



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN
KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YÜRÜYEN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ**

MAHŞURE KÜBRANUR DİKİCİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Mahşure Kübranur DİKİCİ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YÜRÜYEN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

MAHŞURE KÜBRANUR DİKİCİ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 43 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Tolga AKTÜRK)

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin dalga çözümleri, geliştirilmiş üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Bu yöntem, Calogero Bogoyavlenskii Schiff ve Whitham Broer Kaup denklemlerine uygulanmış ve matematiksel program aracılığıyla çözüm fonksiyonları elde edilmiştir. Matematiksel modeli temsil eden çözüm fonksiyonlarının davranışlarını ifade eden iki, üç boyutlu ve dış hat grafikleri uygun parametreler belirlenerek çizilmiştir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tarihçesi ve kullanım yerleri hakkında bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışması için gerekli olan temel tanım ve kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, tez çalışmasında denklemlere uygulanacak olan üstel fonksiyon yöntemi ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, Calogero Bogoyavlenskii Schiff ve Whitham Broer Kaup denklemlerinin dalga çözümleri geliştirilmiş üstel fonksiyonu yöntemi ile incelenmiştir. Lineer olmayan matematiksel modellerin fiziksel davranışlarını simüle eden grafikler program yardımıyla çizdirilmiştir.

Beşinci bölümde bu tez çalışmasında kullanılan yöntemin dalga çözümleri değerlendirilmiş ve elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Calogero Bogoyavlenskii Schiff (CBS) ve Whitham Broer Kaup (WBK) denklemi, Dalga çözümü, Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler, Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Yöntemi

ABSTRACT

ANALYSIS OF TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.KÜBRANUR DİKİCİ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER'S THESIS, 43 PAGES

(SUPERVISOR: Doç. Dr. Tolga AKTÜRK)

In this thesis, wave solutions of nonlinear partial differential equations have been analyzed using the modified expansion function method. This method was applied to Calogero Bogoyavlenskii Schiff and Whitham Broer Kaup equations and solution functions were obtained by means of a mathematical program. Two, three-dimensional and contour graphs expressing the behavior of solution functions representing the mathematical model were drawn by determining appropriate parameters.

This study consists of five chapters.

In the first section, information about the history and usage areas of nonlinear partial differential equations is given.

In the second part, the basic definitions and concepts required for thesis study are introduced.

In the third section, the modified exponential function method applied to the equations in the thesis study is expressed.

In the fourth section, the wave solutions of Calogero Bogoyavlenskii Schiff and Whitham Broer Kaup equations are examined by using the modified expansion function method. Graphics simulating the physical behavior of nonlinear mathematical models were drawn with the help of the program.

In the fifth chapter, the wave solutions of the method used in this thesis are evaluated and the results obtained are given.

Keywords: Calogero Bogoyavlenskii Schiff (CBS) and Whitham Broer Kaup (WBK) Equaiton, Nonlinear Partial Differential Equations, Modified Exponential Function Method

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim hayatım boyunca manevi desteğini esirgemeyen her zaman desteğini gördüğüm danışman hocam Sayın Doç. Dr. Tolga AKTÜRK'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Aynı zamanda eğitim öğretim hayatım boyunca her zaman beni destekleyip arkamda duran anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. METOD	6
3.1 Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu	6
4. METODLARIN UYGULANMASI	9
4.1 Calogero Bogoyavlenskii Schiff Denkleminde Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodunun Uygulanması	9
4.2 Whitham Broer Kaup Denkleminde Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodunun Uygulanması	18
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	31
6. KAYNAKLAR	32

ŞEKİL LİSTESİ

- Şekil 4.1.** $B_1 = 1, A_3 = 2, c = 1, \lambda = 3, k = -1, \mu = 2, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.10)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 122
- Şekil 4.2.** $B_1 = 1, A_3 = 2, c = -2, \lambda = 1, k = -1, \mu = \frac{3}{4}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.11)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 12
- Şekil 4.3.** $B_1 = 2, A_3 = 2, c = 1, \lambda = 2, k = -\frac{1}{2}, \mu = 0, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.12)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 123
- Şekil 4.4.** $B_1 = 1, A_3 = 1, c = 0, \lambda = 2, k = -\frac{1}{2}, \mu = 1, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.13)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 13
- Şekil 4.5.** $B_1 = 1, A_3 = 1, c = 0, \lambda = 0, k = -\frac{1}{2}, \mu = 0, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.14)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 134
- Şekil 4.6.** $A_3 = 1, B_1 = \sqrt{2}, \mu = -1, c = -1, k = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \lambda = 2, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.17)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 15
- Şekil 4.7.** $A_3 = 1, B_1 = 1, \mu = 2, c = 1, k = -\frac{1}{2}, \lambda = 2, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.18)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 156
- Şekil 4.8.** $A_3 = 1, B_1 = 1, \mu = 0, c = -1, k = -\frac{1}{2}, \lambda = 2, EE = 0.75, y = 1$ iken
(4.1.19) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu
grafiği 17
- Şekil 4.9.** $A_3 = 1, B_1 = 1, \mu = 5, c = 0, k = -\frac{1}{2}, \lambda = 2\sqrt{5}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.20)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 17
- Şekil 4.10.** $A_3 = -1, B_1 = 1, \mu = 0, c = 0, k = \frac{1}{2}, \lambda = 0, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.21)
denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği
..... 18

- Şekil 4.11.** $\lambda = 3, \mu = 1, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{4}{5}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.9) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t=1$ iki boyutlu grafiği 21
- Şekil 4.12.** $\lambda = 3, \mu = 1, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{4}{5}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.10) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği 21
- Şekil 4.13.** $\lambda = 1, \mu = 3, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{12}{11}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.11) denkleminin parametrelerine göre reel ve sanal kısımlarının üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği 22
- Şekil 4.14.** $\lambda = 1, \mu = 3, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{12}{11}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.12) denkleminin parametrelerine göre reel ve sanal kısımlarının üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği 23
- Şekil 4.15.** $\lambda = 1, \mu = 0, c = 2, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = 3, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.13) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği 23
- Şekil 4.16.** $\lambda = 1, \mu = 0, c = 2, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = 3, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.14) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği 24
- Şekil 4.17.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = \sqrt{5}, EE = 0.75, \lambda = 3, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken (4.1.15) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği 25
- Şekil 4.18.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = \sqrt{5}, EE = 0.75, \lambda = 3, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken (4.1.16) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği 25
- Şekil 4.19.** $\alpha = 1, A_2 = \sqrt{-3}, \beta = -\frac{i\sqrt{7}}{2}, B_1 = 1, c = -\frac{3}{2}, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken (4.1.17) denkleminin reel ve sanal kısımlarının üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği 26
- Şekil 4.20.** $\alpha = 1, A_2 = \sqrt{-3}, \beta = -\frac{i\sqrt{7}}{2}, B_1 = 1, c = -\frac{3}{2}, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken (4.1.18) denkleminin reel ve sanal kısımlarının üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iken iki boyutlu grafiği 27
- Şekil 4.21.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 1, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 0, y = 1$ iken (4.1.19) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri 28
- Şekil 4.22.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 1, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 0, y = 1$ iken (4.1.20) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri 28

- Şekil 4.23.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 2, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken parametrelerine göre (4.2.22) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği..... 29
- Şekil 4.24.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 2, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken parametrelerine göre (4.2.23) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği..... 29
- Şekil 4.25.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 0, k = 1, \mu = 0, y = 1$ iken parametrelerine göre (4.2.24) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği..... 30
- Şekil 4.26.** $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 0, k = 1, \mu = 0, y = 1$ iken parametrelerine göre (4.2.25) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği..... 30

1. GİRİŞ

İnsanoğlu eski çağlardan bu yana doğa olaylarını anlamaya, yorumlamaya ve kendi amacı çerçevesinde kullanmaya çalışmıştır. Yıllar içerisinde birçok bilim insanı bu amaç uğruna çalışmalar yapmıştır. Fizikle ilgilenen bilim insanları bazı doğa olaylarını yorumlayabilmek ve kendi adına kullanabilmek için modellemeler yapmıştır. Bu modellemelerde ise olayların değişken sayılarına ve bu değişkenlerin birbirlerine etkilerine göre değişik denklemler kurmuşlardır. Literatürde yer alan çeşitli çalışmalarda bu tür denklemler sınıflandırılmış ve herbiri için ayrı bir çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Denklemlerin çözülmesiyle, temsil ettiği matematiksel modelin fiziksel davranışı ile ilgili analiz yapılmasına imkan sağlar. Böylece mühendislik, iktisat, fen, sağlık, ekonomi gibi pek çok bilim dalında karşılaştığımız birçok olayı temsil eden matematiksel modeller literatüre kazandırılmıştır. Bu modellerin her biri birer diferansiyel denklem ile ifade edilir. Örneğin fizik biliminde: top mermisinin aldığı yolu, radyoaktif bir maddenin bozulma hızını, ışığın farklı ortama geçerken doğrultu değiştirmesini, biyoloji alanında; hücre bozulması ve yenilenmesi, DNA'nın yapısındaki bozulma sonucunda oluşan mutasyonların tespitinde, mühendislik alanında; herhangi bir yapının kaç şiddetindeki depreme dayanıklı olacağını ölçmede, bir aracın kaç km hıza sağlıklı bir şekilde çıkabileceğinin tespit edilebilmesi, bir sinyalin maksimum çekim alanının ölçülebilmesinde, sağlık alanında; bir hastalığın yayılma hızı, hastalığın bulaştığı bir kişinin vücudunda üretilen antikör miktarının hesaplanabilmesinde diferansiyel denklemler kullanılmaktadır.

Diferansiyel denklemler bir fonksiyonun ve bu fonksiyonların çeşitli mertebeden türevleri arasındaki ilişkiden oluşmaktadır. Diferansiyel denklemler ile ilgili ilk çalışmalar ise 17. yy'da başlamıştır. Bu çalışmalar homojen ve değişkenlerine ayrılabilen adi diferansiyel denklemler üzerinde yapılmıştır. Diferansiyel ve integral hesabının keşfedilmesiyle ilk olarak İngiliz matematikçi Isaac Newton (1646-1727), 1671 yılında yayınlanan "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum" isimli kitabında birinci mertebeden diferansiyel denklemleri $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(x, y)$ ve $x_1 \partial y / \partial x_1 + x_2 \partial y / \partial x_2 = y$ şeklinde üç ayrı sınıfta incelemiştir (Sevimli, 2016). Bu sayede gerçek hayatla ilgili problemlere çözümler üretilmiştir. Alman matematikçi Leibniz (1646–1716) ise "yerçekimine karşı vücudun hareketini"

incelemek için diferansiyel denklemler üzerine çalışma yapmıştır (Upton, 2004). İlerleyen zamanlarda matematik tarihinde büyük isim yapmış olan Leonhard Euler (1707–1783) diferansiyel denklemlerin derecesini düşürme yöntemlerini geliştirmiştir (Keene, 2007). Bernoulli kardeşler ise “Bernoulli diferansiyel denklemini” bulmuşlardır. Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) n. mertebeden homojen diferansiyel denklemlerin genel çözüm için n tane lineer bağımsız çözümün olduğunu göstermiştir (Erdem, 2009).

Fiziksel niceliklerin ve bunların arasındaki bağlantıların anlamlarını ortaya çıkarmak için de diferansiyel denklemlerin çözümlerine ihtiyaç duyulur. Çözümleri elde etmek için geometrik, cebirsel ve sayısal hesap yöntemleri kullanılmıştır (Hunt ve ark. 2009). Bu sayede fen bilimcilere de birçok problemin çözümünde bu yöntemler katkı sağlamıştır.

19.yy’da da Cauchy, türevlenebilir bir fonksiyonun açık bir kümede holomorf fonksiyon olmasını sağlayan diferansiyel denklemler üzerinde çalışma yapmıştır. Chrystal, Jacobi, Picard, Fusch ve F.G. Frobenius’de diferansiyel denklemler üzerinde çalışma yapan matematikçiler arasındadır.

Teknolojinin gelişimine paralel olarak bilgisayar destekli hesaplama araçları geliştirilmiştir. Nitel ve nümerik yaklaşımlarla diferansiyel denklemler daha detaylı analiz edilmeye başlanmıştır. Bu sayede fen, mühendislik, istatistik gibi alanlardaki problemlerin çözümü kolaylaşmıştır.

Literatürde, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemlerden bazıları; tanh fonksiyon metodu, Malfliet tarafından 1992 yılında ortaya atılmıştır. Geliştirilmiş tanh fonksiyon metodu ise Chen ve Zhang tarafından 2004 yılında literatüre kazandırılmıştır. (G'/G) -açılım metodu, 2008 yılında Wang ve arkadaşları tarafından incelenmiştir. Bu metotta ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler bulunmaktadır. Başlangıçta lineer olmayan denklemlerin hareketli dalga dönüşümlerini elde etmek amacıyla ortaya atılmıştır. Metodun ana fikri lineer olmayan denklemlerin hareketli dalga çözümlerini (G'/G) ’nin bir polinomu olarak ifade edebilmektir (Gençoğlu, 2013).

Deneme denklem metoduda ilk kez 2005’de Liu tarafından literatüre kazandırılmıştır. Liu’nun kullandığı bu yöntemdeki ana düşüncesi ise diferansiyel

denklemin tam çözümünü integral alarak elde etmektir. Deneme denklem metodu 2012 yılında Pandır ve arkadaşlarının yaptığı bir çalışma üzerinden geliştirilerek literatürlere genişletilmiş deneme denklem metodu kazandırılmıştır (Gurefe ve ark., 2018). Daha sonra tam polinomal diskriminat sistemine dayalı, bir deneme denklem yöntemi geliştirilmiştir (Jun, 2011).

Çalışmamızda ise geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılmıştır. Bu metod ilk kez 2006 yılında He ve Wu tarafından literatüre kazandırılmıştır. Amaçları ise lineer olmayan hareketli denklemlerin tek ve benzeri çözümlerini elde etmektir. Çözümleri bulmak için lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere dalga dönüşümünü uygulamışlardır. Bu metod yardımıyla Calogero Bogoyavlenskii Schiff denkleminin ve Whitham Broer Kaup denkleminin yürüyen dalga çözümleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1: (a, b) aralığında tanımlı $x_0 \in (a, b)$ olacak şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun

$$y' = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

limit değerine f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi denir.

Tanım 2.2: Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeli türevin kuvvetine denklemin derecesi denir.

Tanım 2.3: Diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi o denklemin mertebesini belirlemektedir.

Tanım 2.4: x değişkeni ile bu değişkene bağlı $y = f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun çeşitli mertebeden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem adı verilir. Buradaki x değişkenine bağımsız değişken, y değişkenine bağımlı değişken denir.

Bir diferansiyel denklemin genel hali; $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ile ifade edilir.

Tanım 2.5: Bir ya da birden fazla bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir (Maden, 2013).

Tanım 2.6: Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin tek bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme adi diferansiyel denklem denir (Maden, 2013).

Tanım 2.7: Diferansiyel denklemdeki her bağımlı değişken ve türevleri sadece birinci dereceden ise aynı zamanda bağımlı değişkenler ve türevleri çarpım şeklinde bulunmuyorsa bu tür denklemlere doğrusal(lineer) denklemler denir (Sezer ve Daşcıoğlu, 2014).

n . mertebeden lineer bir diferansiyel denklemin en genel hali:

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \dots + f_n(x)y = R(x),$$

şeklindedir.

Tanım 2.8: Bir diferansiyel denklemde; bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyorsa, kendisi veya türevleri ile çarpım yada bölüm durumundaysa veya türevinin derecesi iki ya da daha fazla ise lineer olmayan diferansiyel denklem denir (Cesur, 2004).

Kavram 2.1: Dengeleme prensibi, elde edilen lineer olmayan adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceli lineer olmayan terimin eşitlenmesiyle bulunur (Bulut ve ark., 2018).

3. METOT

3.1 Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu

Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodunda öncelikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu aşağıdaki gibi ifade edilir (Baskonus ve ark., 2017).

$$P(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{xy}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.1.1.a)$$

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0. \quad (3.1.1.b)$$

Buradaki $u = u(x, y, t)$, $u = u(x, t)$ şeklinde iki veya üç değişkenli bir fonksiyondur. P ise lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin en genel halidir (Yel ve Aktürk, 2019).

Adım 1: (3.1.1.a) ve (3.1.1.b) lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerinin bağımsız değişkenlerine göre $\xi \neq 0$ olacak şekilde u fonksiyonuna aşağıdaki gibi dalga dönüşümü uygulanır;

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x + y - ct). \quad (3.1.2.a)$$

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct). \quad (3.1.2.b)$$

(3.1.2.a) ve (3.1.2.b) denklemlerindeki dalga dönüşümü yardımıyla ele alınan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri için gerekli olan u fonksiyonu ve u nun ξ 'ye bağlı türev kavramları elde edilip (3.1.1.a) ve (3.1.1.b) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$N(u, u_x, (u_x)^2, u_{xx}, u_{xxx}) = 0, \quad (3.1.3.a)$$

$$N(u, u^2, u^3, u_{xx}) = 0, \quad (3.1.3.b)$$

lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere dönüşmektedir.

Adım 2: Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodunda kullanılan u çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u = \frac{\sum_{i=0}^n A_i [e^{-g(\xi)}]^i}{\sum_{j=0}^m B_j [e^{-g(\xi)}]^j} = \frac{A_0 + A_1 e^{-g} + \dots + A_n e^{-ng}}{B_0 + B_1 e^{-g} + \dots + B_m e^{-mg}}. \quad (3.1.4)$$

Buradaki $A_n \neq 0, B_m \neq 0$ olmak üzere $A_i, B_j (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$ katsayılarıdır. Dengeleme prensibi ise elde edilen denklemde en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en büyük dereceli lineer olmayan terimin eşitlenmesiyle bulunur (Bulut ve ark., 2018). Dengeleme prensibi kullanılarak m ve n üst sınırları arasında bağıntı elde edilir. Elde edilen bu bağıntıdaki m sabitinin yerine keyfi pozitif tam sayı 0 belirlenir ve n pozitif sabiti de bulunur. Böylece toplam sembolünün üst sınırları elde edilmiş olur.

$$g'(\xi) = e^{-g(\xi)} + \mu e^{g(\xi)} + \lambda. \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{1}{e^{g(\xi)}} + \mu e^{g(\xi)} + \lambda \\ &= \frac{ke^{2g(\xi)} + \lambda e^{g(\xi)} + 1}{e^{g(\xi)}} \\ &= e^{-g(\xi)} (ke^{2g(\xi)} + \lambda e^{g(\xi)} + 1) \end{aligned}$$

(3.1.5) denkleminin ξ 'ye göre integrali alınır aşağıdaki durumlar elde edilir (Naher H, Abdullah F A, 2013).

Durum 1- $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0,$

$$g(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right). \quad (3.1.6)$$

Durum 2- $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0,$

$$g(\xi) = \ln \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} \tan \left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2} (EE + \xi) \right) - \frac{\lambda}{2\mu} \right). \quad (3.1.7)$$

Durum 3- $\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0,$

$$g(\xi) = -\ln \left(\frac{\lambda}{e^{\lambda(\xi) + EE} - 1} \right). \quad (3.1.8)$$

Durum 4- $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$,

$$\mathcal{G}(\xi) = \ln \left(-\frac{2\lambda(EE + \xi) + 4}{\lambda^2(EE + \xi)} \right). \quad (3.1.9)$$

Durum 5- $\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$,

$$\mathcal{G}(\xi) = \ln(EE + \xi). \quad (3.1.10)$$

Yukarıda elde edilen durumlara göre, $\mathcal{G}(\xi)$ fonksiyonları (3.1.4) denkleminde yerine yazılarak metoda göre varsayım olarak matematiksel modellerin hareketli dalga çözüm fonksiyonları elde edilir.

Adım 3: Lineer olmayan adi diferansiyel denklemindeki gerekli türev ifadeleri (3.1.4) çözüm fonksiyonunda oluşturularak (3.1.5) denkleminde yerine yazılır. Bu denklemin çözülmesiyle cebirsel denklem sistemi elde edilmektedir. Bu denklem sistemi Mathematica paket programı yardımıyla çözülerek u çözüm fonksiyonu için gerekli katsayılar elde edilir. Elde edilen katsayılar ve yukarıda verilen durumlardaki \mathcal{G} değerleri de u çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında bir fonksiyon elde edilir (Xu, 2008). Bulunan bu fonksiyonun lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini sağlayıp sağlamadığı mathematica paket programı yardımıyla kontrol edilir. Eğer denklemini sağlıyorsa ele alınan u fonksiyonu, lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin hareketli çözüm fonksiyonudur (He ve Wu, 2006).

4. METODLARIN UYGULANMASI

Bu bölümde geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu, Calogero Bogoyavlenskii Schiff denklemi ve Whitham Broer Kaup denklemine uygulandı. Elde edilen çözüm fonksiyonlarına metodun kriterlerine uygun parametreler belirlenmiştir. Bu değerlere göre bulunan dalga çözüm fonksiyonlarının davranışlarını temsil eden üç boyutlu, dış hat ve iki boyutlu grafikleri çizdirilmiştir.

4.1 Calogero Bogoyavlenskii Schiff Denklemine Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodunun Uygulanması

Calogero Bogoyavlenskii Schiff denklemi, kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği ve plazma fiziği gibi birçok alanda salınım hareketi yapan cisimlerin davranışlarını açıklamak için kullanılır.

Calogero Bogoyavlenskii Schiff denkleminin genel hali ise aşağıdaki gibidir:

$$u_{xt} + 4u_x u_{xy} + 2u_{xx} u_y + u_{xxy} = 0. \quad (4.1.1)$$

(4.1.1) denkleme bağımsız değişkene göre aşağıdaki dalga dönüşümü uygulanır.

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x + y - ct). \quad (4.1.2)$$

(4.1.1) denkleminde gerekli olan türev ifadeleri (4.1.2) denkleminde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, U_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, U_y = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}, U_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}, U_{xt} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t},$$
$$U_x = ku_\xi, U_{xx} = k^2 u_{\xi\xi}, U_y = ku_\xi, U_{xy} = k^2 u_{\xi\xi}, U_{xt} = -ck^2 u_{\xi\xi}, U_{xxy} = k^4 u_{\xi\xi\xi\xi}.$$

Bulunan türevler (4.1.1) denkleminde yerine yazılarak düzenlendiğinde;

$$-ck^2 u_{\xi\xi} + 4k^3 u_\xi u_{\xi\xi} + 2k^3 u_\xi u_{\xi\xi} + k^4 u_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (4.1.3)$$

elde edilir. (4.1.3) denkleme $u_\xi = u'$ dönüşümü uygulandığında;

$$-ck^2 u'' + 6k^3 u' u'' + k^4 u''' = 0, \quad (4.1.4)$$

bulunur. (4.1.4) denkleminin ξ ye göre integre edildiğinde;

$$-ck^2 u' + 3k^3 (u')^2 + k^4 u''' = 0. \quad (4.1.5)$$

denkleminde dönüşür. (4.1.5) denklemini daha sade hale getirmek için $u' = v$ dönüşümü uygulandığında;

$$-cv + 3kv^2 + k^2v'' = 0, \quad (4.1.6)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenir (Gurefe ve ark., 2018). (4.1.6) denkleminde en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en büyük dereceli lineer olmayan terim alınarak dengeleme prensibi uygulandığında;

$$\begin{aligned} v^2 &\approx v'' \\ (e^{n-m})^2 &\approx e^{n-m+2} \\ 2n - 2m &\approx n - m + 2 \\ n &\approx m + 2 \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. $m = 1$ için $n = 3$ bulunur. m ve n değerleri için (3.1.4) denklemi düzenlenirse;

$$u(\xi) = \frac{A_0 + A_1 e^{-\vartheta} + A_2 e^{-2\vartheta} + A_3 e^{-3\vartheta}}{B_0 + B_1 e^{-\vartheta}}, \quad (4.1.7)$$

şeklinde bulunur. $\vartheta = (\vartheta, \xi)$ ifadesi aşağıdaki gibi kabul edilir:

$$\begin{aligned} \vartheta'(\xi) &= e^{-\vartheta(\xi)} + k e^{\vartheta(\xi)} + \lambda. \\ Y &= A_0 + A_1 e^{-\vartheta} + A_2 e^{-2\vartheta} + A_3 e^{-3\vartheta}. \\ \Psi &= B_0 + B_1 e^{-\vartheta}. \end{aligned}$$

(4.1.3) denkleminde belirtilen türev ifadeleri (4.1.7) denkleminde elde edilip yerine yazıldığında e^{ϑ} 'nin kuvvetlerinden oluşan cebirsel denklem sistemi bulunur. Ortaya çıkan bu denklem sistemi, Mathematica paket programı yardımıyla çözüldüğünde (4.1.7) denklemi için gerekli olan katsayılar elde edilmiş olur. Bu katsayılar ise (4.1.7) denkleminde yerine yazılırsa öncelikle adi diferansiyel denklem elde edilir. Çözüm şartları altında lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemini sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Böylece Calogero Bogoyavlenskii Schiff denkleminin çözüm fonksiyonları bulunmuş olur.

Durum-1:

$$A_0 = \frac{\lambda^2 A_3 B_0}{4B_1} - \frac{cB_0 B_1}{A_3}, \quad A_1 = \frac{1}{4} \lambda A_3 \left(\lambda + \frac{4B_0}{B_1} \right) - \frac{c^2 B_1^2}{A_3}, \quad A_2 = A_3 \left(\lambda + \frac{B_0}{B_1} \right),$$

$$k = -\frac{A_3}{B_1}, \quad \mu = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{c^2 B_1^2}{A_3},$$

$$v = \left(\frac{e^{-\Omega} \left(\frac{1}{4} A_3 \lambda \left(\frac{4B_0}{B_1} + \lambda \right) - \frac{B_1^2 c}{A_3} \right) - \frac{B_0 B_1 c}{A_3} + \frac{A_3 B_0 \lambda^2}{4B_1} + A_3 e^{-2\Omega} \left(\frac{B_0}{B_1} + \lambda \right) + A_3 e^{-3\Omega}}{B_1 e^{-\Omega} + B_0} \right). \quad (4.1.8)$$

(4.1.6) denkleminde $v = u'$ dönüşümü kullanılmıştır. Bundan dolayı (4.1.8) denklemi ξ ye göre integrale edildiğinde;

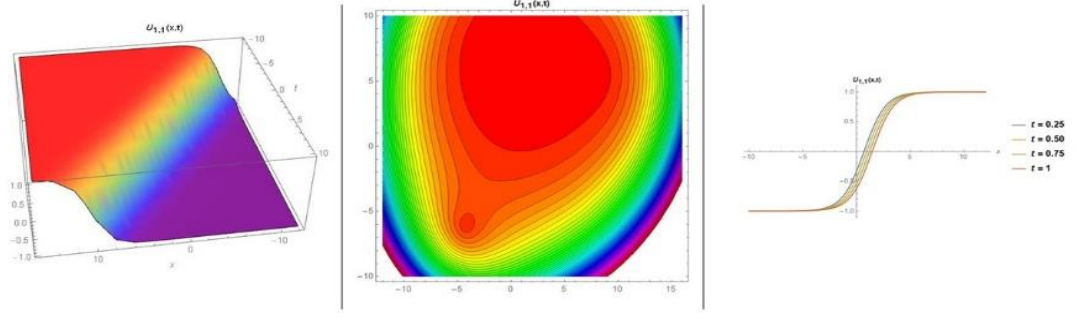
$$u_1 = \left(\frac{e^{-3\theta} A_3 + e^{-2\theta} A_3 \left(\lambda + \frac{B_0}{B_1} \right) + \frac{\lambda^2 A_3 B_0}{4B_1} - \frac{cB_0 B_1}{A_3}}{e^{-\theta} \left(\frac{1}{4} \lambda A_3 \left(\lambda + \frac{4B_0}{B_1} \right) - \frac{c^2 B_1^2}{A_3} \right)} \right). \quad (4.1.9)$$

(4.1.9) denkleminde dönüşür. Yukarıdaki katsayıları kullanarak (4.1.9) denkleminin çözüm fonksiyonları elde edilmiştir.

Çözüm Ailesi 1: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ için (4.1.1) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir:

$$u_{1,1} = \left(\frac{\left(\left(v(-2\lambda + (\lambda^2 - 2\mu)\zeta) + 2\mu v \zeta \psi - 4\mu \sqrt{v} \varphi \right) A_3 \right)}{4(\lambda^2 - 2\mu + 2\mu\psi) B_1 - \frac{c\zeta B_1}{A_3}} \right). \quad (4.1.10)$$

$$\text{Burada} \left(\begin{array}{l} \zeta = (EE + \xi), \quad \psi = \text{Cosh} \left[(EE + \xi) \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right], \\ \varphi = \text{Sinh} \left[(EE + \xi) \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right], \quad v = \lambda^2 - 4\mu \end{array} \right).$$

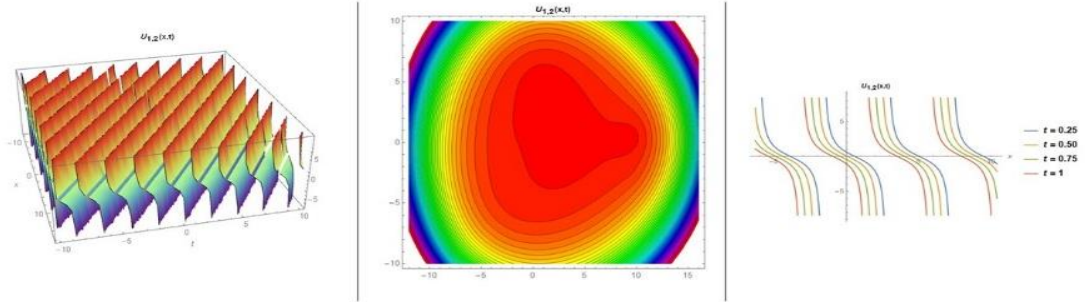


Şekil 4.1: $B_1 = 1, A_3 = 2, c = 1, \lambda = 3, k = -1, \mu = 2, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.10) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ anındaki iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ için (4.1.1) denkleminin çözümü ve grafikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$u_{1,2} = \left(\frac{\left(\left(v(-2\lambda + (\lambda^2 - 2\mu)\zeta) + 2\mu v\zeta\phi + 4\mu\sqrt{-v} \right) \gamma A_3 \right)}{\left(4(\lambda^2 - 2\mu + 2\mu\phi) B_1 - \frac{c\zeta B_1}{A_3} \right)} \right). \quad (4.1.11)$$

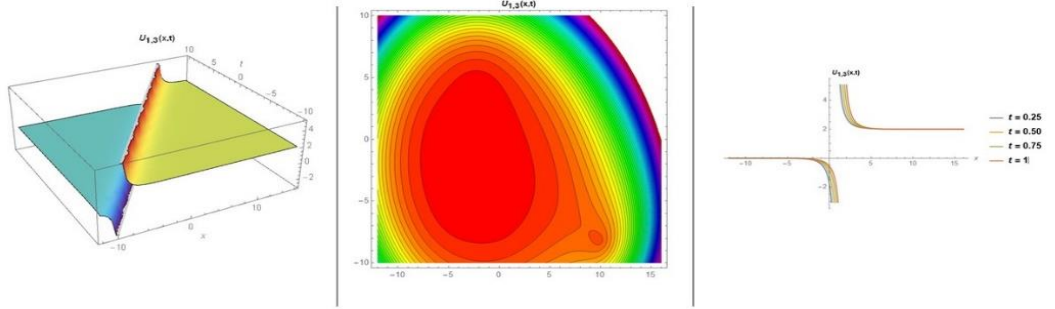
$$\text{Burada } \left(\begin{array}{l} \phi = \text{Cos} \left[(EE + \xi) \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \right], v = \lambda^2 - 4\mu, \\ \gamma = \text{Sin} \left[(EE + \xi) \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \right], \zeta = (EE + \xi) \end{array} \right).$$



Şekil 4.2: $B_1 = 1, A_3 = 2, c = -2, \lambda = 1, k = -1, \mu = \frac{3}{4}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.11) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ için (4.1.1) denkleminin çözüm fonksiyonu ve grafikleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$u_{1,3} = \left(\frac{\lambda \left(-\frac{4}{-1 + e^{\lambda\zeta}} + \lambda\xi \right) A_3}{4B_1} - \frac{c\xi B_1}{A_3} \right). \quad (4.1.12)$$

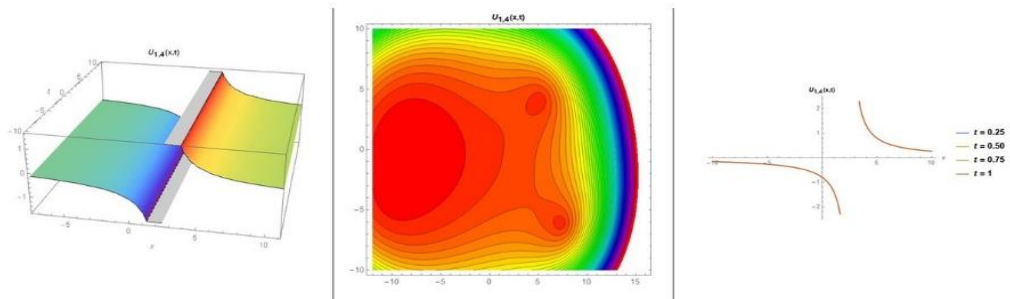


Şekil 4.3: $B_1 = 2, A_3 = 2, c = 1, \lambda = 2, k = -\frac{1}{2}, \mu = 0, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.12) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ anındaki iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 4: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ (4.1.1) denklemi için çözüm fonksiyonu ve grafikleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$u_{1,4} = \left(-\frac{\lambda A_3}{(2 + \lambda\zeta) B_1} - \frac{c\xi B_1}{A_3} \right). \quad (4.1.13)$$

Burada $(\zeta = (EE + \xi))$.

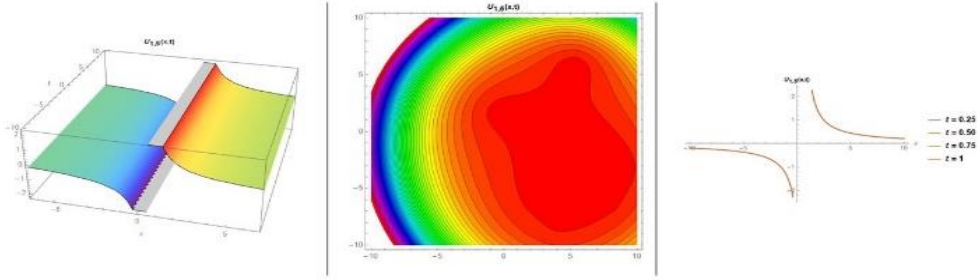


Şekil 4.4: $B_1 = 1, A_3 = 1, c = 0, \lambda = 2, k = -\frac{1}{2}, \mu = 1, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.13) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 5: $\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$, (4.1.1) denklemi için çözüm fonksiyonu ve grafikleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$u_{1,5} = \left(\begin{array}{c} \left(\frac{-4 + \lambda^2 \zeta^2}{\zeta} + 4\lambda \text{Log}[\zeta] \right) A_3 \\ 4B_1 \end{array} - \frac{c\xi B_1}{A_3} \right). \quad (4.1.14)$$

Burada $(\zeta = (EE + \xi))$.



Şekil 4.5: $B_1 = 1, A_3 = 1, c = 0, \lambda = 0, k = -\frac{1}{2}, \mu = 0, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.14)

denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Durum-2:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\mu A_3 B_0}{B_1} - \frac{2c B_0 B_1}{3A_3}, \quad A_1 = \mu A_3 - \frac{2c B_1^2}{3A_3} + \frac{2B_0 \sqrt{\mu A_3^2 - c B_1^2}}{B_1}, \\ A_2 &= \frac{A_3 B_0}{B_1} + 2\sqrt{\mu A_3^2 - c B_1^2}, \quad k = -\frac{A_3}{2B_1}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{\mu A_3^2 - c B_1^2}}{A_3}, \\ v &= \frac{e^{-2\Omega} \left(2\sqrt{A_3^2 \mu - B_1^2 c} + \frac{A_3 B_0}{B_1} \right) + e^{-\Omega} \left(\frac{2B_0 \sqrt{A_3^2 \mu - B_1^2 c}}{B_1} - \frac{2B_1^2 c}{3A_3} + A_3 \mu \right) - \frac{2B_0 B_1 c}{3A_3} + \frac{A_3 B_0 \mu}{B_1} + A_3 e^{-3\Omega}}{B_1 e^{-\Omega} + B_0} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

(4.1.6) denkleminde $v = u'$ dönüşümü kullanılmıştır. (4.1.15) denklemin ξ ye göre integrali alındığında;

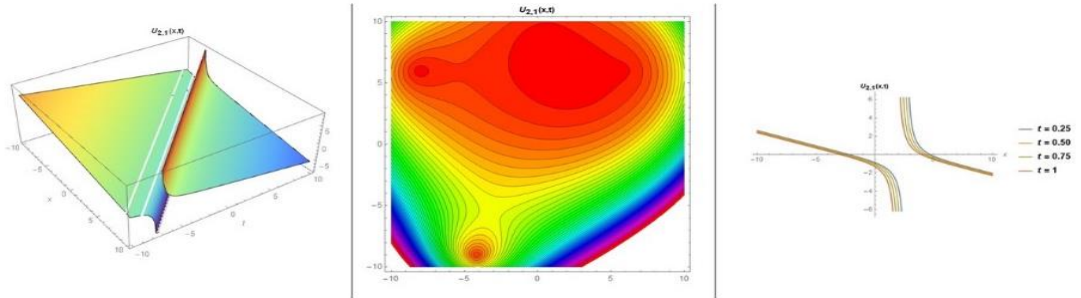
$$u_2 = \frac{\left(\begin{array}{l} e^{-3\theta} A_3 + \frac{\mu A_3 B_0}{B_1} - \frac{2c B_0 B_1}{3A_3} + e^{-2\theta} \left(\frac{A_3 B_0}{B_1} + 2\sqrt{\mu A_3^2 - c B_1^2} \right) + \\ e^{-\theta} \left(\frac{2c B_1^2}{3A_3} + \frac{2B_0 \sqrt{\mu A_3^2 - c B_1^2}}{B_1} \right) \end{array} \right)}{B_0 + e^{-\theta} B_1}, \quad (4.1.16)$$

denkleminde dönüşür. Elde edilen katsayılar kullanılarak aşağıdaki çözüm fonksiyonları bulunmuştur.

Çözüm Ailesi 1: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ için (4.1.1) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,1} = \left(\begin{array}{l} \frac{A_3}{6B_1} \left(\frac{-6\lambda \text{ArcCoth}[\delta] + 3\lambda \left(\lambda \zeta - \frac{\nu}{\chi} - \text{Log}[\chi] \right) -}{6\sqrt{\nu} \mu \text{Sinh}[\zeta \sqrt{\nu}]} \right) - \frac{4c \zeta B_1^2}{A_3} + \\ 6(-\lambda \zeta + 2 \text{ArcCoth}[\delta] + \text{Log}[\chi]) \sqrt{\mu A_3^2 - c B_1^2} \end{array} \right). \quad (4.1.17)$$

$$\text{Burada} \left(\begin{array}{l} \chi = \lambda^2 - 2\mu + 2\mu \text{Cosh} \left[\text{EE} + \xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right], \nu = \lambda^2 - 4\mu, \\ \delta = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}} \lambda \text{Coth} \left[\frac{\text{EE} + \xi \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \right], \zeta = \text{EE} + \xi \end{array} \right).$$



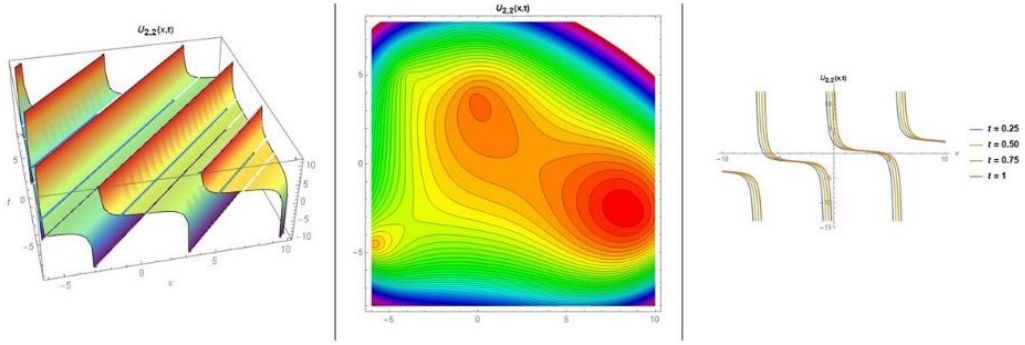
Şekil 4.6: $A_3 = 1, B_1 = \sqrt{2}, \mu = -1, c = -1, k = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \lambda = 2, \text{EE} = 0.75, y = 1$ iken

(4.1.17) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafikleri ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ için (4.1.1) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir.

$$u_{2,2} = \left(\frac{\frac{A_3}{6B_1} \left(-\frac{6\lambda\nu \text{Arc Cot}[\kappa]}{\sqrt{-\nu^2}} + 3\lambda \left(\frac{\lambda(EE + \xi) - \frac{3\nu}{\eta} - 3 \log[\eta] +}{2\sqrt{-\nu^2} \mu S \sin \left[\frac{\eta}{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu\gamma}} \right]} \right)}{\eta\sqrt{\nu}} \right) - \frac{4c\zeta B_1^2}{A_3} + \frac{\left(-12\sqrt{-\nu^2} \text{Arc Cot}[\kappa] - 6\nu(\lambda\zeta - \text{Log}[\eta]) \right) \sqrt{\mu A_3^2 - cB_1^2}}{\nu} \right). \quad (4.1.18)$$

$$\text{Burada } \left(\begin{array}{l} \kappa = \frac{\lambda \text{Cot} \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} (EE + \xi) \right]}{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}, \nu = \lambda^2 - 4\mu, \zeta = (EE + \xi) \\ \eta = \lambda^2 - 2\mu + 2\mu \text{Cos} \left[\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} (EE + \xi) \right] \end{array} \right).$$

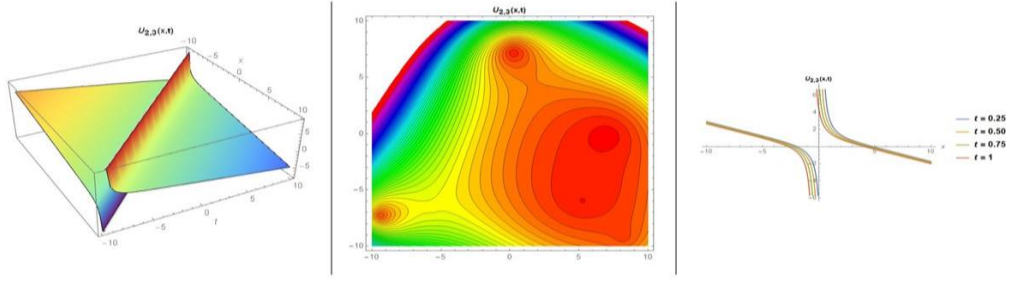


Şekil 4.7: $A_3 = 1, B_1 = 1, \mu = 2, c = 1, k = -\frac{1}{2}, \lambda = 2, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.18) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$ için için (4.1.1) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,3} = \left(\frac{3 \left(-\frac{\lambda}{\mathcal{G}} + (\lambda^2 + \mu) \xi - \lambda \text{Log} \mathcal{G} \right) A_3 - \frac{2c\xi B_1^2}{A_3} + \frac{6(-\lambda\xi + \text{Log} \mathcal{G}) \sqrt{\mu A_3^2 - cB_1^2}}{3B_1}}{\nu} \right). \quad (4.1.19)$$

Burada $(\mathcal{G} = 1 - e^{\lambda(EE + \xi)})$.

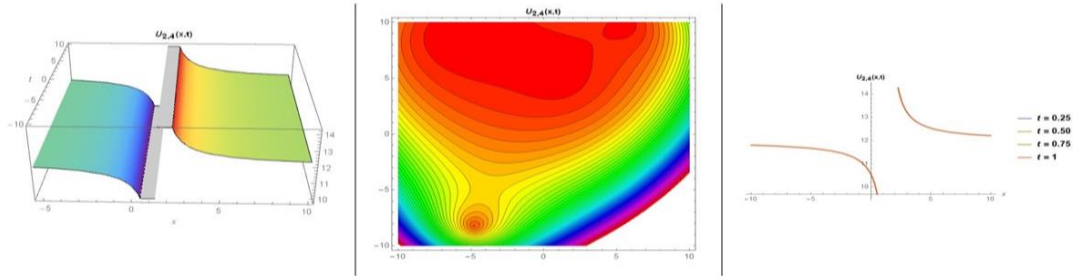


Şekil 4.8: $A_3 = 1, B_1 = 1, \mu = 0, c = -1, k = -\frac{1}{2}, \lambda = 2, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.19) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 4: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ için (4.1.1) denklemi için çözüm fonksiyonu ve grafikleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$u_{2,4} = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{12B_1} \left(\left(\frac{24\mu}{\lambda} + 3\nu\zeta + \frac{6\lambda^2\zeta}{\sigma} \right) - 12\lambda \text{Log}[\sigma] \right) A_3 - \\ \frac{8c\xi B_1^2}{A_3} - 12(\lambda\xi - 2\text{Log}[\sigma]) \sqrt{\mu A_3^2 - cB_1^2} \end{array} \right). \quad (4.1.20)$$

Burada $(\sigma = 2 + \lambda(EE + \xi), \nu = \lambda^2 - 4\mu, \zeta = (EE + \xi))$.



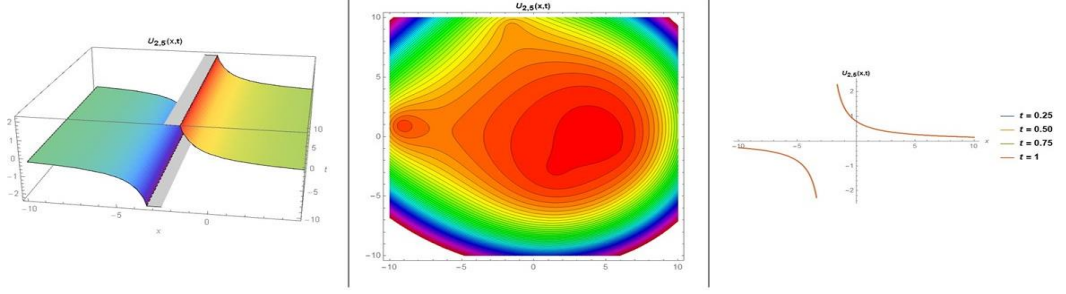
Şekil 4.9: $A_3 = 1, B_1 = 1, \mu = 5, c = 0, k = -\frac{1}{2}, \lambda = 2\sqrt{5}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.20)

denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ anındaki iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 5: $\mu = 0, \lambda = 0, \lambda^2 - 4\mu = 0$ için (4.1.1) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir:

$$u_{2,5} = \left(\frac{\frac{3(-1 + \mu\zeta^2)A_3}{\zeta} - \frac{2c\xi B_1^2}{A_3} + 6\text{Log}\zeta \sqrt{\mu A_3^2 - cB_1^2}}{3B_1} \right). \quad (4.1.21)$$

Burada ($\zeta = (EE + \xi)$).



Şekil 4.10: $A_3 = -1, B_1 = 1, \mu = 0, c = 0, k = \frac{1}{2}, \lambda = 0, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.1.21) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

4.2 Whitham Broer Kaup Denkleminin Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodunun Uygulanması

Bu bölümde, Whitham Broer Kaup denkleminin dalga çözümlerini geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılarak araştırıldı. WBK denklemi mekanik dalgalar, doğrusal bir su dalgasının kırılması gibi birçok alanı temsil etmektedir.

WBL denkleminin genel hali ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + v_x + \beta u_{xx} &= 0, \\ v_t + (uv)_x + \alpha u_{xxx} - \beta v_{xx} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

(4.2.1) denklemi için α ve β keyfi sabit olmak üzere bağımsız değişkenlere göre aşağıdaki dalga dönüşümü uygulanır.

$$u(x, y, t) = u(\xi), \quad \xi = k(x + y - ct) \quad (4.2.2)$$

Dönüşümü uygulayabilmek için (4.2.1) denkleminde gerekli türev kavramları (4.2.2) denkleminde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U_t = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad U_x = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad U_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad U_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^3 + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3},$$

$$\begin{aligned}
U_t &= -cku_\xi, & U_x &= ku_\xi, & U_{xx} &= k^2u_{\xi\xi}, & U_{xxx} &= k^3u_{\xi\xi\xi}, \\
V_x &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, & V_t &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}, & V_{xx} &= \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\
V_x &= kv_\xi, & V_t &= -ckv_\xi, & V_{xx} &= k^2v_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Bulunan ilgili türevler (4.2.1) denkleminde yerine yazılarak düzenlendiğinde;

$$\begin{aligned}
-cku_\xi + kuu_\xi + kv_\xi + \beta k^2 u_{\xi\xi} &= 0, \\
-ckv_\xi + ku_\xi v + kuv_\xi + \alpha k^3 u_{\xi\xi\xi} - \beta k^2 v_{\xi\xi} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

elde edilir. (4.2.3) denkleminin ξ ye göre integrali alınırsa;

$$\begin{aligned}
cu - \frac{u}{2} - v - \beta ku_\xi &= 0, \\
cv - uv - \alpha k^2 u_{\xi\xi} + \beta kv_\xi &= 0,
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

(4.2.4) denkleminde dönüşür. Denklemi daha sade hale getirmek için (4.2.4) denkleminde v ve v_ξ yalnız bırakıldığında;

$$\begin{aligned}
v_\xi &= cu_\xi - uu_\xi - \beta ku_{\xi\xi}, \\
v &= cu - \frac{u^2}{2} - \beta ku_\xi,
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. (4.2.4) denkleminde (4.2.5) denklemleri yerine yazılırsa;

$$2c^2u - 3cu^2 + u^3 - (2\alpha k^2 + 2\beta^2 k^2)u_{\xi\xi} = 0, \tag{4.2.6}$$

Lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenir. (4.2.6) denkleminde en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en büyük dereceli lineer olmayan terim alınarak dengeleme prensibi uygulandığında;

$$\begin{aligned}
u^3 &\approx u^n \\
3n - 3m &\approx n - m + 2 \\
n &\approx m + 1
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. $m=1$ için $n=2$ olarak bulunur. m ve n değerleri (3.1.4) denkleminde düzenlenirse;

$$u(\xi) = \frac{A_0 + A_1 e^{-g} + A_2 e^{-2g}}{B_0 + B_1 e^{-g}}, \quad (4.2.7)$$

şeklinde bulunur.

$g = (g, \xi)$ ifadesi aşağıdaki gibi kabul edilir:

$$g'(\xi) = e^{-g(\xi)} + k e^{g(\xi)} + \lambda.$$

$$Y = A_0 + A_1 e^{-g} + A_2 e^{-2g}.$$

$$\Psi = B_0 + B_1 e^{-g}.$$

Mathematica paket programı yardımıyla u fonksiyonunun çözüm kümesi bulunur ve u çözüm fonksiyonunun katsayıları elde edilir. Elde edilen katsayı durumlarını inceleyelim.

Durum 1

$$A_0 = cB_0 - \frac{\sqrt{c^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu) B_0^4}}{\lambda^2 - 4\mu};$$

$$A_1 = \frac{-\lambda \sqrt{c^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu) B_0^2} B_1 + B_0 \left(-2\sqrt{c^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu) B_0^2} + c\lambda(\lambda^2 - 4\mu) B_1 \right)}{\lambda(\lambda^2 - 4\mu) B_0};$$

$$A_2 = -\frac{2c^2 \lambda B_0 B_1}{\sqrt{c^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu) B_0^2}}; \quad \alpha = -\beta^2 + \frac{c^2}{k^2 (\lambda^2 - 4\mu)};$$

$$u_3 = \left(\frac{cB_0 - \frac{\varpi}{\nu} - \frac{2c^2 e^{-2\Omega} \lambda B_0 B_1}{\varpi} + \frac{e^{-\Omega} (-\lambda \varpi B_1 + B_0 (-2\varpi + c\lambda \nu B_1))}{\lambda \nu B_0}}{B_0 + e^{-\Omega} B_1} \right). \quad (4.2.8)$$

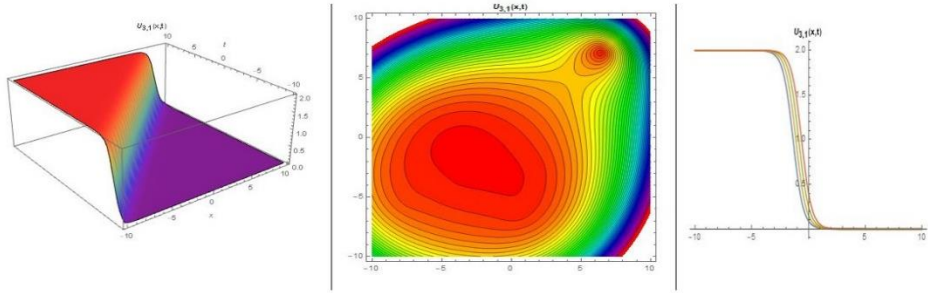
$$\text{Burada } \left(\varpi = \sqrt{c^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 4\mu) B_0^2}, \nu = \lambda^2 - 4\mu \right).$$

Yukarıdaki katsayılar kullanılarak (4.2.8) denkleminin çözüm fonksiyonları elde edilmiştir.

Çözüm Ailesi 1: $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$, için (4.2.8) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir;

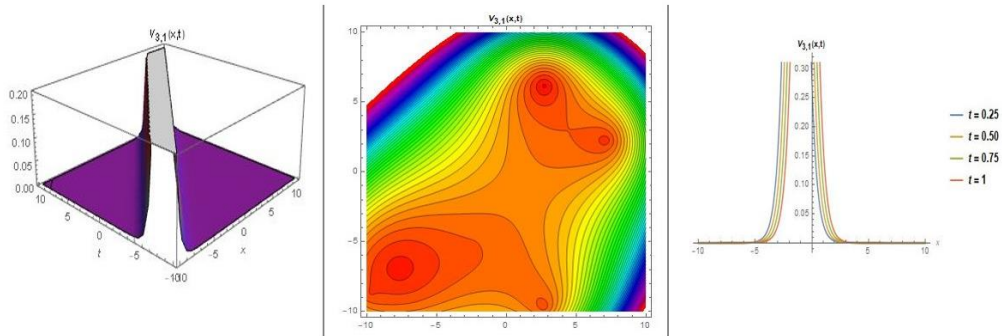
$$u_{3,1} = \left(c - \frac{c^2 \lambda B_0 \left(v + \lambda \sqrt{v} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\zeta}{2} \right] \right)}{\sqrt{c^2 \lambda^2 v B_0^2} \left(\lambda + \sqrt{v} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\zeta}{2} \right] \right)} \right). \quad (4.2.9)$$

Burada $\left(\zeta = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} (EE + \xi), v = \lambda^2 - 4\mu \right)$.



Şekil 4.11: $\lambda = 3, \mu = 1, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{4}{5}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.9) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

$$v_{3,1} = \left(\frac{2\mu \operatorname{Sech} \left[\frac{\zeta}{2} \right]^4 \left(2\mu + (\lambda^2 - 2\mu) \operatorname{Cosh}[\zeta] + \lambda \sqrt{v} \operatorname{Sinh}[\zeta] \right)}{\lambda B_0 \left(\lambda + \sqrt{v} \operatorname{Tanh} \left[\frac{\zeta}{2} \right] \right)^4} \right) \cdot \left(c^2 \lambda B_0 + k \beta \sqrt{c^2 \lambda^2 v B_0^2} \right). \quad (4.2.10)$$

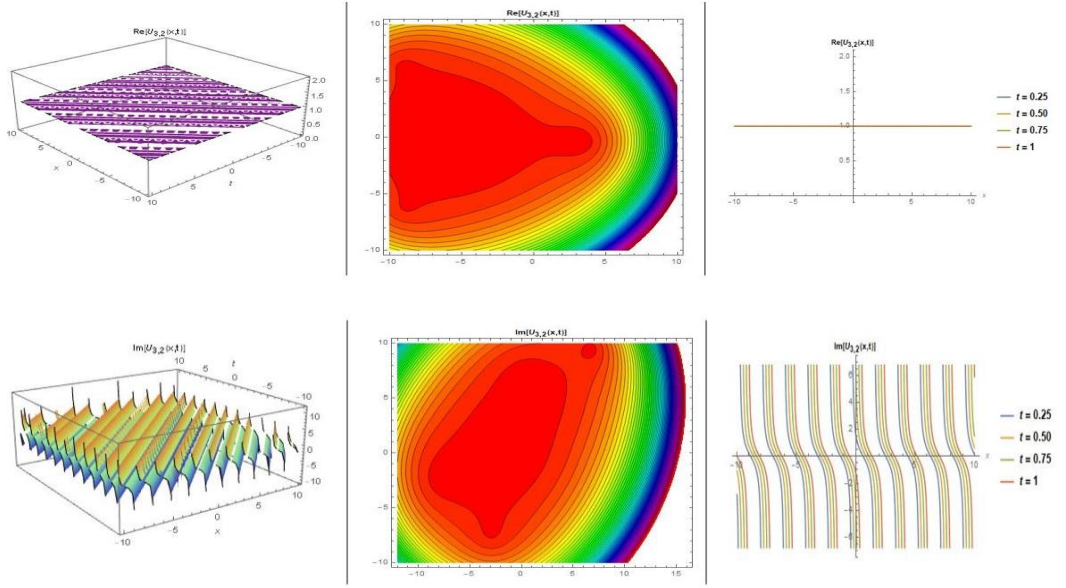


Şekil 4.12: $\lambda = 3, \mu = 1, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{4}{5}, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.10) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2: $\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu < 0$, için (4.2.8) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir;

$$u_{3,2} = \left(c + \frac{c^2 \lambda B_0 \left(-\lambda^2 + 4\mu + \lambda \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left[\frac{\psi}{2} \right] \right)}{\sqrt{c^2 \lambda^2 \nu B_0^2} \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left[\frac{\psi}{2} \right] \right)} \right). \quad (4.2.11)$$

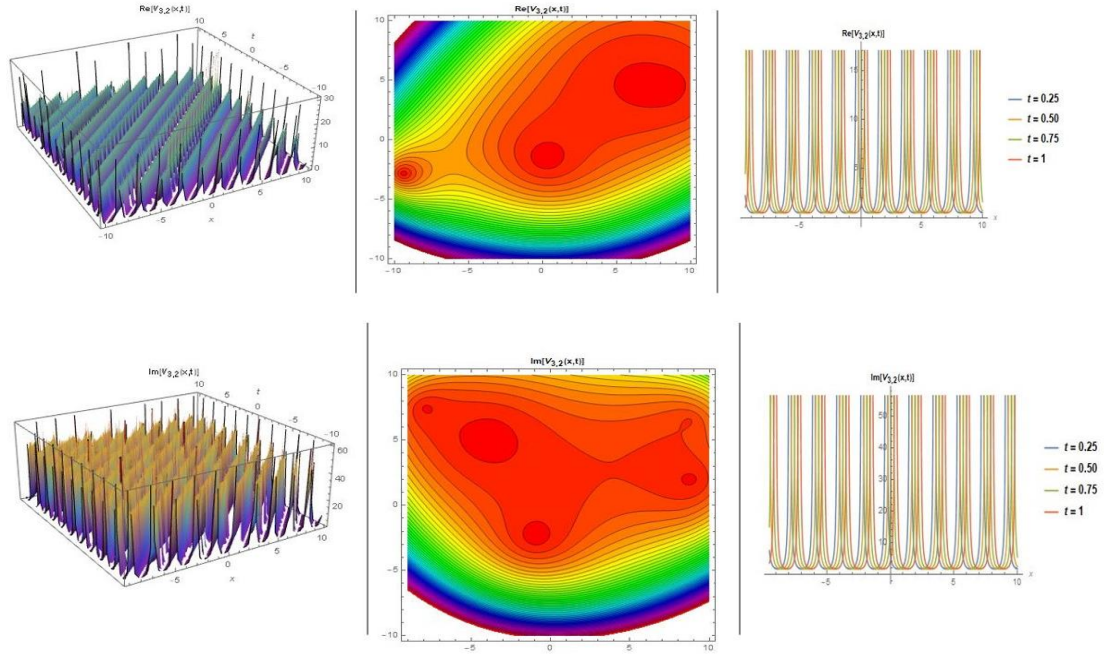
Burada $\left(\psi = \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} (EE + \xi) \right)$.



Şekil 4.13: $\lambda = 1, \mu = 3, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{12}{11}, EE = 0.75, y = 1$ iken

(4.2.11) denkleminin parametrelerine göre reel ve sanal kısımlarının üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

$$v_{3,2} = \left(\frac{2\mu \sec \left[\frac{\psi}{2} \right]^4 \left(\frac{2\mu + (\lambda^2 - 2\mu) \cos \psi}{\lambda \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \sin \psi} - \right) \left(c^2 \lambda B_0 + k \beta \sqrt{c^2 \lambda^2 \nu B_0^2} \right)}{\lambda B_0 \left(\lambda - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left[\frac{\psi}{2} \right] \right)^4} \right). \quad (4.2.12)$$

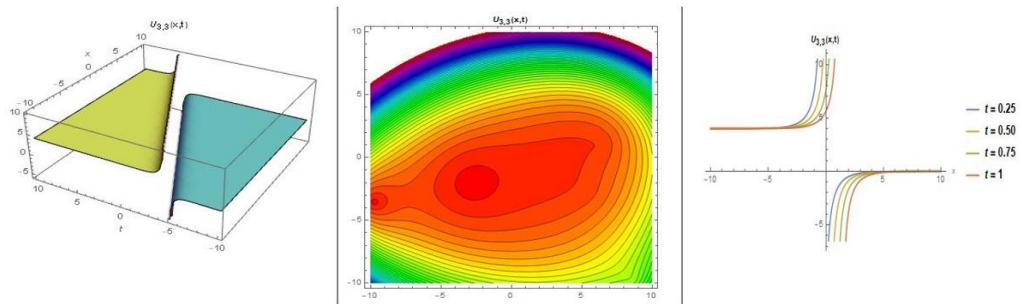


Şekil 4.14: $\lambda = 1, \mu = 3, c = 1, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = -\frac{12}{11}, EE = 0.75, y = 1$ iken

(4.2.12) denkleminin parametrelerine göre reel ve sanal kısımlarının üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

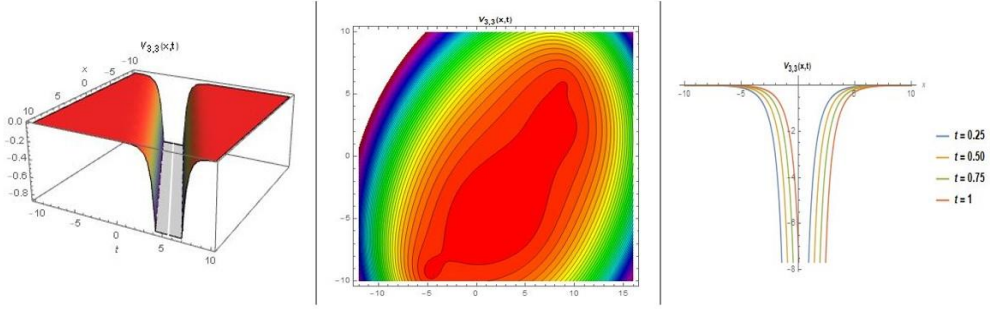
Çözüm Ailesi 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ için (4.2.8) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir;

$$u_{3,3} = \left(c - \frac{\text{Coth} \left[\frac{1}{2} \lambda (EE + \xi) \right] \sqrt{c^2 \lambda^4 B_0^2}}{\lambda^2 B_0} \right). \quad (4.2.13)$$



Şekil 4.15: $\lambda = 1, \mu = 0, c = 2, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = 3, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.13) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

$$v_{3,3} = \left(-\frac{c^2 \lambda B_0 + k \beta \sqrt{c^2 \lambda^4 B_0^2}}{\lambda (-1 + \text{Cosh} [\lambda (EE + \xi)]) B_0} \right). \quad (4.2.14)$$



Şekil 4.16: $\lambda = 1, \mu = 0, c = 2, k = 1, \beta = 1, B_0 = 1, \alpha = 3, EE = 0.75, y = 1$ iken (4.2.14) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 4-Tanımsız

$\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ şartları altında kullanılan katsayıların yer aldığı u çözüm fonksiyonu tanımsız olarak elde edilmektedir.

Çözüm Ailesi 5-Tanımsız

$\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ şartları altında kullanılan katsayıların yer aldığı u çözüm fonksiyonu tanımsız olarak elde edilmektedir.

Durum 2:

$$A_0 = \frac{A_2 B_0 (\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \lambda)}{2B_1}, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 \left(\frac{2B_0}{B_1} + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \lambda \right),$$

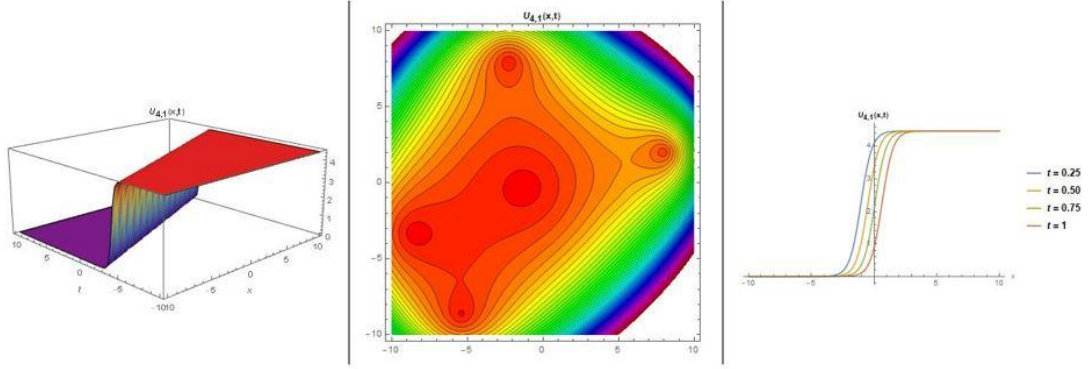
$$c = \frac{A_2 \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2B_1}, \quad \beta = -\frac{\sqrt{A_2^2 - 4\alpha B_1^2 k^2}}{2B_1 k},$$

$$u_4 = \left(\frac{\frac{1}{2} A_2 e^{-\Omega} \left(\frac{2B_0}{B_1} + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \lambda \right) + \frac{A_2 B_0 (\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \lambda)}{2B_1} + A_2 e^{-2\Omega}}{B_1 e^{-\Omega} + B_0} \right); \quad (4.2.15)$$

Çözüm Ailesi 1: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$, için (4.2.15) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir;

$$u_{4,1} = \left(\frac{A_2 (\lambda \delta - 4\mu) (\tanh \zeta + 1)}{2B_1 (\sqrt{\nu} \tanh \zeta + \lambda)} \right). \quad (4.2.16)$$

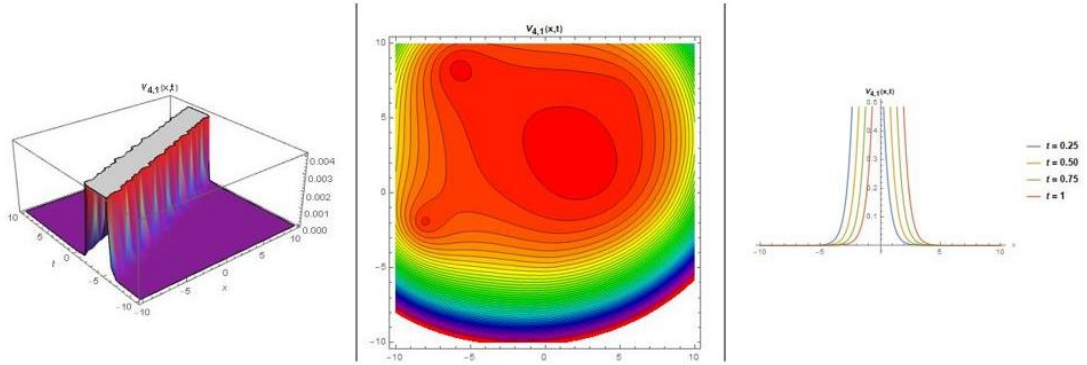
$$\text{Burada } \left(\zeta = \left(\frac{1}{2} (EE + \xi) \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right), \delta = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \lambda, \nu = \lambda^2 - 4\mu \right).$$



Şekil 4.17: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = \sqrt{5}, EE = 0.75, \lambda = 3, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken (4.2.16) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği ile $t = 1$ iki boyutlu grafiği

$$v_{4,1} = \left(\frac{A_2 \left(-\frac{A_2 t^2 \wp^2}{\tilde{\lambda}^2} + \frac{4B_1 c t \wp}{\tilde{\lambda}} - \frac{8\beta B_1 k \mu v}{(\sqrt{v} \sinh \zeta + \lambda \cosh \zeta)^2} \right)}{8B_1^2} \right). \quad (4.2.17)$$

Burada $\left(\begin{array}{l} \wp = (\tanh \zeta + 1), \delta = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \lambda, \zeta = \left(\frac{1}{2} (EE + \xi) \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right) \\ \tilde{\lambda} = \sqrt{v} \tanh \zeta + \lambda, t = (\lambda \delta - 4\mu), v = \lambda^2 - 4\mu \end{array} \right).$

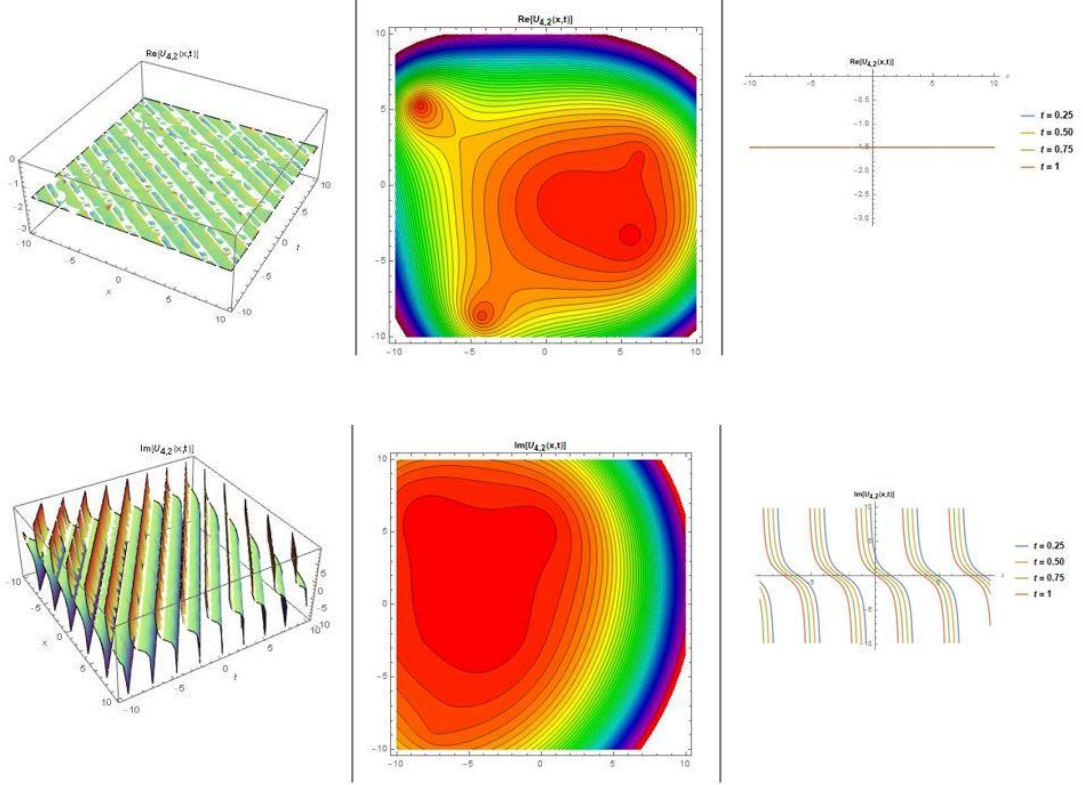


Şekil 4.18: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = \sqrt{5}, EE = 0.75, \lambda = 3, k = 1, \mu = 1, y = 1$ iken (4.2.17) parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 2: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$ için (4.2.15) denkleminin çözümü ve grafikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$u_{4,2} = \left(\frac{A_2 \left(-\left(\lambda \sqrt{4\mu - \lambda^2} + \sqrt{-v^2} \right) \tan \sigma + \lambda \delta - 4\mu \right)}{2B_1 \left(\lambda - \sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \sigma \right)} \right). \quad (4.2.18)$$

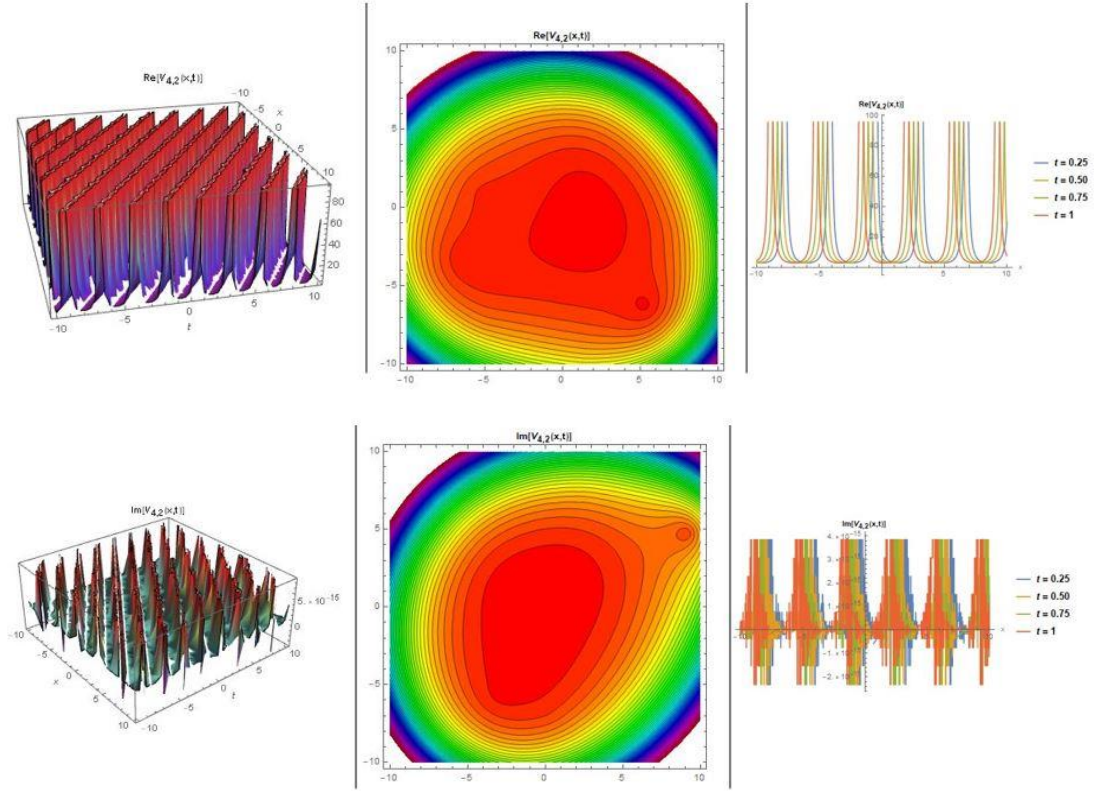
Burada $(\sigma = 2 + \lambda(E E + \xi), v = \lambda^2 - 4\mu, \zeta = (E E + \xi))$.



Şekil 4.19: $\alpha = 1, A_2 = \sqrt{-3}, \beta = -\frac{i\sqrt{7}}{2}, B_1 = 1, c = -\frac{3}{2}, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 1,$
 $y = 1$ iken (4.2.18) parametrelerine göre reel ve sanal kısımlarının üç boyutlu
ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

$$v_{4,2} = \left(\frac{A_2 \left(-\frac{A_2 \Phi^2}{\tau^2} + \frac{4B_1 c (-\Phi)}{\tau} + \frac{2\beta B_1 k \left(-4\mu v + \lambda \sqrt{v} + \lambda \sqrt{-v^3} \right)}{\left(\lambda \cosh \hbar - \sqrt{-v} \sinh \hbar \right)^2} \right)}{8B_1^2} \right). \quad (4.2.19)$$

Burada $\left(\hbar = \left(\frac{1}{2} (E E + \xi) \sqrt{4\mu - \lambda^2} \right), \mathfrak{S} = \left(\lambda \sqrt{-v} + \sqrt{-v^2} \right), v = \lambda^2 - 4\mu, \right.$
 $\left. \delta = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \lambda, \tau = \lambda - \sqrt{-v} \tan \hbar, \Phi = \mathfrak{S} \tan \hbar - \lambda \delta + 4\mu \right)$.

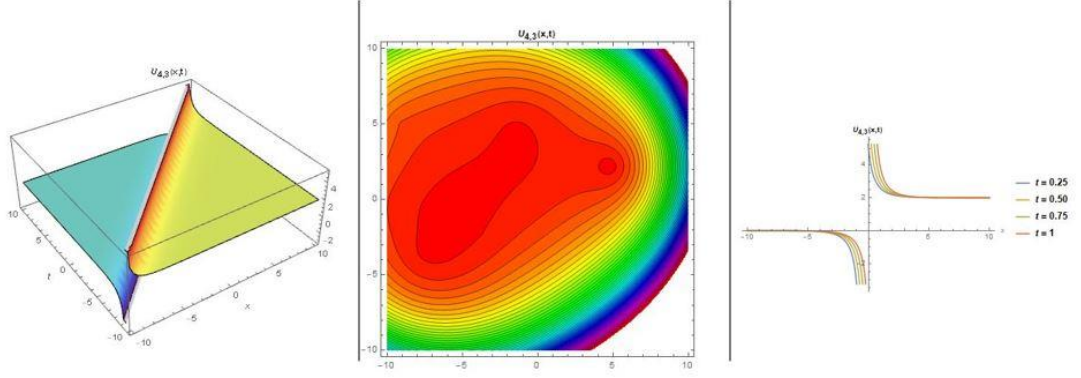


Şekil 4.20: $\alpha = 1, A_2 = \sqrt{-3}, \beta = -\frac{i\sqrt{7}}{2}, B_1 = 1, c = -\frac{3}{2}, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 1,$
 $y = 1$ iken (4.2.19) parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$
iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 3: $\mu = 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$, için (4.2.15) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir;

$$u_{4,3} = \left(\frac{A_2 \left(\lambda \coth \varphi + \sqrt{\lambda^2} \right)}{2B_1} \right). \quad (4.2.20)$$

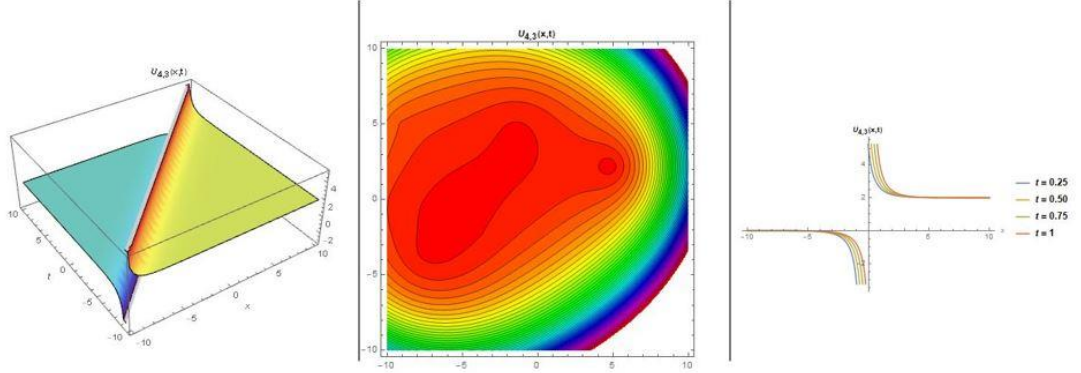
$$\text{Burada} \left(\varphi = \left(\frac{1}{2} \lambda (EE + \xi) \right) \right).$$



Şekil 4.21: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 1, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 0, y = 1$ için (4.2.20) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ anındaki iki boyutlu grafiği

$$v_{4,3} = \left(\frac{A_2 c \Omega}{2B_1} - \frac{A_2^2 \Omega^2}{8B_1^2} + \frac{A_2 \beta k \lambda^2 \operatorname{csch}^2 \varphi}{4B_1} \right). \quad (4.2.21)$$

$$\text{Burada } \left(\Omega = \lambda \coth \varphi + \sqrt{\lambda^2}, \varphi = \left(\frac{1}{2} \lambda (EE + \xi) \right) \right).$$

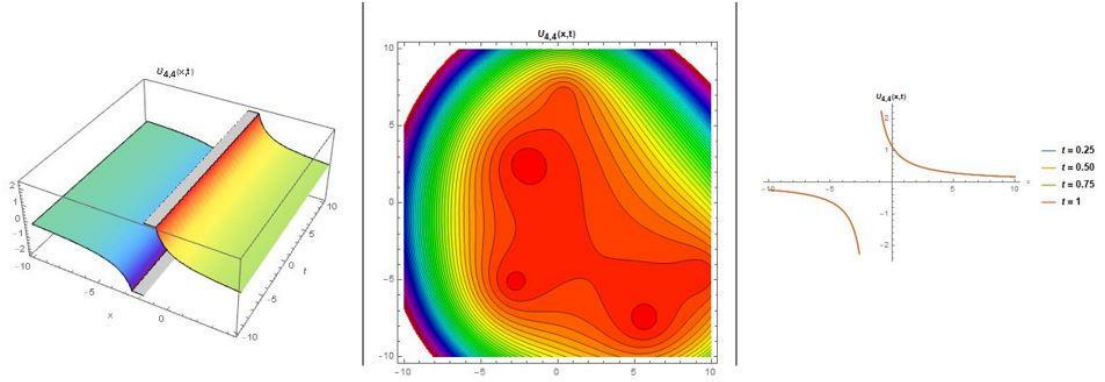


Şekil 4.22: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 1, EE = 0.75, \lambda = 1, k = 1, \mu = 0, y = 1$ için (4.2.21) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 4: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$, için (4.2.15) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir;

$$u_{4,4} = \left(\frac{A_2 \left(\frac{2\lambda}{\sigma} + \sqrt{\nu} \right)}{2B_1} \right). \quad (4.2.22)$$

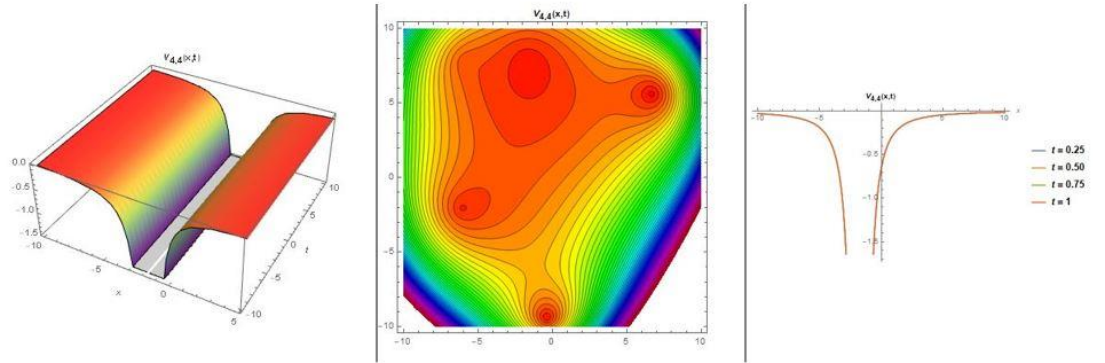
$$\text{Burada } (\sigma = \lambda(EE + \xi) + 2, \nu = \lambda^2 - 4\mu).$$



Şekil 4.23: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 2, k = 1, \mu = 1, y = 1$ için (4.2.22) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

$$v_{4,4} = \left(\frac{A_2 c \left(\frac{2\lambda}{\sigma} + \sqrt{\nu} \right)}{2B_1} - \frac{A_2^2 \left(\frac{2\lambda}{\sigma} + \sqrt{\nu} \right)^2}{8B_1^2} + \frac{A_2 \beta k \lambda^2}{B_1 \sigma^2} \right). \quad (4.2.23)$$

Burada $(\sigma = \lambda(EE + \xi) + 2, \nu = \lambda^2 - 4\mu)$.

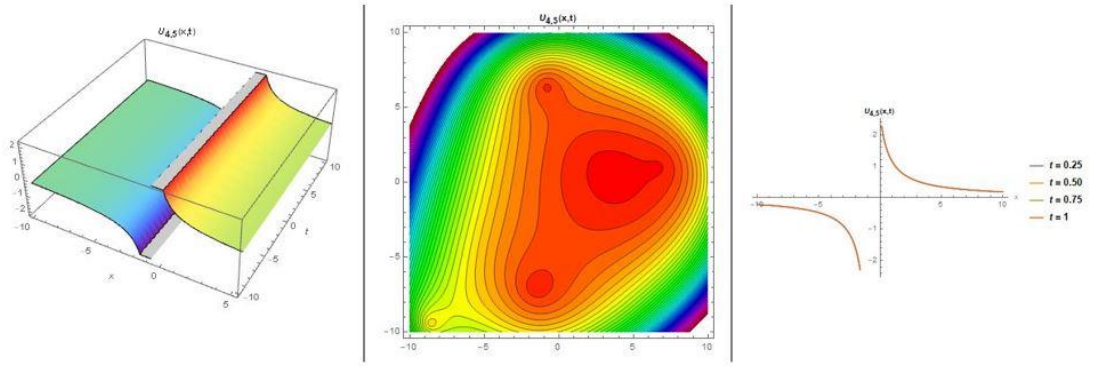


Şekil 4.24: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 2, k = 1, \mu = 1, y = 1$ için (4.2.23) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ anındaki iki boyutlu grafiği

Çözüm Ailesi 5: $\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$, için (4.2.15) denkleminin çözümü ve elde edilen grafikleri aşağıdaki gibidir;

$$u_{4,5} = \left(\frac{A_2}{B_1 \zeta} \right). \quad (4.2.24)$$

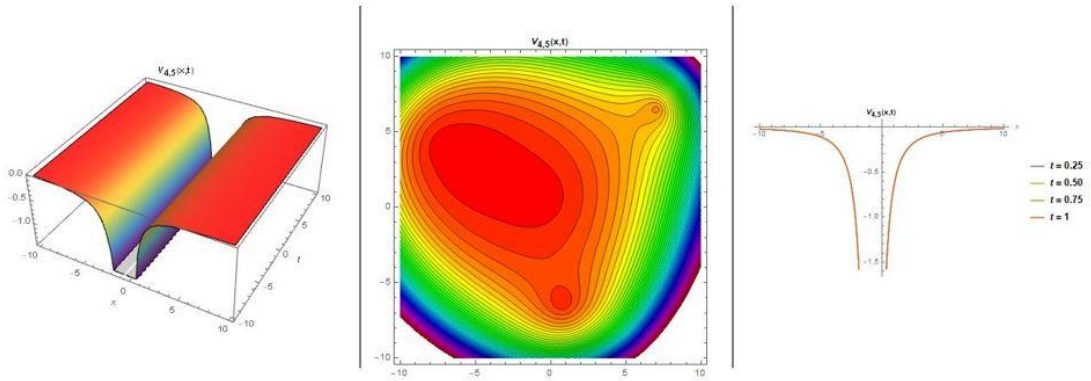
Burada $(\zeta = (EE + \xi))$.



Şekil 4.25: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 0, k = 1, \mu = 0, y = 1$ iken (4.2.24) denkleminin parametrelerine göre üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ iki boyutlu grafiği

$$v_{4,5} = \left(\frac{A_2 c}{B_1 \zeta} + \frac{A_2 \beta k}{B_1 \zeta^2} - \frac{A_2^2}{2B_1^2 \zeta^2} \right). \quad (4.2.25)$$

Burada $(\zeta = (EE + \xi))$.



Şekil 4.26: $\alpha = 1, A_2 = 2, \beta = 0, B_1 = 1, c = 0, EE = 0.75, \lambda = 0, k = 1, \mu = 0, y = 1$ iken (4.2.25) denkleminin üç boyutlu ve dış hat grafiği, $t = 1$ anındaki iki boyutlu grafiği

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmamızda Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon metodu kullanıldı. Bu metot Calogero Bogoyavlenskii Schiff ve Whitham Broer Kaup denklemlerinin yeni dalga çözümlerini elde etmek için uygulandı. Böylece denklemlerin trigonometrik, logaritmik, rasyonel ve hiperbolik fonksiyon türünden çözüm fonksiyonları bulunmuştur. Elde edilen çözüm fonksiyonlarının hesaplamaları, bulunan çözümlerin üç boyutlu, dış hat ve iki boyutlu grafiklerin çizdirilmesi gibi tüm işlemler Mathematica paket programı yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu kullanılarak elde edilen çözüm fonksiyonlarına uygun parametreler belirlenerek bulunan grafiklerin, bu fonksiyonların karakteristik özelliklerini taşıdığı görülmektedir. Tüm bu elde edilen sonuçlara göre, Geliştirilmiş üstel fonksiyon metodu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerinin elde edilmesinde etkili bir metod olduğu anlaşılmaktadır. Bu tez çalışmasındaki kullanılan denklemlerin çözüm fonksiyonlarına literatürde rastlanmamıştır. Sonuç olarak, tüm çözüm fonksiyonları Geliştirilmiş Üstel Fonksiyon Metodu kullanılarak literatüre kazandırılmıştır.

6. KAYNAKLAR

- Baskonus, H. M., Bulut, H. ve Süleyman, T. A. (2017). Investigation of various travelling wave solutions to the extended (2+1)-dimensional quantum ZK equation. *The European Physical Journal Plus*, 132(11), 482.
- Bulut, H., Aktürk, T. ve Yel, G. (2018). An Application of the Modified Expansion Method to Nonlinear Partial Differential Equation. *Turk. J. Math. Comput. Sci.*, 10,202–206.
- Cesur, Y. (2004). Diferansiyel Denklemler ve Mathematica. İTÜ yayınları, İstanbul, 313.
- Chen, H. ve Zhang, H. (2004). Genel Burgers-Fisher denklemine ve Kuramoto-Sivashinsky denklemine yeni çoklu soliton çözümleri. *Kaos, Solitonlar ve Fraktallar*, 19 (1), 71-76.
- Erdem, A. (2009). Adi diferansiyel denklemler notları. Kocaeli Üniversitesi, 12-13.
- Gençoğlu, M. T. (2013). Birleştirilmiş kdv denkleminin analitik ve yaklaşık çözümleri. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Gurefe, Y., Aktürk, T. ve Günaydın, E. (2018). On the kink type and singular solitions solutions to the nonlinear partial differential equation. *International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM-2018)*, 11-13 Eylül, Van yüzüncüyıl üniversitesi, Van.
- He, J.H. ve Wu, X. H. (2006). Construction of solitary solution and compacton-Kaup solution by variational iteration method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29(1):108–13.
- Hunt, B. R., Lardy, L. J., Lipsman, R.L., Osborn, J. E., ve Rosenberg, J. M. (2009). *Differential equations with maple (3rd edition)*, USA: John Wiley & Sons Inc.
- Jun, C. Y. (2011). Classification of traveling wave solutions to the Vakhnenko equations. *Comput. Math. Appl.* 62(10), 3987–3996.
- Keene, K. A. (2007). A characterization of dynamic reasoning: Reasoning with time as parameter. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(3), 230-246.
- Liu, C. S. (2005). Trial equation method and its applications to nonlinear evolution equations. *Acta Phys. Sin.* 54(6), 2505.
- Maden, S. (2013). Diferansiyel denklemler. Seçkin yayıncılık, Yayın no: 1241, Ankara, 376s.
- Malfliet, W. (1992). Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. *American Journal of Physics*, 60(7), 650-654.
- Naher, H. ve Abdullah, F. A., 2013. New approach of (G'/G)-expansion method and new approach of generalized (G'/G)-expansion method for nonlinear evolution equation. *American Inst of Physics Advances*, 3(3),032116.
- Newton, Isaac. (c.1671). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum (The Method of Fluxions and Infinite Series)*, published in 1736 [Opuscula, 1744, Vol. I. p. 66].

- Pandir, Y., Gurefe, Y., Kadak, U. ve Misirli, E. (2012). Classifications of exact solutions for some nonlinear partial differential equations with generalized evolution. *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, 16.
- Sevimli, E. (2016): "Diferansiyel denklemlerin öğreniminde yaşanan zorluklar ve alternatif öğretim yaklaşımları." *Sakarya University Journal of Education* 6.2, 154-171.
- Sezer, M. ve Daşcıoğlu, A. (2014). *Diferansiyel denklemler 1*. Dora Yayın.
- Upton, S. D. (2004). Students' solution strategies to differential equations problems in mathematical and nonmathematical contexts. Unpublished doctoral dissertation. The Arizona State University.
- Xu, F. (2008). Application of Exp-function method to symmetric regularized long wave (SRLW) equation. *Physics Letters A*, 372(3), 252-257.
- Yel, G. ve Aktürk, T. (2019). Modified Expansion Function Method for the KP-BBM Equation. *CMES* 2019, 2-3.