Gürbüz ve arkadaşları [31]'de konveks fonksiyonlar için Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 2.3.4 $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda $\alpha \in [0,1]$ ve $k \in [a,b]$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)} \left[\left({}_{a}^{CF}I^{\alpha} f\right)(k) + \left({}^{CF}I_b^{\alpha} f\right)(k) - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(b-a)} f(k) \right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur.

Ayrıca [31]'de, Gürbüz ve arkadaşları Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki lemmayı elde etmişlerdir.

Lemma 2.3.2 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_1[a,b]$, $\alpha \in [0,1]$ ve $k \in [a,b]$ ise

$$
\begin{aligned}
& \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'\left(ta+(1-t)b\right)dt - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(b-a)}f(k) \\
= \quad & \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)}\left[\left({}_{a}^{CF}I^{\alpha}f\right)(k) + \left({}^{CF}I_{b}^{\alpha}f\right)(k)\right]
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur.

Bunun yanında Gürbüz ve arkadaşları Lemma 2.3.2'yi kullanarak konveks fonksiyonlar için Caputo-Fabrizio kesirli integrallari yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde etmişlerdir.

Teorem 2.3.5 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°'de diferansiyellenebilir pozitif bir fonksiyon ve $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $|f'|$ konveks fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L_1[a, b]$, $\alpha \in [0, 1]$ ve $k \in [a, b]$ ise

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(b-a)}f(k) - \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)}\left[\left({}_{a}^{CF}I^{\alpha}f\right)(k) + \left({}^{CF}I_{b}^{\alpha}f\right)(k)\right]\right| \\
\leq \quad & \frac{(b-a)\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)}{8}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir ve $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonudur ([31]).

Muhammad Tariq ve arkadaşları [80]'de Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri yardımıyla pre-inveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini ispat etmişlerdir.

Teorem 2.3.6 $f : I = [k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)] \to (0, \infty)$ foksiyonu I°'de pre-inveks fonksiyon ve $f \in L_1[k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)]$ olsun. Bu durumda $k \in [k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)]$ için

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{2k_1+\mu(k_2,k_1)}{2}\right) \\
\leq \quad & \frac{B(\alpha}{\alpha\mu(k_2,k_1)}\left[\left({}_{k_1}^{CF}I^{\alpha}f\right)(k) \ + \left({}^{CF}I_{k_1+\mu(k_2,k_1)}^{\alpha}f\right)(k) - \frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(k)\right] \\
\leq \quad & \frac{f(k_1)+f(k_2)}{2}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri yardımıyla elde edilen diğer bir çok integral eşitsizliğinden ikisi Teorem 2.3.7 ve Teorem 2.3.8'de verilmiştir.

Teorem 2.3.7 $\lambda \geq 0$ ve $f \in L_1[a,b]$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$, kesin konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha \in [0,1]$ ve $k \in [0,1]$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\lambda}{12}(b-a)^2 &\leq \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)}\left[\left({}^{CF}_{\ a}I^{\alpha} f\right)(k) + \left({}^{CF}I^{\alpha}_{b} f\right)(k) - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(b-a)}f(k)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\lambda}{6}(b-a)^2 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir ve $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonudur ([54]).

Teorem 2.3.8 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde modifiye h-konveks fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda $\alpha \in [0,1]$ ve $k \in [a,b]$ ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)}\left[\left({}^{CF}_{\ a}I^{\alpha} f\right)(k) + \left({}^{CF}I^{\alpha}_{b} f\right)(k) - \frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(k)\right] \\ &\leq f(a) + [f(b)-f(a)]\int_0^1 h(u)du \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonudur ([83]).

2.3.3 Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegral Operatörleri

Caputo-Fabrizio'nun türev operatör tanımı sistemlerin dinamiklerini açıklamak için iyi bir araç olsa da tanımdaki temel problem $\alpha = 1$ için orijinal fonksiyona dönülememesidir. Bu soruna Caputo ve Fabrizio [19]'da yaptıkları çalışmada çözüm üretmişlerdir. Caputo ve Fabrizio'nun [18]'de ortaya koyduğu ana mesaj, "hafıza etkisiyle sistemin dinamiklerini daha iyi tanımlamanın yolunu bulmak" tı. Dolayısıyla, "sistemin dinamiklerini daha iyi tanımlayan en doğru çekirdek nedir?" sorusuna, A. Atangana ve D. Baleanu bir lokal (yerel) çekirdeğe sahip olmayan kesirli türev operatörü tanımlayarak cevap vermeye çalışmışlardır.

Atangana-Baleanu [6]'da, Caputo-Fabrizio Türev Operatörünü temel alarak ve Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla, problemlerin dinamiklerini daha da iyi bir şekilde tanımlayacak olan, aşağıdaki türev operatörünü tanımlamışlardır.

Tanım 2.3.6 (Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörü) $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$ {}^{ABC}_{\ \ a}D^{\alpha}_{t}\left[f(t)\right] = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f'(x)E_{\alpha}\left[-\alpha\frac{(t-x)^{\alpha}}{(1-\alpha)}\right]dx \tag{2.3.7}$$

dir.

Viskoelastik malzemelerin, termal ortamın ve diğer bazı malzemelerin davranışını tasvir eden daha iyi bir modelin kullanılması gerekliliğinden ortaya çıkan bu tanım, başlangıç koşuluyla birlikte bazı fizik problemlerini çözmek için Laplace dönüşümünü kullanırken büyük avantaj sağlamaktadır. Tanımlanan bu türev operatörü, farklı ölçeğe sahip malzemelerdeki ve ayrıca heterojen ortamlara sahip malzemelerdeki ısı akışını modellemek için kullanılmaktadır. Fakat bu tanımda da olumsuz bir durum, $\alpha = 0$ olarak alındığında, orijinal fonksiyona ulaşılamamasıdır. Bu sorunu çözmek için, Atangana ve Baleanu aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

Tanım 2.3.7 (Riemann-Liouville Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türev Operatörü) $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$ {}^{ABR}_{\ \ a}D_t^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)E_\alpha\left[-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{(1-\alpha)}\right]dx \tag{2.3.8} $$

dir ([6]).

Eşitlik (2.3.7) ve (2.3.8) lokal olmayan çekirdeğe sahiptir ve bu lokal (yerel) olmayan çekirdek, farklı ölçeklere sahip yapı ve ortamlar içindeki belleğin daha iyi tanımlanmasına olanak tanımaktadır. Ayrıca (2.3.7) eşitliğinde fonksiyon sabit alındığında sonuç sıfıra eşit olur.

Hem Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü hem de Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü, ısı transferi sistemleri, kapalı akifer içindeki yeraltı suyu akışı, sığ su yüzündeki dalga hareketi, elektrik devreleri, dielektrik ortamda elektromanyetik dalgalar gibi problemlerde başarıyla kullanılmaktadır.

Atangana-Baleanu, Laplace dönüşümü ve Evrişim (Konvolüsyon) Teoremi yardımıyla kesirli integral operatörünün önce sol tarafını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 2.3.8 (Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü) $f \in H^1(a,b)$ olsun. $b > a, \alpha \in [0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere

$$ {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(y)(t-y)^{\alpha-1}dy $$

dir ([6]).

[2]'de, Abdeljawad ve Baleanu, integral operatörün sağ tarafını aşağıdaki gibi ortaya koymuşlardır.

Tanım 2.3.9 $f \in H^1(a,b)$ olsun. $b > a, \alpha \in [0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere

$$^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f(t)\right\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_t^b f(y)(y-t)^{\alpha-1}dy$$

dir.

Atangana-Baleanu kesirli integral operatörlerinde $\alpha = 0$ alınırsa

$$^{AB}_{\ a}I^0\left\{f(t)\right\} =^{AB} I_b^0\left\{f(t)\right\} = f(t)$$

eşitliği yazılır. Gerçekten, kısmi integrasyon kullanarak

$$\begin{aligned}
^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} &= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-x)^{\alpha-1}f(x)dx \\
&= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(x)\left(-\frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha}\right)\Big|_a^t \right. \\
&\left. -\int_a^t \left(-\frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha}\right)f'(x)dx\right] \\
&= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\alpha}\left[f(a)(t-a)^{\alpha} + \int_a^t (t-x)^{\alpha}f'(x)dx\right] \\
&= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)(t-a)^{\alpha} + \int_a^t (t-x)^{\alpha}f'(x)dx\right]
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır ve bu eşitlikte $\alpha = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
^{AB}_{\ a}I^0\left\{f(t)\right\} &= \frac{1-0}{B(0)}f(t) + \frac{0}{B(0)\Gamma(1)}\left[f(a)(t-a)^0 + \int_a^t (t-x)^0 f'(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{1}f(t) + \frac{0}{1.1}\left[f(a) + \int_a^t f'(x)dx\right] \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f(t)\right\} &= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_t^b (x-t)^{\alpha-1}f(x)dx \\
&= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(x)\frac{(x-t)^{\alpha}}{\alpha}\Big|_t^b - \int_t^b \frac{(x-t)^{\alpha}}{\alpha}f'(x)dx\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\alpha}\left[f(b)(b-t)^{\alpha} - \int_t^b (x-t)^{\alpha} f'(x)dx\right] \\
&= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\left[f(b)(b-t)^{\alpha} - \int_t^b (x-t)^{\alpha} f'(x)dx\right]
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılır ve bu eşitlikte $\alpha = 0$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
{}^{AB}I_b^0\left\{f(t)\right\} &= \frac{1-0}{B(0)}f(t) + \frac{0}{B(0)\Gamma(1)}\left[f(b)(b-t)^0 - \int_t^b (x-t)^0 f'(x)dx\right] \\
&= \frac{1}{1}f(t) + \frac{0}{1.1}\left[f(b) - \int_t^b f'(x)dx\right] \\
&= f(t)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca, Atangana-Baleanu kesirli integral operatöründe $\alpha = 1$ alınırsa operatör klasik integrale dönüşür.

Aşağıda Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü yardımıyla elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

[30]'da Fernandez ve Mohammed Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 2.3.9 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0,1)$ ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$
f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{2[(b-a)^{\alpha} + (1-\alpha)\Gamma(\alpha)]}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(b)\right\} +^{AB} I_b^{\alpha}\left\{f(a)\right\}\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}
$$

geçerlidir.

Ayrıca, [30]'da Fernandez ve Mohammed Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki eşitliği elde etmişlerdir.

Lemma 2.3.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0,1)$ ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{2[(b-a)^{\alpha} + (1-\alpha)\Gamma(\alpha)]}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(b)\right\} +^{AB} I_b^{\alpha}\left\{f(a)\right\}\right] \\
= &\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2[(b-a)^{\alpha} + (1-\alpha)\Gamma(\alpha)]}\int_0^1 [(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}]f'\left(ta + (1-t)b\right)dt \qquad (2.3.9)
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir.

Kavurmacı ve arkdaşları [47]'de ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde etmişlerdir.

Teorem 2.3.10 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyon, $s\in(0,1]$, $a,b\in\mathbb{R}_+$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f\in L_1[a,b]$ ise $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} & 2^s\frac{f(\frac{a+b}{2})}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}+\frac{1-\alpha}{(b-a)^\alpha}\left[\frac{f(a)+f(b)}{B(\alpha)}\right] \\ \leq\; & \frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha\left\{f(b)\right\}+{}^{AB}I^\alpha_b\left\{f(a)\right\}\right] \\ \leq\; & \left[\frac{f(a)+f(b)}{B(\alpha)}\right]\left[\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)(\alpha+s)}+\frac{1-\alpha}{(b-a)^\alpha}+\frac{\alpha\beta(\alpha,s+1)}{\Gamma(\alpha)}\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörleri Yardımıyla Fonksiyonların Birinci Türevi İçin İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde, Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla fonksiyonların birinci türevi için elde edilmiş integral eşitlikleri ve bu eşitlikler kullanılarak fonksiyonların konveksliği ile konkavlığı ve bilinen bazı klasik eşitsizlikler kullanılarak elde edilen integral eşitsizlikleri verildi. Elde edilen sonuçların bazılarının daha önce literatürde var olan sonuçlara indirgendiği görüldü ve ayrıca elde edilen sonuçlardaki parametrelerin bazılarının özel değerleri için yeni sonuçlar bulundu. Ayrıca bu bölümde, Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ile Atangana-Baleanu kesirli integral operatörlerinin, farklı fonksiyonlar için operatörlerdeki parametrelerin farklı değerlerine karşılık elde edilen simülasyonları verilerek bu iki operatörün karşılaştırılması yapıldı.

Lemma 3.1.1 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$, $t \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \qquad (3.1.1)\\
=\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha} f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)d\lambda - \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \lambda^{\alpha} f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)d\lambda
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafındaki her bir integrale gerekli eklemeleri yapıp kısmi integrasyon uygulandığında önce

$$\begin{aligned}
&\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha} f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)d\lambda + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\\
=\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left.\frac{(1-\lambda)^{\alpha}f\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)}{(t-a)}\right|_0^1 + \alpha\int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{\alpha-1}f\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)}{(t-a)}d\lambda\right]\\
&+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\\
=\ & -\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{f(a)}{(t-a)} + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{\alpha}{(t-a)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha-1} f\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)d\lambda\\
&+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} + \frac{\alpha(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(t-a)^{\alpha+1}}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \\
&\quad +\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) \\
&= {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve buradan

$$\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)d\lambda + \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} = {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} \tag{3.1.2}$$

eşitliği yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \lambda^{\alpha}f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)d\lambda - \frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \\
&= \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left.\frac{\lambda^{\alpha}f\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)}{(b-t)}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{f\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)}{b-t}\alpha\lambda^{\alpha-1}d\lambda\right] \\
&\quad -\frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \\
&= \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{f(b)}{b-t} - \int_t^b \frac{f(s)}{(b-t)^2}\alpha\frac{(s-t)^{\alpha-1}}{(b-t)^{\alpha-1}}ds\right] \\
&\quad -\frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \\
&= \frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{\alpha(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(b-t)^{\alpha+1}}\int_t^b f(s)(s-t)^{\alpha-1}ds \\
&\quad -\frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \\
&= \frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_t^b f(s)(s-t)^{\alpha-1}ds - \frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \\
&= -{}^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f(t)\right\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \lambda^{\alpha}f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)d\lambda - \frac{(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} = -{}^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f(t)\right\} \tag{3.1.3}$$

eşitliği yazılır. (3.1.2) ve (3.1.3) eşitlikleri toplanarak

$$\begin{aligned}
&\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)d\lambda - \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \lambda^{\alpha}f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)d\lambda \\
&\quad +\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} + \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \\
&= {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f(t)\right\}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konveks fonksiyon, $t \in [a, b]$, $\alpha \in (0, 1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} & \left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a) + (b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\ \leq \; & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{|f'(t)|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{|f'(a)|}{(\alpha+2)} \right] \\ & + \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{|f'(b)|}{(\alpha+2)} + \frac{|f'(t)|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.1'deki eşitliği kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a) + (b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\ = \; & \left| \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha} f'\left(\lambda t + (1-\lambda)a\right) d\lambda \right. \\ & \left. - \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \lambda^{\alpha} f'\left(\lambda b + (1-\lambda)t\right) d\lambda \right| \\ \leq \; & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha} \left| f'\left(\lambda t + (1-\lambda)a\right) \right| d\lambda \\ & + \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \lambda^{\alpha} \left| f'\left(\lambda b + (1-\lambda)t\right) \right| d\lambda \end{aligned}$$

ifadesi yazılır. $|f'|$ nin konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a) + (b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\ \leq \; & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha} \left| f'\left(\lambda t + (1-\lambda)a\right) \right| d\lambda \\ & + \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \lambda^{\alpha} \left| f'\left(\lambda b + (1-\lambda)t\right) \right| d\lambda \\ \leq \; & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha} \big[\lambda \left| f'(t) \right| + (1-\lambda) \left| f'(a) \right| \big] d\lambda \\ & + \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \lambda^{\alpha} \big[\lambda \left| f'(b) \right| + (1-\lambda) \left| f'(t) \right| \big] d\lambda \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki integraller hesaplandığında

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}\big[\lambda\left|f'(t)\right| + (1-\lambda)\left|f'(a)\right|\big]d\lambda \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \lambda^{\alpha}\big[\lambda\left|f'(b)\right| + (1-\lambda)\left|f'(t)\right|\big]d\lambda \\
=\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'(t)\right| + \frac{1}{(\alpha+2)}\left|f'(a)\right|\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{(\alpha+2)}\left|f'(b)\right| + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left|f'(t)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1 Teorem 3.1.1'de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[2\frac{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|}{(\alpha+2)}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.1 Teorem 3.1.1, $\alpha=1$ için Teorem 2.2.5 ile aynı sonucu verir.

Teorem 3.1.2 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $t\in[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$, $q>1$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f'(t)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f'(b)\right|^q+\left|f'(t)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.1'den

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}\left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right| d\lambda \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \lambda^{\alpha}\left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right| d\lambda
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha p} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \lambda^{\alpha p} d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ nun konveksliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right|^q d\lambda &\leq \int_0^1 \left[\lambda\left|f'(t)\right|^q+(1-\lambda)\left|f'(a)\right|^q\right] d\lambda \\
\int_0^1 \left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right|^q d\lambda &\leq \int_0^1 \left[\lambda\left|f'(b)\right|^q+(1-\lambda)\left|f'(t)\right|^q\right] d\lambda
\end{aligned}
$$

ifadeleri elde edilir. Yukarıdaki integraller hesaplanarak istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1.2 Teorem 3.1.2'de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q+\left|f'(a)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'(b)\right|^q+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.2 Teorem 3.1.2, $\alpha=1$ için Teorem 2.2.6 ile aynı sonucu verir.

Teorem 3.1.3 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $t\in[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$,

$q \geq 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(t)|^{q}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{|f'(a)|^{q}}{(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(b)|^{q}}{(\alpha+2)}+\frac{|f'(t)|^{q}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.1'den

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}\left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right| d\lambda \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \lambda^{\alpha}\left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right| d\lambda
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Power mean eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}\left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right|^{q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \lambda^{\alpha}d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \lambda^{\alpha}\left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right|^{q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^{q}$ nun konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha}\Big[\lambda\left|f'(t)\right|^{q}+(1-\lambda)\left|f'(a)\right|^{q}\Big]d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \lambda^{\alpha}d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \lambda^{\alpha}\Big[\lambda\left|f'(b)\right|^{q}+(1-\lambda)\left|f'(t)\right|^{q}\Big]d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(t)|^{q}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{|f'(a)|^{q}}{(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(b)|^{q}}{(\alpha+2)}+\frac{|f'(t)|^{q}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.3 Teorem 3.1.3'de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]\right.\\
&\left.-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\right|\\
\leq\ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^{q}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{|f'(a)|^{q}}{(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{|f'(b)|^{q}}{(\alpha+2)}+\frac{\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^{q}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.3 Teorem 3.1.3, $\alpha=1$ için Teorem 2.2.7 ile aynı sonucu verir.

Teorem 3.1.4 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $t\in[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$, $q>1$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(t)\}+{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\{f(t)\}-\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\right|\\
\leq\ &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{p(\alpha p+1)}+\frac{|f'(t)|^{q}+|f'(a)|^{q}}{2q}\right)\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{p(\alpha p+1)}+\frac{|f'(b)|^{q}+|f'(t)|^{q}}{2q}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.1'den

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(t)\}+{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\{f(t)\}-\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\right|\\
\leq\ &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}\left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right|d\lambda\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\lambda^{\alpha}\left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right|d\lambda
\end{aligned}$$

yazılır. Young eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(t)\}+{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\{f(t)\}-\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\right|\\
\leq\ &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{p}\int_{0}^{1}(1-\lambda)^{\alpha p}d\lambda+\frac{1}{q}\int_{0}^{1}\left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right|^{q}d\lambda\right]\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{p}\int_{0}^{1}\lambda^{\alpha p}d\lambda+\frac{1}{q}\int_{0}^{1}\left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right|^{q}d\lambda\right]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlikte $|f'|^q$ nun konveksliğini kullanarak ve basit bir hesaplama yaparak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.4 Teorem 3.1.4'de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{AB} I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\;& \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{2}{p(\alpha p+1)} + \frac{2\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^{q} + |f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2q}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.5 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konkav fonksiyon, $t \in [a, b]$, $\alpha \in (0, 1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} +^{AB} I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\;& \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left|f'\left(\frac{1}{\alpha+2}t + \frac{\alpha+1}{\alpha+2}a\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left|f'\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}b + \frac{1}{\alpha+2}t\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.1'i kullanarak ve $|f'|$ konkav olmak üzere Jensen integral eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} +^{AB} I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\;& \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}\left|f'\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)\right|d\lambda \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\lambda^{\alpha}\left|f'\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)\right|d\lambda \\
\leq\;& \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int_{0}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}d\lambda\right)\left|f'\left(\frac{\int_{0}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}\left(\lambda t+(1-\lambda)a\right)d\lambda}{\int_{0}^{1}(1-\lambda)^{\alpha}d\lambda}\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int_{0}^{1}\lambda^{\alpha}d\lambda\right)\left|f'\left(\frac{\int_{0}^{1}\lambda^{\alpha}\left(\lambda b+(1-\lambda)t\right)d\lambda}{\int_{0}^{1}\lambda^{\alpha}d\lambda}\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki integraller hesaplandığında

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left|f'\left(\frac{1}{\alpha+2}t+\frac{\alpha+1}{\alpha+2}a\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left|f'\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}b+\frac{1}{\alpha+2}t\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.5 Teorem 3.1.5'de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)\left[\left|f'\left(\frac{a+b}{2(\alpha+2)}+\frac{\alpha+1}{\alpha+2}a\right)\right|\right. \\
&\left.+\left|f'\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}b+\frac{a+b}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.4 Teorem 3.1.5, $\alpha=1$ için Teorem 2.2.8 ile aynı sonucu verir.

Teorem 3.1.6 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konkav fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $t\in[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$, $q>1$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right| + \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f'\left(\frac{b+t}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.1'i ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} +^{AB} I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\alpha p} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\lambda t + (1-\lambda)a\right)\right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 \lambda^{\alpha p} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\lambda b + (1-\lambda)t\right)\right|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ nun konkavlığını ve Jensen integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| f'\left(\lambda t + (1-\lambda)a\right)\right|^q d\lambda &= \int_0^1 \lambda^{o} \left| f'\left(\lambda t + (1-\lambda)a\right)\right|^q d\lambda \\
&\leq \left(\int_0^1 \lambda^0 d\lambda \right) \left| f' \left(\frac{1}{\int_0^1 \lambda^0 d\lambda} \int_0^1 \left(\lambda t + (1-\lambda)a\right) d\lambda \right) \right|^q \\
&= \left| f'\left(\frac{a+t}{2}\right) \right|^q \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \left| f'\left(\lambda b + (1-\lambda)t\right)\right|^q d\lambda \ \leq\ \left| f'\left(\frac{b+t}{2}\right) \right|^q \qquad (3.1.7)$$

elde edilir. Buradan, (3.1.6) ve (3.1.7) eşitsizlikleri (3.1.5)'de yerine yazıldığında istenilen

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} +^{AB} I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left| f'\left(\frac{a+t}{2}\right) \right| + \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left| f'\left(\frac{b+t}{2}\right) \right|
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 3.1.6 Teorem 3.1.6'de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

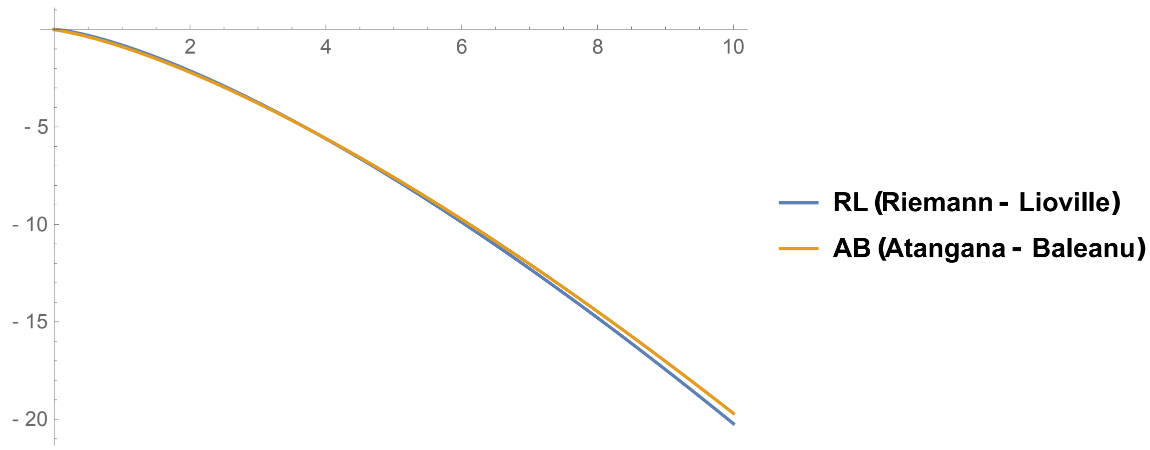
$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{AB} I_{b}^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{3b+a}{4}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

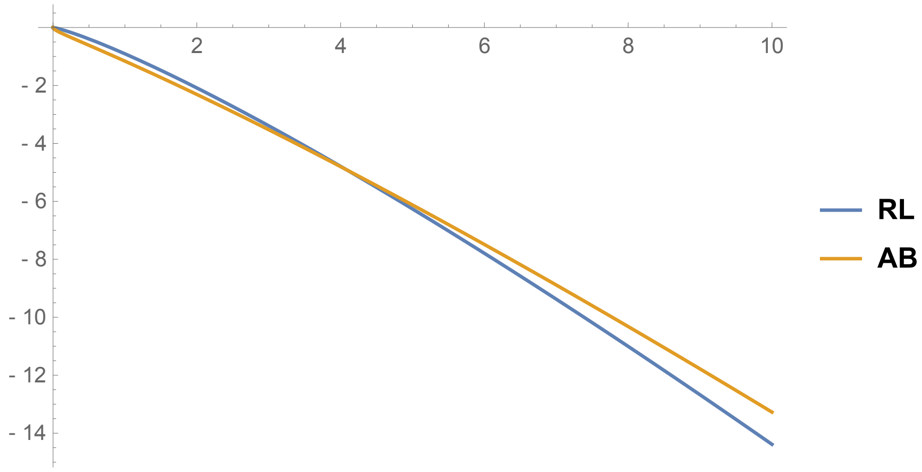
Uyarı 3.1.5 Teorem 3.1.6, $\alpha = 1$ için Teorem 2.2.9 ile aynı sonucu verir.

3.1.1 Simülasyonlar Yardımıyla Kesirli İntegral Operatörler İçin Çeşitli Karşılaştırmalar

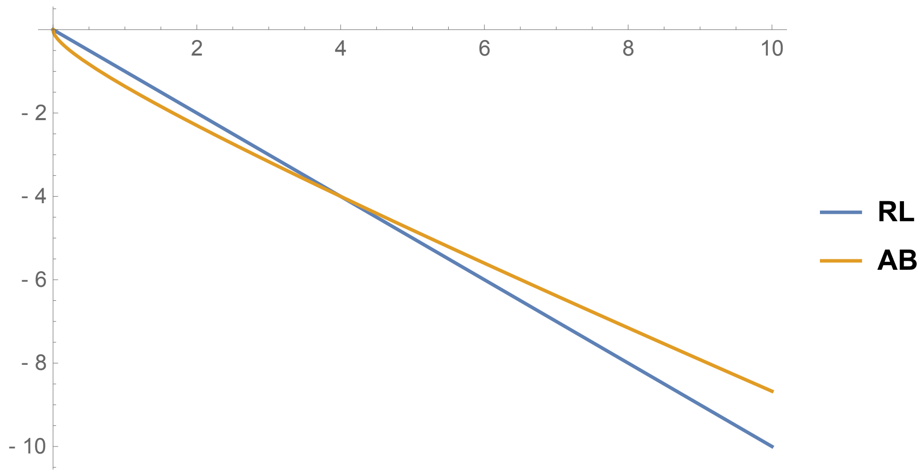
Kesirli analizin tarihi çok eski olmasına rağmen son yirmi yılda literatürde önemli bir yer edinmiştir. Bunun en önemli nedenlerinden biri tanımlarda kullanılan çekirdeğidir. Caputo'nun türev tanımında kullanılan çekirdek uzun yıllardır kullanılsa da bir tekillik sorununun olduğu da bir gerçektir. Kesirli operatör çekirdeklerinin yapısı alana yenilik katmıştır. Doğrusallık, genel yapı, tekillik ve yerellik gibi özellikler operatörün kullanım alanlarını ve verimliliğini ön plana çıkarmıştır. Operatörlerin tutarlı sonuçlar üretme, hafıza etkisi özelliğine sahip olma, genelleme sağlama ve bilinen operatörlerle uyumluluk gibi özellikleri, operatörde yer alan parametre ve fonksiyonların özel seçimleri alınarak yapılan simülasyonlarda görülebilir. Bu nedenle, Riemann-Liouville ile tekil ve yerel olmayan Atangana-Baleanu kesirli integral operatörlerinin; $-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$, x^2+x, $(-x)^{\frac{1}{2}}$ ve x^3 fonksiyonları ve farklı α değerleri için karşılaştırılma simülasyonları Şekil 3.1 ile Şekil 3.12 arasındaki simülasyonlarda görülmektedir. Riemann-Liouville ve Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri arasındaki uyum, bu simülasyonlar analiz edildiğinde açıkça görülebilir. Daha sonra tezin araştırma bulgularından olan Teorem 3.1.1'deki (3.1.4) eşitsizliğinin sol ve sağ taraflarının karşılaştırılması; $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$, $(-x)^{\frac{1}{2}}$ ve x^3 fonksiyonları için yapılmıştır ve bu karşılaştırmalar Şekil 3.13, Şekil 3.14 ve Şekil 3.15'deki simülasyonlarda görülmektedir. Teorem 3.1.1'deki (3.1.4) eşitsizliğinin sol ve sağ taraflarının karşılaştırılması için yapılan simülasyonlarla bu eşitsizliğin Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü yardımıyla doğruluğu gösterilmiştir.



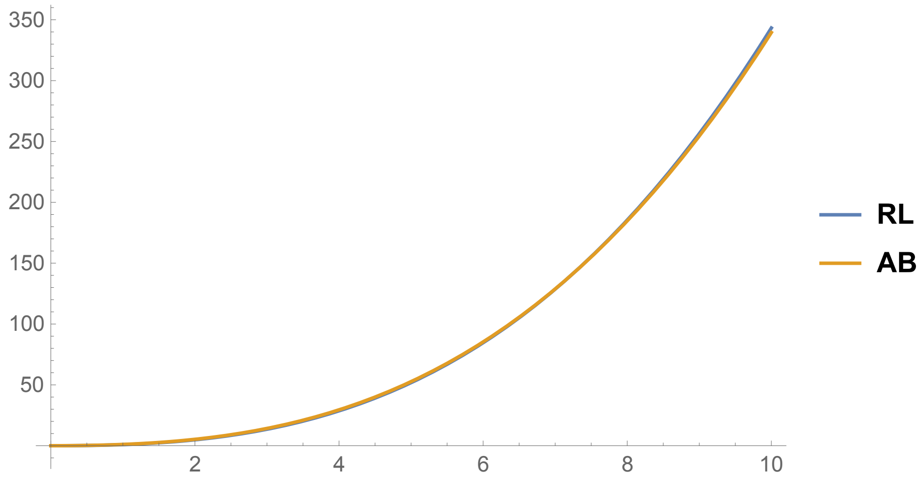
Şekil 3.1: $\alpha = 0.9$ ve $-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



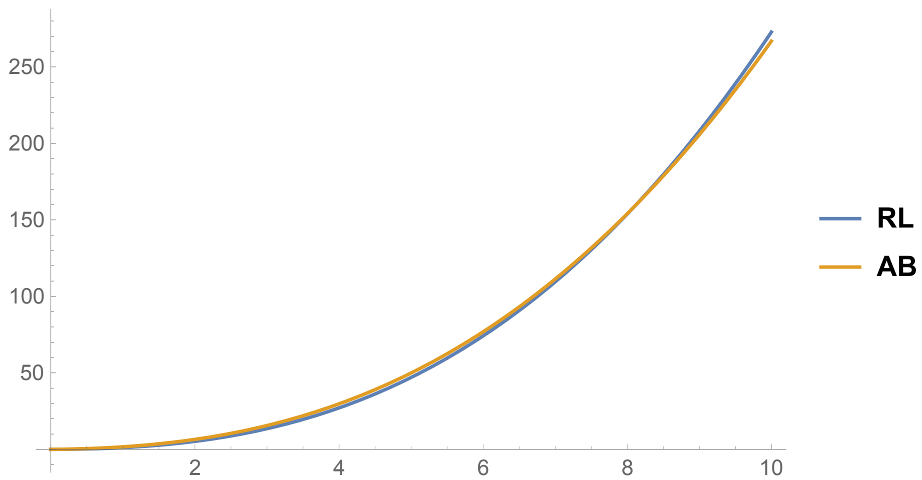
Şekil 3.2: $\alpha = 0.7$ ve $-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



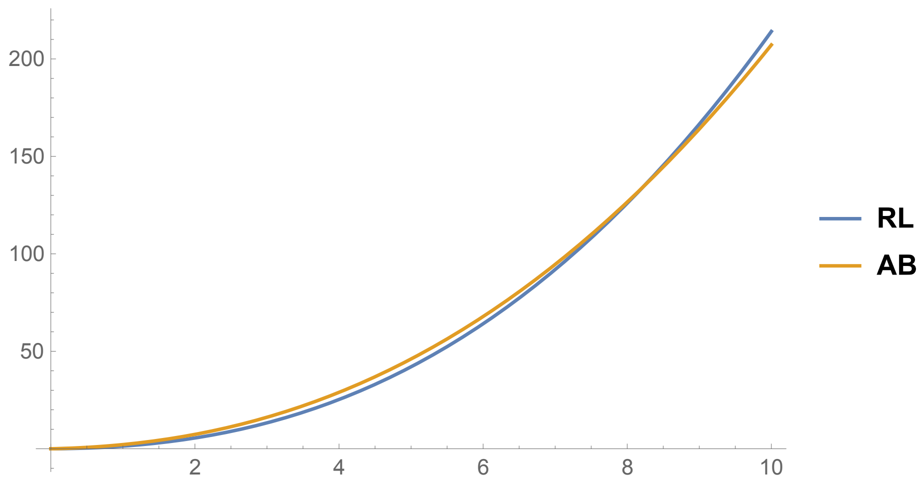
Şekil 3.3: $\alpha = 0.5$ ve $-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



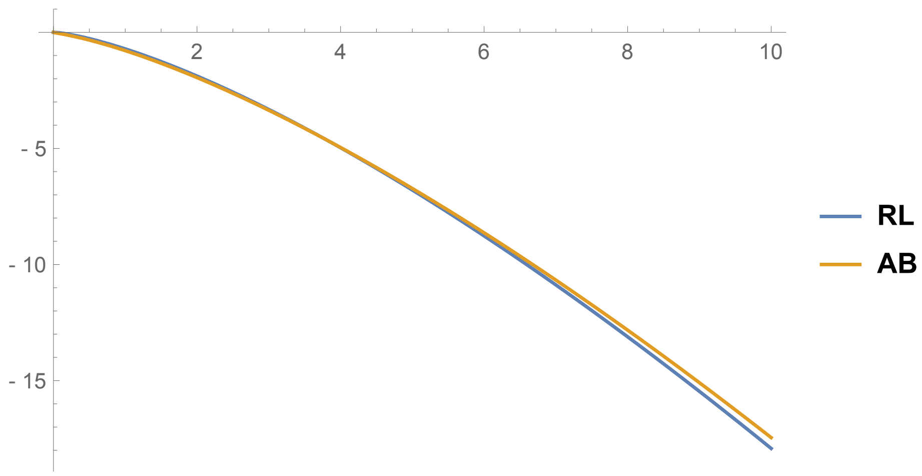
Şekil 3.4: $\alpha = 0.9$ ve $x^2 + x$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



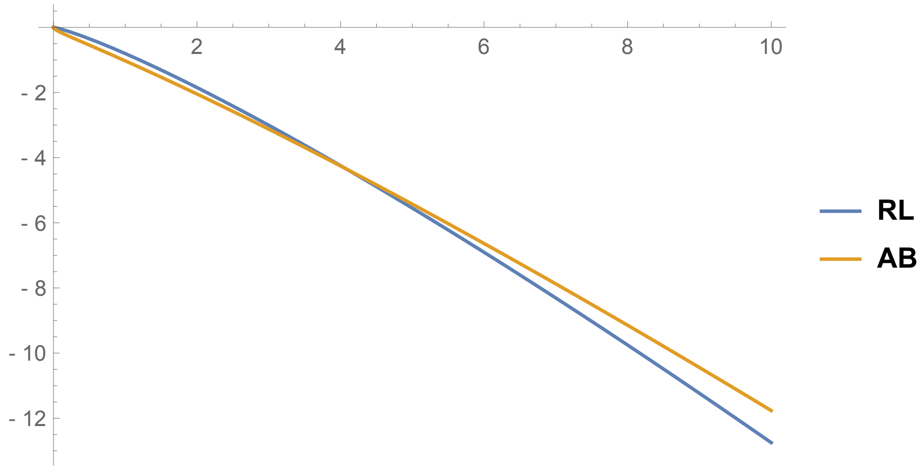
Şekil 3.5: $\alpha = 0.7$ ve $x^2 + x$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



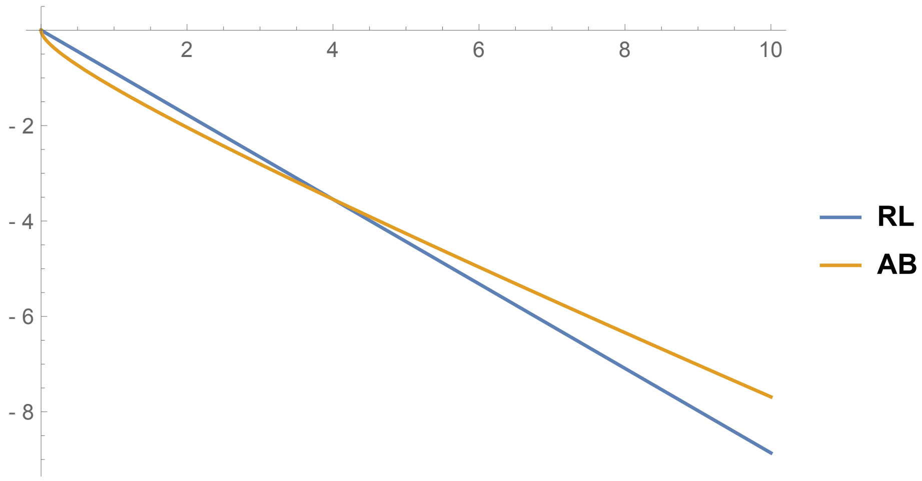
Şekil 3.6: $\alpha = 0.5$ ve $x^2 + x$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



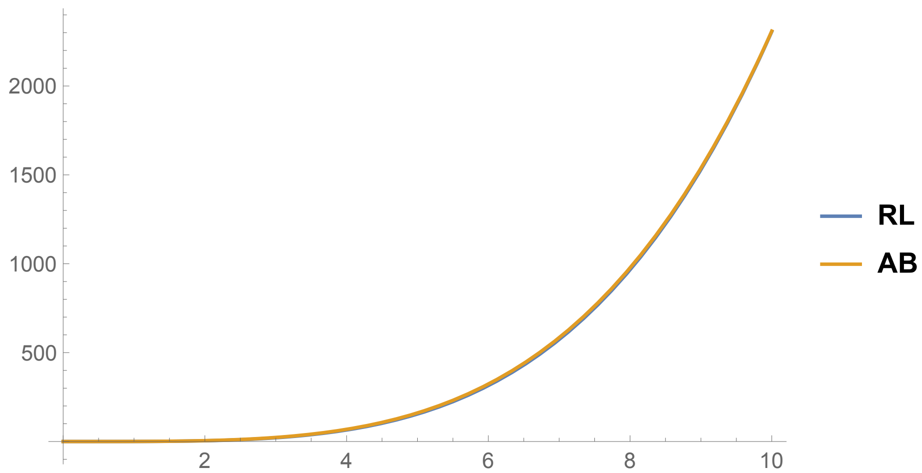
Şekil 3.7: $\alpha = 0.9$ ve $(-x)^{\frac{1}{2}}$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



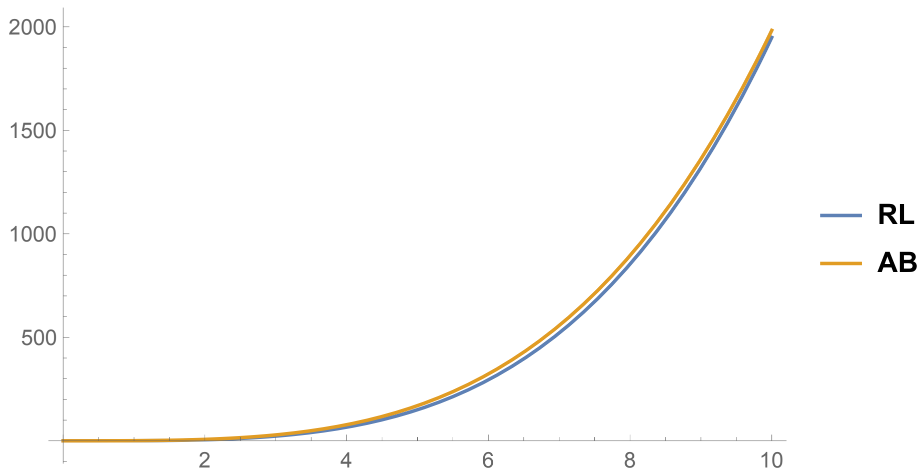
Şekil 3.8: $\alpha = 0.7$ ve $(-x)^{\frac{1}{2}}$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



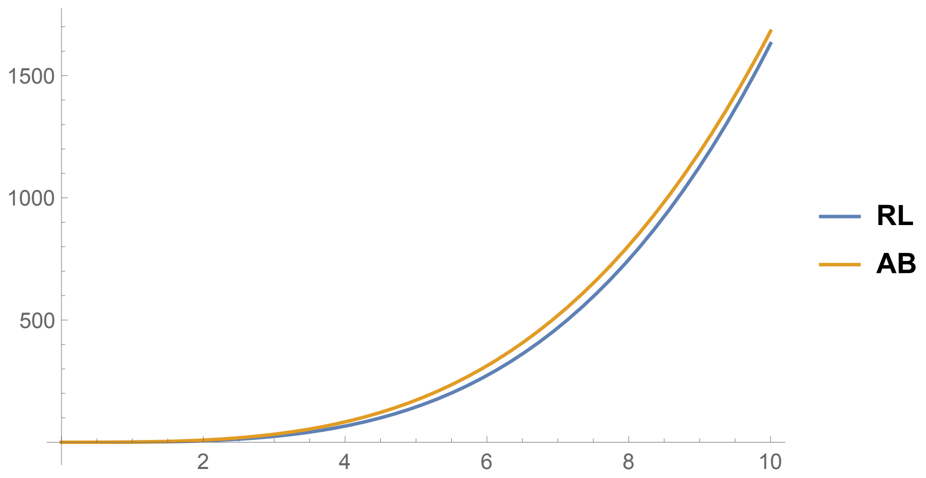
Şekil 3.9: $\alpha = 0.5$ ve $(-x)^{\frac{1}{2}}$ Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



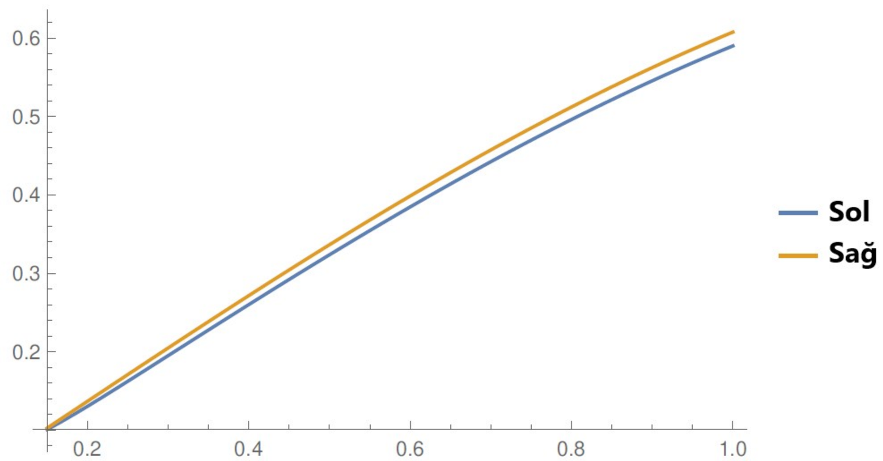
Şekil 3.10: $\alpha = 0.9$ ve x^3 Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



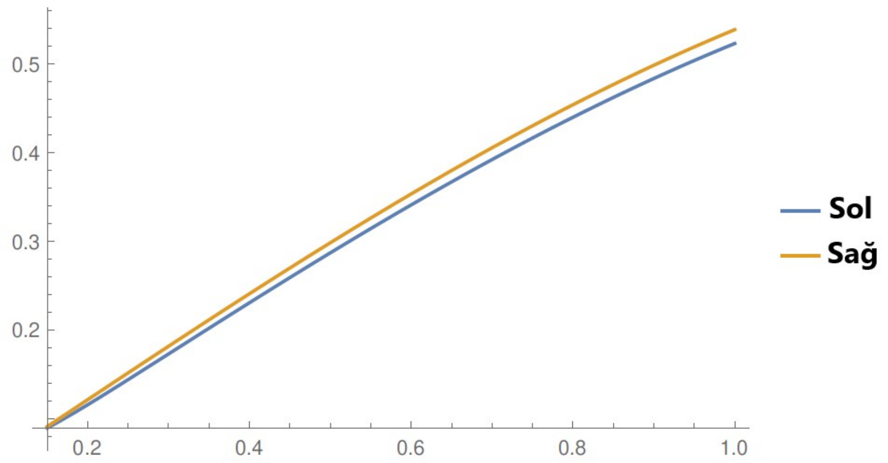
Şekil 3.11: $\alpha = 0.7$ ve x^3 Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



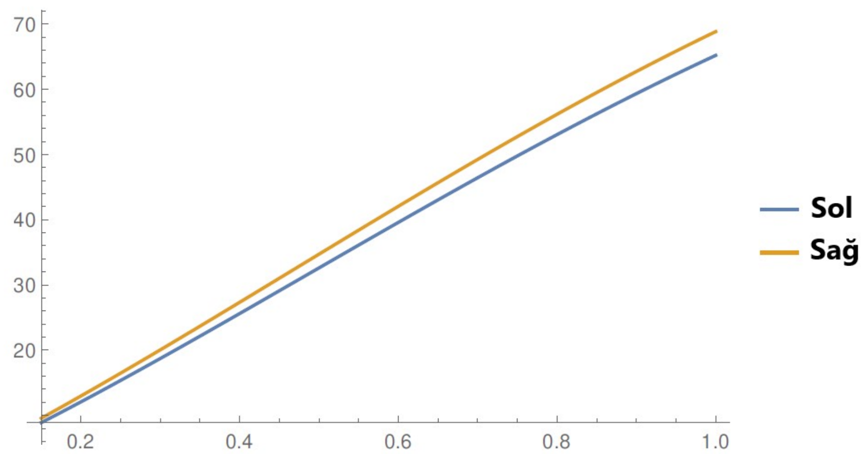
Şekil 3.12: $\alpha = 0.5$ ve x^3 Fonksiyonu İçin RL ve AB Kesirli İntegral Operatörlerinin Karşılaştırılması



Şekil 3.13: $0 < \alpha \leq 1$ Olmak Üzere $-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$ Fonksiyonu İçin Teorem 3.1.1'deki (3.1.4) Eşitsizliğinin Sol ve Sağ Taraflarının Karşılaştırılması



Şekil 3.14: $0 < \alpha \leq 1$ Olmak Üzere $(-x)^{\frac{1}{2}}$ Fonksiyonu İçin Teorem 3.1.1'deki (3.1.4) Eşitsizliğinin Sol ve Sağ Taraflarının Karşılaştırılması



Şekil 3.15: $0 < \alpha \leq 1$ Olmak Üzere x^3 Fonksiyonu İçin Teorem 3.1.1'deki (3.1.4) Eşitsizliğinin Sol ve Sağ Taraflarının Karşılaştırılması

$a < b$ için $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki (3.1.8) eşitliği Teorem 3.1.7, Teorem 3.1.8, Teorem 3.1.9, Teorem 3.1.10, Teorem 3.1.11 ve Teorem 3.1.12'nin hipotezleri ve ispatlarında kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} &{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b) \\ =\; & {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\} + {}^{AB}I_t^{\alpha}\left\{f\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\} \\ & +{}^{AB}_{\ t}I^{\alpha}\left\{f\left(\frac{b+t}{2}\right)\right\} + {}^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f\left(\frac{b+t}{2}\right)\right\} \\ & -\frac{(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(t)+f(a)\right] - \frac{(b-t)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(t)+f(b)\right] \\ & -\frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left[f\left(\frac{a+t}{2}\right)+f\left(\frac{b+t}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Lemma 3.1.2 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0,1]$, $t \in [a,b]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} & {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\} + {}^{AB}I_t^{\alpha}\left\{f\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\} \\ & +{}^{AB}_{\ t}I^{\alpha}\left\{f\left(\frac{b+t}{2}\right)\right\} + {}^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f\left(\frac{b+t}{2}\right)\right\} \\ & -\frac{(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(t)+f(a)\right] - \frac{(b-t)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(t)+f(b)\right] \\ & -\frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left[f\left(\frac{a+t}{2}\right)+f\left(\frac{b+t}{2}\right)\right] \\ =\; & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)dk - \int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)dk\right] \\ & +\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)dk - \int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)dk\right] \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafındaki her bir integrale gerekli eklemeleri yapıp kısmi integrasyon uygulandığında önce

$$\begin{aligned} & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+t}{2}\right) - \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)dk \\ =\; & \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+t}{2}\right) - \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{k^{\alpha}}{2}\frac{2f\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)}{t-a}\right|_0^1 \end{aligned}$$

$$-\int_0^1 \frac{2f\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)}{t-a}\frac{\alpha k^{\alpha-1}}{2}dk\Bigg]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+t}{2}\right)-\frac{(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f(t) \\
&\quad +\frac{\alpha\,(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha-1}f\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)dk \\
&= -\frac{(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f(t)+\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+t}{2}\right)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+t}{2}}^{t}\left(u-\frac{a+t}{2}\right)^{\alpha-1}f(u)du \\
&= {}^{AB}I_t^{\alpha}\left\{f\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\}-\frac{(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f(t)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+t}{2}\right)-\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)dk \qquad (3.1.10)\\
&= {}^{AB}I_t^{\alpha}\left\{f\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\}-\frac{(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f(t)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+t}{2}\right)+\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)dk \qquad (3.1.11)\\
&= {}^{AB}_{\;a}I^{\alpha}\left\{f\left(\frac{a+t}{2}\right)\right\}-\frac{(t-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f(a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{t+b}{2}\right)+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)dk \qquad (3.1.12)\\
&= {}^{AB}_{\;t}I^{\alpha}\left\{f\left(\frac{t+b}{2}\right)\right\}-\frac{(b-t)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f(t)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{t+b}{2}\right)-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)dk \qquad (3.1.13)\\
&= {}^{AB}I_b^{\alpha}\left\{f\left(\frac{t+b}{2}\right)\right\}-\frac{(b-t)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f(b)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12) ve (3.1.13) eşitlikleri taraf tarafa toplanarak istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.7 Lemma 3.1.2'de $\alpha=1$ alınırsa, (3.1.9) eşitliği

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx-\frac{(t-a)}{2}\left[f(t)+f(a)\right]-\frac{(b-t)}{2}\left[f(t)+f(b)\right]\\
&= \frac{(t-a)^2}{2}\left[\int_0^1\frac{k}{2}f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)dk-\int_0^1\frac{k}{2}f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)dk\right]\\
&\quad +\frac{(b-t)^2}{2}\left[\int_0^1\frac{k}{2}f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)dk-\int_0^1\frac{k}{2}f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)dk\right]
\end{aligned}$$

eşitliğine dönüşür.

Teorem 3.1.7 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konveks fonksiyon, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} &\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\ \leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f'(t)|+|f'(a)|}{\alpha+1}\right] + \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f'(t)|+|f'(b)|}{\alpha+1}\right] \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.2'de verilen eşitlikten ve mutlak değerin özelleğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} &\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\ =\ & \left|\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2} f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)dk\right.\right. \\ & \left. -\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2} f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)dk\right] \\ & +\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2} f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)dk\right. \\ & \left.\left. -\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2} f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)dk\right]\right| \\ \leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|dk\right. \\ & \left. +\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|dk\right] \\ & +\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|dk\right. \\ & \left. +\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|dk\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\ \leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2}\left[\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(t)|+\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(a)|\right]dk\right. \\ & \left. +\int_0^1 \frac{k^\alpha}{2}\left[\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(t)|+\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(a)|\right]dk\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left[\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(t)|+\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(b)|\right]dk\right.\\
&\left.+\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left[\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(t)|+\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(b)|\right]dk\right]\\
=\ &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f'(t)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}-k^{\alpha+1}\right)dk+\frac{|f'(a)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}+k^{\alpha+1}\right)dk\right.\\
&\left.+\frac{|f'(t)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}+k^{\alpha+1}\right)dk+\frac{|f'(a)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}-k^{\alpha+1}\right)dk\right]\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f'(t)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}+k^{\alpha+1}\right)dk+\frac{|f'(b)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}-k^{\alpha+1}\right)dk\right.\\
&\left.+\frac{|f'(t)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}-k^{\alpha+1}\right)dk+\frac{|f'(b)|}{4}\int_0^1\left(k^{\alpha}+k^{\alpha+1}\right)dk\right]\\
=\ &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f'(t)|+|f'(a)|}{\alpha+1}\right]+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f'(t)|+|f'(b)|}{\alpha+1}\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.8 Teorem 3.1.7'de eğer $\alpha = 1$ olarak alınırsa, (3.1.14) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{(t-a)}{2}\left[f(t)+f(a)\right]-\frac{(b-t)}{2}\left[f(t)+f(b)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{(t-a)^2}{2^3}\Big[|f'(t)|+|f'(a)|\Big]+\frac{(b-t)^2}{2^3}\Big[|f'(t)|+|f'(b)|\Big]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.8 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $q > 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \qquad (3.1.15)\\
\leq\ &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^p(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(t)|^q+3|f'(a)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(t)|^q+|f'(a)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^p(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{3|f'(t)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(t)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.1.2'den

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|dk\right. \\
&\left.+\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|dk\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|dk\right. \\
&\left.+\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|dk\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılır. Hölder eşitsizliği uygulanılarak,

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\times\left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(t)|^q+\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(a)|^q\right]dk\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(t)|^q+\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(a)|^q\right]dk\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\times\left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(t)|^q+\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(b)|^q\right]dk\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\int_0^1 \left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left[\left(\frac{1-k}{2}\right)|f'(t)|^q+\left(\frac{1+k}{2}\right)|f'(b)|^q\right]dk\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^{p}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(t)|^{q}+3|f'(a)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(t)|^{q}+|f'(a)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\quad+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^{p}(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{3|f'(t)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(t)|^{q}+3|f'(b)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.9 Teorem 3.1.8'de eğer $\alpha = 1$ olarak alınırsa, (3.1.15) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{(t-a)}{2}[f(t)+f(a)]-\frac{(b-t)}{2}[f(t)+f(b)]\right| \\
&\leq \frac{(t-a)^2}{2}\left(\frac{1}{2^{p}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(t)|^{q}+3|f'(a)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3|f'(t)|^{q}+|f'(a)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\quad+\frac{(b-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2^{p}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{3|f'(t)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(t)|^{q}+3|f'(b)|^{q}}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.9 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $q > 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
&\leq \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{2^{p-1}\,p\,(\alpha p+1)}+\frac{|f'(t)|^{q}+|f'(a)|^{q}}{q}\right] \\
&\quad+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{2^{p-1}\,p\,(\alpha p+1)}+\frac{|f'(t)|^{q}+|f'(b)|^{q}}{q}\right]
\end{aligned}
\tag{3.1.16}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.2'den

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
&\leq \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|dk\right. \\
&\quad\left.+\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|dk\right] \\
&\quad+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|dk\right. \\
&\quad\left.+\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|dk\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılır. Young eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{p}\int_0^1\left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|^q dk\right. \\
&\left.+\frac{1}{p}\int_0^1\left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|^q dk\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{p}\int_0^1\left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|^q dk\right. \\
&\left.+\frac{1}{p}\int_0^1\left(\frac{k^{\alpha}}{2}\right)^p dk+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|^q dk\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliğinden yararlanılarak ve basit hesaplamalar yapılarak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.10 Teorem 3.1.9'da eğer $\alpha = 1$ olarak alınırsa, bu durumda (3.1.16) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{(t-a)}{2}\left[f(t)+f(a)\right]-\frac{(b-t)}{2}\left[f(t)+f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^2}{2}\left[\frac{1}{2^{p-1}\,p\,(p+1)}+\frac{|f'(t)|^q+|f'(a)|^q}{q}\right] \\
&+\frac{(b-t)^2}{2}\left[\frac{1}{2^{p-1}\,p\,(p+1)}+\frac{|f'(t)|^q+|f'(b)|^q}{q}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.10 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $q \geq 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(t)|^q+(2\alpha+3)\,|f'(a)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{(2\alpha+3)\,|f'(t)|^q+|f'(a)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (3.1.17) \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{(2\alpha+3)\,|f'(t)|^q+|f'(b)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{|f'(t)|^q+(2\alpha+3)\,|f'(b)|^q}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.2'den

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|dk\right. \\
&\left.+\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|dk\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|dk\right. \\
&\left.+\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|dk\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılır. Power mean eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak ve basit hesaplamalar yapılarak, istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.11 Teorem 3.1.10'da eğer $\alpha = 1$ olarak alınırsa, (3.1.17) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{(t-a)}{2}\left[f(t)+f(a)\right] - \frac{(b-t)}{2}\left[f(t)+f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(t)|^q+5\,|f'(a)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{5\,|f'(t)|^q+|f'(a)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{5\,|f'(t)|^q+|f'(b)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(t)|^q+5\,|f'(b)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.11 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konkav fonksiyon, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \qquad (3.1.18)\\
\le\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2(\alpha+1)}\right)\left[\left|f'\left(\frac{t+(2\alpha+3)a}{2(\alpha+2)}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{(2\alpha+3)t+a}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right]\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2(\alpha+1)}\right)\left[\left|f'\left(\frac{(2\alpha+3)t+b}{2(\alpha+2)}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{t+(2\alpha+3)b}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.1.2 ve Jensen integral eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right|\\
\le\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|dk\right.\\
&\left.+\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|dk\right]\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|dk\right.\\
&\left.+\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|dk\right]\\
\le\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)dk}{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk}\right)\right|\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)dk}{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk}\right)\right|\right]\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)dk}{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk}\right)\right|\right.\\
&\left.+\left(\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)dk}{\int_0^1\frac{k^{\alpha}}{2}dk}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte yer alan integraller hesaplanarak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.12 Teorem 3.1.11'de eğer $\alpha = 1$ olarak alınırsa, (3.1.18) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{(t-a)}{2}\left[f(t)+f(a)\right] - \frac{(b-t)}{2}\left[f(t)+f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left[\left|f'\left(\frac{t+5a}{6}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{5t+a}{6}\right)\right|\right] \\
&+\frac{(b-t)^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left[\left|f'\left(\frac{5t+b}{6}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{t+5b}{6}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.12 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konkav fonksiyon, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $q > 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^p(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\frac{t+3a}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{3t+a}{4}\right)\right|\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^p(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\frac{3t+b}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{t+3b}{4}\right)\right|\right]
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.2 ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1\left(\frac{k^\alpha}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left(\frac{k^\alpha}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1\left(\frac{k^\alpha}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left(\frac{k^\alpha}{2}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konkavlığı ve Jensen integral eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|^q dk &= \int_0^1 k^0\left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)\right|^q dk \\
&\leq \left(\int_0^1 k^0 dk\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1 k^0\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}a\right)dk}{\int_0^1 k^0 dk}\right)\right|^q
\end{aligned}$$

$$= \left|f'\left(\frac{t+3a}{4}\right)\right|^q$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}a\right)\right|^q dk \leq \left|f'\left(\frac{3t+a}{4}\right)\right|^q$$

$$\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+k}{2}t+\frac{1-k}{2}b\right)\right|^q dk \leq \left|f'\left(\frac{3t+b}{4}\right)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1-k}{2}t+\frac{1+k}{2}b\right)\right|^q dk \leq \left|f'\left(\frac{t+3b}{4}\right)\right|^q$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla elde edilen eşitsizliklerin sağ tarafları (3.1.20) eşitsizliğinde yerine yazılarak ve gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{AB}I_f(t,\alpha,a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^p(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\frac{t+3a}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3t+a}{4}\right)\right|\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2^p(\alpha p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\frac{3t+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{t+3b}{4}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.13 Teorem 3.1.12'de eğer $\alpha = 1$ alımırsa, (3.1.19) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{(t-a)}{2}\left[f(t)+f(a)\right] - \frac{(b-t)}{2}\left[f(t)+f(b)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^2}{2}\left(\frac{1}{2^p(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\frac{t+3a}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3t+a}{4}\right)\right|\right] \\
&+\frac{(b-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2^p(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f'\left(\frac{3t+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{t+3b}{4}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Lemma 3.1.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0,1]$, $t \in [0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\frac{2(b-a)^\alpha + (1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b)+{}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
=\ & \int_0^1 \left((1-t)^\alpha - t^\alpha\right) f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt \\
&+\int_0^1 \left(t^\alpha - (1-t)^\alpha\right) f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon uygulayarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left((1-t)^\alpha - t^\alpha\right) f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \\
&= \left.\frac{\left((1-t)^\alpha - t^\alpha\right) f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt}{\frac{a-b}{2}}\right|_0^1 \\
&\quad - \frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 \left((1-t)^{\alpha-1} + t^{\alpha-1}\right) f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \\
&= -\frac{2}{a-b}f(a) - \frac{2}{a-b}f(\frac{a+b}{2}) - \frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \\
&\quad - \frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \\
&= \frac{2}{b-a}\left(f(a) + f(\frac{a+b}{2})\right) - \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx \\
&\quad - \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^{\alpha-1} f(x)dx
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

eşitliği elde edilir. (3.1.21) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)} I_1 &= \frac{(b-a)^\alpha}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(f(a) + f(\frac{a+b}{2})\right) \\
&\quad - \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx \\
&\quad - \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^{\alpha-1} f(x)dx
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde kısmi integrasyon uygulayarak

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left(t^\alpha - (1-t)^\alpha\right) f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right) dt \\
&= \left.\frac{\left(t^\alpha - (1-t)^\alpha\right) f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right) dt}{\frac{b-a}{2}}\right|_1^0 \\
&\quad - \frac{2\alpha}{b-a}\int_0^1 \left(t^{\alpha-1} + (1-t)^{\alpha-1}\right) f\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right) dt \\
&= \frac{2}{b-a}\left(f(b) + f(\frac{a+b}{2})\right) - \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(x)dx \\
&\quad - \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)dx
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

eşitliği elde edilir. (3.1.23) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}I_2 = \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(f(b)+f(\frac{a+b}{2})\right) \tag{3.1.24}$$
$$-\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1}f(x)dx$$
$$-\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{\alpha-1}f(x)dx$$

eşitliği elde edilir. (3.1.22) eşitliği ile (3.1.24) eşitliği toplanırsa ve gerekli eklemeler ile çıkarmalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}[I_1+I_2]\\
=\;&\frac{(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(a)+f(\frac{a+b}{2})\right]\\
&-\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(a)-\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^{\alpha-1}f(x)dx\\
&-\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)^{\alpha-1}f(x)dx\\
&+\frac{(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(b)+f(\frac{a+b}{2})\right]\\
&-\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(b)-\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)^{\alpha-1}f(x)dx\\
&-\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1}f(x)dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha})f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt\right.\\
&\left.+\int_0^1(t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha})f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt\right]\\
=\;&\frac{(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\
&-\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.13 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konveks fonksiyon, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\leq\ &\frac{2\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]}{\alpha+1}
\end{aligned}
\tag{3.1.25}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.3 ve mutlak değerin özelliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
=\ &\Bigg|\int_0^1\left((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right)f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt \\
&+\int_0^1\left(t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right)f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt\Bigg| \\
\leq\ &\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt \\
&+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt+\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılır. $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\leq\ &\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(a)|+\frac{1-t}{2}|f'(b)|\right]dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(a)|+\frac{1-t}{2}|f'(b)|\right]dt \\
&+\int_0^1 t^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(b)|+\frac{1-t}{2}|f'(a)|\right]dt \\
&+\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(b)|+\frac{1-t}{2}|f'(a)|\right]dt
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki integraller hesaplanarak

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\leq\ &\frac{2\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right]}{\alpha+1}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.14 Teorem 3.1.13'de $\alpha = 1$ seçildiğinde, (3.1.25) eşitsizliği

$$\left|\frac{f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}-\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.14 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q > 1$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^\alpha+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b)+{}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\leq\ & \frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{3\,|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\,|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \qquad (3.1.26)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^\alpha+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b)+{}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\leq\ & \int_0^1(1-t)^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 t^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt \\
&+\int_0^1 t^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt+\int_0^1(1-t)^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt
\end{aligned}$$

ifadesi yazılır. Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^\alpha+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b)+{}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\leq\ & \left(\int_0^1(1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2(b-a)^\alpha+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}_{\frac{a+b}{2}}^{AB}I^\alpha f(b)+{}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ &\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\frac{1+t}{2}|f'(a)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\frac{1+t}{2}|f'(a)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\frac{1+t}{2}|f'(b)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\frac{1+t}{2}|f'(b)|^q+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integraller hesaplanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.15 Teorem 3.1.14'de $\alpha=1$ seçildiğinde, (3.1.26) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}-\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\right| \leq\ &\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\frac{3|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.15 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $\alpha\in(0,1]$, $q>1$, $B(\alpha)$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2(b-a)^\alpha+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}_{\frac{a+b}{2}}^{AB}I^\alpha f(b)+{}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ &\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q+\frac{1}{2(\alpha+2)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \qquad (3.1.27)\\
&+\left(\frac{2\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q+\frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\frac{2\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q+\frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\left.+\left(\frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q+\frac{1}{2(\alpha+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\le\ &\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt \\
&+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt+\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt
\end{aligned}$$

ifadesi yazılır. Power mean eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\le\ &\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\Bigg| \\
\le\ &\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(a)|^{q}+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(a)|^{q}+\frac{1-t}{2}|f'(b)|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(b)|^{q}+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left[\frac{1+t}{2}|f'(b)|^{q}+\frac{1-t}{2}|f'(a)|^{q}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q + \frac{1}{2(\alpha+2)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad + \left(\frac{2\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q + \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad + \left(\frac{2\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q + \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad \left.+ \left(\frac{\alpha+3}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}|f'(b)|^q + \frac{1}{2(\alpha+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.16 Teorem 3.1.15'de eğer $\alpha = 1$ seçilirse, (3.1.27) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{b-a} - \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\right|\\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{2|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{6}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{12}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad \left.+ \left(\frac{5|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{12}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{6}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.16 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q > 1$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2(b-a)^\alpha+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a) + {}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b) + {}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
&\leq \frac{4}{p(\alpha p+1)} + \frac{2\left[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right]}{q} \qquad (3.1.28)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.3 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2(b-a)^\alpha+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}}f(a) + {}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b) + {}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
&\leq \int_0^1 (1-t)^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt + \int_0^1 t^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt\\
&\quad + \int_0^1 t^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt + \int_0^1 (1-t)^\alpha\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılır. Young eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}_{\frac{a+b}{2}}^{AB}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{1}{p}\int_0^1(1-t)^{\alpha p}dt+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\\
&+\frac{1}{p}\int_0^1 t^{\alpha p}dt+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\\
&+\frac{1}{p}\int_0^1 t^{\alpha p}dt+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\\
&+\frac{1}{p}\int_0^1(1-t)^{\alpha p}dt+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak ve yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integraller hesaplanarak istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1.17 Teorem 3.1.16'da $\alpha=1$ seçildiğinde, (3.1.28) eşitsizliği

$$
\left|\frac{f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}-\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{2}{p^2+p}+\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{q}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.17 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f'\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konkav fonksiyon, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}_{\frac{a+b}{2}}^{AB}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ &\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left[\left|f'\left(\frac{a(\alpha+3)+b(\alpha+1)}{2(\alpha+2)}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a(2\alpha+3)+b}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right. \qquad (3.1.29)\\
&\left.+\left|f'\left(\frac{b(2\alpha+3)+a}{2(\alpha+2)}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{b(\alpha+3)+a(\alpha+1)}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.3, $|f'|$ fonksiyonunun konkavlığı ve Jensen integral eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}_{\frac{a+b}{2}}^{AB}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|$$
$$\leq \int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt$$
$$+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt+\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt$$
$$\leq \left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt}{\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt}\right)\right|$$
$$+\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1 t^{\alpha}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt}{\int_0^1 t^{\alpha}dt}\right)\right|$$
$$+\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1 t^{\alpha}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt}{\int_0^1 t^{\alpha}dt}\right)\right|$$
$$+\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt}{\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt}\right)\right|$$

ifadesi yazılır. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki integraller hesaplanarak

$$\left|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}_{\frac{a+b}{2}}^{AB}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left[\left|f'\left(\frac{a(\alpha+3)+b(\alpha+1)}{2(\alpha+2)}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a(2\alpha+3)+b}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right.$$
$$\left.+\left|f'\left(\frac{b(2\alpha+3)+a}{2(\alpha+2)}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{b(\alpha+3)+a(\alpha+1)}{2(\alpha+2)}\right)\right|\right]$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.18 Teorem 3.1.17'de $\alpha=1$ seçilirse, (3.1.29) eşitsizliği

$$\left|\frac{f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}-\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)\left[\left|f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|\right.$$
$$\left.+\left|f'\left(\frac{5b+a}{6}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{2b+a}{3}\right)\right|\right]$$

eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 3.1.18 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konkav fonksiyon, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q > 1$ $\alpha \in (0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon foksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \frac{2(b-a)^\alpha + (1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[f(a) + f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&- \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}} f(a) + {}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b) + {}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \Bigg| \\
\leq\ & \frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right| + \left| f'\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right| \right] \qquad (3.1.30)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

İspat. Lemma 3.1.3 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg| \frac{2(b-a)^\alpha + (1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[f(a) + f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\
&- \frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^\alpha_{\frac{a+b}{2}} f(a) + {}^{AB}_{\frac{a+b}{2}}I^\alpha f(b) + {}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \Bigg| \\
\leq\ & \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.1.31) \\
&+ \left(\int_0^1 t^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 t^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

ifadesi yazılır. $|f'|^q$ fonksiyonunun konkavlığından ve Jensen integral eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt &= \int_0^1 t^0 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt \\
&\leq \left(\int_0^1 t^0 dt\right) \left| f'\left(\frac{\int_0^1 t^0 \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt}{\int_0^1 t^0 dt}\right)\right|^q \\
&= \left| f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \left| f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt \leq \left| f'\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|^q$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen bu ifadelerin sağ tarafları (3.1.31) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{2(b-a)^{\alpha}+(1-\alpha)2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right.\\
&\left.-\frac{2^{\alpha+1}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^{\alpha}_{\frac{a+b}{2}}f(a)+{}_{\frac{a+b}{2}}^{AB}I^{\alpha}f(b)+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right|\\
\leq\ &\frac{2}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.19 Teorem 3.1.18'de $\alpha=1$ seçilirse, (3.1.30) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}-\frac{4}{(b-a)^{2}}\int_{a}^{b}f(x)dx\right| \leq\ &\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right.\\
&\left.+\left|f'\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine dönüşür.

3.2 Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörleri Yardımıyla Fonksiyonların İkinci Türevi İçin İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde, Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla fonksiyonların ikinci türevi için integral eşitlikleri elde edildi. Daha sonra bu eşitlikler kullanılarak fonksiyonların konveksliğinden, konkavlığından ve literatürde iyi bilinen Hölder, power mean, Young ve Jensen eşitsizliklerinden yararlanılarak yeni integral eşitsizlikleri ispat edildi. Ayrıca, ispat edilen sonuçlardaki parametrelerin bazılarının özel değerleri için yeni sonuçlar bulundu.

Lemma 3.2.1 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f''\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $\alpha\in(0,1], t\in[a,b]$, $k\in[0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(t)\}+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\}-\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\\
=\ &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f'(a)+\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-k)^{\alpha+1}f''(kt+(1-k)a)\,dk\\
&-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f'(b)+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}k^{\alpha+1}f''(kb+(1-k)t)\,dk
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

İspat. (3.1.1) eşitliğinin sağ tarafındaki her bir integralde kısmi integrasyon uygulandığında

$$
\begin{aligned}
&\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha} f'\left(kt+(1-k)a\right)dk \qquad (3.2.1)\\
= \; &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[-\frac{(1-k)^{\alpha+1}}{\alpha+1}f'\left(kt+(1-k)a\right)\Bigg|_0^1\\
&+(t-a)\int_0^1 \frac{(1-k)^{\alpha+1}}{\alpha+1}f''\left(kt+(1-k)a\right)dk\Bigg]\\
= \; &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha+1}f'(a)+\frac{(t-a)}{\alpha+1}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}f''\left(kt+(1-k)a\right)dk\right]
\end{aligned}
$$

eşitliği ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha} f'\left(kb+(1-k)t\right)dk \qquad (3.2.2)\\
= \; &-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}f'\left(kb+(1-k)t\right)\Bigg|_0^1-\frac{(b-t)}{\alpha+1}\int_0^1 k^{\alpha+1}f''\left(kb+(1-k)t\right)dk\right]\\
= \; &-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\alpha+1}f'(b)-\frac{(b-t)}{(\alpha+1)}\int_0^1 k^{\alpha+1}f''\left(kb+(1-k)t\right)dk\right]
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada, (3.2.1) ve (3.2.2) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
&{}^{AB}_{\;\,a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\}+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\}-\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\\
= \; &\frac{(t-a)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f'(a)+\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}f''\left(kt+(1-k)a\right)dk\\
&-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}f'(b)+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha+1}f''\left(kb+(1-k)t\right)dk
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f''\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|$ konveks fonksiyon, $t\in[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|{}^{AB}_{\;\,a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\}+{}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\}-\frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\\
&-\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\Bigg|\\
\leq \; &\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f''(t)|}{(\alpha+2)(\alpha+3)}+\frac{|f''(a)|}{(\alpha+3)}\right]\\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f''(b)|}{(\alpha+3)}+\frac{|f''(t)|}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.1'deki eşitliği kullanarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
&-\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
= &\Bigg| \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}f''\left(kt+(1-k)a\right)dk \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha+1}f''\left(kb+(1-k)t\right)dk\Bigg| \\
\leq &\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}\left|f''\left(kt+(1-k)a\right)\right|dk \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha+1}\left|f''\left(kb+(1-k)t\right)\right|dk
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $|f''|$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
&-\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq &\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}\left|f''\left(kt+(1-k)a\right)\right|dk \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha+1}\left|f''\left(kb+(1-k)t\right)\right|dk \\
\leq &\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}\Big[k\left|f''(t)\right|+(1-k)\left|f''(a)\right|\Big]dk \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha+1}\Big[k\left|f''(b)\right|+(1-k)\left|f''(t)\right|\Big]dk \\
= &\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f''(t)|}{(\alpha+2)(\alpha+3)}+\frac{|f''(a)|}{(\alpha+3)}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{|f''(b)|}{(\alpha+3)}+\frac{|f''(t)|}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1 Teorem 3.2.1'de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f'(a)-f'(b)\Big] - \frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq &\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[2\frac{\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|}{(\alpha+2)(\alpha+3)}+\frac{|f''(a)|}{(\alpha+3)}+\frac{|f''(b)|}{(\alpha+3)}\right]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 3.2.2 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $q > 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(t)\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. - \frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f''(t)|^q+|f''(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f''(b)|^q+|f''(t)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.1'i kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(t)\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. - \frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}\left|f''(kt+(1-k)a)\right|dk \\
&+ \frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k^{\alpha+1}\left|f''(kb+(1-k)t)\right|dk
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(t)\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. - \frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^{(\alpha+1)p}dk\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f''(kt+(1-k)a)|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+ \frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^1 k^{(\alpha+1)p}dk\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f''(kb+(1-k)t)|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f''(kt+(1-k)a)|^q dk &\leq \int_0^1 \left[k|f''(t)|^q + (1-k)|f''(a)|^q\right]dk \\
\int_0^1 |f''(kb+(1-k)t)|^q dk &\leq \int_0^1 \left[k|f''(b)|^q + (1-k)|f''(t)|^q\right]dk
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır. Yukarıdaki eşitsizliklerde yer alan integraller hesaplandığında istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2 Teorem 3.2.2'de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f'(a)-f'(b)\Big] - \frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^{q}+|f''(a)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. +\left(\frac{|f''(b)|^{q}+\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.3 $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a, b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $t \in [a, b]$, $\alpha \in (0, 1]$, $q > 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\{f(t)\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{p(\alpha p+p+1)}+\frac{|f''(t)|^{q}+|f''(a)|^{q}}{2q}\right) \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{p(\alpha p+p+1)}+\frac{|f''(b)|^{q}+|f''(t)|^{q}}{2q}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.1'den

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\{f(t)\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}\left|f''(kt+(1-k)a)\right|dk \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha+1}\left|f''(kb+(1-k)t)\right|dk
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Young eşitsizliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{p}\int_0^1 (1-k)^{(\alpha+1)p}dk + \frac{1}{q}\int_0^1 \left|f''\left(kt+(1-k)a\right)\right|^q dk\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{p}\int_0^1 k^{(\alpha+1)p}dk + \frac{1}{q}\int_0^1 \left|f''\left(kb+(1-k)t\right)\right|^q dk\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak ve basit hesaplamalar yaparak istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.3 Teorem 3.2.3'de eğer $t = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f'(a)-f'(b)\Big] - \frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{2}{p(\alpha p+p+1)} + \frac{2\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q + |f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2q}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.4 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ konveks fonksiyon, $t \in [a,b]$, $\alpha \in (0,1]$, $q > 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f''(t)|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{|f''(a)|^q}{(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f''(b)|^q}{(\alpha+3)} + \frac{|f''(t)|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.1'den

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-k)^{\alpha+1} \left| f''\left(kt+(1-k)a\right)\right| dk \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 k^{\alpha+1} \left| f''\left(kb+(1-k)t\right)\right| dk
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede power mean eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. \times \left(\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1} \left| f''\left(kt+(1-k)a\right)\right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^1 k^{\alpha+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 k^{\alpha+1} \left| f''\left(kb+(1-k)t\right)\right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. \times \left(\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1} \Big[k\left|f''(t)\right|^q + (1-k)\left|f''(a)\right|^q \Big] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\int_0^1 k^{\alpha+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. \times \left(\int_0^1 k^{\alpha+1} \Big[k\left|f''(b)\right|^q + (1-k)\left|f''(t)\right|^q \Big] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
=\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{1}{\alpha+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{\left|f''(t)\right|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{\left|f''(a)\right|^q}{(\alpha+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{1}{\alpha+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{\left|f''(b)\right|^q}{(\alpha+3)} + \frac{\left|f''(t)\right|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.4 Teorem3.2.4'de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f'(a)-f'(b)\Big] - \frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^{q}}{(\alpha+2)(\alpha+3)}+\frac{|f''(a)|^{q}}{(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{|f''(b)|^{q}}{(\alpha+3)}+\frac{\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^{q}}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.5 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f''\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $q>1$ için $|f''|$ konkav fonksiyon, $t\in[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\{f(t)\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
&-\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{1}{\alpha+3}t+\frac{\alpha+2}{\alpha+3}a\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+3}b+\frac{1}{\alpha+3}t\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.2.1'i ve $|f''|$ konkav olmak üzere Jensen integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{a}I^{\alpha}\{f(t)\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{b}\{f(t)\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
&-\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-k)^{\alpha+1}\left|f''(kt+(1-k)a)\right|dk \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 k^{\alpha+1}\left|f''(kb+(1-k)t)\right|dk \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1(1-k)^{\alpha+1}dk\right)\left|f''\left(\frac{\int_0^1(1-k)^{\alpha+1}(kt+(1-k)a)\,dk}{\int_0^1(1-k)^{\alpha+1}dk}\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1 k^{\alpha+1}dk\right)\left|f''\left(\frac{\int_0^1 k^{\alpha+1}(kb+(1-k)t)\,dk}{\int_0^1 k^{\alpha+1}dk}\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte yer alan integraller hesaplandığında

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}\, I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
&-\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{1}{\alpha+3}t+\frac{\alpha+2}{\alpha+3}a\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+3}b+\frac{1}{\alpha+3}t\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.5 Teorem 3.2.5'te eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}\, I^{\alpha}_{b}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f'(a)-f'(b)\Big] - \frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha+2}\right)\Bigg[\left|f''\left(\frac{a+b}{2(\alpha+3)}+\frac{\alpha+2}{\alpha+3}a\right)\right| \\
&+\left|f''\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+3}b+\frac{a+b}{2(\alpha+3)}\right)\right|\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.2.6 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f''\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ konkav fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $t\in[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$, $q>1$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}\, I^{\alpha}_{b}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
&-\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''\left(\frac{a+t}{2}\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''\left(\frac{b+t}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.1'i ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1 (1-k)^{(\alpha+1)p}dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f''\left(kt+(1-k)a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^1 k^{(\alpha+1)p}dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f''\left(kb+(1-k)t\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafında $|f''|^q$ fonksiyonunun konkavlığını ve Jensen integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|f''\left(kt+(1-k)a\right)\right|^q dk &= \int_0^1 k^{o}\left|f''\left(kt+(1-k)a\right)\right|^q dk \\
&\leq \left(\int_0^1 k^0 dk\right)\left|f''\left(\frac{\int_0^1 \left(kt+(1-k)a\right)dk}{\int_0^1 k^0 dk}\right)\right|^q \\
&= \left|f''\left(\frac{a+t}{2}\right)\right|^q
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \left|f''\left(kb+(1-k)t\right)\right|^q dk \leq \left|f''\left(\frac{b+t}{2}\right)\right|^q$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla elde edilen bu eşitsizliklerin sağ taraflarını (3.2.3)'de yerine yazarak ve gerekli hesaplamaları yaparak

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(t)\right\} + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(t)\right\} - \frac{(t-a)^{\alpha}f(a)+(b-t)^{\alpha}f(b)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\left. -\frac{(t-a)^{\alpha+1}f'(a)-(b-t)^{\alpha+1}f'(b)}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} - \frac{2(1-\alpha)f(t)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''\left(\frac{a+t}{2}\right)\right| \\
&+\frac{(b-t)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''\left(\frac{b+t}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.6 Teorem 3.2.6'da eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f'(a)-f'(b)\Big] - \frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha p+p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left|f''\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|\right]$$

eşitsizliği yazılır.

Eğer Lemma 3.2.1 de $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa yeni sonuçlar elde edilir.

Lemma 3.2.2 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f''\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $\alpha\in(0,1]$, $t\in[a,b]$, $k\in[0,1]$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\\
=\;&\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1\left((1-k)^{\alpha+1}-1\right)f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)dk\right.\\
&\left.+\int_0^1\left(k^{\alpha+1}-1\right)f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)dk\right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.2.1'de eğer $t=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\\
=\;&\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f'(a)-f'(b)\Big]+\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \qquad (3.2.4)\\
&\left[\int_0^1(1-k)^{\alpha+1}f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)dk+\int_0^1k^{\alpha+1}f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)dk\right]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca aşağıdaki

$$\begin{aligned}
\Big[f'(a)-f'(b)\Big]&=-\int_a^b f''(x)dx=-\left[\frac{b-a}{2}\int_0^1 f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)dk\right.\\
&\left.+\frac{b-a}{2}\int_0^1 f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)dk\right] \qquad (3.2.5)
\end{aligned}$$

eşitlik yazılabilir. Eğer (3.2.5) eşitliği, (3.2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&{}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\\
=\;&\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1\left((1-k)^{\alpha+1}-1\right)f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)dk\right.\\
&\left.+\int_0^1\left(k^{\alpha+1}-1\right)f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)dk\right]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.7 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|$ konveks fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_b^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]\right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\Big(|f''(a)|+|f''(b)|\Big)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+3}\right)\right. \\
&\left. +2\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.2'yi kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_b^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]\right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\right| \\
=\ & \left|\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \left((1-k)^{\alpha+1}-1\right) f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)dk\right.\right. \\
&\left.\left. +\int_0^1 \left(k^{\alpha+1}-1\right) f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)dk\right]\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \left|(1-k)^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk\right. \\
&\left. +\int_0^1 \left|k^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\right] \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk\right. \\
&\left. +\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte $|f''|$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak

$$\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{AB} I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right.$$
$$\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left(k\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-k)\left|f''(a)\right|\right)dk\right.$$
$$\left. + \int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left(k\left|f''(b)\right| + (1-k)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)dk\right]$$
$$= \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\Big(\left|f''(a)\right| + \left|f''(b)\right|\Big)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+3}\right)\right.$$
$$\left. +2\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.8 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $\alpha \in (0,1]$, $q > 1$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{AB} I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right.$$
$$\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left[\left(\frac{|f''(a)|^q + \left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f''(b)|^q + \left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.2'den

$$\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{AB} I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right.$$
$$\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \left|(1-k)^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk\right.$$

$$+\int_0^1 \left|k^{\alpha+1}-1\right| \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right| dk\Bigg]$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right| dk$$

$$+\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right| dk\Bigg]$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte Hölder integral eşitsizliğini uygulayarak ve $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak

$$\Bigg| {}_a^{AB}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB} I_b^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]$$

$$-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \left[k\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(1-k)\left|f''(a)\right|^q\right] dk\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left[k\left|f''(b)\right|^q+(1-k)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right] dk\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte yer alan integraller hesaplandığında ve

$$\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.9 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f''\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ konveks fonksiyon, $\alpha\in(0,1]$, $q>1$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}\, I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha} B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. - \frac{2(1-\alpha) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \Bigg[\left(1-\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\frac{|f''(a)|^q + \left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2} - \frac{\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{|f''(a)|^q}{(\alpha+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(1-\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f''(b)|^q + \left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2} - \frac{|f''(b)|^q}{(\alpha+3)} - \frac{\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.2.2'yi kullanarak

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}\, I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha} B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. - \frac{2(1-\alpha) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \Bigg[\int_0^1 \left|(1-k)^{\alpha+1}-1\right| \left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right| dk \\
&+ \int_0^1 \left|k^{\alpha+1}-1\right| \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right| dk \Bigg] \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \Bigg[\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right) \left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right| dk \\
&+ \int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right) \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right| dk \Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte power mean eşitsizliğini uygulayarak

$$
\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}\, I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha} B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. - \frac{2(1-\alpha) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \Bigg[\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right) \left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$+\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right) dk\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right) \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliğini kullanarak ve gerekli hesaplamaları yaparak

$$\begin{aligned}
&\left| {}_a^{AB}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_b^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]\right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right) dk\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left[k\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + (1-k)\left|f''(a)\right|^q\right] dk\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right) dk\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left[k\left|f''(b)\right|^q + (1-k)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right] dk\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg] \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left(1-\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\frac{|f''(a)|^q+\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2} - \frac{\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{|f''(a)|^q}{(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(1-\frac{1}{\alpha+2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f''(b)|^q+\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2} - \frac{|f''(b)|^q}{(\alpha+3)} - \frac{\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.10 $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f''\in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$ konveks fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $\alpha\in(0,1]$, $q>1$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}_a^{AB}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_b^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big]\right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{2\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{p(\alpha+1)} + \frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q+2\left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2q}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.2.2'yi kullanarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 \left|(1-k)^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk \\
&+\int_0^1 \left|k^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\Bigg] \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk \\
&+\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Young eşitsizliği ile $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliğini kullanıp ardından gerekli hesaplamaları yaparak

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\frac{1}{p}\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)^p dk \\
&+\frac{1}{q}\int_0^1 \left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|^q dk \\
&+\frac{1}{p}\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)^p dk + \frac{1}{q}\int_0^1 \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dk\Bigg] \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\frac{1}{p}\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)^p dk \\
&+\frac{1}{q}\int_0^1 \left[k\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + (1-k)\left|f''(a)\right|^q\right] dk \\
&+\frac{1}{p}\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)^p dk + \frac{1}{q}\int_0^1 \left[k\left|f''(b)\right|^q + (1-k)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right] dk\Bigg] \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\frac{1}{p}\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1} + \frac{\left|f''(a)\right|^q + \left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2q} \\
&+\frac{1}{p}\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1} + \frac{\left|f''(b)\right|^q + \left|f''(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2q}\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.11 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|$ konkav fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{AB} I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{(\alpha+2)(3a+b)}{4(\alpha+1)} - \frac{(2a\alpha+5a+b)}{2(\alpha+1)(\alpha+3)}\right)\right|\right. \\
&\left. +\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{(\alpha+2)(3b+a)}{4(\alpha+1)} - \frac{(2b\alpha+a+5b)}{2(\alpha+1)(\alpha+3)}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.2'yi ve $|f''|$ konkav olmak üzere Jensen integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{AB} I^{\alpha}_{b} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \right. \\
&\left. -\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)} \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \left|(1-k)^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk\right. \\
&\left. +\int_0^1 \left|k^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\right] \\
=\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk\right. \\
&\left. +\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\right] \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)dk\right)\right. \\
&\times\left|f''\left(\frac{\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)dk}{\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)dk}\right)\right| \\
&\left. +\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)dk\right)\left|f''\left(\frac{\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)dk}{\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)dk}\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen ifadede yer alan integraller hesaplandığında

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{(\alpha+2)(3a+b)}{4(\alpha+1)}-\frac{(2a\alpha+5a+b)}{2(\alpha+1)(\alpha+3)}\right)\right| \\
&+\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\left|f''\left(\frac{(\alpha+2)(3b+a)}{4(\alpha+1)}-\frac{(2b\alpha+a+5b)}{2(\alpha+1)(\alpha+3)}\right)\right|\Bigg]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.12 $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde iki kez diferansiyellenebilir ve $f'' \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer $q > 1$, $|f''|^q$ konkav fonksiyon, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $\alpha \in (0,1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f''\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right. \\
&\left.+\left|f''\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.2.2'yi ve Hölder integral eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
&\Bigg| {}_{a}^{AB}I^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_{b}^{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1\left|(1-k)^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk \\
&+\int_0^1\left|k^{\alpha+1}-1\right|\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\Bigg] \qquad (3.2.6)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|dk \\
&\quad +\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)\left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|dk\Bigg] \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left(\int_0^1 \left(1-(1-k)^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times\left(\int_0^1 \left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad +\left(\int_0^1 \left(1-k^{\alpha+1}\right)^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $|f''|^q$ fonksiyonunun konkavlığını ve Jensen integral eşitsizliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|^q dk &= \int_0^1 k^o\left|f''\left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)\right|^q dk \\
&\leq \left(\int_0^1 k^0 dk\right)\left|f''\left(\frac{\int_0^1 \left(k\frac{a+b}{2}+(1-k)a\right)dk}{\int_0^1 k^0 dk}\right)\right|^q \\
&= \left|f''\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde

$$
\int_0^1 \left|f''\left(kb+(1-k)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dk \leq \left|f''\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|^q
$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla elde edilen bu eşitsizliklerin sağ taraflarını (3.2.6)'da yerine yazarak ve gerekli hesaplamaları yaparak

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|{}^{AB}_{\ a}I^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right)+{}^{AB}I^\alpha_b f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^\alpha}{2^\alpha B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Big[f(a)+f(b)\Big] \\
&-\frac{2(1-\alpha)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{B(\alpha)}\Bigg| \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left(\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right| \\
&+\left(\frac{\beta\left(p+1,\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left|f''\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|\Bigg]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.3 Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörleri Yardımıyla Pre-inveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde; önce, Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla pre-inveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ve ayrıca Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla pre-inveks fonksiyonlar için bir integral eşitsizliği elde edildi. Elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin, eşitsizlikteki parametrelerin özel değerleri için daha önce literatürde var olan sonuçlara indirgendiği görüldü. Bunun yanında Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla pre-inveks fonksiyonlar için daha önce elde edilmiş olan özdeşlikten yararlanılarak fonksiyonların pre-inveksliği ve literatürde iyi bilinen Hölder, power mean, Young eşitsizlikleri kullanılarak integral eşitsizlikler ispat edildi ve ispat edilen bu sonuçlardaki parametrelerin bazılarının özel değerleri için yeni sonuçlar elde edildi.

Teorem 3.3.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme, $\mu : I \times I \neq \emptyset \to \mathbb{R}$, $k_1, k_2 \in I$, $k_1 < k_1 + \mu(k_2, k_1)$ olsun. Eğer $f : [k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)] \to \mathbb{R}$ pre-inveks fonksiyon, $f \in L_1[k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)]$ ve μ fonksiyonu Koşul 2.1.1'i sağlıyorsa, $\alpha \in (0, 1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{2k_1 + \mu(k_2, k_1)}{2}\right) \\ \leq\; & \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{2[\mu(k_2, k_1)]^{\alpha}}\left[{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1 + \mu(k_2, k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\}\right] \\ & -\frac{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{2[\mu(k_2, k_1)]^{\alpha}}\left[f(k_1) + f\big(k_1 + \mu(k_2, k_1)\big)\right] \\ \leq\; & \frac{f(k_1) + f(k_2)}{2} \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. f fonksiyonu $[k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)]$ aralığı üzerinde pre-inveks fonksiyon olduğundan aşağıdaki

$$2f\left(\frac{2k_1 + \mu(k_2, k_1)}{2}\right) \leq f\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big) + f\big(k_1 + (1-t)\mu(k_2, k_1)\big) \tag{3.3.2}$$

eşitsizliği yazılır (bakınız [42], [44]).

(3.3.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0, 1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınıp ve ardından değişken değişimi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{2k_1+\mu(k_2,k_1)}{2}\right) \\
\leq\ & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \\
&+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} f\big(k_1+(1-t)\mu(k_2,k_1)\big)dt \\
=\ & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} \int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)} (x-k_1)^{\alpha-1} f(x)dx \\
&+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} \int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)} (k_1+\mu(k_2,k_1)-y)^{\alpha-1} f(y)dy
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Ardından

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{2k_1+\mu(k_2,k_1)}{2}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} \left[\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)} (x-k_1)^{\alpha-1} f(x)dx + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(k_1)\right] \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} f(k_1) \\
&+\frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} \left[\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)} \big(k_1+\mu(k_2,k_1)-y\big)^{\alpha-1} f(y)dy\right. \\
&\left.+\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right] - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)
\end{aligned}
$$

yazılır. Buradan, Atangana-Baleanu integral operatörleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{2k_1+\mu(k_2,k_1)}{2}\right) \\
\leq\ & \frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} \left[{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha} \left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)} \left\{f(k_1)\right\}\right] \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}} \left[f(k_1) + f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir ve (3.3.1) eşitsizliğinin sol tarafı ispat edilmiş olur. (3.3.1) eşitsizliğinin sağ tarafının ispatı için, f fonksiyonu pre-inveks olduğundan

$$
f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big) \leq (1-t)f(k_1)+tf(k_2)
$$

ve

$$
f\big(k_1+(1-t)\mu(k_2,k_1)\big) \leq tf(k_1)+(1-t)f(k_2)
$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$
f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big) + f\big(k_1+(1-t)\mu(k_2,k_1)\big) \leq f(k_1)+f(k_2) \tag{3.3.3}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}f\big(k_1+t\mu\left(k_2,k_1\right)\big)dt \\
&+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}f\big(k_1+(1-t)\mu\left(k_2,k_1\right)\big)dt \\
\leq\ &\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[f(k_1)+f(k_2)\right]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ardından değişken değişimi yapılıp Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılarak aşağıdaki

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left[\mu\left(k_2,k_1\right)\right]^\alpha}\left[\ {}^{AB}_{k_1}I^\alpha\left\{f\big(k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)\big)\right\}\ +\ {}^{AB}I^\alpha_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f\left(k_1\right)\right\}\right] \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)\left[\mu\left(k_2,k_1\right)\right]^\alpha}\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)\big)\right] \\
\leq\ &\frac{f(k_1)+f(k_2)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır ve ispat tamamlanır.

Uyarı 3.3.1 Teorem 3.3.1'de $\mu\left(k_2,k_1\right)=k_2-k_1$ olarak alınırsa [30]'da Önerme 2.1'in ispatındaki eşitsizlik (13) elde edilir.

Uyarı 3.3.2 Teorem 3.3.1'de $\alpha=1$ olarak alınırsa Teorem 2.2.4'deki (2.2.3) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.2 $I\subseteq\mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme, $\mu: I\times I\neq\emptyset\to\mathbb{R}$, $k_1,k_2\in I$, $k_1<k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)$ olsun. Eğer $f,g:\left[k_1,k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)\right]\to\mathbb{R}_+$ pre-inveks fonksiyonlar, $f,g\in L_1\left[k_1,k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)\right]$ ise $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left[\mu\left(k_2,k_1\right)\right]^\alpha}\left[\ {}^{AB}_{k_1}I^\alpha\left\{fg\big(k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)\big)\right\}\ +\ {}^{AB}I^\alpha_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{fg\left(k_1\right)\right\}\right] \\
\leq\ &\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left[f(k_1)g(k_1)+f(k_2)g(k_2)\right]\left(\frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{1}{\alpha+2}\right) \\
&+2\frac{\left[f(k_1)g(k_2)+f(k_2)g(k_1)\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Bigg] \\
&+\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)\left[\mu\left(k_2,k_1\right)\right]^\alpha}\left[f(k_1)g(k_1)+f\big(k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)\big)g\big(k_1+\mu\left(k_2,k_1\right)\big)\right]
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. f ve g fonksiyonları $[k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)]$ aralığı üzerinde pre-inveks fonksiyonlar olduğundan

$$f\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big) \leq (1-t)f(k_1) + tf(k_2)$$

ve

$$g\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big) \leq (1-t)g(k_1) + tg(k_2)$$

eşitsizlikleri yazılır. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} & f\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big)g\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big) \\ \leq\ & (1-t)^2 f(k_1)g(k_1) + t^2 f(k_2)g(k_2) + t(1-t)\left[f(k_1)g(k_2) + f(k_2)g(k_1)\right] \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.5) eşitsizliğinin her iki tarafı $(1-t)^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big)g\big(k_1 + t\mu(k_2, k_1)\big)dt \\ \leq\ & \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\Big[(1-t)^2 f(k_1)g(k_1) + t^2 f(k_2)g(k_2) \\ & + t(1-t)\left[f(k_1)g(k_2) + f(k_2)g(k_1)\right]\Big]dt \\ =\ & \frac{f(k_1)g(k_1)}{\alpha+2} + 2\frac{f(k_2)g(k_2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\left[f(k_1)g(k_2) + f(k_2)g(k_1)\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki (3.3.6) eşitsizliğinde $k_1 + t\mu(k_2, k_1) = x$ değişken değişimi yapıldığında

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[\mu(k_2, k_1)]^\alpha} \int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)} \big(k_1 + \mu(k_2, k_1) - x\big)^{\alpha-1} f(x)g(x)dx \\ \leq\ & \frac{f(k_1)g(k_1)}{\alpha+2} + 2\frac{f(k_2)g(k_2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\left[f(k_1)g(k_2) + f(k_2)g(k_1)\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}$ ifadesi ile çarpılır ve ardından bu eşitsizliğin her iki tarafına $\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^\alpha} f\big(k_1 + \mu(k_2, k_1)\big)g\big(k_1 + \mu(k_2, k_1)\big)$ ifadesi eklenir ve son olarak Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[\mu(k_2, k_1)]^\alpha}\left[{}^{AB}_{k_1}I^\alpha \left\{fg\big(k_1 + \mu(k_2, k_1)\big)\right\}\right] \\ \leq\ & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{f(k_1)g(k_1)}{\alpha+2} + 2\frac{f(k_2)g(k_2)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\left[f(k_1)g(k_2) + f(k_2)g(k_1)\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right] \\ & + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)\left[\mu(k_2, k_1)\right]^\alpha} f\big(k_1 + \mu(k_2, k_1)\big)g\big(k_1 + \mu(k_2, k_1)\big) \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde, (3.3.5) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılır ve elde edilen sonucun $[0,1]$ aralığı üzerinde t'ye göre integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{\alpha-1} f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big) g\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big) dt \\
\leq\ & \int_0^1 t^{\alpha-1}\Big[(1-t)^2 f(k_1)g(k_1)+t^2 f(k_2)g(k_2)+t(1-t)\left[f(k_1)g(k_2)+f(k_2)g(k_1)\right]\Big]dt \\
=\ & 2\frac{f(k_1)g(k_1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{f(k_2)g(k_2)}{\alpha+2}+\frac{\left[f(k_1)g(k_2)+f(k_2)g(k_1)\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \qquad (3.3.9)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3.8) eşitsizliğinin ispatınındaki hesaplamalara benzer hesaplamalar yapılarak

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}}\left[\,{}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{fg(k_1)\right\}\right] \qquad (3.3.10)\\
\leq\ & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[2\frac{f(k_1)g(k_1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}+2\frac{f(k_2)g(k_2)}{\alpha+2}+\frac{\left[f(k_1)g(k_2)+f(k_2)g(k_1)\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right] \\
& +\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)\left[\mu(k_2,k_1)\right]^{\alpha}} f(k_1)g(k_1)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Ardından, (3.3.8) ve (3.3.10) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}}\left[\,{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{fg\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\}+{}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{fg(k_1)\right\}\right] \\
\leq\ & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\Bigg[\left[f(k_1)g(k_1)+f(k_2)g(k_2)\right]\left(\frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{1}{\alpha+2}\right) \\
& +2\frac{\left[f(k_1)g(k_2)+f(k_2)g(k_1)\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Bigg] \\
& +\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)\left[\mu(k_2,k_1)\right]^{\alpha}}\left[f(k_1)g(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)g\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme, $\mu : I \times I \neq \emptyset \to \mathbb{R}$, $k_1, k_2 \in I$, $k_1 < k_1 + \mu(k_2, k_1)$ olsun. Eğer $f : I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L_1[k_1, k_1 + \mu(k_2, k_1)]$ ise $\alpha \in (0, 1]$, $t \in [0, 1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[\,{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\}+{}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\}\right] \\
& -\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right] \qquad (3.3.11)\\
=\ & \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt-\int_0^1 t^{\alpha} f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt
\end{aligned}
$$

eşitliği geçerlidir ([5]).

İspat. Kısmi integrasyon uygulayarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-t)^\alpha f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \qquad (3.3.12)\\
=\;& \frac{(1-t)^\alpha f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)}{\mu(k_2,k_1)}\Bigg|_0^1+\frac{\alpha}{\mu(k_2,k_1)}\int_0^1 f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)(1-t)^{\alpha-1}dt\\
=\;& -\frac{f(k_1)}{\mu(k_2,k_1)}+\frac{\alpha}{\mu(k_2,k_1)}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt\\
=\;& -\frac{f(k_1)}{\mu(k_2,k_1)}+\frac{\alpha}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)}\big(k_1+\mu(k_2,k_1)-x\big)^{\alpha-1}f(x)dx.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (3.3.12) eşitliğinin her iki tarafı $\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^\alpha f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt\\
=\;& -\frac{f(k_1)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\mu(k_2,k_1)}\\
&+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)}\big(k_1+\mu(k_2,k_1)-x\big)^{\alpha-1}f(x)dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ardından gerekli ekleme, çıkarma ve düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^\alpha f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt\\
=\;& -\frac{f(k_1)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\mu(k_2,k_1)}\\
&+\frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)}\big(k_1+\mu(k_2,k_1)-x\big)^{\alpha-1}f(x)dx\right.\\
&\left.+\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^\alpha f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \qquad (3.3.13)\\
=\;& -\frac{f(k_1)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\mu(k_2,k_1)}+\frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[\,{}^{AB}_{k_1}I^\alpha\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\}\right]\\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde, kısmi integrasyon uygulayarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t^\alpha f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \qquad (3.3.14)\\
=\;& \frac{t^\alpha f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)}{\mu(k_2,k_1)}\Bigg|_0^1-\frac{\alpha}{\mu(k_2,k_1)}\int_0^1 f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)t^{\alpha-1}dt\\
=\;& \frac{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)}{\mu(k_2,k_1)}-\frac{\alpha}{\mu(k_2,k_1)}\int_0^1 t^{\alpha-1}f\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt\\
=\;& \frac{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)}{\mu(k_2,k_1)}-\frac{\alpha}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)}(u-k_1)^{\alpha-1}f(u)du.
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eğer (3.3.14) eşitliğinin her iki tarafı $-\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha} f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \\
= \; & -\frac{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\mu(k_2,k_1)}+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)}(u-k_1)^{\alpha-1} f(u)du
\end{aligned}
$$

eşitliği ve ardından

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha} f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \\
= \; & -\frac{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\mu(k_2,k_1)}+\frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\Bigg[\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_{k_1}^{k_1+\mu(k_2,k_1)}(u-k_1)^{\alpha-1} f(u)du \\
& +\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(k_1)\Bigg]-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}f(k_1)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha} f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \\
= \; & -\frac{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)\mu(k_2,k_1)}+\frac{1}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\{f(k_1)\}\right] \\
& -\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}f(k_1)
\end{aligned}
\tag{3.3.15}
$$

eşitliği elde edilir. (3.3.13) ve (3.3.15) eşitlikleri taraf taraf toplanıp, gerekli işlemler yapılarak istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 3.3.3 Lemma 3.3.1'de $\mu(k_2,k_1)=k_2-k_1$ olarak alınırsa, Lemma 2.3.3'deki eşitlik (2.3.9) elde edilir.

Teorem 3.3.3 $I\subseteq\mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme, $\mu: I\times I\neq\emptyset\to\mathbb{R}$, $k_1,k_2\in I$, $k_1<k_1+\mu(k_2,k_1)$, $f: I\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L_1[k_1,k_1+\mu(k_2,k_1)]$ olsun. Eğer $|f'|$ pre-inveks fonksiyon ise $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
& \Bigg|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\big\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\big\}+{}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\{f(k_1)\}\right] \\
& -\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\Bigg| \\
\leq \; & \frac{|f'(k_1)|+|f'(k_2)|}{\alpha+1}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.3.1'i ve mutlak değerin özelliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}} \left[{}_{k_1}^{AB}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\} \right] \right. \\
&\left. -\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right] \right| \\
= &\left| \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt - \int_0^1 t^{\alpha} f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)dt \right| \\
\leq &\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt + \int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılır. $|f'|$ pre-inveks fonksiyon olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}} \left[{}_{k_1}^{AB}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\} \right] \right. \\
&\left. -\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right] \right| \\
\leq &\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\left[(1-t)|f'(k_1)|+t|f'(k_2)|\right]dt + \int_0^1 t^{\alpha}\left[(1-t)|f'(k_1)|+t|f'(k_2)|\right]dt \\
= &\frac{|f'(k_1)|+|f'(k_2)|}{\alpha+1}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.1 Teorem 3.3.3'te eğer $\mu(k_2,k_1)=k_2-k_1$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}} \left[{}_{k_1}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(k_2)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_2}\left\{f(k_1)\right\} \right] \right. \\
&\left. -\left(\frac{(k_2-k_1)^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f(k_2)\right] \right| \\
\leq &\frac{|f'(k_1)|+|f'(k_2)|}{\alpha+1}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.4 $I\subseteq\mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme, $\mu: I\times I\neq\emptyset\to\mathbb{R}$, $k_1,k_2\in I$, $k_1<k_1+\mu(k_2,k_1)$, $f:I\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L_1[k_1,k_1+\mu(k_2,k_1)]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ pre-inveks fonksiyon ise $p^{-1}+q^{-1}=1$, $q>1$, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\right|$$
$$\leq 2\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(k_1)|^q+|f'(k_2)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.3.1'i kullanarak

$$\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\right|$$
$$\leq \int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt$$

eşitsizliği elde edilir. Ardından Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\right|$$
$$\leq \left(\int_0^1(1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun pre-inveksliğinden

$$\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[{}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\right|$$
$$\leq \left(\int_0^1(1-t)^{\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[(1-t)\,|f'(k_1)|^q+t\,|f'(k_2)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_0^1 t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[(1-t)\,|f'(k_1)|^q+t\,|f'(k_2)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlikteki integraller hesaplanarak istenilen sonuç bulunur.

Sonuç 3.3.2 Teorem 3.3.4'te eğer $\mu(k_2,k_1)=k_2-k_1$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}&\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}}\left[\ {}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\{f(k_2)\}\ +\ {}^{AB}I^{\alpha}_{k_2}\{f(k_1)\}\right]\right.\\&\left.-\left(\frac{(k_2-k_1)^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}}\right)[f(k_1)+f(k_2)]\right|\\\leq\ &2\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(k_1)|^q+|f'(k_2)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.5 $I\subseteq\mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme, $\mu:I\times I\neq\emptyset\to\mathbb{R}$, $k_1,k_2\in I$, $k_1<k_1+\mu(k_2,k_1)$, $f:I\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f'\in L_1[k_1,k_1+\mu(k_2,k_1)]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ pre-inveks fonksiyon ise $q\geq 1$, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[\ {}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\}\ +\ {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\{f(k_1)\}\right]\right.\\&\left.-\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\right|\\\leq\ &\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{|f'(k_1)|^q}{\alpha+2}+\frac{|f'(k_2)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(k_1)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{|f'(k_2)|^q}{\alpha+2}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.3.1'i ve power mean eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}&\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[\ {}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\}\ +\ {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\{f(k_1)\}\right]\right.\\&\left.-\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\right|\\\leq\ &\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt\\\leq\ &\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\&+\left(\int_0^1 t^{\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun pre-inveksliğinden yararlanarak

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}} \left[{}_{k_1}^{AB}I^{\alpha}\left\{ f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big) \right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{ f(k_1) \right\} \right] \right. \\
&\left. - \left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}} \right) \left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big) \right] \right| \\
\leq\ & \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha}\, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha} \Big[(1-t)\,|f'(k_1)|^q + t\,|f'(k_2)|^q \Big] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\int_0^1 t^{\alpha} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^{\alpha} \Big[(1-t)\,|f'(k_1)|^q + t\,|f'(k_2)|^q \Big] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{|f'(k_1)|^q}{\alpha+2} + \frac{|f'(k_2)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(k_1)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{|f'(k_2)|^q}{\alpha+2} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3 Teorem 3.3.5'te eğer $\mu(k_2,k_1) = k_2 - k_1$ olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}} \left[{}_{k_1}^{AB}I^{\alpha}\left\{ f(k_2) \right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_2}\left\{ f(k_1) \right\} \right] \right. \\
&\left. - \left(\frac{(k_2-k_1)^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}} \right) \left[f(k_1)+f(k_2) \right] \right| \\
\leq\ & \left(\frac{1}{\alpha+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{|f'(k_1)|^q}{\alpha+2} + \frac{|f'(k_2)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(k_1)|^q}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{|f'(k_2)|^q}{\alpha+2} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3.6 $I \subseteq \mathbb{R}$ açık inveks bir alt küme, $\mu : I \times I \neq \emptyset \to \mathbb{R}$, $k_1, k_2 \in I$, $k_1 < k_1 + \mu(k_2,k_1)$, $f : I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L_1[k_1, k_1+\mu(k_2,k_1)]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ pre-inveks fonksiyon ise $p^{-1}+q^{-1} = 1$, $q > 1$, $\alpha \in (0,1]$, $B(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}} \left[{}_{k_1}^{AB}I^{\alpha}\left\{ f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big) \right\} + {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{ f(k_1) \right\} \right] \right. \\
&\left. - \left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}} \right) \left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big) \right] \right| \\
\leq\ & \frac{2}{p(\alpha p+1)} + \frac{|f'(k_1)|^q + |f'(k_2)|^q}{q}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.3.1'i ve Young eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\left[\ {}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right\}\ +\ {}^{AB}I^{\alpha}_{k_1+\mu(k_2,k_1)}\left\{f(k_1)\right\}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{[\mu(k_2,k_1)]^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f\big(k_1+\mu(k_2,k_1)\big)\right]\right|$$
$$\leq \int_0^1(1-t)^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|dt.$$
$$\leq \frac{1}{p}\int_0^1(1-t)^{\alpha p}\,dt+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|^q dt$$
$$+\frac{1}{p}\int_0^1 t^{\alpha p}dt+\frac{1}{q}\int_0^1\left|f'\big(k_1+t\mu(k_2,k_1)\big)\right|^q dt$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun pre-inveksliğinden yararlanarak ve yukarıdaki eşitsizlikte yer alan integraller hesaplanarak istenilen sonuç elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.4 Teorem 3.3.6'da eğer $\mu(k_2,k_1)=k_2-k_1$ olarak seçilirse

$$\left|\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}}\left[\ {}^{AB}_{k_1}I^{\alpha}\left\{f(k_2)\right\}\ +\ {}^{AB}I^{\alpha}_{k_2}\left\{f(k_1)\right\}\right]\right.$$
$$\left.-\left(\frac{(k_2-k_1)^{\alpha}+(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{(k_2-k_1)^{\alpha+1}}\right)\left[f(k_1)+f(k_2)\right]\right|$$
$$\leq \frac{2}{p(\alpha p+1)}+\frac{|f'(k_1)|^q+|f'(k_2)|^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir.

3.4 Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörleri Yardımıyla Senkronize Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde; Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla senkronize fonksiyonlar için Chebyshev tipli integral eşitsizlikleri elde edildi.

Teorem 3.4.1 $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ integrallenebilir ve $[0,\infty)$ üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Bu durumda $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{(fg)(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fg)(b)\right] \tag{3.4.1}$$
$$\geq \left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{f(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{g(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığı üzerinde senkronize fonksiyonlar olduğundan

$$\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\geq 0,\ \ x,y\in[0,\infty)$$

eşitsizliği veya eşdeğeri olarak

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geq f(x)g(y)+f(y)g(x) \tag{3.4.2}$$

eşitsizliği yazılır. Eğer (3.4.2) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1}f(x)g(x)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1}f(y)g(y) \\
\geq\ & \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1}f(x)g(y)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}(b-x)^{\alpha-1}f(y)g(x)
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.4.3) eşitsizliğinin her iki tarafının x'e göre $[a,b]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}f(x)g(x)dx+f(y)g(y)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}dx \\
\geq\ & g(y)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}f(x)dx+f(y)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}g(x)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)g(b)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}f(x)g(x)dx-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)g(b) \\
& +f(y)g(y)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}dx \\
\geq\ & g(y)\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)+g(y)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}f(x)dx-g(y)\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b) \\
& +f(y)\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)+f(y)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}g(x)dx-f(y)\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)
\end{aligned}$$

ifadesi yazılır. Atangana-Baleanu kesirli integral operatörlerini kullanarak

$$\begin{aligned}
& {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{\,(fg)\,(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\big(fg\big)(b)+f(y)g(y)\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \\
\geq\ & g(y)\,{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{f(b)\big\}-g(y)\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)+f(y)\,{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{g(b)\big\}-f(y)\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer yöntemle devam edildiğinde, (3.4.4) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}(b-y)^{\alpha-1}$ ifadesi ile çarpılır ve y'ye göre $[a,b]$ aralığında integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
&{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{\,(fg)\,(b)\big\}\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-y)^{\alpha-1}\,dy \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\big(fg\big)(b)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-y)^{\alpha-1}\,dy \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-y)^{\alpha-1}\,f(y)g(y)dy \\
\geq\ &{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{f(b)\big\}\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-y)^{\alpha-1}\,g(y)dy \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-y)^{\alpha-1}\,g(y)dy \\
&+{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{g(b)\big\}\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-y)^{\alpha-1}\,f(y)dy \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-y)^{\alpha-1}\,f(y)dy
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
&{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{\,(fg)\,(b)\big\}\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{(1-\alpha)\,(b-a)^{\alpha}}{[B(\alpha)]^{2}\,\Gamma(\alpha})\,(fg)\,(b) \\
&+{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{\,(fg)\,(b)\big\}\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}-\frac{(1-\alpha)\,(b-a)^{\alpha}}{[B(\alpha)]^{2}\,\Gamma(\alpha})\,(fg)\,(b) \\
\geq\ &{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{f(b)\big\}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{g(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right] \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{g(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right] \\
&+{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{g(b)\big\}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{f(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right] \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{f(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Ardından

$$
\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{\,(fg)\,(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\,(fg)\,(b)\right] \\
\geq\ &\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{f(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\big\{g(b)\big\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 3.4.1 (3.4.1) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ seçilirse (2.2.11)'deki Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.4.1 $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $[0, \infty)$ üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Teorem 3.4.1'in ispatındaki hesaplamalara benzer hesaplamalar yapılarak, $a, b \in$

$[0,\infty)$, $a<b$, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{(fg)(a)\right\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fg)(a)\right] \\
\geq\ &\left[{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{f(a)\right\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(a)\right]\left[{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\left\{g(a)\right\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(a)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.4.2 $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ integrallenebilir ve $[0,\infty)$ üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Bu durumda $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$, $\alpha,\beta\in(0,1]$, $B(\alpha),B(\beta)>0$ normalizasyon fonksiyonları ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\beta}}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{(fg)(b)\right\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fg)(b)\right] \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\left\{(fg)(b)\right\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}(fg)(b)\right] \\
\geq\ &\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(b)\right\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\left\{g(b)\right\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}g(b)\right] \\
&+\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{g(b)\right\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\left\{f(b)\right\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}f(b)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Eğer (3.4.4) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}(b-y)^{\beta-1}$ ifadesi ile çarpılır ve y'ye göre $[a,b]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{(fg)(b)\right\}\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{b}(b-y)^{\beta-1}dy \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fg)(b)\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{b}(b-y)^{\beta-1}dy \\
&+\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{b}(b-y)^{\beta-1}f(y)g(y)dy \\
\geq\ &{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{f(b)\right\}\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{b}(b-y)^{\beta-1}g(y)dy \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{b}(b-y)^{\beta-1}g(y)dy \\
&+{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{g(b)\right\}\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{b}(b-y)^{\beta-1}f(y)dy \\
&-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\frac{\beta}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{b}(b-y)^{\beta-1}f(y)dy
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe gerekli ekleme ve çıkarmalar yapılıp, Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü kullanılarak

$$\begin{aligned}
& {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{(fg)(b)\}\frac{(b-a)^{\beta}}{B(\beta)\Gamma(\beta)}-\frac{(1-\alpha)(b-a)^{\beta}}{B(\alpha)B(\beta)\Gamma(\beta)}(fg)(b) \\
& +\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{(fg)(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}(fg)(b)\right] \\
\geq\ & {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(b)\}\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{g(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}g(b)\right] \\
& -\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{g(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}g(b)\right] \\
& +{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{g(b)\}\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{f(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}f(b)\right] \\
& -\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{f(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}f(b)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{(b-a)^{\beta}}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{(fg)(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fg)(b)\right] \\
& +\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{(fg)(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}(fg)(b)\right] \\
\geq\ & \left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{g(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}g(b)\right] \\
& +\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{g(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]\left[{}_{a}^{AB}I^{\beta}\{f(b)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}f(b)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılarak ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4.2 $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ integrallenebilir ve $[0,\infty)$ üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Teorem 3.4.2'nin ispatındaki hesaplamalara benzer hesaplamalar yapılarak, $a,b\in[0,\infty)$, $a<b$, $\alpha,\beta\in(0,1]$, $B(\alpha),B(\beta)>0$ normalizasyon fonksiyonları ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
& \frac{(b-a)^{\beta}}{B(\beta)\Gamma(\beta)}\left[{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\{(fg)(a)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fg)(a)\right] \\
& +\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\left[{}^{AB}I_{b}^{\beta}\{(fg)(a)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}(fg)(a)\right] \\
\geq\ & \left[{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\{f(a)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(a)\right]\left[{}^{AB}I_{b}^{\beta}\{g(a)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}g(a)\right] \\
& +\left[{}^{AB}I_{b}^{\alpha}\{g(a)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(a)\right]\left[{}^{AB}I_{b}^{\beta}\{f(a)\}-\frac{(1-\beta)}{B(\beta)}f(a)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.4.3 $i = 1, 2, ..., n$ için $f_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[0, \infty)$ üzerinde integrallenebilir pozitif artan fonksiyon, $a, b \in [0, \infty)$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0, 1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyon ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right]^{n-1} \left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right)\right] \tag{3.4.5}$$
$$\geq \prod_{i=1}^{n}\left({}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f_i(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_i(b)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Bu teoremin ispatında, $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $n = 1$ için (3.4.5) eşitsizliğinden

$${}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f_1(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_1(b) \ \geq \ {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f_1(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_1(b), \ \ \alpha \in (0, 1]$$

eşitsizliğinin elde edileceği açıktır. Tümevarım yönteminin hipotezi kullanıldığında, (3.4.5) eşitsizliği $n-1$ için doğru olacağından

$${}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{\prod_{i=1}^{n-1} f_i(b)\right\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(b)\right) \tag{3.4.6}$$
$$\geq \left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right]^{2-n}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\left({}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f_i(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_i(b)\right)\right]$$

eşitsizliği geçerlidir ve $i = 1, 2, ..., n$ için $f_i : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde integrallenebilir ve pozitif artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(b)\right)$ fonksiyonu da artan fonksiyon olur. Bu nedenle $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$, $f_n = f$ için (3.4.1) eşitsizliği uygulanırsa ve (3.4.6) eşitsizliğinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
&{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(b)\right)\\
&={}^{AB}_{\ a} I^{\alpha}\left\{\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(b)\right)(f_n(b))\right\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(b)\right)(f_n)\right)\\
&={}^{AB}_{\ a} I^{\alpha}\{(gf)(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(gf)(b)\\
\geq\ &\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right]^{-1}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{g(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} g(b)\right]\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(b)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right]^{-1}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\left\{\prod_{i=1}^{n-1} f_i(b)\right\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(b)\right)\right] \\
&\quad \times \left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f_n(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_n(b)\right] \\
&\geq \left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right]^{-1}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right]^{2-n}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\left({}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f_i(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_i(b)\right)\right] \\
&\quad \times \left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f_n(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_n(b)\right] \\
&= \left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right]^{1-n}\left[\prod_{i=1}^{n}\left({}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f_i(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f_i(b)\right)\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Böylece (3.4.5) eşitsizliğinin n için doğruluğu gösterilmiş olur ve buradan ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.4 $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[0, \infty)$ üzerinde integrallenebilir iki fonksiyon, $a, b \in [0, \infty)$ ve $a < b$ olsun. Ayrıca, f artan fonksiyon ve $m := \inf_{x \in [0,\infty)} g'(x)$ ile birlikte g diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda, $t(x) = x$, $\alpha \in (0, 1]$, $B(\alpha) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{(fg)(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fg)(b) \qquad (3.4.7) \\
\geq\ & \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(b)\right]\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{g(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} g(b)\right] \\
& - \frac{m(b + a\,\alpha)}{\alpha+1}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(b)\right] + m\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{(tf)(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(tf)(b)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $p(x) := mt(x) = mx$ ve $h(x) := g(x) - p(x)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, h diferansiyellenebilirdir ve $[0, \infty)$ üzerinde artandır. Buradan Teorem 3.4.1'i kullanarak

$$
\begin{aligned}
&{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{(fh)(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(fh)(b) \\
&= {}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{(f(g-mt))(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(f(g-mt))(b) \\
&\geq \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(b)\right] \qquad (3.4.8) \\
&\quad \times \left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{(g-mt)(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}(g-mt)(b)\right] \\
&= \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{f(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(b)\right] \\
&\quad \times \left[\left({}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{g(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} g(b)\right) - m\left({}_{a}^{AB}I^{\alpha}\{t(b)\} - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} t(b)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{g(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]\\
&\quad -\frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\frac{m(b-a)^{\alpha}(b+a\,\alpha)}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)(\alpha+1)}\\
&= \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{g(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]\\
&\quad -\frac{m(b+a\,\alpha)}{\alpha+1}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılır. Ardından, (3.4.8)'in sağ tarafını kullanarak

$$
\begin{aligned}
&{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{\,(fg)\,(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\,(fg)\,(b)\\
&= {}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{\big(f\,(h+mt)\,\big)(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\big(f\,(h+mt)\,\big)(b)\\
&= \left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{\,(fh)\,(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\,(fh)\,(b)\right]+m\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{\,(tf)\,(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\,(tf)\,(b)\right]\\
&\geq \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{g(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]\\
&\quad -\frac{m(b+a\,\alpha)}{\alpha+1}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]+m\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{\,(tf)\,(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\,(tf)\,(b)\right]
\end{aligned}
$$

ifadesi bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4.3 $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde integrallenebilir iki fonksiyon, $a,b\in[0,\infty)$ ve $a<b$ olsun. Ayrıca, f azalan foksiyon ve $\omega:=\sup_{x\in[0,\infty)}g'(x)$ ile birlikte g diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda, $t(x)=x$, $\alpha\in(0,1]$, $B(\alpha)>0$ normalizasyon fonksiyonu ve $\Gamma(.)$ gama fonksiyonu olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$
\begin{aligned}
&{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{\,(fg)\,(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\,(fg)\,(b)\\
&\geq \frac{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{g(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}g(b)\right]\\
&\quad -\frac{\omega(b+a\,\alpha)}{\alpha+1}\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{f(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}f(b)\right]+\omega\left[{}^{AB}_{\ a}I^{\alpha}\{\,(tf)\,(b)\}-\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\,(tf)\,(b)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $u(x):=\omega t(x)=\omega x$ ve $k(x):=g(x)-u(x)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda k diferansiyellenebilir ve $[0,\infty)$ üzerinde azalan olur. Buradan, Teorem 3.4.1'i kullanarak ve (3.4.7)'nın ispatındaki hesaplamalara benzer hesaplamalar yaparak istenilen sonuca ulaşılır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde elde edilen sonuçlar; tezin üçüncü bölümü olan ve dört alt bölümden oluşan araştırma bulguları bölümünde verilmiştir. Bu alt bölümlerin birincisinde; Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla fonksiyonların birinci türevleri için farklı parametreler kullanılarak yeni eşitlikler ispatlanmıştır. Daha sonra, bu eşitlikler yardımıyla fonksiyonların konveksliği, konkavlığı ve literatürde iyi bilinen Hölder, power mean, Young ve Jensen eşitsizlikleri kullanılarak yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların bazılarının daha önce literatürde var olan sonuçlara indirgendiği görülmüş ve ayrıca elde edilen sonuçlardaki parametrelerin bazılarının özel değerleri için yeni sonuçlar bulunmuştur. Ardından bu birinci alt bölümde, Riemann-Liouville kesirli integral operatörü ile Atangana-Baleanu kesirli integral operatörünün, farklı fonksiyonlar için operatörlerdeki parametrelerin farklı değerlerine karşılık elde edilen simülasyonları verilerek bu iki operatörün karşılaştırılması yapılmıştır. İkinci alt bölümde; önceki çalışmalara benzer şekilde, Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla fonksiyonların ikinci türevleri için farklı parametreler kullanılarak yeni eşitlikler ve daha sonra bu eşitlikler yardımıyla fonksiyonların konveksliği, konkavlığı ve iyi bilinen klasik eşitsizlikler kullanılarak yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Üçüncü alt bölümde, Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla pre-inveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ve bir integral eşitsizliği elde edilmiştir. Elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin, eşitsizlikteki parametrelerin özel değerleri için, daha önce literatürde var olan sonuçlara indirgendiği görülmüştür. Ayrıca bu bölümde, daha önce elde edilmiş olan bir eşitlik kullanılarak benzer yöntemlerle integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son alt bölümde ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla senkronize fonksiyonlar için Chebyshev tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son üç alt bölümde elde edilen bazı sonuçlardaki parametrelerin bazılarının özel değerleri için yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar da, farklı fonksiyon sınıfları ve farklı kesirli operatörler için benzer yöntemlerle yeni sonuçlar elde edebilir. Bu tezin bulgular kısmında elde edilen sonuçlar makale formatına dönüştürülmüş, bunların bazıları çeşitli dergilerde yayımlanmıştır. Birinci alt bölümde elde edilen sonuçlar; "New integral inequalities for Atangana-Baleanu fractional integral operators and various comparisons via simulations" makale başlığıyla "Filomat" adlı dergide, "On new generalizations of Hermite-Hadamard type inequalities via Atangana-Baleanu fractional integral operators" makale başlığıyla "Axioms" adlı dergide, "Fractional integral inequalities via Atangana-Baleanu operators for convex and concave functions" makale başlığıyla "Journal of Function Spaces" adlı dergide yayımlanmıştır. İkinci alt bölümde elde edilen sonuçlar; “New integral inequalities for differentiable convex functions via Atangana-Baleanu fractional integral operators” makale başlığıyla “Chaos, Solitons and Fractals” adlı dergide, üçüncü alt bölümde elde edilen sonuçlar; “Fractional integral inequalities for preinvex functions via Atangana-Baleanu integral operators” makale başlığıyla “Miskolc Mathematical Notes” adlı makalede yayımlanmak için kabül edilmiş ve yayımlanma aşamasındadır.

KAYNAKLAR

[1] Abdeljawad, T., & Baleanu, D. (2017). On fractional derivatives with exponential kernel and their discrete versions. *Reports on Mathematical Physics*, 80(1), 11-27.

[2] Abdeljawad, T. & Baleanu, D. (2017). Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10(3), 1098-1107.

[3] Abel, NH. (1881). Solution de quelques problèmes á l'aide d'intégrales définies. In Oeuvres Complètes de Niels Henrik Abel; Sylow, L., Lie, S., Eds.; CUP: Cambridge, UK.

[4] Adams, RA. & Fournier, JJF. (2003). Sobolev spaces. Academic Press, An imprint of Elsevier Science, Canada, 305 pp.

[5] Ali, S., Ali, RS., Iqbal, W., Talib, N., Saif, H. & Batool, S. (2022). New fractional inequalities for convexities and pre-invexities in aspects of Atangana-Baleanu fractional operators. *International Journal of Advancements in Mathematics*, 2(1), 19-32.

[6] Atangana, A. & Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel, Theory and Application to Heat Transfer Model. *Thermal Science*, 20(2), 763-769.

[7] Antczak, T. (2005). Mean value in invexity analysis. *Nonlinear Analysis, Elsevier*, 60, 1473-1484.

[8] Bagley, RL. & Torvik, PJ. (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic. *Journal of Rheology*, 30, 133-155.

[9] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. & Trujillo, JJ. (2017). Fractional calculus: Models and Numerical Methods. World Scientific, 2nd ed., New York, NY, USA.

[10] Baleanu, D. & Fernandez, A. (2019). On fractional operators and their classifications. *Mathematics*, 7(830), 1-10.

[11] Baleanu, D. & Lopes, AM. (2019). Handbook of fractional calculus with applications. Applications in Engineering, Life and Social Sciences, volume 7, Part A; De Gruyter: Berlin, Germany.

[12] Baleanu, D. & Lopes, AM. (2019). Handbook of fractional calculus with applications. Applications in Engineering, Life and Social Sciences, volume 8, Part B; De Gruyter: Berlin, Germany.

[13] Beckenbach, EF. & Bellman, R. (1961). Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 198 pp.

[14] Ben-Israel, A. & Mond, B. (1986). What is invexity? *Journal of the Australian Mathematical Society*, Ser. B, 28, 1-9.

[15] Bonfanti, A., Fouchard, J., Khalilgharibi, N., Charras, G. & Kabla, A. (2020). A unified rheological model for cells and cellularised materials. *Royal Society Open Science*, 7: 190920.

[16] Breckner, WW. (1978). Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlianeren Raumen. *Publications de I'Lnstitut Mathematique*, 23, 13-20.

[17] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation Whose Q is almost frequancy independent-II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13(5), 529-539.

[18] Caputo, M. & Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1(2), 73-85.

[19] Caputo, M. & Fabrizio, M. (2016). Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2(1), 1-11.

[20] Caputo, M. & Mainardi, F. (1971). A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91, 134-147.

[21] Čebyšev, PL. (1882). Sur les expressions approximatives des intĕgrales par les auters prises entre les mĕmes limites. *Proceedings Mathematical Society*, Charkov, 2, 93-98.

[22] Craven, BD. (1981). Invex functions and constrained lokal minima. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 24, 357-366.

[23] De Morgan, A. (1840). The differential and integral calculus combining differentiation, integration, development, differential equations, differences, summation, calculus of variations with applications to algebra. Plane and Solid Geometry; Baldwin and Craddock: London, UK.

[24] Dragomir, SS. (2002). On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m-convex functions. *Tamkang Journal of Mathematics*, 33(1), 45-56.

[25] Dragomir, SS. & Fitzpatrick, S. (1998). The Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense. *Demonstratio Mathematica*, 31(3), 633-642.

[26] Dragomir, SS. & Fitzpatrick, S. (1999). The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, 32(4), 687-696.

[27] Dragomir, SS. & Pearce, CEM. (1996). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. RGMIA Monographs, Victoria University. 349 pp.

[28] Dugowson, S. (1994). Les différentielles métaphysiques: Histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation. Ph.D. Thesis, Université Paris Nord, Paris, France.

[29] El-Sayed, AMA. & Gaafar, FM. (2003). Fractional calculus and some intermediate physical processes. *Applied Mathematics and Computation*, 144(1), 117-126.

[30] Fernandez, A. & Mohammed, P. (2020). Hermite-Hadamard inequalities in fractional calculus defined using Mittag-Leffler kernels. *Mathematical Methods in the Aplied Science, Wiley*, special issue, pages, 1-18.

[31] Gürbüz, M., Akdemir, AO., Rashid, S. & Set, E. (2020). Hermite-Hadamard inequality for fractional integrals of Caputo-Fabrizio type and related inequalities. *Journal of inequalities and Applications*, 2020(172), 1-10.

[32] Hadamard, J. (1893). Etude sur propriétés des fonctions entiéres et en parculier d'une fonction considérée par Riemann. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Elsevier*, 9, 171-215.

[33] Hanson, MA. (1988). On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 80, 545-550.

[34] Hardy, GH., & Littlewood, JE. (1928). Some properties of fractional integrals. *I. Mathematische Zeitschrift*, 27(1), 565-606.

[35] Hardy, GH., & Littlewood, JE. (1932). Some properties of fractional integrals. *II. Mathematische Zeitschrift*, 34(1), 403-439.

[36] Hardy, GH., Littlewood, JE. & Polya, G. (1952). Inequalities, 2nd Ed.., Cambridge UniversityPress, Newyork, USA, 324 pp.

[37] Haubold, HJ. Mathai, AM. & Saxena, RK. (2011). Mittag-Leffler functions and their applications. *Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics*, 2011, 1-51.

[38] Hilfer, R. (2000). Applications of fractional calculus in physics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 90 pp.

[39] Hilfer, R. (2008). Threefold introduction to fractional derivatives. In Anomalous Transport: Foundations and Applications; Klages, R., Radons, G., Sokolov, I.M., Eds.; Wiley-interscience Publication, Berlin, Germany.

[40] Hölder, O. (1889). Uber einen Mittelwertsatz. Nachr. Ges. Wiss., Goettingen, 38-47.

[41] Hudzik, H. & Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Math.*, 48, 100-111.

[42] İşcan, İ., (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for preinveks functions via fractional integrals and related fractional inequalities. *American Journal of Mathematical Analysis*, 1(3), 33-38.

[43] İşcan, İ. (2015). Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for convex function via fractional integrals. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 60(3), 355-366.

[44] İşcan, İ., Kadakal, M. & Kadakal, H. (2019). On two times differentiable preinvex and prequasiinvex functions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 950-963.

[45] Jensen, JLWV. (1905). Om konvexe funktioner og uligheder mellem middelværdier. *Nyt tidsskrift for matematik, Mathematica Scandinavica*, 16B, 49-68.

[46] Jensen, JLWV. (1906). Sur les fonctions et les inégaliés entrelesvaleurs moyennes. *Acta mathematica*, 30, 175-193.

[47] Kavurmacı Önalan, H., Akdemir, AO, Avcı Ardıç, M. & Baleanu, D. (2021). On new general versions of hermite-Hadamard type integral inequalities via fractional integral operators with Mittag-Leffler kernel. *Journal of Inequalities and Applications*, 2021:186, 1-17.

[48] Kavurmaci, H., Avci, M. & Özdemir, ME. (2011). New inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications. *Journal of Inequalities and Applications*, 1/86.

[49] Kilbas, AA., Srivastava, HM., Trujillo, JJ. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 499 pp.

[50] Kinnunen, J. (2022). Sobolev spaces. Department of Mathematics, Aalto University, 138 pp.

[51] Kreyszig, E. (1978). Introductory functional analysis with applications. John Wiley & Sons.Inc., United States Of America, 688 pp.

[52] Laurent, H. (1884). Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. Nouv. Ann. MathÉmatiques J. Des Candidats Aux Écoles Polytech. Norm, 3, 240-252.

[53] Leibniz, GW. (1859). Mathematische Schriften: aus den Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Hannover. Briefwechsel zwischen Leibniz, Wallis, Varignon, Guido Grandi, Zendrini, Hermann und Freiherrn von Tschirnhaus; Druck und Verlag von H.W. Schmidt: Halle, Germany, Volume 1.

[54] Li, Q., Saleem, MS., Yan, P., Zahoor, MS. & Imran, M. (2021). On strongly convex functions via Caputo-Fabrizio type fractional integral and some applications. *Journel of Mathematics*, 2021, 1-10.

[55] Liouville, J. (1832). Mémoire Sur quelques Questions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions. J. L'École Polytech, 13, 1-69.

[56] Losada, J. & Nieto, JJ. (2015). Properties of a new fractinal derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Aplications*, 1(2), 87-92.

[57] Miller, KS. & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley-interscience Publication, New York, NY, USA, 366 pp.

[58] Mititelu, S. (1994). Invex sets. *Mathematical Reports*, 46, 529-532.

[59] Mitrinović, DS. (1970). Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin.Heidelberg. New York, 400 pp.

[60] Mitrinović, DS. & Lacković, IB. (1985). Hermite and convexity. *Aequationes Mathematicae*, 28, 225-232.

[61] Mitrinović, DS., Pečcarić, JE. & Fink, AM. (1991). Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston /London, 587 pp.

[62] Mitrinović, DS., Pečcarić, JE. & Fink, AM. (1993). Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 740 pp.

[63] Mohan, SR. & Neogy, SK. (1995). On invex sets and preinvex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 189, 901-908.

[64] Niculescu, CP. (2012). The Hermite-Hadamard inequality for log-convex functions. *Nonlinear Analysis*, 75, 662-669.

[65] Niculescu, CP. & Persson, LE. (2006). Convex functions and their applications. A Contemporary Approach, Springer Science+Business Media, Inc., 255 pp.

[66] Noor, MA. (2007). Hermite-Hadamard integral inequalities for log-preinvex functions. *Journal of Mathematical Analysis and Approximation Theory*, 2, 126-131.

[67] Oldham, KB. & Spanier, J. (1974). The fractional calculus. Academic Press, San Diego, California, USA.

[68] Pečarić, JE., Proschan, F. & Tong, YL. (1992). Convex functions. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 57, New York-London, 300 pp.

[69] Orlicz, W. (1968). A note on modular spaces. IX, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom Phys.*, 16, 801-808.

[70] Pachpatte, BG. (2005). Mathematical inequalities. Elsevier B.V., volume 67, Amsterdam, The Netherlands, 591 pp.

[71] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations. Academic Press, San Diego, California, USA, 340 pp.

[72] Riemann, B. (1876). Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. *In Gessamelte Mathematische Werke*; Dedekind, R.;Weber, H. Eds.; Druck und Verlag: Leipzig, Germany.

[73] Roberts, AW. & Varberg, DE. (1973). Convex functions. Academic Press, London, 300 pp.

[74] Samko, SG., Kilbas, AA. & Marichev, OI. (1993). Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 976 pp.

[75] Sarıkaya, MZ., Sağlam, A. & Yıldırım, H. (2008). On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions. *Journel of Matematical Inequalities*, 2(3), 335-341.

[76] Sarıkaya, MZ., Set, E., Yaldiz, H. & Başak, N. (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9), 2403-2407.

[77] Srivastava, HM. & Choi, J. (2012). Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals. Elsevier Inc., USA, 657 pp.

[78] Stolz O. (1893). Grundzüge der differential und integralrechnung. Vol. 1, Lipzig, 35-36.

[79] Sun, HG., Zhang, Y., Baleanu, D., Chen, W. & Chen, YQ. (2018). A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 64, 213-231.

[80] Tariq, M., Ahmad, H., Shaikh, AG., Sahoo, SK., Khedher, KM. & Gia, TN. (2021). New fractional integral inequalities for preinvex functions involving Caputo-Fabrizio operator. *AIMS Mathematics*, 7(3), 3440-3455.

[81] Tınaztepe, G., Yeşilce Işık, I., Kemali, S. & Adilov, G. (2021). Certain inequalities for s-convex functions via Caputo fractional derivative and Caputo-Fabrizio integral operator. *Journal of Mathematical Extension*, 15(23), 1-18.

[82] Varošanec, S. (2007). On h-convexity. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 326(1), 303-311.

[83] Wang, X., Saleem, MS., Aslam, KN., Wu, X. & Zhou, T. (2020). On Caputo-Fabrizio fractional integral inequalities of Hermite-Hadamard type for modified h-Convex functions. *Journel of Mathematics*, 2020, 17 pp.

[84] Weir, T. & Mond, B. (1988). Pre-invex functions in multiple objective optimization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 136, 29-38.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Ali KARAOĞLAN
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☑ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü
Mezuniyet Yılı	20.06.2003
Yüksek Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	08.12.2017
Doktora	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Mezuniyet Tarihi	
Yayınlar ve Bildiriler	

[1] Set, E. and Karaoğlan, A., “Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for (k, h)-convex function via Riemann-Liouville and conformable fractional integrals”, AIP Conference Proceedings 1833, 020039 (2017); doi: 10.1063/1.4981687, (2017).

[2] Set, E. and Karaoğlan, A., “Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard Fejer type inequalities for (k, h)-convex function via Katugampola fractional integrals”, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2), 181-191, (2017) .

[3] Set, E., Karaoğlan, A. and Gözpınar, A., “Some inequalities related to different convex functions via new fractional conformable integrals”, AIP Conference Proceedings 1991, 020012 (2018); doi: 10.1063/1.5047885, (2018).

[4] Karaoğlan, A. and Set, E., “On new generalizations of existing inequalities for quasi-convex functions”, 2nd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2019), Book of Abstracts, ISBN: 978-605-68873-4-5, (2019).

[5] Set, E., Butt, S.I., Akdemir, A.O., Karaoğlan, A. and Abdeljawad, T., “New integral inequalities for differentiable convex functions via Atangana-Baleanu fractional integral operators”, Chaos, Solitons and Fractals, 143 (2021) 110554, (2021).

[6] Karaoğlan, A., Çelik B., Set, E. and Akdemir, A.O., "On new inequalities involving AB-fractional integrals for some convexity classes", Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences, 2(2), 127-145, (2021).

[7] Akdemir, A.O., Karaoğlan, A., Ragusa, M.A. and Set, E., "Fractional integral inequalities via Atangana-Baleanu operators for convex and concave functions", Journal of Function Spaces, volume 2021, doi.org/10.1155/2021/1055434, 10 pages, (2021).

[8] Set, E., Akdemir, A.O., Karaoğlan, A., Abdeljawad, T. and Shatanawi, W., " On new generalizations of Hermite-Hadamard type inequalities via Atangana-Baleanu fractional integral operators", Axioms, MDPI, 10, 223, doi.org/10.3390/axioms10030223, (2021).

[9] Karaoğlan, A., Set, E., Akdemir, A.O. and Şahin, E., "New inequalities of Wirtinger type for different kinds of convex functions", Miskolc Mathematical Notes, 23(2), 741-754, (2022).

[10] Set, E., Karaoğlan, A. and Akdemir, A.O., "Novel estimations for quasi-convex functions via fractional integral operators with strong kernels", Proceedings of IAM, 11(1), 27-38, (2022).

[11] Set, E. and Karaoğlan, A., "On generalization of some integral inequalities with the help of AB-fractional integral operators and s-convex functions", 5nd International Conference on Mathematical and Related Sciences (ICMRS 2022), Book of Proceedings, ISBN: 978-605-70978-5-9, (2022).

[12] Set, E., Akdemir, A.O., Özdemir, M.E., Karaoğlan, A. and Dokuyucu, M.A., "New integral inequalities for Atangana-Baleanu fractional integral operators and various comparisons via simulations", Filomat, 37(7), doi.org/10.2298/FIL2307251S, 2251,2267, (2023).

[13] Karaoğlan, A., Set, E., Akdemir, A.O. and Özdemir, M.E., "Fractional integral inequalities for preinvex functions via Atangana-Baleanu integral operators", Miskolc Mathematical Notes, Accepted paper, (2023).

[14] Set, E., Karaoğlan, A., İşcan, İ. and Kılıç, N. "On (M,P)-functions with some features and inequalities", Miskolc Mathematical Notes, Accepted paper, (2023).