T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU PARÇALI LİNEER MODEL ALTINDA AĞIRLIKLI EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİLERİN BLOK AYRIŞIMLARI

CEVAT KANAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

CEVAT KANAR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

ÇOKLU PARÇALI LİNEER MODEL ALTINDA AĞIRLIKLI EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİLERİN BLOK AYRIŞIMLARI

CEVAT KANAR

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 46 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve genel bilgiler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde ele alınan modeller altında alt parametrelerin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) en iyi lineer yansız tahmin edicisi (BLUE) ve ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi (WLSE) ler incelenmistir. Genel model altındaki ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi (WLSE) nin iki küçük alt model altındaki ağırlıklı en küçük kareler tahmin edici (WLSE)' lerin toplam ayrışımı şeklinde olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmistir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matris, Rank, Genelleştirilmiş İnvers, Lineer Model, Parçalı Lineer Model, Alışılmış En Küçük Kareler Tahmin Edici, En Iyi Lineer Yansız Tahmin Edici, Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edici.

ABSTRACT

BLOCK DECOMPOSITIONS OF WEIGHTED LEAST-SQUARES ESTIMATORS UNDER MULTIPLE PARTITIONED REGRESSION MODEL

CEVAT KANAR

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 46 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in five parts. In the first chapter, an introduction is given by mentioning the purpose of the study. In the second part, the basic definitions, theorems and general information that will be required in our study are expressed. Under the models discussed in the third section, the conventional least squares estimator (OLSE), the best linear unbiased estimator (BLUE) and the weighted least squares estimator (WLSE) of the sub-parameters are examined. Necessary and sufficient conditions are investigated for the weighted least squares estimator (WLSE) under the general model to be a total decomposition of the weighted least squares estimator (WLSE) under the two small submodels. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Rank, Generalized Inverse, Linear Model, Partitioned Linear Model, Ordinary Least Squares Estimator, Best Linear Unbiased Estimator, Weighted Least Squares Estimator.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmalarım boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte her daim yanımda olan Fatsa Fen Lisesi Matematik Öğretmeni Dr. Kemal EREN’e, beni her alanda destekleyen kıymetli eşime ve çocuklarıma yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cismi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$\boldsymbol{K}_n^m$	: K cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ boyutlu tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I}_n$	: $n\times n$ boyutlu birim matris
$\boldsymbol{A}'$	: A matrsinin tranzpozu
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A matrisinin determinantı
$\boldsymbol{A}^{-\mathbf{R}}$	: A matrisinin sağ inversi
$\boldsymbol{A}^{-L}$	: A matrisinin sol inversi
$\boldsymbol{A}^{-1}$	: A matrisinin inversi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\Re(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^{+}$	: A matrisinin Moore-Penrose inversi
OLSE	: Alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi
BLUE	: En iyi lineer yansız tahmin edici
WLSE	: Ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi
$\lVert\cdot\rVert_V$	: Semi normu
$\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\Sigma}$	: Kovaryant matris
$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$	: β parametresinin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi
$\boldsymbol{Cov}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$	: A ve B değişkenleri arasındaki kovaryans

1. GİRİŞ

Günümüzde matrisler yardımıyla inşa edilen lineer modeller, teorik matematik, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi pek çok teknik alanda oldukça önemli hale gelmiştir. Matris hesabı ise 19. yüzyılın ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında matris kavramını ilk kez kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions'* isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış, fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçi olan Cayley ise 1858 yılında o zamanlar çok meşhur olan *'Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonra Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavramlar ve teoremler üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ise ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Ancak ta ki 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki yapılan çalışmalardan tamamen habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile hemen hemen aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından Rao (1965) tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle bu invers, Moore-Penrose inversten oldukça farklıdır. Rao, daha sonraki çalışmalarında lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olan ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g-invers) olarak adlandırılmış ve bunun çeşitli uygulamaları Rao (1965)' nun birçok çalışmasında yer almıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili önemli gelişmeler ve bunların bazı uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) isimli kitapta verilmiştir.

Matris rankı ile ilgili iyi bilinen bir gerçek şudur: Aynı mertebeden iki A ve B matrisinin benzer olması, yani $UAV = B$ olacak şekilde iki tersinir U ve V matrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(A) = r(B)$ olmasıdır. Bir matrisin sütunlarının veya satırlarının doğrusal bağımsızlığını belirlemek için en basit yöntem, matrisin elementer matris işlemler yardımıyla satır veya sütun eşelon formlara indirgenmesidir. Teorik açıdan idempotent matrislerden oluşan herhangi bir matris ifadesi için, bu ifade ile ilgili bazı rank eşitlikleri kurulabilir. Bu rank eşitliklerinden yararlanarak verilen ifadenin bazı temel özellikleri elde edilebilir. Bazı rank formülleri, çeşitli blok matrisler ve elementer blok matris işlemleri ile luşturulabilir. Bunlardan bir kısmı aşağıda verilmiştir:

$$r\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} I_m & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & I_m - AB \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

$$r\begin{bmatrix} A & AB \\ BA & B \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B - BAB \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A - ABA & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Son zamanlarda yapılan çalışmalarda bu yöntemle pekçok yeni ve önemli rank eşitlikleri elde edilmiş ve bu rank eşitliklerinden birçok önemli sonuç türetilmiştir.

Şimdi lineer model kavramından bahsedilebilir. Y gözlemlerin $n \times 1$ mertebeli vektörü (rasgele vektör), X $n \times p$ $(n < p)$ mertebeli bir bilinen katsayı matrisi, β $p \times 1$ mertebeli bilinmeyen parametre vektörü ve $E(\varepsilon) = 0$, $Cov(\varepsilon) = \Sigma$ olmak üzere ε ise $n \times 1$, rasgele değişkenlerin gözlenebilir olmayan bir vektörü olsun. Bu durumda bunlar arasında

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

biçiminde varsayılan bir bağıntıya bir lineer model veya lineer regresyon modeli denir. Bu model pek çok özel durumlara sahiptir. Bu durumlar, ε rasgele vektörünün dağılımına ve kovaryans matrisine ya da X katsayı matrisinin yapısına ve rankına bağlıdır. Aksi belirtilmedikçe, $r(X) = p$ olduğunu kabul edilecektir, başka bir deyişle modelimizdeki X katsayı matrisi tam sütun ranklı bir matris olacaktır, ε hata vektörünün dağılımı hakkında ise aşağıdaki üç durum göz önüne alınabilir:

1. Durum: $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$

2. Durum: ε bilinmeyen bir dağılıma sahiptir ve $E(\varepsilon)$=0 $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ dır.

3. Durum: $Cov(\varepsilon)=\sigma^2 V$, V bilinen pozitif definit bir matristir.

Birinci durumda her bir ε_i rasgele değişkeni 0 ortalamalı, bilinmeyen σ^2 varyanslı normal dağılıma sahip olup ε_i , $i=1,2,3,......,\mathrm{N}$, ler bağımsızdır. İkinci durumda, her bir ε_i nin beklenen değeri sıfır ise, ε_i ler ilişkisiz ve ε_i ler bilinmeyen ortak σ^2 varyansına sahiptirler. Birinci ve ikinci durumdaki varsayımlar altındaki modellere Gauss-Markov modeli denir. İkinci durumdaki modellere ise bazen en küçük kareler modelleri denir. Ayrıca hata terimi normal dağılımlı olduğunda bu modellere hipotez modelleri de denilmektedir.

$Y=X\beta+\varepsilon$ lineer modelinde $X\beta$ çarpımına modelin deterministik kısmı, Y ve ε vektörlerine ise modelin stokastik kısmı adı verilir. Y vektörü bağımlı değişken, tepki değişkeni, açıklanan değişken adı verilen bir rastgele değişken ile ilgili gözlemler vektörüdür. X matrisine tasarım matrisi, açıklayıcı değişkenlerin matrisi, bağımlı değişkenlerin gözlem matrisi gibi isimler verilmektedir, ε vektörüne ise hata vektörü denilmektedir. Gerçek dünyadaki olayların lineer modeller yardımıyla modellenmesi ile ilgili çalışmalarda Y, X , β ve ε değişkenleri birçok değişik şekillerde anlamlandırılmaktadır. Bazı modellerde Y üretim miktarı, bazılarında boy uzunluğu, bazılarında ise bir ekonomik değişken olabilir.

Doğrusal hareket eden, β_0 hızı ile hareketine başlayan ve ivmesi β_1 olan bir cismin zamana (t'ye) bağlı olarak aldığı yol $S=\beta_0+\beta_1 t$ formülü ile verilir. Bu şekilde bir hareket eden bir cismin hızını ve ivmesini bilmek ve daha sonra belli bir zamanda aldığı yol miktarını belirlemek istediğimizi farzedelim. Bu durumda keyfi olarak seçtiğimiz belli t_i , $i=1,2,..........,N,$ zamanlarında yol uzunluklarını gözlemlemeye kalkıştığımızda ölçümlerdeki hatalardan dolayı S_i , $i=1,2,..........N,$ gözlemleri için $S_i=\beta_0+\beta_1 t_i+\varepsilon_i$ gibi bir model düşünmemiz daha uygun görünmektedir.

$$Y=\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad , \quad \mathrm{X}=\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{t}_1 \\ 1 & \mathrm{t}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{t}_N \end{bmatrix}_{N\times 2} \quad , \quad \varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \quad , \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

gösterimleri altında yukarıda söylenenler,

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

şeklinde bir lineer model olarak ifade edilmektedir. Bu modelde Y gözlem vektöründeki gözlemleri veren açıklayıcı ya da bağımlı değişkeni Y harfi, X matrisinin ikinci sütunundaki gözlemler ile ilgili bağımsız değişkeni X harfi ve hatayı da ε harfi ile gösterirsek bu değişkenler arasındaki bağıntı

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

olarak da ifade edilebilir. İkinci bir örnek olarak, belli bir tür elmadaki meyve suyu miktarını elmanın ağırlığına bağlı olarak incelemek isteyelim. Gerçekte bir elmadaki meyve suyu miktarı sadece elmanın ağırlığına bağlı değildir, ama ağırlık ile meyve suyu arasında bir fonksiyonel bağıntının (bilinmeyen parametrelere göre lineer bir ifade olabilir) varlığını kabul edip gözlemlerin bunu doğrulayıp doğrulamadığını, gözlemlerden çıkıp bir bağıntının bulunmasını ve bunların neticesinde ağırlığa bağlı olarak meyve suyu miktarını belirlemeyi (tahmin etmeyi) düşünebiliriz. Bu örnekteki açıklayıcı değişken olan elmanın ağırlığı ile açıklanan(bağımlı) değişken olan elmadaki meyve suyu miktarı birer rasgele değişken olacaktır. Ağırlığı X, meyve suyu miktarını Y ile gösterirsek bu durumda X ve Y değişkenlerinin bir ortak dağılımı söz konusu olacaktır.

$$E\left(Y \middle| X = x\right) = g\left(x\right)$$

ifadesine Y nin X üzerindeki regresyon denklemi dendiğini ve X ile Y değişkeninin ortak dağılımının normal dağılım olması durumunda bunun

$$E\left(Y \middle| X = x\right) = g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

şeklinde olduğunu hatırlatalım. Bu takdirde $\left(X, Y\right)$ iki boyutlu rastgele değişkeninin ortak dağılımından N birimlik örneklem, $\left(X_i, Y_i\right)$, $i = 1, 2, ..., N,$ olmak üzere

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., N\ ,\ \ \varepsilon_i \sim \left(0, \sigma^2 I\right)$$

veya

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{N\times 1}, \mathrm{X}=\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{X}_1 \\ 1 & \mathrm{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{X}_N \end{bmatrix}_{N\times 2}, \varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}_{N\times 1}, \beta=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

matris gösterimi altında

$$Y = X\beta + \varepsilon,$$

modeline bir basit lineer regresyon modeli denir. Lineer regresyon modelleri de Lineer Modeller çerçevesinde düşünülebilir. X ve Y rasgele değişkenleri arasında bir ortak dağılım düşünmeden sadece Y bağımlı değişken ile ilgili gözlemlere dayalı olarak,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., N,$$

biçiminde bir ifade söz konusu olduğunda modele basit lineer model denir.

Öte yandan elmanın ağırlığı olan X değişkeni ile elmadaki meyve suyu miktarı olan Y değişkeninin ortak dağılımı normal olmayabilir. Bizim buradaki amacımız X değişkeninin gözlenen değerine bağlı olarak Y değişkeninin gözlenen değerini ön görmek olduğuna göre

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, ..., N,$$

biçiminde bir lineer modeli ele almak söz konusudur. Bu durumda ε hata terimi, birinci örnekteki yol uzunluğunun ölçülmesi sırasındaki hataya benzer bir hatayı içermekle birlikte, X değişkeninin belli bir değeri için Y değişkenindeki rastgeleliği ve ayrıca model belirlemesindeki hatayı da içerecektir.

Bir lineer modelde eğer açıklayıcı değişken sayısı birden çok ise bu modele çoklu lineer model (multiple linear model) denir. Bir lineer modelde eğer bağımlı değişken sayısı birden çok ise bu durumda da modele birçok değişkenli model (multivariate model) adı verilir. Sıcaklık ile basıncın, sertlik üzerindeki etkisinin fonksiyon biçiminde bir bağıntı ile ifade edilip edilemeyeceği, bu bağıntının biçiminin ne olacağı veya sıcaklık ile basınç değişkenlerinin sertliği ne derece etkileyip etkilemediği gibi sorunlar ilk olarak metalürji biliminin sorunları gibi gözükmektedir. Metalürji biliminin kanunlarına göre sıcaklık ile basıncın sertlik üzerindeki etkisi tam olarak belirlenmiş olabilir, bağıntı biçimsel olarak belirlenmiş ancak içinde bilinmeyen katsayılar mevcut ya da aralarında bir bağıntı var ama ne olduğu belirlenmemiş olabilir. İlk durumda istatistikçinin yapacağı fazla bir şey kalmamıştır. Belki belirlenmiş olan modelin geçerliliğinin sınanmasında yardımcı olabilir. İkinci ve üçüncü durumlarda ise istatistikçiye önemli görevler düşmektedir. Amaç belirlendikten sonra (Örneğin bu amaç hangi sıcaklık ve basınçta malzemenin sertliği maksimum olmaktadır şeklinde olabilir) gözlemlerin alınacağı en iyi deney tasarımının seçilmesi ve ardından da bir istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması istatistik biliminin sorunudur.

İkinci örnek olarak belirli bir mısır türünün verimini incelemek istediğimizi varsayalım. Şüphesiz verim, toprak ve hava ile ilgili birçok tabiat şartı yanında sulama, gübreleme, toprağı işleme gibi bazı etkenlere de bağlıdır. Bu nedenle modelleme sırasında, çok karmaşık olan gerçek dünyadaki ilişkilerden bazılarını ihmal ederek, verim miktarı (Y) için, toplam yağış miktarı (X_1), sıcaklık ortalaması (bitkinin yetişmesi boyunca her gün bir defa ölçülen sıcaklıkların ortalaması (X_2), gübre miktarı (X_3) ve birim metrekaredeki bitki sayısı (X_4) değişkenlerine bağlı olarak,

$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + X_4\beta_4 + \varepsilon$$

gibi bir modelin geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda gerek modelin geçerliliğinin sınanması ve gerekse geçerli olacak bir modelde açıklayıcı değişkenlerin etkilerinin yani parametrelerin tahmin edilmesi amacıyla yapılacak bir araştırmada veri toplama işlemi uygulamada pek kolay olmayacaktır. Modeldeki yağış miktarı ve sıcaklık ortalaması ile ilgili açıklayıcı değişkenler birer rasgele değişkendir, ancak gübre miktarı ile ilgili açıklayıcı değişken bir deterministik değişken olarak görülebilir. Bu nedenle açıklayıcı değişkenlerin birer rasgele değişken olup olmamasına bakılmaksızın, bundan sonra açıklayıcı değişkenler ile ilgili X matrisini, gözlem değerlerinin bir matrisi, yani sabitlerin bir matrisi olarak düşünmek daha mantıklı olacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1 K keyfi bir cisim olsun. K cismi üzerinde n bilinmeyenli m tane lineer denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \;,\; 1 \le i \le m$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem sisteminde, $x_j, 1 \le j \le n$ ler bilinmeyenler, a_{ij}, $1 \le i \le m$ ler katsayılar ve b_i ler ise reel sayılardır. Verilen denklem sistemi daha açık olarak

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + a_{m3}x_3 + \dots\dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılır (Hacısalihoğlu,1977).

Tanım 2.2

i. K cisim olsun. $m, n \in N$ ve $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerin kümesi $A = N \times N$ ile gösterilsin. $f \to K$ fonksiyonu $(i, j) \to f(i, j) = a_{ij}$ olarak tanımlansın. $a_{ij} \in K$ olacak şekilde seçilen $m.$n tane elemanın oluşturduğu tabloya K cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde matris denir. Eğer $K = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa matrise reel matris, $K = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, matrise kompleks matris denir (Branson R., 1999). Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

matrisi kısaca $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı A matrisinin $i.$ satır ve $j.$ sütununa karşılık gelen elemanıdır. K cismi üzerinde seçilen bütün $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ biçimindeki matrislerin kümesi $K^{m\times n}$ ile gösterilir.

ii. $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ aynı boyutlu iki matris olmak üzere herbir (i, j) için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrislerine eşit matrisler denir.

iii. $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinin her bir a_{ij} elemanı sıfır ise A matrisine bir sıfır matris denir.

iv. $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ boyutlu matrisler olmak üzere $A + B$ matrisi

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} .... a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} .... a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} .... a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

v. K cismi üzerinde $s \in K$ bir skaler sayı olmak üzere $sA \in K_n^m$ matrisi

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} .... & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} .... & ka_{2n} \\ ... & ... & .... \\ ka_{m1} & ka_{m2} .... & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

vi. $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ olmak üzere A ve B matrislerinin çarpımı

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots\dots + a_{1p}b_{1p}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots\dots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots.. \\ (a_{m1}b_{11} + \dots\dots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots\dots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. Açıkca görüleceği üzere çarpımın tanımlı olabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı eşit olmalıdır. Bu şartlar altında çarpım matrisi $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.3

i. Bir $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinde eğer $m=n$ ise bu durumda A matrisine kare matris denir. Bu durumda A matrisindei $a_{11},\ a_{22},..........,a_{nn}$ elemanlarına matrisin köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii. Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve birim matris I_n şeklinde gösterilir.

iii. $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinde aynı numaralı satır ve sütunların yer değiştirilmesi ile elde edilen $A^T=\left[a_{ji}\right]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin transpozu denir. A ve B matrisleri için $(A+B)^T=A^T+B^T$ ve $(A.B)^T=B^T A^T$ eşitlikleri sağlanır.

iv. A kare matrisinde $A^T=A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

Teorem 2.1 A,B ve C matrisleri bir K cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ boyutlu matrisleri ve $k_1,k_2\in K$ skaler sayısı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

i. $(A+B)+C=A+(B+C)$

ii. $A+0=0$

iii. $A+(-A)=0$

iv. $A+B=B+A$

v. $k_1(A+B)=k_1A+k_2A$

vi. $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$

vii. $(k_1k_2)A=k_1(k_2)A$

viii. $1A=A$ ve $0A=0$

Tanım 2.4 $x_1,x_1,.........x_1\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörleri için $\sum a_i x_i=0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1,a_2,.........a_n$ skaler sayıları bulunuyorsa $x_1,x_1,.........x_1$ vektörlerine lineer bağımlıdır, aksi halde lineer bağımsızdır denir.

Tanım 2.5 A matrisi $m \times n$ boyutlu ve $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ sütunlarına sahip olan bir matris olsun. $x' = (x_1, x_1, \ldots\ldots\ldots x_1)$ vektörü için $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots\ldots + x_n a_n$ ifadesi A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonunu gösterir. Bu durumda A matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen bütün vektörlerin kümesine A matrisinin sütun uzayı denir ve $\Re(A)$ ile gösterilir. $\Re(A)$, A matrisinin sütunları tarafından gerilir ve sütun uzayı

$$\Re(A) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{m \times 1} : y = Ax, x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \right\}$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.6. A matrisinin $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n \times 1}$ in alt uzayına A matrisinin satır uzayı denir. A matrisinin satır uzayı $\Re(A')$ olarak gösterilir.

Tanım 2.7 Bir A matrisinin sütun uzayının boyutuna matrisin sütun rankı denir. Bir A matrisinin satır uzayının boyutuna ise matrisin satır rankı denir. Bir A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırların sayısına ise matrisin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. A matrisinin sıfır uzayı

$$N(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n \times 1} : Ax = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.9 A matrisi $m \times n$ boyutlu ve C matrisi, A matrisinin satır indirgenmiş eşelon biçimi olsun. A matrisinin satır uzayı ile C matrisinin satır uzayı aynıdır.

Teorem 2.2 A matrisi $m \times n$ boyutlu matris olsun. A matrisinin satır rankı, sütun rankına eşittir.

Teorem 2.3 Uygun boyutlu A, B ve C matrisleri için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- **i.** $\Re(A : B) = \Re(A) + \Re(B)$,
- **ii.** $\Re(AB) \subseteq \Re(A)$,
- **iii.** $\Re(AA') = \Re(A)$,
- **iv.** $\Re(C) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow C$ matrisi AB biçimindedir.

v. $boy(\Re(A)) = r(A)$,

Eğer $\Re(A) \subseteq \Re(B)$ ve $r(A) \subseteq r(B)$ ise $\Re(A) = \Re(B)$ dir. Özellikle $\Re(I_n) = \mathbb{R}^{n\times 1}$ dir.

vi. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ için $r(A) \le \min\{m, n\}$,

vii. Bir matrisin bazı satır ya da sütunlarının silinmesiyle elde edilen alt matrisin rankı, orijinal matrisin rankını geçemez,

viii. $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ve $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ise, $r(A) + r(B) - k \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$,

ix. $r(A) = r(A') = r(A'A) = r(AA')$,

Eğer $AB = I$ ise, B matrisine A matrisinin sağ tersi denir ve bu ters B^{-R} ile gösterilir. A matrisine ise B matrisinin sol tersi denir ve bu ters A^{-L} ile gösterilir. A matrisinin sağ tersi, A matrisi tam satır ranklı olduğu zaman vardır. Benzer şekilde B matrisinin sol tersi, B matrisi tam sütun ranklı olduğunda vardır. Sağ ters veya sol ters tek olmayabilir. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ üçgensel matris olmak üzere, rank şartları gösterir ki, $m > n$ olduğunda sağ ters olmayabilir ve $m < n$ olduğunda sol ters olmayabilir. Aslında her iki tersin olması için gerek ve yeter şart A matrisinin kare matris ve tam ranklı olmasıdır. Bu durumda matrisin sağ tersi ile sol tersi eşit olur ve bu matrise, nonsingüler A matrisinin tersi denir. A^{-1} ile gösterilir. O halde A matrisinin tersi vardır ve bu ters tektir ancak ve ancak A matrisi nonsingülerdir. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dır. Eğer A ve B matrislerinin her ikisi de nonsingüler ve aynı boyutlu ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

Herhangi bir A matrisi için $ABA = A$ ise, B matrisine A matrisinin genelleştirilmiş inversi denir ve A matrisinin genelleştirilmiş inversi A^{-} ile gösterilir. Eğer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ise, $A^{-} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dir. Her matrisin en az bir genelleştirilmiş tersi vardır. Her simetrik matrisin en az bir simetrik genelleştirilmiş tersi vardır. Genel olarak, A^{-} tek değildir. A^{-} matrisinin tek olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin nonsingüler olmasıdır. Bu durumda $A^{-} = A^{-1}$ dir. Herhangi bir A matrisi için,

i. $ABA = A$

ii. $BAB = B$

iii. $(AB)' = AB$

iv. $(BA)' = BA$

koşullarını sağlayan, B matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi (inversi) denir ve A^{+} ile gösterilir. Bir matrisin Moore-Penrose inversi tektir. Eğer A matrisi tersi alınabilir bir matris ise bu durumda $A^{+} = A^{-1}$ dir.

Teorem 2.4 A_1 ve A_2 tersi olan matrisler ise, bu durumda herhangi bir A_3 matrisi için A_3, A_1A_3 , A_3A_2 ve $A_1A_3A_2$ matrisleri aynı ranka sahiptir.

Tanım 2.10 Eğer $P^2 = P$ olacak şekilde bir P matrisi varsa P matrisine idempotent matris denir.

Teorem 2.5 A, B ve C uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $(A^{+})^{+} = A$

ii. AA^{+} ve $A^{+}A$ idempotenttir.

iii. $r(A) = r(A^{+}) = r(AA^{+}) = r(A^{+}A)$,

iv. $A'AA^{+} = A' = A^{+}AA'$ ve $A'(A^{+})'A^{+} = A^{+} = A^{+}(A^{+})'A'$,

v. $A = 0 \Leftrightarrow A^{+} = 0,\ AB = 0 \Leftrightarrow B^{+}A^{+} = 0$ ve $A^{+}B = 0 \Leftrightarrow A'B = 0,$

vi. $r(A) = r(A^{-}A) = r(AA^{-}) \leq r(A^{-}),$

vii. $BA^{-}C$, A matrisinin genelleştirilmiş tersinin seçimine göre değişmezdir ancak ve ancak $\Re(B') \subseteq \Re(A')$ ve $\Re(C) \subseteq \Re(A)$ dır.

viii. $A^{-}A$ ve AA^{-} matrislerinin her biri idempotent matrislerdir. A matrisi simetrik ve idempotent matris ise $I - A$ matrisi de simetrik ve idempotent matristir.

Tanım 2.11. $A = (a_{ij})$ $n \times n$ boyutlu bir kare matris olmak üzere A matrisinin determinantı $|A|$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. $n=1$ için $|A| = a_{11}$,

ii. $n=2$ için $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

iii. $n>2$ için $|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \text{..........} + (-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i} a_{1i}|A_{1i}|$

dir, burada A_{1i}, $(1,i)$. minördür.

Teorem 2.6. A matrisi köşegen elemanları $a_{11},.......,a_{nn}$ olan $n\times n$ boyutlu matris olmak üzere, eğer A matrisi üst üçgensel, alt üçgensel veya köşegen matris ise bu takdirde $|A| = a_{11}a_{12}........a_{nn}$ dir.

Sonuç 2.1. I birim matris olmak üzere $|I| = 1$ dir.

Teorem 2.7. A ve B aynı mertebeden kare matrisler olmak üzere $|AB| = |A||B|$ dir.

Sonuç 2.2. A matrisi tersinir bir matris olmak üzere $|A| = \dfrac{1}{|A^{-1}|}$ dir.

Tanım 2.12. $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektörü ve simetrik $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi için, $Q(y) = y'Ay = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij}$ ifadesine, y_i elemanlarının bir kuadratik formu ve A matrisine de bu kuadratik formun matrisi denir. $y'Ay$ kuadratik formu, simetrik bir A matrisi tarafından karakterize edilir ve bu matrise kuadratik formun matrisi denir.

Böyle bir matris için aşağıdakiler söylenebilir.

i. Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay > 0$ ise A pozitif tanımlıdır.

ii. Eğer $\forall y \neq 0$ için $y'Ay < 0$ ise A negatif tanımlıdır.

iii. Eğer $\forall y$ için $y'Ay \geq 0$ ise A nonnegatif tanımlıdır.

Teorem 2.8. A nonnegatif tanımlı ve r ranklı bir matristir ancak ve ancak $A = RR'$ olacak şekilde r ranklı bir R matrisi vardır.

Şimdi de blok ayrışımlarda kullanılacak olan lineer model ve bu modelin alt modeli ile tahmin edilebilme kavramlarını kısaca açıklayacağız.

Genel olarak bir lineer model $y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$ biçiminde tanımlanır. Bu modelin bir diğer gösterimi $M = \{y, X\beta, V\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, V\}$ biçimindedir, burada $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rastgele değişkenler vektörü, $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ bilinenler matrisi, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ bilinmeyen parametrelerin vektörü ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ise gözlenebilir olmayan hataların vektörüdür.

β parametre vektörünü tahmin etmenin değişik metotları vardır. Bu metotlardan en çok kullanılanı en küçük kareler tahmini metodudur. Bu model $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ olmak üzere, $\sum \varepsilon_i^2$ ifadesinin β parametresine göre minimumlaştırılması işlemlerini içerir. $E(\varepsilon) = 0$ ve $D(\varepsilon) = \sigma^2 I$ olmak üzere, bu işlemler sonucunda elde edilen $X'X\beta = X'Y$ denklemine normal denklem denir. X tam ranklı kabul edildiğinde sistemin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm $\tilde{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$ çözümüdür. Bu durumda $\tilde{\beta}$ tahminine, alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE) denir. X matrisinin tam ranklı olduğu kabulü altında bilinen bir V pozitif tanımlı matrisi için $E(\varepsilon) = 0$ ve $D(\varepsilon) = \sigma^2 V$ olarak alındığında elde edilen normal denklemlere karşılık gelen $X'V^{-1}X\beta = X'V^{-1}y$ denkleminin tek çözümü $\tilde{\beta} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1} X'V^{-1}y$ tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler edicisi olarak bilinir.

Eğer $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ için $E(Gy) = X\beta$ ise, Gy tahmin edicisi $X\beta$ nın yansız tahmin edicisidir. Bu lineer yansız tahmin edici diğer lineer yansız tüm tahmin ediciler arasında en küçük kovaryans matrise sahip ise en iyi lineer yansız tahmin edici (BLUE) olarak tanımlanır. Yani $E(\beta y) = X\beta$ olacak şekilde her βy vektörü için $\operatorname{cov}(Gy) \le \operatorname{cov}(\beta y)$ dir.

3. PARÇALI LİNEER MODELLERDE AĞIRLIKLI EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİLERİN BLOK AYRIŞIMLARI

3.1 Modelin Oluşumu

$\mathbb{R}^{m\times n}$ kümesi, $m\times n$ tipindeki tüm reel matrislerin kümesini göstersin. $A', r(A)$ ve $\Re(A)$ sembolleri ise sırasıyla bir A matrisinin transpozunu, rankını, ve ranj uzayını (sütun uzayını) göstersin. Eğer $A'VB=0$ ise $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ve $B\in\mathbb{R}^{m\times p}$ matris çiftlerine non-negatif tanımlı, $V\in\mathbb{R}^{m\times m}$ ($V-$ortogonal) matrisine göre ortogonaldirler denir. Bir $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matrisinin Moore-Penrose inversi

i. $AXA=A$

ii. $XAX=X$

iii. $(AX)'=AX$

iv. $(XA)'=XA$

şeklinde verilen dört Penrose denklemlerinin tek çözümü olan $X\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi olarak tanımlanır ve $X=A^{+}$ ile gösterilir. Öte yandan eğer $X\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi sadece $AXA=A$ şartını sağlıyorsa A matrisinin bir $g-$inversi denir ve A^{-} ile gösterilir. Eğer $X\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matrisi sadece $XAX=X$ şartını sağlıyorsa bu durumda X matrisine A matrisinin bir dış inversi adı verilir.

P_A, E_A, F_A matrisleri

i. $P_A=AA^{+}$

ii. $E_A=I-P_A=I-AA^{+}$

iii. $F_A=I-P_{A'}=I-A^{+}A$

ortoganel izdüşümlerini göstersin. Kabul edelim ki

$$y=X_1\beta_1+X_2\beta_2+\varepsilon\,,\ E(\varepsilon)=0\,,\ Cov(\varepsilon)=\sigma^2\,\Sigma \tag{3.1}$$

parçalı lineer modeli verilmiş olsun, burada $X_1\in\mathbb{R}^{n\times p_1}$ ve $X_2\in\mathbb{R}^{n\times p_2}$ matrisleri $p_1+p_2=p$ keyfi ranklı iki matris, $y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ ölçülebilir keyfi bir rasgele vektör,

$\beta_1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times 1}$ ve $\beta_2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times 1}$ tahmin edilecek olan iki bilinmeyen parametreler vektörü, $\sum \in R^{n \times n}$ keyfi ranklı non-negatif tanımlı bir matris ve σ^2 ise bir bilinmeyen pozitif parametredir. Eğer $\sum$ singüler bir matris ise (3.1) ile verilen denkleme bir singüler lineer model de denir. (3.1) denklemindeki model üçlü olarak sıklıkla

$$M = \{y, X\beta, \sigma^2 \Sigma\} = \{y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2, \sigma^2 \Sigma\} \tag{3.2}$$

olarak yazılır, burada $X = [X_1, X_2]$ ve $\beta = [\beta_1', \beta_2']$ dir.

3.2 Parçalı Lineer Model Altında Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmini

Bir parçalı model ile ilgili araştırmalarda özel bir ilgi parçalı model (tam model) ile bu modelin değişik küçük ve indirgenmiş modelleri arasındaki ilişkinin araştırılmasıdır. Bu konu literatürde geniş bir şekilde farklı boyutlarda araştırılmıştır. Bunlardan bazıları (Bhimasankaram ve Saharay, 1997); (Chu ve ark., 2004); (Groß ve Puntanen, 2000); (Nurhonen ve Puntanen, 1992); (Werner ve Yapar, 1995, 1996); ve (Zhang ve ark., 2004) şeklindedir. (3.2) denkleminde verilen tam model için iki küçük lineer model

$$\mathrm{M}_1 = \{y_1, X_1\beta_1, \sigma^2\Sigma\} \text{ ve } \mathrm{M}_2 = \{y_1, X_2\beta_2, \sigma^2\Sigma\} \tag{3.3}$$

ile verilir. X matrisi tam sütun ranka sahip ise bu takdirde (3.2) modeli altında $X\beta$ matrisinin alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (OLSE)

$$\mathrm{OLSE}_M(\mathrm{X}\beta) = \mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'y$$

şeklinde yazılabilir. Eğer X matrisindeki X_1 ve X_2 alt matrisleri orthogonal ise yani $X_1'X_2 = 0$ ise bu takdirde $X(X'X)^{-1}X'$ ifadesi

$$X(X'X)^{-1}X' = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' + X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2' \tag{3.4}$$

toplamı şeklinde yazılabilir. Bunun sonucu olarak da $\mathrm{OLSE}_M(X\beta)$

$$\begin{aligned}\mathrm{OLSE}_M(X\beta) &= X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y + X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'y \\ &= \mathrm{OLSE}_{M_1}(X_1\beta_1) + \mathrm{OLSE}_{M_2}(X_2\beta_2)\end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak ayrıştırılabilir. Bu eşitlik $X_1'X_2 = 0$ olmak şartıyla M modeli altında $\mathrm{X}\beta$ matrisinin OLSE'si (3.3) denklemimindeki iki küçük model altındaki iki OLSE'nin toplamı olarak yazılabileceğini ifade etmektedir. Bu temel özellik bizi M modeli altındaki tahmin edicinin ayrışımının (3.3) deki iki küçük model altındaki bazı diğer tahminlerin toplamı olarak yazılabileceğini düşünmeye sevk etmektedir. Bu kısmın temel amacı (3.2) modeli altında $(\mathrm{X}\beta)$ matrisinin ağırlaştırılmış en küçük kareler tahminin (3.5) deki eşitliğe genişletilip genişletilemeyeceğinin araştırılmasıdır. $V \in R^{n\times n}$ bir non–negatif tanımlı bir matris olsun. Yani V matrisi, bazı Z matrisleri için $V = ZZ'$ şeklinde yazılabilsin. V ağırlık matrisi tarafından indirgenmiş bir $x \in R^{n\times 1}$ vektörünün semi normu $\|x\|_V = \left(x'Vx\right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. (3.2) denklemindeki M modeli altında β nın ağırlaştırılmış en küçük tahmin edicisi WLSE

$$\overline{\beta} = \arg\min \|y - X\|_V^2 \tag{3.6}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (3.6) daki denkleme karşılık gelen normal matris denklemi

$$X'VX\beta = X'Vy$$

şeklindedir. Bu denklem daima tutarlıdır. Bu denklemin çözümü aşağıda iyi bilinen sonucu verir.

Lemma 3.1 M modeli altında β'nın ağırlaştırılmış en küçük kareler tahmin edicisi WLSE' nin genel ifadesi, $u \in \mathbb{R}^{p\times n}$ keyfi bir matris olmak üzere

$$\tilde{\beta} = \left(X'VX\right)^{+} X'Vy + \left[I_p - (VX)^{+}(VX)\right]v = \left(X'VX\right)^{+} X'Vy + F_{VX}u \tag{3.7}$$

şeklinde verilir.

$y \neq 0$ için (3.7) ifadesinde $u \in \mathbb{R}^{p\times n}$ keyfi bir matris olmak üzere $u = Uy$ olsun. Bu takdirde (3.7) ifadesi $\tilde{\beta} = \left[\left(\mathrm{X'VX}\right)^{+} X'V + F_{VX}U\right]y$ homojen formunda yeniden yazılabilir. Bunun sonucu olarak da M modeli altında $\left(\mathrm{X}\beta\right)$ nın ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi

$$\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)=X\tilde{\beta}=\left[X\left(X'VX\right)^{+}X'V+XF_{VX}U\right]y \tag{3.8}$$

ile tanımlanır. ayrıca $P_{X:V}$ ve $P_{X:V}$

$$\begin{aligned} P_{X;V} &= X\left(X'VX\right)^{+}X'V, \\ P_{X:V} &= X\left(X'VX\right)^{+}X'V+XF_{VX}U=P_{X;V}+XF_{VX}U \end{aligned} \tag{3.9}$$

ile gösterilmek üzere bu ifadelerin her ikisine $\|.\|_V$ semi normuna göre X matrisinin $\Re\left(X\right)$ ranjına (sütun uzayına) göre izdüşümlerdir denilebilir (bkz. Rao ve Mitra, (1971a. b); Mitra ve Rao, 1974). Bundan sonra M modeli altında $X\beta$ nın ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi WLSE nin genel ifadesi olarak (3.8) denklemindeki homojen tahmin edici alınabilir. Ayrıca bütün $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$ ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicilerinin kümesi de $\left\{\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)\right\}$ ile gösterilecektir. (3.7) ve (3.8) denklemlerinden kolaylıkla görülebilir ki verilen bir ağırlaştırılmış V matrisi için $\tilde{\beta}$ ve $X\tilde{\beta}$ tahmin edicilerinin M modeli altında sırasıyla β ve $X\beta$ için yansız tahmin ediciler olması gerekmez. Bununla beraber herhangi ağırlaştırılmış V matrisi için öyle bir U matrisi bulunabilir ki (3.8) de verilen $\mathrm{WLSE}_{\mathrm{M}}\left(X\beta\right)$ tahmin edicisinin $X\beta$ için yansız tahmin edici olduğu kolayca gösterilebilmektedir.

(3.8) denklemine parelel olarak (3.3) de verilen iki küçük model altında $\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\left(X_2\beta_2\right)$' nin ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri sırasıyla

$$\mathrm{WLSE}_{\mathrm{M}_1}\left(X_1\beta_1\right)=P_{X_1:v}y \text{ ve } WLSE_{\mathrm{M}_2}\left(X_2\beta_2\right)=P_{X_2:v}y, \tag{3.10}$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$P_{X_i:V}=P_{X_i;V}+X_iF_{VX_i}U_i=X_i\left(X_i'VX_i\right)^{+}X_i'V+X_iF_{VX_i}U_i,\ i=1,2,$$

olup $U_1\in\mathbb{R}^{p_1\times n}$ ve $U_2\in\mathbb{R}^{p_2\times n}$ keyfi matrislerdir. (3.8) ve (3.10) denklemlerinde gözüken $U,\ U_1$ ve U_2 keyfi matrisleri mevcut olduğundan $U,\ U_1$ ve U_2 matrislerini WLSE'ler minimum kovaryans, minimum norm ve yansız tahminlik gibi bazı öncelikli özellikleri sağlayacak şekilde seçmek mümkündür. İstatistikle ilgili uygulamalarda ağırlaştırılmış V matrisi çoğunlukla $V=\Sigma^{-}$ veya $V=\left(XTX'+\Sigma\right)^{-}$

şeklinde alınmaktadır. Buradaki T matrisi $r\left(XTX'+\Sigma\right)=r\left[X,\Sigma\right]$ olacak şekilde üzere non–negatif tanımlı bir matristir. Özel olarak Σ pozitif tanımlı ve X tam sütun ranklı ise bu takdirde

$$\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)=X\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}y \tag{3.11}$$

ifadesi M modeli altında $X\beta$ parametresinin tek en iyi lineer yansız tahmin edicisi, yani BLUE'sudur. Burada öncelikle (3.8) ve (3.10) da verilen WLSE'lerin tek türlü olması gerekmediğini belirtelim. Öte yandan M, M_1 ve M_2 modelleri altındaki WLSE'ler için aşağıdaki üç durum söz konusu olacaktır:

i. Bazı $\mathrm{WLSE}(X\beta)$, $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ için

$$\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)=\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)+\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$$

eşitliği sağlanır.

ii. $\left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)+\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\}\subseteq\left\{\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)\right\}$;

iii. $\left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)+\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\}=\left\{\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)\right\}$.

Bir sonraki kısımda yukarıda verilen üç iddianın sağlanması için bir dizi gerek ve yeter şartlar ortaya konulacaktır. Bunların sonuçları olarak (3.11) denkleminde verilen BLUE nun (3.10) denkleminde M_1 ve M_2 modülleri altında verieln iki WLSE'nin toplamına eşit olması için bir dizi gerek ve yeter şart verilecektir.

(3.8) ve (3.10) denklemlerindeki WLSE'ler keyfi matrisler ve Moore-Penrose tersleri içeren matris kalemleri olduğundan WLSE'ler ile ilgili farklı matris işlemlerini basitleştirmek için parçalı matrisler ile ilgili aşağıdaki rank formüllerini kullanmaya ihtiyaç vardır (Marsaglia ve Styan, 1974).

Lemma 3.2. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times k}$ ve $C\in\mathbb{R}^{1\times n}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$r\left[A,B\right]=r\left(A\right)+r\left(E_AB\right)=r\left(B\right)+\left(E_BA\right) \tag{3.12}$$

$$r\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=r\left(A\right)+r\left(CF_A\right)=r\left(C\right)+\left(AF_C\right) \tag{3.13}$$

eşitlikleri vardır. Diğer taraftan

$$r\left(B - AA^{+}B\right) \geq r(B) + r\left(AA^{+}B\right) = r(B) - r(A'B)$$

olduğu kolaylıkala gösterilebilir. Bu nedenle (1.12) denkleminden

$$r[A,B] \geq r(A) + r(B) - r(A'B) \tag{3.14}$$

eşitsizliği yazılabilir. Üstelik (1.12) denklemi yardımıyla

$$\Re(B) \subseteq \Re(A) \Leftrightarrow AA^{+}B = B \Leftrightarrow r[A,B] = r(A), \tag{3.15}$$

$$\Re(A_1) = \Re(A_2) \text{ ve } \Re(B_1) = \Re(B_2) \Rightarrow r[A_1, B_1] = r[A_2, B_2]. \tag{3.16}$$

ifadeleri de yazılabilir.

Lemma 3.3. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ olsun ve $Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrisleri de A matrisinin üç dış tersi, yani $Z_iAZ_i = Z_i, i = 1,2,3$, olsun. Ayrıca $\Re(Z_i) \subseteq \Re(Z_1)$ ve $\Re(Z_i') \subseteq \Re(Z_1')$ içermelerinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde

$$r(Z_1 - Z_2 - Z_3) = r(Z_1) - r(Z_2) - r(Z_3) + r(Z_2AZ_3) + r(Z_3AZ_2) \tag{3.17}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: elementer blok matris işlemleri altında bir matrisin rankı değişmediğini daha önce belirtmiştik. Bu nedenle kolayca elementer blok matris işlemleri uygulanarak

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_1 - Z_2 - Z_3 \end{bmatrix}$$

$$= r(Z_1 - Z_2 - Z_3) + r(Z_1) + r(Z_2) + r(Z_3) \tag{3.17a}$$

eşitliğinin yazılabileceği kolayca gösterilebilir. ifadesi elde edilir. Öte yandan Lemma 3. 3. de verilen şartlar altında elementer blok matris işlemleri ile

$$r\begin{bmatrix} -Z_1 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & Z_1AZ_2 & Z_1AZ_3 & Z_1 \\ 0 & Z_2 & 0 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_3 & Z_3 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & Z_1 \\ 0 & 0 & -Z_2AZ_3 & 0 \\ 0 & -Z_3AZ_2 & 0 & 0 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2r\left(Z_1\right) + r\left(Z_2AZ_3\right) + r\left(Z_3AZ_2\right) \tag{3.17b}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan (3.17a) ve (3.17b) denklemleri birleştirilirse (3.17) deki ifade elde edilir.

Lemma 3.4. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ve $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\max_{Z\in R^{k\times 1}} r\left(A - BZC\right) = \min\left\{ r\left[A, B\right], r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \right\}, \tag{3.18}$$

$$\min_{Z\in R^{k\times 1}} r\left(A - BZC\right) = r\left[A, B\right] + r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

eşitlikleri sağlanır. Özel olarak

$$BZC = A \text{ tutarlıdır} \Leftrightarrow r\left[A, B\right] = r\left(B\right) \text{ ve } r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(C) \tag{3.20}$$

ifadesi gerçeklenir.

3.3. Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edicilerilerin Toplam Ayrışımları

Bir önceki kısımda tanımlanan WLSE'lerin toplam ayrışımlarını karakterize etmek için (3.2) denkleminde M modeli için verilenlerin doğru olduğunu varsayacağız. Bu durumda (3.3) denkleminde M_1 ve M_2 iki küçük model gerçekte M modelinin yanlış tanımlanmış iki modelidir. Kolayca görülebilir ki eğer (3.2) denklemindeki M modeli doğruysa bu takdirde

$$y \in \Re\left[\mathrm{X}, \Sigma\right] \tag{3.21}$$

ifadesi bir olasılıkla gerçeklenir [Rao (1971,1973)]. Sonuç olarak (3.21) ifadesinin (3.2) denklemindeki M modeli altında tahminlerin farklı özellikleri araştırıldığı zaman sağlanması gerekmektedir. Eğer bir lineer model için (3.21) denklemi sağlanırsa bu lineer modelin tutarlı olduğu söylenir. Bu durumda eğer

$$\left(L_1 - L_2\right)\left[X, \Sigma\right] = 0 \tag{3.22}$$

eşitliği sağlanırsa, M tutarlı modeli altında $L_1 y$ ve $L_2 y$ lineer tahmin çiftlerinin bir olasılıkla eşit olduğu söylenir. Eğer (3.2) denlemindeki M modeli doğruysa o aynı zamanda tutarlı da olacaktır. Fakat bu durum bir modelin tutarlı olduğunda onun aynı zamanda doğru olduğunu göstermez. Gerçekten eğer Σ pozitif tanımlı ise (3.2) deki doğru olan M modeli olduğu gibi (3.3) denlemindeki M_1 ve M_2 iki küçük modelleri de daima tutarlıdır. Öte yandan eğer $r[X,\Sigma]<n$ ise (3.2) deklemindeki M modelinin tutarlığı (3.3) denklemindeki iki modelin tutarlılığını gerektirmez. M_1 ve M_2 modelleri M modelinin iki yanlış tanımlı modeli olduğundan $y \in \Re[X_1,\Sigma]$ ve $y \in \Re[X_2,\Sigma]$ olduğunu kabul edemeyiz. Bunun yerine $\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}(X_2\beta_2)$ tahmin edicilerindeki y vektörünün sadece (3.21) denklemini sağladığı kabul edilebilir.

$\mathrm{WLSE}_M(X\beta)$ nın toplam ayrışımları ile ilgili iki temel sonuç aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1. $\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)$, $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_M(X\beta)$ ifadeleri (3.8) ve (3.10) denklemlerindeki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir: sağlanır:

i. Öyle $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$, $\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ tahmin edicileri mevcuttur ki

$$\mathrm{WLSE}_M(X\beta)=\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)+\mathrm{WLSE}_{M_2}(X_2\beta_2) \tag{3.23}$$

eşitliği bir olasılıkla sağlanır.

ii. $\left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1,\beta_1\right)+\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2,\beta_2\right)\right\}\subseteq\left\{\mathrm{WLSE}_M\left(\mathrm{X},\beta\right)\right\}$ küme içermesi bir olasılıkla sağlanır.

iii. $VP_{X;V}=VP_{X_1;V}+VP_{X_2;V}$ dir.

iv. $X_1' V \mathrm{X}_2=0$ dir, yani X_1 ve X_2 matrisleri $V-$ortogonaldir.

İspat: Kolayca görülmektedir ki

$$\Re\left[X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right]\subseteq\Re\left(XF_{VX}\right), \tag{3.24}$$

$$r\left[VX\right] \geq r\left(VX_1\right) + r\left(VX_2\right) - r\left(X_1'VX_2\right) \tag{3.25}$$

ifadeleri gerçeklenir. Bu durumda (3.13) denklemini (3.24) denklemindeki matrislere uygulayarak elemanter blok matris işlemleri kullanılırsa

$$r\left(XF_{VX}\right) = r\begin{bmatrix} X \\ VX \end{bmatrix} - r\left(VX\right) = r\left(X\right) - r\left(VX\right)$$

ve

$$\begin{aligned} r\left[XF_{VX}, X_1F_{VX_1}, X_2F_V X_2\right] &= r\begin{bmatrix} X & X_1 & X_2 \\ VX & 0 & 0 \\ 0 & VX_1 & 0 \\ 0 & 0 & VX_2 \end{bmatrix} - r\left[VX\right] - r\left[VX_1\right] - r\left[VX_2\right] \\ &= r\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & -VX_1 & -VX_2 \\ 0 & VX_1 & 0 \\ 0 & 0 & VX_2 \end{bmatrix} - r\left(VX\right) - r\left(VX_1\right) - r\left(VX_2\right) \\ &= r\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & VX_1 & 0 \\ 0 & 0 & VX_2 \end{bmatrix} - r\left(VX\right) - r\left(VX_1\right) - r\left(VX_2\right) \\ &= r\left(X\right) - r\left(VX\right) \end{aligned}$$

rank eşitlikleri yazılabilir. Bu nedenle

$$r\left[XF_{VX}, X_1F_{VX_1}, X_2F_V X_2\right] = r\left(XF_{VX}\right) = r\left(X\right) - r\left(VX\right) \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilir ki bu eşitlik (3.15) denklemi dikkate alınırsa (3.24) denkleminin sağlandığını gösterir. Öte yandan eğer (3.14) denklemi VX matrisine uygulanırsa (3.24) ifadesi de dikkate alınarak

$$\begin{aligned} r\left(VX\right) = r\left(V^{1/2}X\right) &= r\left[V^{1/2}X_1, V^{1/2}X_2\right] \\ &\geq r\left(V^{1/2}X_1\right) + r\left(V^{1/2}X_2\right) - r\left(X_1'VX_2\right) \\ &= r\left(VX_1\right) + r\left(VX_2\right) - r\left(X_1'VX_2\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $V^{1/2}$ non-negatif tanımlı V matrisinin kareköküdür.

(3.6) ve (3.10) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
&\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)-\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta\right)_1-\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\\
&\quad=P_{X:V}y-P_{X_1:V}y-P_{X_2:\mathrm{V}}y\\
&\quad=\left(GV+XF_{VX}U-X_1F_{VX_1}U_1-X_2F_{VX_2}U_2\right)y
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $G=X\left(X'VX\right)^{+}X'-X_1\left(X_1'VX_1\right)^{+}X_1'-X_2\left(X_2'VX_2\right)^{+}X_2'$ dir. Sonuç olarak (3.22) denkleminden görebilir ki (3.23) durumunun bir olasılıkla gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart her $y\in\Re\left[X,\Sigma\right]$ için

$$\left(GV+XF_{VX}U-X_1F_{VX_1}U_1-X_2F_{VX_2}U_2\right)y=0.$$

olacak şekilde U,U_1 ve U_2 matrisleri mevcuttur, yani $S\in[X,\Sigma]$ olmak üzere

$$\left(GV+XF_{VX}U-X_1F_{VX_1}U_1-X_2F_{VX_2}U_2\right)S=0 \tag{3.27}$$

olacak şekilde U,U_1 ve U_2 matrisleri mevcuttur. Öte yandan (3.27) denklemi

$$AZS=-GVS \tag{3.28}$$

olarak yeniden yazılabilir, burada $A=\left[XF_{VX},X_1F_{VX_1},X_2F_{VX_2}\right]$ ve $Z=\left[U',-U_1',-U_2'\right]$ dir. (3.20) denkleminden kolayca görülebilir ki (3.28) denkleminin Z için çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$r\left[GVS,A\right]=r\left(A\right)\ \text{ve}\ r\begin{bmatrix}GVS\\S\end{bmatrix}=r\left(S\right) \tag{3.29}$$

rank eşitliklerinin sağlanmasıdır. (3.29) daki ikinci eşitlik doğal olarak sağlanır. sağlanır. Öte yandan $\Re\left(G\right)=\Re\left(G'\right)\subseteq\Re\left(S\right)$yani $SS^{+}G=G$ olduğu açık bir şekilde görülmektedir. Bu nedenle $\Re\left(GVS\right)\supseteq\Re\left(GVSS^{+}G\right)=\Re\left(GVG\right)=\Re\left(GV\right)$ ilişkisi yazılabilir ki bu da açık bir şekilde

$$\Re\left(GVS\right))=\Re\left(GV\right) \tag{3.30}$$

eşitliğini ifade eder. Öte yandan (3.24) ve (3.30) ifadeleri dikkate alınırsa (3.29) ifadesindeki birinci eşitliğin

$$r[GV, XF_{VX}] = r(XF_{VX}) = r(X) - r(VX) \tag{3.31}$$

eşitliğine denk olduğu (3.16) ve (3.26) denlemlerinden kolayca görülebilir. Eğer (3.13) ifadesi (3.31) denklemininin sol tarafına uygulanır ve elemanter blok matris işlemleri yardımıyla sadeleştirme yapılırsa

$$\begin{aligned} r[GV, XF_{VX}] &= r\begin{bmatrix} GV & X \\ 0 & VX \end{bmatrix} - r(VX) = r\begin{bmatrix} 0 & X \\ -VGV & 0 \end{bmatrix} - r(VX) \\ &= r(VGV) + r(X) - r(VX) \end{aligned} \tag{3.32}$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla (3.31) ifadesi $VGV = 0$ denklemine denktir. Kabul edelim ki

$$Z = VX\left(X'VX\right)^{+} X'V \ ,$$

$$Z_1 = VX_1\left(X_1'VX_1\right)^{+} X_1'V$$

ve

$$Z_2 = VX_2\left(X_2'VX_2\right)^{+} X_2'V$$

olsun. Bu takdirde non-negatif tanımlı Z, Z_1 ve Z_2 matrislerinin V^{+} matrisinin dış inversleri olduğu

$$\begin{aligned} &\Re(Z) = \Re(VX), \ \ \Re(Z_i) = \Re(VX_i), \\ &\Re(VX_i) \subseteq \Re(VX), \ \ Z_i X_i = VX_i, \ i = 1,2 \end{aligned} \tag{3.33}$$

ilişkilerinin sağlandığını görmek kolaydır. Bu şartlar altında (3.17) ifadesi VGV matrisine uygulanarak

$$\begin{aligned} r(VGV) &= r(Z - Z_1 - Z_2) \\ &= r(Z) - r(Z) - r(Z_2) + 2r\left(Z_1 V^{+} Z_2\right) \\ &= r(VX) - r(VX_1) - r(VX_2) + 2r\left(X_1'VX_2\right) \\ &= \left[r(VX) + r\left(X_1'VX_2\right) - r(VX_1) - r(VX_2)\right] + r\left(X_1'VX_2\right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (3.25) ve (3.34) denklemlerinden $VGV = 0$ ve $X_1'VX_2' = 0$ eşitliklerinin denkliği kolayca görülebilir.

Öte yandan (3.27) denkleminden gösterilebilir ki Teorem 3.1.(b) deki küme içerme bağıntısının bir olasılıkla gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart $S = [X, \Sigma]$ olmak üzere herhangi U_1 ve U_2 için

$$\min_U r\left(GVS + XF_{VX}US - X_1F_{VX_1}U_1S - X_2F_{VX_2}U_2S\right) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. (3.23) ve (3.30) eşitlikleri altında (3.19) ifadesi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&\min_U r\left(GVS + XF_{VX}US - X_1F_{VX_1}U_1S - X_2F_{VX_2}U_2S\right) \\
&\quad = \min_U r\left[GVS - X_1F_{VX_1}U_1S - X_2F_{VX_2}U_2S, XF_{VX}\right] - r\left(XF_{VX}\right) \\
&\quad = \min_U r\left[GVS - X_1F_{VX_1}U_1S - X_2F_{VX_2}U_2S, XF_{VX}\right] - r\left(XF_{VX}\right) \\
&\quad = r\left[GV, XF_{VX}\right] - r\left(XF_{VX}\right) \\
&\quad = 2r\left(X_1'VX_2\right) + r\left(VX\right) - r\left(VX_1\right) - r\left(VX_2\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece Teorem 3.1. deki i. ve iv. şıklarının denk olduğu görülür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2. $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$, $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ ifadeleri (3.8) ve (3.10) denklemlerindeki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

i. $\left\{\mathrm{WLSE}_M\left(\mathrm{X}\beta\right)\right\} \subseteq \left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right) + \mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\}$ içerme bağıntısı bir olasılıkla sağlanır.

ii. $r\left(X\right) + 2r\left(X_1'VX_2\right) = r\left(N\right)$ eşitliği sağlanır, burada $N = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ VX_1 & 0 \\ 0 & VX_2 \end{pmatrix}$ dir.

İspat: (3.27) den kolayca görülebilir ki teoremin i. şıkkındaki içerme bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\max_U \min_{U_1,U_2} r\left(GVS + XF_{VX}US - X_1F_{VX_1}U_1S - X_2F_{VX_2}U_2S\right) = 0. \tag{3.35}$$

olacak şekilde U, U_1 ve U_2 matrislerinin mevcut olmasıdır. Öte yandan (3.19) denkleminden

$$\min_{U_1,U_2} r\left(GVS + XF_{VX}US - X_1F_{VX_1}U_1S - X_2F_{VX_2}U_2S\right)$$

$$= \min_{U_1,U_2} r\left(\left[GVS + XF_{VX}US - [XF_{VX}, X_1F_{VX_1}\right]\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}S\right) \tag{3.36}$$

$$= r\left[GVS + XF_{VX}US, X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right] - r\left[X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right]$$

elde edilir. Ayrıca (3.18), (3.24) ve (3.30) denklemlerinden

$$\max_{U} r\left[GVS + XF_{VX}US, X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right]$$

$$= \max_{U} r\left[GVS, X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right] + XF_{VX}U\left[S,0,0\right]$$

$$= \min\left\{r\left[\mathrm{GVS}, \mathrm{X}_1\mathrm{F}_{VX_1}, \mathrm{X}_2\mathrm{F}_{VX_2}, \mathrm{XF}_{VX}\right], \mathrm{r}\left(\mathrm{S}\right) + \mathrm{r}\left[\mathrm{X}_1\mathrm{F}_{VX_1}, \mathrm{X}_2\mathrm{F}_{VX_2}\right]\right\} \tag{3.37}$$

$$= \min\left\{r\left[GV, XF_{VX}\right], r\left(S\right) + r\left[X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right]\right\}$$

ve (3.13) denkleminden ise

$$r\left[X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right] = r\left(N\right) - r\left(VX_1\right) - r\left(VX_2\right) \tag{3.38}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan da (3.16) ve (3.17) denklemlerinin birleşimyle

$$\max_{U} \min_{U_1,U_2} r\left(GVS + XF_{VX}US - X_1F_{VX_1}U_1S - X_2F_{VX_2}U_2S\right)$$

$$= \min\left\{r\left[GV, XF_{VX}\right] - r\left[X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right], r\left(S\right)\right\}$$

$$= r\left[GV, XF_{VX}\right] - r\left[X_1F_{VX_1}, X_2F_{VX_2}\right]$$

$$= 2r\left(X_1'VX_2F_{VX_2}\right) + r\left(X\right) - r\left(N\right)$$

olduğu elde edilir. Böylece (3.35) denkleminin $2r\left(X_1'VX_2\right) + r\left(X\right) = r\left(N\right)$ ifadesine denk olduğu gösterimiş olur, ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1. ve Teorem 3.2. ifadelerinin birleştirilmesiyle aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.3. $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$, $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ ifadeleri (3.8) ve (3.10) denklemlerindeki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $\left\{\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)\right\} = \left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right) + \mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\}$ küme eşitliği bir olasılıkla sağlanır.

ii. $X_1'VX_2 = 0$ ve $\Re\begin{bmatrix} X_1'\mathrm{V} & 0 \\ 0 & X_2'V \end{bmatrix} \subseteq \Re\begin{bmatrix} X' \\ X_2' \end{bmatrix}$ dir.

$X_1'VX_2 = 0$ ifadesi $X_1'X_2 = 0$ ortogonal eşitliğinin bir genellemesi iken Teorem 3.1 in *i.*, *ii.* ve *iii.* şıklarıdaki ifadeler (3.4) ve (3.5) denklemlerinin genellemleri olarak düşünülebilir. Önceki teoremlerde belirtilen şartlar altında toplam ayrışımlar, $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$' nin istatistiksel özelliklerini elde etmek ve $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$' nin hesaplamalarını sadeleştirmek için kullanılabilmektedir.

(3.2) denkleminde ifade edilen M modeli bir genel lineer model ve Σ matrisi (3.23) denkleminde elde edildiğinden, Teorem 3.1., Teorem 3.2. ve Teorem 3.3. de belirtilen $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$ nın toplam ayrışımı için gerek ve yeter şartların *V* ağırlık matrisi ve X model matrisinden ibaret olması oldukça ilginçtir. (3.24) deki eşitliğin $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ tahmin edicilerinin ilişkisiz olduklarını göstermeyeceğini belirtelim. Gerçekten (3.10) denkleminden kolayca söylenebilir ki $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(\mathrm{X}_2\,\beta_2\right)$ arasındaki korelasyon matrisi

$$Cov\left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right), \mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\} = \sigma^2 P_{X_1:V}\,\Sigma P'_{X_2:V} \tag{3.39}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade $P_{X_1:V}$ ve $P_{X_2:V}$ içinde U_1 ve U_2 keyfi matrislerine göre bir kuadratik formdur. Ayrıca $\sigma^2\Sigma$ kovaryans matrisi (3.39) denkleminden de bulunmaktadır ve bu nedenle (3.39) denkleminin sıfır olması için gerek ve yeter şartlar vermek zor bir problemdir.

$\mathrm{WLSE}_M\left(\mathrm{X}\beta\right)$ tahmininin toplam ayrışımı tek olduğunda (3.8) ve (3.10) denklemlerindeki tahmin edicilerin de tekliği ile ilgili olarak aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 3.4. $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$, $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ tahmin edicileri (3.8) ve (3.10) denklemlerindeki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde

i. $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$ nın tek olması için gerek ve yeter şart $r\left(VX\right) = r(X)$, yani $\Re\left(X'V\right) = \Re\left(X'\right)$ olmasıdır. Bu durumda tek olan

$$\text{WLSE}_M\left(X\beta\right) = P_{X;V}y = X\left(X'VX\right)^+ X'Vy$$

tahmin edicisi $X\beta$ için yansız tahmin edicidir.

ii. $\text{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\text{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ tahmin edicilerinin tek olması için gerek ve yeter şart sırasıyla $r\left(VX_1\right) = r\left(X_1\right)$ ve $r\left(VX_2\right) = r\left(X_2\right)$ olmasıdır.

İspatı (3.8) denkleminden kolayca görülebilir ki $\text{WLSE}_M\left(X\beta\right)$ nın tek olması için gerek ve yeter şart $XF_{VX} = 0$ olmasıdır. Öte yandan (3.26) ifadesi dikkate alınırsa $XF_{VX} = 0$ eşitliği $r\left(X\right) = r\left(VX\right)$ rank eşitliğine denktir. Böylece teoremin i. şıkkında idda edildiği gibi

$$E\left[\text{WLSE}_M\left(\mathrm{X}\beta\right)\right] = X\left(X'VX\right)^+ X'VX\beta = X\beta$$

ifadesi sağlamış olur. Benzer şekilde teoremin ii. deki eşitliği gösterilebilir.

Teorem 3.5. (3.8) denklemindeki $\text{WLSE}_M\left(X\beta\right)$ nın tek olduğunu varsayalım. Bu takdirde

i. (3.10) ifadesindeki $\text{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\text{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ tahmin edicilerinin her biri tektir.

ii. $Cov\left\{\text{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right), \text{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\}$

$$= \sigma^2 X_1\left(X_1'VX_1\right)^+ X_1'V\,\Sigma VX_2\left(X_2'VX_2\right)^+ X_2'.$$

iii. $Cov\left\{\text{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1), \text{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\} = 0 \Leftrightarrow X_1'V\,\Sigma VX_2 = 0$ dır.

iv. $\text{WLSE}_M(X\beta) = \text{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right) + \text{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ toplam ayrışımı bir olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $P_{X:V} = P_{X_1;V} + P_{X_2;V}$ olması veya buna denk olarak $X_1'VX_2 = 0$ olmasıdır.

İspat: $\Re\left(X'V\right) = \Re\left(X'\right)$ rank eşitliği parçalı formda $\Re\begin{bmatrix} X_1'V \\ X_2'V \end{bmatrix} = \Re\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix}$ olarak tekrar yazılabilir. Bu ise hem $\Re\left(X_1'V\right) = \Re\left(X_1'\right)$ eşitliğini hem de $\Re\left(X_2'V\right) = \Re\left(X_2'\right)$ eşitliklerinin sağlanması demektir. Bu nedenle teoremin i. şıkknda ifade edildiği gibi

$\text{WLSE}_M\left(X\beta\right)$ tekliği hem $\text{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)$ ve $\text{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ nin tekliğini ifade eder. Öte yandan ii. şıkkındaki sonuç ise (3.39) denkleminden elde edilir. (3.33) den kolayca görülebilir ki

$$r\left[X_1\left(X_1'VX_1\right)^+X_1'V\Sigma VX_2\left(X_2'VX_2\right)^+X_2'\right]=r\left(X_1'V\Sigma VX_2\right)$$

rank eşitliği elde edilir. iii. şıkkındaki sonuç bu rank eşitliğinin basit bir sonucudur. iv. şıkkındaki sonuç ise i. şıkkı ve Teorem 3.1 den elde edilir.

Bir önceki kısımda da bahsedildildiği gibi (3.6) denklemindeki V ağırlık matrisi sık sık $V=\Sigma^-$ veya $r\left(XTX'+\Sigma\right)^-=r\left[X,\Sigma\right]$ olmak üzere $V=\left(XTX'+\Sigma\right)^-$ olarak alınır. Bu durumda önceki sonuçlar daha da sadeleştirilebilir. Özel olarak Σ pozitif tanımlı, (3.2) denkleminde $r(X)=p$ ve (3.8) ve (3.10) denklemlerinde V ağırlık matrisi $V=\Sigma^{-1}$ olarak alınrsa bu takdirde aşağıdaki sonuçları elde edilebiliriz.

Lemma 3.5. Σ pozitif tanımlı, (3.2) denkleminde $r(X)=p$ ve (3.8) ve (3.10) denklemlerinde $V=\Sigma^{-1}$ olsun.

i. M modeli altında $X\beta$ matrisinin tek en iyi lineer yansız tahmin edicisi

$$\text{BLUE}_M\left(X\beta\right)=X\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'\Sigma^{-1}y \tag{3.40}$$

şeklindedir, burada

$$E[\text{BLUE}_M(X\beta)]=X\beta \text{ ve } Cov[\text{BLUE}_M(X\beta)]=\sigma^2X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'$$

dir.

ii. M_i modeli altında $X_i\beta_i$ nin ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi

$$\text{WLSE}_{M_i}\left(X_i\beta_i\right)=X_i\left(X_i'\Sigma^{-1}X_i\right)^{-1}X_i'\Sigma^{-1}y.\quad i=1,2 \tag{3.41}$$

şeklindedir, burada

$$E\left[\text{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)\right]=X_1\beta_1+X_1\left(\text{X}_1'\Sigma^{-1}\text{X}_1\right)^{-1}X_1'\Sigma^{-1}X_2\beta_2, \tag{3.42}$$

$$E\left[\text{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right]=X_2\beta_2+X_2\left(X_2'\Sigma^{-1}X_2\right)^{-1}X_1'\Sigma^{-1}X_1\beta_1, \tag{3.43}$$

$$Cov\left[\mathrm{WLSE}_{M_i}\left(X_i\beta_i\right)\right]=\sigma^2 X_i\left(X_i{}'\Sigma^{-1}X_i\right)^{-1}X_i', \quad i=1,2. \tag{3.44}$$

dir.

iii. $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)$ arasındaki kovaryans matris

$$Cov\left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right),\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(\mathrm{X}_2\,\beta_2\right)\right\}$$

$$=\sigma^2 X_1\left(X_1'\Sigma^{-1}X_1\right)^{-1}X_1'\Sigma^{-1}X_2\left(X_2'\Sigma^{-1}X_2\right)X_2' \tag{3.45}$$

formundadır.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.4 de verilen ifadeler (3.40) ve (3.45) eşitliklerine uygulandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.1. $\mathrm{BLUE}_M\left(X\beta\right)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_i\beta_i\right)$ (3.40) ve (3.41) denlemlerindeki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $\mathrm{BLUE}_M\left(X\beta\right)=\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)+\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right).$

ii. $E\left[\mathrm{WLSE}_{M_i}\left(X_i\beta_i\right)\right]=\left(X_i\beta_i\right), \quad i=1,2.$

iii. $\mathrm{Cov}\left\{\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right),WLSE_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right\}=0.$

iv. $Cov[BLUE_M(X\beta)]=Cov\left[\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)\right]+Cov\left[\mathrm{WLSE}_{M_2}(X_2\beta_2)\right].$

v. $X_1'\Sigma^{-1}X_2=0.$

İspat: Sonucun i. ve v. şıklarının denkliği Teorem 3.1 den elde edilir. ii. ve v. şıklarının denkliği ise (3.42) ve (3.43) denklemlerinden görülebilir. iii. ve v. şıklarının denkliği ise (3.45) denkleminin bir sonucudur. Ayrıca (3.34) denkleminden

$$\begin{aligned}
&r\left(Cov\left[\mathrm{BLUE}_M\left(X\beta\right)\right]-Cov\left[\mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)\right]-Cov\left[\mathrm{WLSE}_{M_2}\left(X_2\beta_2\right)\right]\right)\\
&=r\left[X\left(X'\Sigma^{-1}X\right)^{-1}X'-X_1\left(X_1'\Sigma^{-1}X_1\right)^{-1}X_1'-X_2\left(X_2'\Sigma^{-1}X_2\right)^{-1}X_2'\right]\\
&=2r\left(X_1'\Sigma^{-1}X_2\right)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca bulunabilir. Buradan da iv. ve v. şıklarının denk olduğu görülür.

Şimdi $\mathrm{WLSE}_M(X\beta)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)$ tahmin edicileri arasındaki bağıntı aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 3.6. $\mathrm{WLSE}_M(X\beta)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)$, (3.8) ve (3.10) denklemlerindeki gibi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. Öyle $\mathrm{WLSE}_M(X\beta)$ ve $\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)$ vardır ki

$$\mathrm{WLSE}_M(X\beta)=\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1) \tag{3.46}$$

eşitliği bir olasılıkla sağlanır.

ii. $\{\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)\}\subseteq\{\mathrm{WLSE}_M(X\beta)\}$ küme içermesi bir olasılıkla sağlanır.

iii. $VP_{X;V}=VP_{X_1;V}$ dir.

iv. $\Re(VX_2)\subseteq\Re(VX_1)$ dir.

İspat: (3.6) ve (3.10) denklemlerinden

$$\mathrm{WLSE}_M(X\beta)-\mathrm{WLSE}_{M_1}(X_1\beta_1)=\left(GV-XF_{VX}U-X_1F_{VX_1}U_1\right)y,$$

yazılabilir, burada $G=X(X'VX)^{+}X'-X_1(X_1'VX_1)^{+}X_1'$ olup U ve U_1 matrisleri keyfi matrislerdir. Bu durumda (3.22) denkleminden kolayca görülebilir ki (3.11) denklemi sağlanması için gerek ve yeter şart her $y\in\Re[X,\Sigma]$ için

$$\left(GV+XF_{VX}U-X_1F_{VX_1}U_1\right)y=0$$

olacak şekilde dir. Yani U ve U_1 matrislerinin mevcut olmasıdır, yani $S=[X,\Sigma]$ olmak üzere

$$\left(GV+\left[XF_{VX},X_1F_{VX_1}\right]\begin{bmatrix}U\\-U_1\end{bmatrix}\right)S=0, \tag{3.47}$$

olmasıdır. Bu durumda (3.47) eşitliği

$$A=\left[XF_{VX},X_1F_{VX_1}\right] \text{ ve } Z=[U',-U_1']'$$

olmak üzere

$$AZS = -GVS \tag{3.48}$$

olarak yeniden yazılabilir. Öte yandan (3.20) denkleminden kolayca görülebilir ki (3.48) denkleminin Z için çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$r[GVS, A] = r(A) \tag{3.49}$$

olmasıdır.

Ayrıca $\Re(G) = \Re(G') \subseteq R(S)$ ve dolayısıyla da $\Re(GVS) = \Re(GV)$ eşitliği sağlanır. Bu durumda daha önce verilenler dikkate alınarak (3.49) da verilen rank eşitliğinin

$$r[GV, XF_{XV}] = r(XF_{VX}) = r(X) - r(VX) \tag{3.50}$$

eşitliğine denk olduğu görülür. Öte yandan (3.13) denklemi ve elemanter blok matris işlemleri yardımıyla

$$r[GV, XF_{VX}] = r\begin{bmatrix} GV & X \\ 0 & VX \end{bmatrix} - r(VX)$$

$$= r(VGV) + r(X) - r(VX) \tag{3.51}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (3.50) eşitliği $VGV = 0$ eşitliğine denk olur ki bu da iii. şıkkına denktir. tir. Eğer (3.33) denklemindeki şartlar altında (3.17) denklemi VGV matrisine uygulanırsa, bu takdirde

$$r(VGV) = r(Z - Z_1)$$

$$= r(Z) - (Z_1)$$

$$= r(VX) - r(VX_1) \tag{3.52}$$

elde edilir. Böylece (3.50) denklemi $r(VX) = r(VX_1)$ rank eşitliğine denktir ki bu da $\Re(VX_2) \subseteq \Re(VX_1)$ içermesine denktir. Buradan teoremin i. ve v. ifadelerinin denk olduğu görülür. (3.47) denkleminden kolayca görülür ki teoremin ii. şıkkındaki küme içermesinin sağlanması için gerek ve yeter şart herhangi bir U_1 matrisi için

$$\min_U r\left(GVS + XF_{VX}US - X_1F_{VX_1}U_1S\right) = 0 \tag{3.53}$$

olacak şekilde bir U matrisinin mevcut olmasıdır. Buradan da

$$
\begin{aligned}
&\min_{U} r\left(GVS + XF_{VX}US - X_1F_{VX_1}U_1S\right) \\
&\quad = r\left[GVS - X_1F_{VX_1}U_1S,\, XF_{VX}\right] - r\left(XF_{VX}\right) \\
&\quad = r\left[GV,\, XF_{VX}\right] - r\left[XF_{VX}\right] \\
&\quad = r\left(VX\right) - r\left(VX_1\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılabilir. Böylece (3.53) ifadesinin iv. şıkkına denk olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 3.6. nın açık bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2. Kabul edelim ki (3.8) denklemindeki $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right)$ tahmin edicisi tek olsun. Bu takdirde $\mathrm{WLSE}_M\left(X\beta\right) = \mathrm{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1\right)$ eşitliğinin bir olasılıkla sağlanması için gerek ve yeter şart $\Re\left(X_2\right) \subseteq \Re\left(X_1\right)$ olmasıdır.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada (3.2) modeli altındaki $X\beta$ nin ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisinin (3.3) modeli altındaki ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicilerin toplamlarına eşit olması için bir takım gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Bu şartlar altında (3.2) modeli altında $X\beta$ nin en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicilerinin bazı istatistiksel özelliklerini verebilmek için toplam ayrışımların kullanılabilirliğini bekleyebiliriz. Bu çalışmada verilen sonuçların ayrıca daha genel durumlara da uygulanabilirliğini bekleriz. Parçalı lineer modeler altında ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicilerinin toplam ayrışımları hakkında iki araştırma konusu aşağıdaki gibi verilebilir:

i. $M = \left\{ y, X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + ...X_k\beta_k, \sigma^2 \Sigma \right\}$ genel parçalı lineer model ve onun $M_i = \left\{ y, X_i\beta_i, \sigma^2 \Sigma \right\}$, $i = 1, 2, ...k$, şeklinde verilen k tane küçük alt modelleri için

$$\text{WLSE}_M\left(X_1\beta_1 + ...X_k\beta_k \right) = \text{WLSE}_{M_1}\left(X_1\beta_1 \right) + ...\text{WLSE}_{M_k}\left(X_k\beta_k \right)$$

toplam ayrışımının sağlanması ile ilgili gerek ve yeter şartlar araştırılabilir.

ii. $K = \left[K_1, K_2 \right] \in R^{q\times(p_1+p_2)}$ verilsin. $K\beta = K_1\beta_1 + K_2\beta_2$ ifadesi (3.2) de verilen M modeli altında tahmin edilebilir olsun, yani $\Re(K') \subseteq \Re(X')$ olsun. Bu takdirde

$$WLSE_M(K\beta) = WLSE_{M_1}(K_1\beta_1) + WLSE_{M_1}(K_2\beta_2)$$

toplam ayrışımının sağlanması için gerek ve yeter şartlar araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

Bhimasankaram, P. & Saharay, R. (1997). On a partitioned linear model and some associated reduced models. *Linesar Algebra Appl.*, 264, 329-339.

Chu, K., Isotala, J., Puntanen, S. & Styan, GPH. (2004). On decomposing the Watson efficiency of ordinary least squares in a partitioned weakly singular linear model. *Sankhya Ser., A*, 66, 634-651.

GroB, J. & Puntanen, S. (2000). Estimations under a general partitioned linear model. *Linear Algebra Appl.*, 321, 131-144.

Marsaglia, G. & Stvan, GPH. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2, 269-292.

Mitra, SK. & Rao, CR. (1974). Projections under seminorms and generalized Moore-Penrose inverses. *Linear Algbra Appl.*, 9, 155-167.

Nurhonen, M. & Puntanen, S. (1992). A property of partitioned generalized reression. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, 21, 1579-1583.

Puntanen, S., Styan, GPH. & Tian, Y. (2005). Three rank formulas associated with the covariance matrices of the BLUE and the OLSE in the general linear model. *Econometric Theor.*, 21, 659-664.

Qian, H. & Tian, Y. (2006). Partially superfluous observations. *Econometric Theor.*, 22, 529-536.

Rao, CR. (1971). Unified theory of linear estimation. *Sankhya Ser*, A, 371-394

Rao CR. (1973) Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss-Markoff model with a singular disperison matrix. *Journal of Multivariate Anal*. 3: 276-292

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971a). Further contributions to the theroy of generalized inverse of matrices and its applications. *Sankhya, Ser*. A 33,289-300.

Rao, CR. & Mitra, SK. (1971b). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications.New York: Wiley.*

Tian, Y. (2002). The maximal and minimal ranks of some expressions of generalized inverses of matrices. *Southeast Asian Bull. Math*, 25,745-755.

Tian. Y. & Cheng, S. (2003). The maximal and minimal ranks of A-BXC with applications. *New York J. Math*, 9,345-362.

Tian, Y. & Wiens, DP. (2006). On equality and proportionality of ordinary of least-squares, weighted least-squares and best linear unbiased estimators in the general linear model. *Statist. Probab. Lett*,76,1265-1272.

Tian, Y. & Yoshio, T. (2007). On Sum Decompositions of Weighted Least-Squares Estimators for the Partitioned Linear Model. Communications in Statistics—Theory and Methods. 37: 55–69.

Tian, Y. & Yoshio, T. (2008). Some properties of projectors associated with the WLSE under a general linear model, Journal of Multi. Anal. 99, 1070–1082.

Tian, Y. & Puntanen, S. (2009). On the equivalence of estimations under a general linear model and its transformed models, Linear Algebra and Its Applications. 430, pp. 2622–2641.

Tian, Y. & Tian, Z. (2010). On additive and block decompositions of WLSEs under a multiple partitioned regression model. Statistics, Vol. 44, No. 4, 361–379.

Werner, HJ. & Yapar, C. (1995). More on partitioned possibly restricted linear regression. *Multivariate Statistics and Matrices in Statistics. New Trends in Probability and Statistics.*Vol. 3, Proceedings of the 5th Tartu Conference, Tartu, pp. 57-66.

Werner, HJ. & Yapar, C. (1996). A BLUE decompozition in the general linear regression model. *Linear Algebra Appl.*, 237/238, 395-404.

Zhang, B., Liu, B. & Lu, C. (2004). A study of the equivalense of the BLUEs between a partitioned singuar linear model and its reduced singuler linear models. *Acta Math. Sinica, Ser. B.*20, 557-568.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Cevat KANAR
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	× T.C. ❒ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fakülte	Eğitim Fakültesi
Bölümü	Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	18.06.2001
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	