T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HÖLDER-İŞCAN VE İYİLEŞTİRİLMİŞ KUVVET ORTALAMA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ YARDIMIYLA BAZI PREİNVEKS EŞİTSİZLİKLERİN İYİLEŞTİRİLMESİ

GÖRKEM DALKUN YAVUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

GÖRKEM DALKUN YAVUZ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

HÖLDER-İŞCAN VE İYİLEŞTİRİLMİŞ KUVVET ORTALAMA İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ YARDIMIYLA BAZI PREİNVEKS EŞİTSİZLİKLERİNİN İYİLEŞTİRİLMESİ

GÖRKEM DALKUN YAVUZ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 40 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDAL ÜNLÜYOL

Bu yüksek lisans tez çalışması, dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, ikinci bölümde genel bilgiler, üçüncü bölümde yapılan çalışmalar, yani preinveks fonksiyonlar için Hölder ve kuvvet ortalama integral eşitsizlikleri yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikleri, Hölder-İşcan ve İyileştirilmiş kuvvet ortalamaları integral eşitsizliklerin iyileştirilmesi yapılmış ve son olarak ise sonuç öneriler bölümü bulunmaktadır.

Anahtar Sözcükler: Hölder eşitsizliği, Hölder-İşcan eşitsizliği, İyileştirlmiş Kuvvet Ortalama eşitsizliği, Kuvvet Ortalama eşitsizliği, Preinveks fonksiyon.

ABSTRACT

IMPROVEMENTS OF SOME PREINVEX INEQUALITIES VIA HÖLDER-İŞCAN AND REFINEMENTS POWER-MEAN INTEGRAL INEQUALITY

GÖRKEM DALKUN YAVUZ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 40 PAGES

SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. ERDAL ÜNLÜYOL

This master's thesis consists of four main parts. In the first part introduction, in the second part general information, in the third part the studies, namely some inequalities obtained with the help of Hölder and power mean integral inequalities for preinvex functions, Hölder-Iscan and Improved power mean integral inequalities are improved and finally there is a conclusion suggestions section.

Keywords: Preinvex function, Hölder İnequality, Power-Mean İnequality, Hölder-İşcan İnequality, Improved Power-Mean İnequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip özenle çalışmalarımı takip eden, her zaman engine bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL’ a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitim-öğretim süresince değerli bilgilerinden istifade ettiğim Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine teşekkür ederm.

Eğitim hayatım süresince maddi-manevi desteklerini esirgemeyen annem YILDIZ DALKUN, babam HİKMET DALKUN ve eşim EMRE YAVUZ’a teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_{\mathbf{0}}$	:	$[\mathbf{0}, +\infty)$ aralığı
$\mathbb{R}^{+}$	:	$(0, +\infty)$
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi, $(-\infty, +\infty)$
$\boldsymbol{I}$	:	$\mathbb{R}$, bir aralık
$\boldsymbol{I}^{\mathbf{0}}$	:	I nın için
$\boldsymbol{L}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$	:	Mutlak değeri**,** $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{f}'$	:	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$\lvert\boldsymbol{f}'\rvert$	:	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin mutlak değeri

1. GİRİŞ

Kelime anlamı ”iki değer arasındaki farklılık” olan eşitsizlik, tarih boyunca kullanılmıştır. Eşitsizlikler hakkındaki ilk temel kitap G. H. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Polya tarafından 1934 yılında kaleme alınan ”Inequalities” [3] isimli kitaptır. Daha sonra, 1934-1960 yılları arasındaki çalışmaları kapsayan ve 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yazılan 'Inequalities' [1] isimli eserdir. Mitrinovic ise 1970 yılında yukarıdaki iki kitaptan farklı olarak ”Analytic Inequalities” [9] kitabını yazmıştır.Bunları B.G. Pachpatte, S.S. Dragomir, C.E.M. Pearce, C. Niculescu, M.E. Özdemir, E. Set, İ. İşcan, M.Z. Sarıkaya, U.S. Kırmacı v.d. yazarları takip etmiştir.

Konvekslik tarihinin mısırlılara kadar uzandığı tahmin edilmektedir. Tarihte ilk kez konveksliğin, Euclid'in ”Elements” adlı eserinde kullanıldığı görülmektedir. Fakat daha kesin bir tanımının Archimedes'in ”On the Sphere and Cylinder” isimli eserinde bahsedilmiştir. Bu kavramın kullanımının ise 19. yüzyılın sonlarında olmuştur. Konveks fonksiyonlar, J.L.W.V. Jensen'in 1985 yılında yapmış olduğu çalışmalarla hız kazanmaya başlamıştır. J. Pecaric, 1987 yılında ilk defa konveks fonksiyonları ve eşitsizlikleri ihtiva eden ”Convex Functions: Inequalities” isimli kitaptır. İntegrallenebilen fonksiyonlar yardımıyla çeşitli konveks fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard, Ostrowski, Fejer, Simpson v.b. eşitsizlik türleri için bir çok çalışma mevcuttur ve hala devam etmektedir.

Preinveks fonksiyonlar ile ilgili ilk çalışmalar 1980 yılında K.H. Elster ve R. Neshe tarafından, ”Optimality Conditions for some non-convex problems” [2] isimli kitaptır.M.A. Hanson ise Elster ve Neshe'den bir yıl sonra, B.D. Craven tarafından ”inveks” adı verilen diferensiyellenebilir fonksiyonlar sınıfını ele almıştır. Craven bu inveks ismini ”**in**variant con**vex**” ifadesinden elde etmiştir.Bu sınıf fonksiyonlar ile B.D. Craven, B.M. Glover, A. Ben-Israel, B-Mond, D.H. Martin v.b. bir çok bilim insanı çalışmıştır ve çalışmaktadır.

Tezimize konu olan Hölder Eşitsizliği, matematiksel analizde çok önemli bir role sahiptir. Hiç şüphesiz matematikte bir dönüm noktasına sahiptir. Aslında bu eşitsizlik, birbirinden bağımsız olarak Leonard James Rogers [14] (1862-1933) ve Otto Hölder [4] (1859,1937) tarafından bulunmuştur. Bazı literatürlerde bu eşitsizliğe Rogers-Hölder Eşitsizliği de denilmektedir. Sonuç olarak birbirinden habersiz olarak elde edilen bu eşitsilik analizde bir devrim başlatmıştır. Bunun temelinde, bu eşitsizliğin integrallenebilen fonksiyonlar için olması yatmaktadır. Dolayısıyla mutlak değerinin p. kuvveti integrallenebilen fonksiyonlar sınıfının incelenmesine ve araştırılmasına olanak sağlamıştır.

İmdat İŞCAN, 2019 yılında ”New refirements for integral and sum forms of Hölder inequality” [6] isimli makelesini Journal of Inequalities and Applications dergisinde bastırarak bu Hölder eşitsizliğini daha da küçülterek, iyileştirmiştir. Dolayısıyla bu yüksek lisans tez çalışması, literatürde preinveks fonksiyonları kullanarak Hölder ve Kuvvet Ortalama eşitsizliği ile elde edilmiş bazı eşitsizlikleri iyileştirerek, yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.0.1 (Açık Küme) $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Eğer, $a \in E$ ve $U_{\epsilon(a)} \subset E$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ sayısı varsa a ya E'nin bir iç noktası denir. E nin tüm iç noktalarının kümesine E nin içi denir ve E^0 ile gösterilir. Eğer, $E^0 = E$ ise E ye $\mathbb{R}$ de bir açık küme denir [11].

Tanım 2.0.2 (Fonksiyon) f , A kümesinden B kümesine bir bağıntı olsun. Eğer f bağıntısı A kümesinin her elemanını B kümesinin yalnız bir elemanına eşliyorsa f bağıntısına A dan$B$ ye bir fonksiyon denir.

$$f : A \to B$$

ile gösterilir. A kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi B kümesine ise değer kümesi denir [11]. Bu tanıma göre f bağıntısının A dan B ye bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart
i) $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, $(x, y) \in f$
ii) $\forall x \in A,\ \forall y, z \in B$, $[(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f] \Rightarrow x = z$ olmasıdır.

Tanım 2.0.3 (Konveks Fonksiyon)I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [11].

Tanım 2.0.4 (İnveks Küme) $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\eta(\cdot, \cdot) : F \times F \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in F$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$y + t\eta(x, y) \in F$$

ise F ye $\eta(\cdot, \cdot)$ ya göre inveks bir küme denir [2].

Not 2.0.1 Her konveks küme, $\eta(y, x) = y - x$ fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani her inveks küme konveks küme olmayabilir [2].

Tanım 2.0.5 (Preinveks Fonksiyon) $K \subset \mathbb{R}^n$ inveks bir küme, $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η ya göre preinveks fonksiyon denir. Her konveks fonksiyon $\eta(y,x) = y - x$ fonksiyonuna göre preinveks fonksiyondur. Ancak bunun tersi doğru değildir [13].

Tanım 2.0.6 (Prequasiinveks Fonksiyon) f,inveks K kümesi üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer her $u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(u + t\eta(v,u)) \leq max\{f(u), f(v)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η ya göre prequasiinveks fonksiyon denir [2].

Tanım 2.0.7 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $\mid f \mid^p$ ve $\mid g \mid^q$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_a^b |g(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe integraller için Hölder Eşitsizliği denir [4].

Teorem 2.0.1 (Hölder-İşcan Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar, $\mid f \mid^p$ ve $\mid g \mid^q$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon ise

1.

$$\begin{aligned} &\int_a^b |f(x)g(x)|dx \\ \leq\ & \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (b-x)|g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (x-a)|g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \\ \leq\ & \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Bu eşitsizliğe Hölder-İşcan Eşitsizliği denir [6].

Tanım 2.0.8 (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) [10] $q \geq 1$ olmak üzere $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen reel değerli iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Kuvvet Ortalama Eşitsizliği denir.

Teorem 2.0.2 (İyileştirilmiş Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) $q \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen reel değerli iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

1.
$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-x)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\int_a^b (x-a)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (x-a)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)g(x)|dx &\leq \frac{1}{b-a}\Bigg\{\left(\int_a^b (b-x)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-x)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad +\left(\int_a^b (x-a)|f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (x-a)|f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg\} \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

eşitsizliklerine iyileştirilmiş Kuvvet Ortalama Eşitsizliği denir [7].

Lemma 2.0.1 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, eğer f' fonksiyonu $c = a + \eta(b,a)$ olan P_{ac} η yolu üzerinde integrallenebilirse aşağıdaki eşitlik doğrudur [12]:

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$= \eta(b,a)\int_0^1 m(t) f'(a + t\eta(b,a))dt$, burada

$$m(t)=\begin{cases} t-\frac{1}{6} & t\in[0,\frac{1}{2}),\\ \\ t-\frac{5}{6} & t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Lemma 2.0.2 $a,b\in K$ için $K\subseteq[0,\infty)$ kümesi $a<a+\eta(b,a)$ olan $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f:K\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $f'''\in L([a,a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ise bu durumda $\eta(b,a)\neq 0$ şartını sağlayan her $a,b\in K$ için

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$\leq(\eta(b,a))^4\int_0^1 p(\lambda)f'''(a+\lambda\eta(b,a))d\lambda$ eşitsizliği doğrudur [5]. Burada

$$p(\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{6}\lambda^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right), & \lambda\in[0,\frac{1}{2}],\\ \frac{1}{6}(\lambda-1)^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right), & \lambda\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Teorem 2.0.3 $a,b\in I$ ve $I\subseteq\mathbb{R}$ alt kümesi $\eta:I\times I\to\mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f:I\to\mathbb{R}$ $\eta(b,a)\neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q>1$ için $|f'|$ preinveks ise bu durumda $p=\frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq\eta(b,a)\left(\frac{2^{p+1}+1}{(p+1)6^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği doğrudur [12].

Teorem 2.0.4 $a,b\in I$ ve $I\subseteq\mathbb{R}$ alt kümesi $\eta:I\times I\to\mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f:I\to\mathbb{R}$ $\eta(b,a)\neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q>1$ için $|f'|$ preinveks ise bu durumda $p=\frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq\eta(b,a)\left(\frac{2(1+2^{p+1})}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [12].

Teorem 2.0.5 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q \geq 1$ için $|f'|$ preinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\Big(\frac{5}{72}\Big)^{1-\frac{1}{q}}\left[\Big(\frac{61|f'(a)|^q + 29|f'(b)|^q}{1296}\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\frac{29|f'(a)|^q + 61|f'(b)|^q}{1296}\Big)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği doğrudur [12].

Teorem 2.0.6 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q \geq 1$ için $|f'|$ prequasiinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{5\eta(b,a)}{36}\Big[max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}\Big]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [12].

Teorem 2.0.7 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q > 1$ için $|f'|$ prequasiinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{(p+1)6^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [12].

Teorem 2.0.8 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q > 1$ için $|f'|$ prequasiinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left(\frac{2(1+2^{p+1})}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [12].

Teorem 2.0.9 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0, \infty)$ kümesi $a < a + \eta(b, a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a + \eta(b, a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ise bu durumda $\eta(b, a) \neq 0$ şartını sağlayan her $a, b \in K$ için

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{1152}\Big[|f'''(a)| + |f'''(b)|\Big]$$

eşitsizliği doğrudur [5].

Tanım 2.0.9 (Gamma Fonksiyonu) $n > 0$ için $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u}u^{n-1}du$ şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir [8]. Bu fonksiyonun aşağıdaki gibi özellikleri vardır:

1.) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,

2.) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}$,

3.) $\int_0^\infty \dfrac{x^p}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\Pi}{sin(p\Pi)}, \quad 0 < p < 1$,

4.) $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}\Gamma(2n)$.

Teorem 2.0.10 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0, \infty)$ kümesi $a < a + \eta(b, a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a + \eta(b, a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q > 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b, a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$. Eğer $|f'''|^q$ preinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\left(\frac{3|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q}{8}\right)^q + \left(\frac{|f'''(a)|^q + 3|f'''(b)|^q}{8}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [5].

Teorem 2.0.11 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0, \infty)$ kümesi $a < a + \eta(b, a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a + \eta(b, a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q > 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$. Eğer $|f'''|^q$ preinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{6}\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{2^{3p+1}2\Gamma(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{\Big(|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q\Big)^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

eşitsizliği doğrudur [5].

Teorem 2.0.12 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0,\infty)$ kümesi $a < a + \eta(b,a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$. Eğer $|f'''|^q$ preinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{6}\left(\frac{1}{192}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q}{192}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [5].

Teorem 2.0.13 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0,\infty)$ kümesi $a < a + \eta(b,a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$. Eğer bazı sabit $q \geq 1$ ve $\eta(b,a) \neq 0$ için $|f'''|^q$ prequasiinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{576}\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [5].

Teorem 2.0.14 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0,\infty)$ kümesi $a < a + \eta(b,a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$. Eğer bazı sabit $q \geq 1$ ve $\eta(b,a) \neq 0$ için $|f'''|^q$ prequasiinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{max\{|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\}}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [5].

Teorem 2.0.15 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0, \infty)$ kümesi $a < a + \eta(b,a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$. Eğer bazı sabit $q \geq 1$ ve $\eta(b,a) \neq 0$ için $|f'''|^q$ prequasiinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{6}\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{2^{3p+1}2\Gamma(3p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{max\{|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\}}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur [5].

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Teorem 3.0.1 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bazı $q > 1$ için $|f'|^q$ preinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2^{p+1}+1}{2(p+1)6^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. 3.0.1 Lemma 2.0.1 eşitliğine Hölder-İşcan eşitsizlini uygulayalım. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\Bigg[\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\Bigg(\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}} t\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}} t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\Bigg(\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1 \Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-\frac{1}{2})\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\Bigg]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri de hesaplarsak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt = \frac{5|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{48},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt = \frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{24},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt = \frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{24},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (t-\frac{1}{2})\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt = \frac{|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{48},$$

buluruz. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazarsak ve $|f'|^q$ nun preinveks olduğunu kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\Bigg(\left(\frac{1}{3(p+1)6^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+2}(p+2)}+\frac{1}{3(p+1)3^{p+1}}-\frac{1}{3^{p+2}(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\left(\frac{5|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{48}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+5|f'(b)|^q}{48}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$+\left(\frac{1}{6(p+1)6^{p+1}}-\frac{1}{6^{p+2}(p+2)}+\frac{1}{3^{p+2}(p+2)}+\frac{1}{6(p+1)3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\left(\frac{2|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+2|f'(b)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\Bigg)$$

elde ederiz. $A := \left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$ olarak seçersek,

$$A \leq 2\eta(b,a)\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2^{p+1}+1}{2(p+1)6^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.0.1}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 3.0.2 $a,b\in I$ ve $I\subseteq\mathbb{R}$ alt kümesi $\eta: I\times I\to\mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f: I\to\mathbb{R}$ $\eta(b,a)\neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q>1$ için $|f'|^q$ preinveks ise bu durumda $p=\frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

İspat. 3.0.2 Lemma 2.0.1 eşitliğine Hölder-İşcan eşitsizliğini uygulayalım. Bu durumda

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\left(\int_0^1(1-t)|m(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^qdt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 t|m(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\int_0^1 (1-t)|m(t)|^p dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt = \frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)},$$

$$\int_0^1 (1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt = \int_0^1 (1-t)[(1-t)|f'(a)|^q + t|f'(b)|^q]dt = \frac{|f'(a)|^q}{3} + \frac{|f'(b)|^q}{6},$$

$$\int_0^1 t|m(t)|^p dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt = \frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)},$$

$$\int_0^1 t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt = \int_0^1 t[(1-t)|f'(a)|^q + t|f'(b)|^q]dt = \frac{|f'(a)|^q}{6} + \frac{|f'(b)|^q}{3}.$$

Bulunan bu integralleri yerine yazıp, $|f'|^q$ nun preinveksliğini de kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^q}{3} + \frac{|f'(b)|^q}{6}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q}{6} + \frac{|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

elde ederiz. $A := \left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$ olsun. Buradan, aşağıdaki eşitsizliği buluruz:

$$A \leq \eta(b,a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.0.2}$$

Teorem 3.0.3 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bazı $q \geq 1$ için $|f'|^q$ preinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{5\eta(b,a)}{72}\Big(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

İspat. 3.0.3 Lemma 2.0.1 eşitliğine iyileştirilmiş kuvvet ortalama eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\Bigg[\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\Bigg(\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|t-\frac{1}{6}\Big|dt\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|t-\frac{1}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}t\Big|t-\frac{1}{6}\Big|dt\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}t\Big|t-\frac{1}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\Bigg(\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|dt\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|dt\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\Bigg]$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki integralin sağ tarafındaki integralleri hesaplayalım,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|t-\frac{1}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt=\frac{155|f'(a)|^q+37|f'(b)|^q}{15552}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t\Big|t-\frac{1}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt=\frac{211|f'(a)|^q+137|f'(b)|^q}{15552}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt=\frac{137|f'(a)|^q+211|f'(b)|^q}{15552}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt=\frac{37|f'(a)|^q+155|f'(b)|^q}{15552}$$

Bulunan bu integralleri yerlerine yazar ve $|f'|^q$ nun preinveksliğini kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\Bigg(\Big(\frac{1}{81}\Big)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg[\Bigg(\frac{155|f'(a)|^q+37|f'(b)|^q}{15552}\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\Bigg(\frac{37|f'(a)|^q+155|f'(b)|^q}{15552}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$+\Big(\frac{29}{1296}\Big)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg[\Bigg(\frac{211|f'(a)|^q+137|f'(b)|^q}{15552}\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\Bigg(\frac{137|f'(a)|^q+211|f'(b)|^q}{15552}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg]\Bigg)$$

eşitsizliğini buluruz. Burada

$$A:=\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

olsun. Sonuç olarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz,

$$A\leq\frac{5\eta(b,a)}{72}\Big(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 3.0.4 $a, b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun.Eğer bazı $q \geq 1$ için $|f'|^q$ prequasiinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{5\eta(b,a)}{36}\Big[max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\}\Big]^{\frac{1}{q}}$$

İspat. 3.0.4 Lemma 2.0.1 eşitliğine iyileştirilmiş kuvvet ortalama eşitsizliğini uygulayalım,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|t-\frac{1}{6}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|t-\frac{1}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|t-\frac{1}{6}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|t-\frac{1}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left|t-\frac{5}{6}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left|t-\frac{5}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)\left|t-\frac{5}{6}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)\left|t-\frac{5}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.$|f'|^q$ prequasiinveks olup buna göre yeniden düzenlersek,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)\left|t-\frac{1}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt = \frac{[max|f'(a)|^q, |f'(b)|^q]}{81}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t\left|t-\frac{1}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt = \frac{29[max|f'(a)|^q, |f'(b)|^q]}{1296}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\left|t-\frac{5}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt = \frac{29[max|f'(a)|^q, |f'(b)|^q]}{1296}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)\left|t-\frac{5}{6}\right|\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^q dt = \frac{[max|f'(a)|^q, |f'(b)|^q]}{81}$$

elde ederiz. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazarsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\Bigg(\Bigg(\frac{1}{81}\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{[max|f'(a)|^q,|f'(b)|^q]}{81}\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\Bigg(\frac{29}{1296}\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{29[max|f'(a)|^q,|f'(b)|^q]}{1296}\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\frac{29}{1296}\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{29[max|f'(a)|^q,|f'(b)|^q]}{1296}\Bigg)^{\frac{1}{q}}+\Bigg(\frac{1}{81}\Bigg)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{[max|f'(a)|^q,|f'(b)|^q]}{81}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$\leq 4\eta(b,a)\Bigg(\Bigg[max|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\Bigg]^{\frac{1}{q}}\Bigg(\frac{1}{81}+\frac{29}{1296}\Bigg)\Bigg)$$

buluruz. $A := \left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$ olsun. Buradan,

$$A \leq \frac{5\eta(b,a)}{36}\Big[max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}\Big]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 3.0.5 $a,b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bazı $q \geq 1$ için $|f'|^q$ prequasiinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq 4\eta(b,a)\Bigg(\frac{1+2^{p+1}}{2(p+1)6^{p+1}}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8}\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

İspat. 3.0.5 Lemma 2.0.1 eşitliğine Hölder-İşcan eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\Bigg[\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\Bigg(\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}t\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\Bigg(\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(t-\frac{1}{2}\Big)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(t-\frac{1}{2})\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\Bigg]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri,

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8},$$

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8},$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8},$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t-\frac{1}{2})\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8}$$

şeklinde hesaplarız. Bu hesaplanan integralleri yerine yazar ve $|f'|^q$ nun prequasiinveks olduğunu da kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq 4\eta(b,a)\times$$

$$\Bigg(\left(\frac{1}{3(p+1)6^{p+1}}+\frac{1}{6^{p+2}(p+2)}+\frac{1}{3(p+1)3^{p+1}}-\frac{1}{3^{p+2}(p+2)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{6(p+1)6^{p+1}}-\frac{1}{6^{p+2}(p+2)}+\frac{1}{3^{p+2}(p+2)}+\frac{1}{6(p+1)3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $A := \left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$ olsun. Buradan,

$$A \leq 4\eta(b,a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{2(p+1)6^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{8}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği bulunur.

Teorem 3.0.6 $a,b \in I$ ve $I \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi $\eta : I\times I \to \mathbb{R}^+$ ya göre açık inveks bir alt küme olsun. Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ $\eta(b,a) \neq 0$ olacak şekilde I kümesi üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bazı $q \geq 1$ için $|f'|^q$ prequasiinveks ise bu durumda $p = \frac{q}{q-1}$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

İspat. 3.0.6 Lemma 2.0.1 eşitliğine Hölder-İşcan eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq \eta(b,a)\left[\left(\int_0^1(1-t)|m(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1(1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^1 t|m(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri,

$$\int_0^1(1-t)|m(t)|^p dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt=\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}$$

$$\int_0^1(1-t)\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt=\int_0^1(1-t)[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q]dt=\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{2}$$

$$\int_0^1 t|m(t)|^p dt=\int_0^{\frac{1}{2}}t\Big|t-\frac{1}{6}\Big|^p dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t\Big|t-\frac{5}{6}\Big|^p dt=\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}$$

$$\int_0^1 t\Big|f'(a+t\eta(b,a))\Big|^q dt=\int_0^1 t[(1-t)|f'(a)|^q+t|f'(b)|^q]dt=\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{2}$$

şeklinde hesaplarız. Bu hesaplanan integralleri yerine yazar ve $|f'|^q$ nun prequasiinveks olduğunu da kullanırsak,

$$\left|\frac{1}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right|$$

$$\leq 2\eta(b,a)\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{max\{|f'(a)|^q,|f'(b)|^q\}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 3.0.7 $a,b\in K$ için $K\subseteq[0,\infty)$ kümesi $a<a+\eta(b,a)$ olan $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f:K\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $f'''\in L([a,a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q>1$ ise her $a,b\in K$ için $\eta(b,a)\neq 0$ şartını sağlayan ve $p=\frac{q}{q-1}$ için $|f'''|^q$ preinveks ise, o zaman aşağıdaki eşitsizlik doğrudur,

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq\frac{(\eta(b,a))^4}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\left(\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

İspat. 3.0.7 Lemma 2.0.2 eşitsizliğine Hölder-İşcan eşitsizliğini uygularsak,

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\Bigg[\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\Bigg(\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\Bigg(\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(\lambda-\frac{1}{2})\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int_{\frac{1}{2}}^1(\lambda-\frac{1}{2})\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri hesaplarsak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda = \frac{5|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{48}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda = \frac{2|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{24}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda = \frac{|f'''(a)|^q+2|f'''(b)|^q}{24}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1(\lambda-\frac{1}{2})\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda = \frac{|f'''(a)|^q+5|f'''(b)|^q}{48}$$

buluruz. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazar ve $|f'''|^q$ nun da preinveks olduğunu göz önüne alıp eşitsizliği yeniden düzenlersek,

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\Bigg[2\Bigg(\Bigg(\frac{1}{6}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{5|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{48}\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\Bigg(\frac{1}{6}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{2|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{24}\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$+2\Bigg(\Bigg(\frac{1}{6}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\frac{|f'''(a)|^q+2|f'''(b)|^q}{24}\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'''(a)|^q+5|f'''(b)|^q}{48}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\Bigg]$$

buluruz. Buradan

$$B:=\left|\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

olarak alalım. Bu durumda

$$B\leq\frac{(\eta(b,a))^4}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\times$$

$$\left[\left(\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 3.0.8 $a,b\in K$ için $K\subseteq[0,\infty)$ kümesi $a<a+\eta(b,a)$ olan $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f:K\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $f'''\in L([a,a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde preinveks ve $q>1$ ise her $a,b\in K$ için $\eta(b,a)\neq0$ şartını sağlayan ve $p=\frac{q}{q-1}$. Eğer $|f'''|^q$ preinveks ise

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq\frac{(\eta(b,a))^4}{6}\left(\frac{|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{2^{-3p-2}\Big(\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)+(4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)\Big)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. 3.0.8 Lemma 2.0.2 eşitsizliğine Hölder-İşcan eşitsizliğini uygularsak

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq(\eta(b,a))^4\left[\left(\int_0^1\Big(1-\lambda\Big)\Big|p(\lambda)\Big|^pd\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\Big(1-\lambda\Big)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^qd\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$+\left(\int_0^1 \lambda\left|p(\lambda)\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \lambda\left|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\right|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\Bigg[\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(1-\lambda\Big)\Big|\frac{1}{6}\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda+\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(1-\lambda\Big)\Big|\frac{1}{6}\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1\Big(1-\lambda\Big)\Big[\Big(1-\lambda\Big)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\Big|\frac{1}{6}\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda+\int_{\frac{1}{2}}^1\lambda\Big|\frac{1}{6}\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1\lambda\Big[\Big(1-\lambda\Big)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri

$$\int_0^1\Big(1-\lambda\Big)\Big[\Big(1-\lambda\Big)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda=\frac{2|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{6}$$

$$\int_0^1\lambda\Big[\Big(1-\lambda\Big)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda=\frac{|f'''(a)|^q+2|f'''(b)|^q}{6}$$

şeklinde yeniden hesaplarız. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazar ve $|f'''|^q$ nun preinveks olduğunu da göz önüne alırsak,

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq\frac{(\eta(b,a))^4}{6}\times$$

$$\Bigg[\left(\frac{2^{-3p-2}(4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)}+\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{6}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{2^{-3p-2}(4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)}+\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'''(a)|^q+2|f'''(b)|^q}{6}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan,

$$B := \left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

olarak seçelim. Böylece

$$B \leq \frac{(\eta(b,a))^4}{6}\left(\frac{|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\left(\frac{2^{-3p-2}\Big(\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2) + (4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)\Big)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

istenilen eşitsizliği bulmuş oluruz

Teorem 3.0.9 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0, \infty)$ kümesi $a < a + \eta(b,a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|, K$ üzerinde preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$ için $|f'''|^q$ preinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$B \leq \frac{(\eta(b,a))^4}{1152}\left(|f'''(a)|^q + |f'''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. 3.0.9 Lemma 2.0.2 eşitsizliğine, iyileştirilmiş kuvvet ortalama eşitsizliğini uygularsak

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\left[\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\lambda)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\lambda-\frac{1}{2})\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri yeniden hesaplarsak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2\lambda^2\Big[(1-\lambda)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda=\frac{3|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{3840}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\lambda^3\Big[(1-\lambda)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda=\frac{2|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{1920}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\lambda)\lambda^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\Big[(1-\lambda)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda=\frac{5|f'''(a)|^q+18|f'''(b)|^q}{1920}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)^2\Big[(1-\lambda)|f'''(a)|^q+\lambda|f'''(b)|^q\Big]d\lambda=\frac{13|f'''(a)|^q+111|f'''(b)|^q}{3840}$$

olarak buluruz. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazar ve $|f'''|^q$ nun preinveks olduğunu da göz önüne alırsak,

$$\left|\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq 2(\eta(b,a))^4\frac{1}{6}\Bigg[\left(\frac{1}{960}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{3|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{3840}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{640}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{2|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q}{1920}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{640}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'''(a)|^q+2|f'''(b)|^q}{1920}\right)^{1-\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{960}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'''(a)|^q+3|f'''(b)|^q}{3840}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

elde edilir. Burada,

$$B:=\left|\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx-\frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

olarak seçersek,

$$B\leq\frac{(\eta(b,a))^4}{1152}\left(|f'''(a)|^q+|f'''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

istenilen eşitsizliği bulmuş oluruz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.0.10 $a,b\in K$ için $K\subseteq[0,\infty)$ kümesi $a<a+\eta(b,a)$ olan $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f:K\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $f'''\in L([a,a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|$ K üzerinde

preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$ için $|f'''|^q$ prequasiinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{576}\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. 3.0.10 Lemma 2.0.2 eşitsizliğine, iyileştirilmiş kuvvet ortalama eşitsizliğini uygularsak,

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big]\right|$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\left[\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\frac{1}{6}\Big|\lambda^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|d\lambda\right)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(\lambda-\frac{1}{2})\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri yeniden hesaplarsak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)^2 \lambda^2 \Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big] d\lambda = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{960}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big) \lambda^3 \Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big] d\lambda = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{640}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-\lambda)^3 \Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big) \Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big] d\lambda = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{640}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-\lambda)^2 \Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)^2 \Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big] d\lambda = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{960}$$

olarak buluruz. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazar ve $|f'''|^q$ nun prequasiinveks olduğunu da göz önüne alırsak,

$$\Bigg|\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\Bigg|$$

$$\leq 2(\eta(b,a))^4 \frac{1}{6}\Bigg[\left(\frac{1}{960}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{960}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{640}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{640}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{1}{640}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{640}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{960}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{960}\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$\leq \frac{2}{3}(\eta(b,a))^4\Bigg[\left(\frac{1}{960}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{960}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{1}{640}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{640}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

elde edilir. Burada,

$$B := \Bigg|\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big)+f(a+\eta(b,a))\Big]\Bigg|$$

olarak seçersek,

$$B \leq \frac{(\eta(b,a))^4}{576}\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]^{\frac{1}{q}}$$

istenilen eşitsizliği bulmuş oluruz. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.0.11 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0, \infty)$ kümesi $a < a + \eta(b,a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a + \eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|, K$ üzerinde preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$ için $|f'''|^q$ prequasiinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{12}\Big(\frac{1}{4}\Big)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left[\left(\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. 3.0.11 Lemma 2.0.2 eşitsizliğine, Hölder-İşcan eşitsizliğini uygularsak

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\left[\frac{1}{\frac{1}{2}-0}\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\frac{1}{6}\Big|\lambda^2(\lambda-\frac{1}{2})\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\frac{1}{6}\Big|\lambda^2(\lambda-\frac{1}{2})\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\lambda\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2(\lambda-\frac{1}{2})\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-\lambda)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(\lambda-\frac{1}{2})\frac{1}{6}\Big|(\lambda-1)^2(\lambda-\frac{1}{2})\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(\lambda-\frac{1}{2})\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^q d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri yeniden hesaplarsak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}-\lambda\Big)\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]d\lambda = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \leftthreetimes \Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big] d\leftthreetimes = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\leftthreetimes) \Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big] d\leftthreetimes = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (\leftthreetimes - \frac{1}{2}) \Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big] d\leftthreetimes = \frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8}$$

olarak buluruz. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazar ve $|f'''|^q$ nun prequasiinveks olduğunu da göz önüne alırsak,

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq 4(\eta(b,a))^4 \left[\left(\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{6^p\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{6^p\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\leq 4(\eta(b,a))^4 \left(\frac{2^{-3p-2}}{6^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left[\left(\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

elde edilir. Burada,

$$B := \left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

olarak seçersek,

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{12} \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{8} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left[\left(\frac{\Gamma(p+2)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

istenilen eşitsizliği bulmuş oluruz. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.0.12 $a, b \in K$ için $K \subseteq [0, \infty)$ kümesi $a < a + \eta(b,a)$ olan $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ göre bir açık inveks alt küme olsun. $f : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $f''' \in L([a, a+\eta(b,a)])$ olacak şekilde K üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $|f'''|, K$ üzerinde preinveks ve $q \geq 1$ ise her $a, b \in K$ için $\eta(b,a) \neq 0$ şartını sağlayan ve $p = \frac{q}{q-1}$ için $|f'''|^q$ prequasiinveks ise

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{3}\left(\frac{\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{2^{-3p-2}\Big(\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2) + (4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)\Big)}{\Gamma(3p+3)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. 3.0.12 Lemma 2.0.2 eşitsizliğine, Hölder-İşcan eşitsizliğini uygularsak

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\Big[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\Big] \right|$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\Bigg[\left(\int_0^1 \Big(1-\lambda\Big)\Big|p(\lambda)\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \Big(1-\lambda\Big)\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^1 \lambda\Big|p(\lambda)\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \lambda\Big|f'''(a+\lambda\eta(b,a))\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg]$$

$$\leq (\eta(b,a))^4\Bigg[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(1-\lambda\Big)\Big|\frac{1}{6}\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda + \int_{\frac{1}{2}}^1 \Big(1-\lambda\Big)\Big|\frac{1}{6}\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1 \Big(1-\lambda\Big)\Big[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\Big]d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \lambda\Big|\frac{1}{6}\lambda^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda + \int_{\frac{1}{2}}^1 \lambda\Big|\frac{1}{6}\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_0^1 \left(1-\leftthreetimes\right)\left[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\right] d\leftthreetimes \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki integralleri yeniden hesaplarsak,

$$\int_0^1 \left(1-\leftthreetimes\right)\left[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\right] d\leftthreetimes = \frac{\left[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\right]}{2}$$

olarak buluruz. Bulunan bu sonuçları yerlerine yazar ve $|f'''|^q$ nun prequasiinveks olduğunu da göz önüne alırsak,

$$\left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\left[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\right] \right|$$

$$\leq \frac{(\eta(b,a))^4}{6}\Bigg[\left(\frac{2^{-3p-2}(4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)} + \frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\left(\frac{\left[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\right]}{2} \right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$\left(\frac{2^{-3p-2}(4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)}{\Gamma(3p+3)} + \frac{2^{-3p-2}\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2)}{\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\left(\frac{\left[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\right]}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg]$$

elde edilir. Burada,

$$B := \left| \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx - \frac{\eta(b,a)}{6}\left[f(a) + 4f\Big(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\Big) + f(a+\eta(b,a))\right] \right|$$

olarak seçersek

$$B \leq \frac{(\eta(b,a))^4}{3}\left(\frac{\left[max|f'''(a)|^q, |f'''(b)|^q\right]}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\frac{2^{-3p-2}\Big(\Gamma(p+1)\Gamma(2p+2) + (4p+3)\Gamma(p+1)\Gamma(2p+1)\Big)}{\Gamma(3p+3)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

istenilen eşitsizliği bulmuş oluruz. Bu ise ispatı tamamlar.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu yüksek lisans çalışmasında, Hölder ve Kuvvet Ortalama Eşitsizliklerin iyileştirilerek daha da küçük hale gelebilen bazı preinveks fonksiyonlu eşitsizlikleri elde edilmiştir. Fakat, bu tez çalışması hazırlanırken litaretürde taranan ve Hölder- İşcan Eşitsizliği uygulanan bazı preinveksli eşitsizliklerin daha da küçültülemiyeceğini gördük. Dolayısıyla, bu alanda ilerlemek isteyen diğer bilim insanları için, bu iyileştirmelerin neden hepsinde değil de bazılarında olduğu açık problemi çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Beckenbach E.F., Bellman R. (1961). Inequalities, Springer Verlag Berlin, Germany.

[2] Elster K. H., Neshe R. (1980). Optimality conditions fo some non-convex problems, Springer-Verlog, New York.

[3] Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. (1934). Inequalities, Cambridge Univer. Press, London, England

[4] Hölder O., Über ein Mittelwertsatz. (1889). *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.*, 38-47

[5] Hussain S., Qaisar S. (2014). Generalizations of Simpson's type inequalities through preinvexity and prequasiinvexity, Punjab University, *Journal of Mathematics*, 1-8.

[6] İşcan İ. (2019). New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality. *Journal of Inequalities and Applications*, 304, 11 pages.

[7] Kadakal M., İşcan İ. , Kadakal, H. and Bekar, K. (2019). On improvements of some integral inequalities. *ResearchGate,DOI:10.13140/RG.2.2.15052.46724*, (Prepint January)

[8] Kannapan P. I. (2009). Functional Equations and Inequalities with Applicaitons, Sipringer.

[9] Mitrinovic D.S. (1970). Analytic Inequalities, Springer Verlag Berlin, Germany.

[10] Mitrinović, D. S., Pecaric, J., Fink, A. M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis. *Journal of Mathematical Sciences, Kluwer Academic.*

[11] Musayev B., Alp M., Mustafayev N., Ekincioglu . (2007). Teori ve çözümlü problemlerle Analiz I, Seçkin yayıncılık 2. Baskı, Ankara.

[12] Özdemir M.E., Avcı Ardıç M. (2013). Simpson type inequalities for first order differentiable preinvex and prequasiinvex functions, *arXiv:1303.3697v1*, 1-10.

[13] Pini R. (1991). Invexity and generalized convexity. *Optimization*, 22(4), 513-525.

[14] Rogers L. J. (1888). An extension of a certain theorem in inequalities. *Messenger of Math.* 17, 145-150.