T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR VE BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YETKİN ÇETİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Yetkin ÇETİR

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR VE BAZI TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ

YETKİN ÇETİR
ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 35 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDAL ÜNLÜYOL

Bu yüksek lisans tez çalışması, dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, ikinci bölümde genel bilgiler, üçüncü bölümde yapılan çalışmalar ve son olarak ise sonuç öneriler bölümü bulunmaktadır. Üçüncü bölümde, D-metrik uzaylar, açık ve kapılı toplar, D-metrik topolojisi, topolojik özellikler, tamlık ve kompaktlık konuları ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Metrik Uzay, Topolojik Uzay, D-Metrik Topoloji

ABSTRACT

GENERALIZED METRIC SPACES AND TOPOLOGICAL STRUCTURE I

YETKİN ÇETİR

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 35 PAGES

SUPERVISOR: ASSIST PROF. DR. ERDAL ÜNLÜYOL

This master's thesis consists of four main parts. In the first part introduction, in the second part general information, in the third part of studies and finally there is a conclusion suggestions section. In the third part, D-metric spaces, open and closed balls, D-metric topology, topological properties, completeness, and compactness has been studied in detail.

Keywords: Metric Spaces, Topology Spaces, D-metric Topology

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında başta danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL’a teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her zaman üzerimde hissettiğim en değerli hazinelerim olan eşim Betül ÇETİR’ e, babam Kemal ÇETİR’ e, annem Kezban ÇETİR’ e, ablalarım Sevil KARDEŞ ve Sibel YELEGEN’ e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{\emptyset}$	:	Boş Küme
$\mathbf{B}(x_0, \mathbf{r})$	:	Açık Top
$\overline{\boldsymbol{B}}(x_0, \mathbf{r})$	:	Kapalı Top
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$	:	Metrik Uzay
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{D})$	:	D-Metrik Uzay
$\{\boldsymbol{x_n}\}$	:	Bir Dizi
$\boldsymbol{\tau}$	:	Bir Topoloji
$\boldsymbol{U_\tau}(\boldsymbol{x})$	:	X-in Komşuluk Ailesi
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$	:	Topolojik Uzay

1.GİRİŞ

Metrik uzaylar, topoloji ve fonksiyonel analizin temelidir. Metrik uzaylardaki sabit nokta teorisinin son zamanlarda önem kazanmasından dolayı birçok matematikçi metrik uzaylara ilgi göstermiştir. Gahler [8] tarafından altmışlar boyunca kullanılan “2-metrik uzay” kavramı, daha sonra yine Gahler [9] tarafından genelleştirilmiştir.

Gahler [8], X boştan farklı bir küme ve “d” de bir 2-metrik ise bu (X, d) ikilisine bir 2-metrik uzay olarak tanımlanmış ve 2-metrik fonksiyonun, metrik fonksiyonun bir genelleştirilmesi olduğu iddia etmiştir. Fakat bu iki fonksiyon arasında herhangi bir bağlantı yoktur. Aynı zamanda metrik uzay sürekli bir fonksiyondur, buna karşın 2-metrik uzay sürekli değildir [10].

Gahler [9], 2-metrik kavramının, aslında metrikten esinlenerek yaptığını ve geometrik olarak $d(x, y, z)$; köşeleri $x, y, z \in X$ olan bir üçgensel bölge olduğunu göstermiştir. Ancak bunun her zaman doğru olmadığını Sharma [14] 1980 yılında göstermiştir. Iseki [11], Reahdes [13] ve Sharma [14] sabit nokta teoremlerini elde etmek için 2-metrik uzayı kullanmışlardır.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1.1: X boştan farklı bir küme olsun. Eğer $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $x, y, z \in X$ için

M-1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M-2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)

M-3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona X kümesi üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Uyarı 2.1.2: M-1)* $x = y$ ise $d(x, y) = 0$ yazılarak elde edilen M-1)*, M-2), M-3) koşullarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir yarı-metrik adı verilir.

Tanım 2.1.3: $\mathbb{R}^n: \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1,2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde

$$e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

metriğine $\mathbb{R}^n$ nin doğal metriği veya Öklid metriği adı verilir.

Tanım 2.1.4: (X, d) bir metrik uzayı $x \epsilon X$ bir nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

$$B(x, \varepsilon) = \{y \epsilon X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

ile tanımlanan kümeye x merkezli ve ε -yarıçaplı açık top adı verilir.

Tanım 2.1.5: (X, d) bir metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Eğer $\forall\, x \epsilon G$ için en az bir $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ öyleki $B(x, \varepsilon) \subset G$ koşulu sağlanıyorsa, bu G alt kümesine bu metrik uzayda açık küme adı verilir.

Eğer bir $F \subset X$ altkümesinin $X - F$ bütünleyeni açık ise bu F kümesine kapalı küme adı verilir.

Tanım 2.1.6: (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \epsilon X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, öyle ki $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.1.7: (X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. Eğer en az bir $r > 0$ öyle ki her $x, y \epsilon A$ için $d(x, y) < r$ sağlanıyorsa, A altkümesine bu metrik uzayda sınırlıdır denir.

Uyarı 2.1.8: Bazı kitaplarda; bir metrik uzayda "sınırlı küme" aşağıdaki gibi verilir. (X, d) metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun. Önce A kümesinin çapı,

$$ç(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$$

ile tanımlanır. Daha sonra da, eğer A kümesinin çapı sonlu ise bu A kümesine sınırlıdır denir.

Tanım 2.1.9: (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\{x_n\}$, X-de bir dizi ve $x \epsilon X$ olsun.

a) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı, her $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu $\{x_n\}$ dizisine, x noktasına yakınsar denir ve kısaca $x_n \to x$ şeklinde yazılır. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisine (X, d) metrik uzayında yakınsak ve x noktasına da bu $\{x_n\}$ dizisinin bir limit noktası adı verilir.
b) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için, en az bir $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ öyle ki $d(x_m, x) < \varepsilon$ sağlanıyorsa; x-in her komşuluğunda dizinin sonsuz sayıda terimi bulunuyorsa bu x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin bir yığılma noktası denir.

Tanım 2.1.10: (X, d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$ X-de bir dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$için $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ olacak şekilde öyle bir n_0 doğal sayısı vardır, öyle ki $m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sağlanıyorsa, bu $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.11: X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan her $\tau \subset \mathrm{P}(X)$ ailesine X üzerinde bir topoloji denir.

T-1) $\emptyset, X \in \tau$

T-2) $\forall\, G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

T-3) $\forall\, (G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \epsilon \Lambda} G \;\epsilon\; \tau$ (Burada Λ herhangi bir indis kümesidir)

Üzerinde bir topoloji tanımlanmış olan her X kümesine bir topolojik uzay denir ve çoğu kez (X, τ) ile gösterilir.

Tanım 2.1.12: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A-nın tümleyeni $X - A$ açık ise A kümesine bu uzayda kapalıdır denir.

Tanım 2.1.13:

1) (X, τ) bir topolojik uzay, $x \epsilon X$ ve $U \subset X$ olsun. Eğer $x \epsilon G \subset U$ olacak şekilde bir $G \epsilon \tau$ varsa, bu U altkümesine bu uzayda x noktasının bir komşuluğu denir. $x \epsilon X$ noktasının τ topolojisine göre bütün komşuluklarından oluşan aile $U_\tau(x)$ veya topolojiyi belirtmenin gerekmediği durumlarda kısaca $U(x)$ ile gösterilir ve buna X in komşuluk ailesi ya da komşuluk sistemi denir.

2) (X, τ) bir topolojik uzay, $M \subset X$ ve $U \subset X$ olsun. Eğer $M \subset G \subset U$ olacak şekilde bir $G \epsilon \tau$ varsa, bu U altkümesine bu uzayda M kümesinin bir komşuluğu denir. Buna göre, bir topolojik uzayda, bir noktayı içeren her açık küme o noktanın bir komşuluğudur.

Tanım 2.1.14: (X, τ) bir topolojik uzay, $x \epsilon X$ ve $\mathfrak{B}(x) \subset U_\tau(x)$ olsun. Eğer

$$\forall\, U \in U_\tau(x) \text{ için } \exists\, V \in \mathfrak{B}(x) : V \subset \mathrm{U}$$

sağlanıyorsa, bu $\mathfrak{b}(x)$ ailesine bu topolojik uzayda x noktasının bir komşuluk tabanı denir.

Tanım **2.1.15**: (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subset \tau$ olsun. Eğer her açık küme, $\mathcal{B}$ nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, diğer bir ifade ile,

$$\forall\, G \epsilon \tau \text{ için } \exists\, \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} : G = \bigcup_{\mathrm{B} \in \mathcal{B}'} \mathrm{B}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa, bu $\mathcal{B}$ ailesine τ topolojisi için bir taban(baz) adı verilir.

Tanım 2.1.16: Bir topolojik uzayın sayılabilir güçte yoğun bir alt kümesi varsa, bu topolojik uzaya ayrılabilir uzay denir.

Tanım 2.1.17: (X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x \epsilon X$ olsun. Bu durumda,

a) Eğer her $V \epsilon U_{\tau^*}(f(x))$ için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde $\exists\, U \subset U_\tau(x)$ mevcut ise bu f fonksiyonuna, x noktasında süreklidir denir.

b) Eğer f fonksiyonu her $x \epsilon X$ noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna, X üzerinde süreklidir veya kısaca süreklidir denir.

Tanım 2.1.18:

a) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere, $f\colon \mathbb{N} \to X$ şeklindeki fonksiyona X de bir dizi denir ve her $n \epsilon \mathbb{N}$ için $f(n)\colon x_n \in X$ ile gösterilerek, X -de bir dizi, $\{x_n\}_{n \epsilon \mathbb{N}}$ veya kısaca $\{x_n\}$ biçiminde yazılır.

b) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $f\colon \mathbb{N} \to X$, X-de bir fonksiyon olsun. Kesin monoton artan her $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu için $f o \varphi\colon \mathbb{N} \to X$ bileşke fonksiyonuna f dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 2.1.19: (X, τ) bir topolojik uzay, $\{x_n\}$ X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

a) Eğer her $U \in U_\tau(x_0)$ komşuluğu için, buna bağlı bir $n_0 = n_0(U) \in \mathbb{N}$ sayısı; her $n \geq n_0$ için $x_n \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, $\{x_n\}$ dizisine, (X, τ) topolojik uzayında x_0 noktasına yakınsar denir. Böyle bir diziye de yakınsak dizi adı verilir. Eğer $\{x_n\}$, (X, τ) da bir x_0 noktasına yakınsıyor ise;

$\tau - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \overset{\tau}{\to} x_0$; ya da $x_n \to x_0$ şeklinde yazılır.

Bu x_0 noktasına da $\{x_n\}$ dizisinin bir limiti adı verilir.

b) Eğer her $U \in U(x_0)$ komşuluğu ve her $n \epsilon \mathbb{N}$ için en az bir $m \geq n$ doğal sayısı, $x_m \in U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa, x_0 noktasına $\{x_n\}$ dizisinin bir yığılma noktası denir.

Herhangi bir topolojik uzayda, bir kümenin kapanışı ve bir fonksiyonun sürekliliği gibi bir çok kavramın karakterize edilmesinde diziler yetersiz kalmaktadır.

Bu nedenle dizilerin genelleştirilmesi gereği ortaya çıkmış ve bu amaçla "ağlar" ve "filtreler" tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.20: Bir Λ kümesi üzerinde tanımlanan ve aşağıdaki koşulları sağlayan "$\prec$" bağıntısına bir yönlendirme bağıntısı ve üzerinde böyle bir bağıntı tanımlanmış olan kümeye de yönlendirilmiş küme denir.

i. Her $\lambda\epsilon\Lambda$ için $\lambda \prec \lambda$ dir.
ii. $\lambda_1 \prec \lambda_2$ ve $\lambda_2 \prec \lambda_3$ ve $\lambda_1 \prec \lambda_3$ dir.
iii. Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $\lambda_1 \prec \lambda_3$ ve $\lambda_2 \prec \lambda_3$ olacak biçimde bir $\lambda_3 < \Lambda$ vardır.

Tanım 2.1.21: X bir küme ve Λ herhangi bir yönlendirilmiş küme olmak üzere, Λ üzerinde tanımlı her $f: \Lambda \to X$ fonksiyonuna X de bir ağ adı verilir. Dizilerde olduğu gibi, her $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda): x_\lambda \epsilon X$ ile gösterilir ve X-de bir ağ çoğu kez (x_λ) şeklinde yazılır.

Topolojik uzayları açık kümelere göre sahip oldukları ortak özellikler yönünden sınıflara ayırarak incelemek birçok nedenle daha kolay ve amaca daha uygundur. Topolojik uzayların "ayırma aksiyomları" adı verilen ve Almanca bu anlama gelen "Trennungsaxiome" sözcüğünün baş harfi kullanılarak, T_0 , T_1 , T_2 tanımlarını vereceğiz.

Tanı**m 2.1.22**: (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

a) Eğer her $x, y \epsilon X$, $x \neq y$ için G ve $H \subset X$ gibi iki açık küme,
$(x\epsilon G, y \notin G)$ ve $(x \notin H, y\epsilon H)$
b) Eğer her $x, y \epsilon X, x \neq y$ için G ve $H \subset X$ gibi iki açık küme,
$x\epsilon G, y\epsilon H$ ve $G \cap H = \emptyset$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, bu (X, τ) bir topolojik uzayına bir T_2 -uzayı denir.

Uyarı 2.1.23: Tanımları karşılaştırınca kolayca görüleceği gibi, her T_2 -uzayı bir T_1 -uzayı ve her T_1 -uzayı bir T_0 -uzayıdır. Yani,

T_2 -uzayı $\Rightarrow$ T_1 -uzayı $\Rightarrow$ T_0 -uzayı sağlanır.

Fakat buradaki oklar genel olarak tersine çevrilmez.

Örneğin, $(\mathbb{R}, \tau_{sağ})$ bir T_0 -uzayıdır, fakat bir T_1 -uzayı değildir. Her T_1 -uzayınında T_2 -uzayı olması gerekmez.

Örneğin, sonsuz elemanlı bir X kümesi üzerindeki

$$\tau_{BSO} = \{G : G \subset X, \qquad X - G \; sonlu\,\} \cup \{\emptyset\}$$

topolojisini göz önüne alırsak, (X, τ_{BSO}) bir T_1 -uzayıdır. Gerçekten de herhangi iki $x, y \epsilon X$, $x \neq y$ için, $X - \{x\}$ ve $X - \{y\}$ kümeleri bu uzayda açıktır. Fakat (X, τ_{BSO}) bir T_2 -uzayı değildir. Çünkü bu uzayda, G ve H iki açık küme, $x \epsilon G$, $y \epsilon H$ ve $G \cap H = \emptyset$ koşulunu sağlayacak biçimde bulunabilseydi

$$X = X - (G \cap H) = (X - G) \cup (X - H)$$

yazılabileceğinden sonlu iki kümenin birleşimi olarak X -in sonlu olması gerekirdi. Hiçbir T_i (i=0,1,2) aksiyomunu sağlamayan topolojik uzaylar da vardır.

Örneğin, $|X| \geq 2$ olmak üzere (X, τ_t) ilkel topolojik uzayı ya da $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde verilen $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi ile (X, τ) bir topolojik uzayı birer T_0 -uzayı bile değildir. Dolayısıyla bu uzaylar diğer ayırma aksiyomlarını da sağlamaz.

Tanım 2.1.24: (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsıyorsa, bu (X, d) metrik uzayına bir tam metrik uzay denir. Bu metriğe de bazen tam metrik adı verilir.

Uyarı 2.1.25:

a) Tamlık bir topolojik özellik değildir. Örneğin doğal metrikleri ile $\mathbb{R}$ tam, (0,1) açık aralığı ise tam değildir.

b) Bir küme üzerinde aynı topolojiyi üreten biri tam diğeri tam olmayan iki metrikte bulunabilir. Örneğin, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ doğal sayılar kümesi üzerinde,

$$e(m, n) = |m - n| \quad (her\; m, n \,\epsilon \mathbb{N})$$

bir tam metriktir.

Çünkü bu metriğe göre sadece sabit diziler Cauchy dizisi olabilirler ve onlar da elbette yakınsaktır. Şu halde, $(\mathbb{N}, e_{\mathbb{N}})$ bir tam metrik uzaydır.

Aynı küme üzerinde,

$$\rho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \quad (her\ m,n \in \mathbb{N})$$

bir metriktir, fakat bu metrik tam değildir.

Örneğin, $x_n = n,$ (n=1,2,…) bu metriğe göre yakınsak olmayan bir Cauchy dizisidir.

Şu halde, $(\mathbb{N}, \rho)$ tam olmayan bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.26: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\exists\ 0 < k < 1 \ :\ \forall\ x, y \in X \text{ için } d\big(T(x), T(y)\big) \leq kd(x,y)$$

sağlanıyorsa, bu T fonksiyonuna bir daralma dönüşümü denir.

Örneğin, $0 < k < 1$ sabit olmak üzere,

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad T(x) = kx$$

bir daralma dönüşümüdür.

Teorem 2.1.27 (Banach Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü ise bu dönüşümün bir tek sabit noktası vardır, yani;

$$\exists\ x_0 \in X : T(x_0) = x_0$$

sağlanır.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Giriş kısmında da bahsedildiği üzere, Gahler [8] klasik anlamdaki metrik uzaylardan esinlenerek 2-metrik uzay kavramını vermiştir. Biz şimdi bu 2-metrik uzay tanımını ifade edelim.

3.1 D-Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme olsun. Eğer $d: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, o zaman d ye X kümesi üzerinde bir 2-metrik denir.

i. Birbirinden farklı $x, y \epsilon X$ için $d(x, y, z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.
ii. Eğer $x, y, z \epsilon X$ lerin keyfi iki tanesi eşit ise $d(x, y, z) = 0$
iii. $d(x, y, z) = d(x, z, y) = d(y, x, z) = d(y, z, x) = d(z, y, x) = d(z, x, y)$ (simetri özelliği)
iv. Her $x, y, z \epsilon X$ için $d(x, y, z) \leq d(x, y, a) + d(x, a, z) + d(a, y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

Tanım 3.1.2: X boştan farklı bir küme $\mathbb{R}$ de reel sayılar kümesini göstersin. Bu durumda $D: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, D ye X kümesi üzerinde bir D -metrik denir.

i. Her $x, y, z \epsilon X$ için $D(x, y, z) \geq 0$ ve bu eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $x = y = z$ olmasıdır. (Negatif olmama özelliği)
ii. $D(x, y, z) = D(x, z, y) = D(y, x, z) = D(y, z, x) = D(z, y, x) = D(z, x, y)$ (simetri özelliği)
iii. Her $x, y, z \epsilon X$ için $D(x, y, z) \leq D(x, y, a) + D(x, a, z) + D(a, y, z)$ (Dörtgen eşitsizliği)

D, boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir D-metrik olsun. Bu durumda (X, D) ikilisine bir D-metrik uzay denir. Ayrıca n-değişkenli D-metrikli bir D metrik uzayın genelleştirilmesi 1992 yılında Dhage [3] tarafından verilmiştir.

Şimdi birkaç D-metrik örneği verelim.

Örnek 3.1.3: $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma, \rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını her $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sigma(x, y, z) = kmax\{\|x - y\|, \|y - z\|, \|z - x\|\}, \ k > 0$$

$$\rho(x,y,z) = c\{\|x-y\|+\|y-z\|+\|z-x\|\},\ c>0$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\|.\|$ $\mathbb{R}^n$ içindeki alışılmış normdur.

Yukarıdaki şekilde tanımlanan σ ve ρ fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir D-metrik olup $(\sigma,\mathbb{R}^n)$ ve $(\rho,\mathbb{R}^n)$ ikilileri D-metrik uzaydır.

Örnek 3.1.4: $X \neq \emptyset$ ve $D: X^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$D(x,y,z)=\begin{cases} 0 & ,\text{eğer } x=y=z \text{ ise} \\ 1 & ,\text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda (X,D) bir D-metrik uzaydır.

Örnek 3.1.5: Reel sayılar kümesinin tüm sıralı ikililerinin kümesini E ile gösterelim. Bu durumda her $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ z=(z_1,z_2)\in E$ için

$$D(x,y,z) = \max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,|y_1-z_1|,|y_2-z_2|,|z_1-x_1|,|z_2-x_2|\}$$

*şe*klinde tanımlanan $D: E^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde bir D-metrik olup (E,D) ikilisi bir D-metrik uzaydır.

Açıklama 3.1.6: Eğer d fonksiyonu, $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde (alışılmış) metrik ise, o zaman her $x,y,z\in X$ için

$$D_1(x,y,z) = \max\{d(x,y),d(y,z),d(z,x)\}$$

ve

$$D_2(x,y,z) = d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)$$

şeklinde $D_1, D_2 : X^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda D_1 ve D_2 nin X üzerinde birer D-metrik oldukları açıktır [3]. Geometrik olarak, D_1 fonksiyonlu D-metriği $x,y,z\in X$ elemalarını içeren kümenin çapını, D_2 fonksiyonlu D-metriği ise $x,y,z\in X$ noktalarını köşe kabul eden bir üçgenin çevresini göstermektedir [3].

Örnek 3.1.7: Reel sayılar kümesinin tüm sıralı ikililerin kümesini F ile gösterelim. Bu durumda her $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2),\ z=(z_1,z_2)\in F$ için

$$D(x,y,z) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| + |z_1 - x_1| + |z_2 - x_2|$$

şeklinde tanımlanan $D: F^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu F üzerinde bir D-metrik olup (F, D) ikilisi bir D-metrik uzaydır.

Açıklama 3.1.8: Eğer d fonksiyonu, $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde standart (alışılmış) metrik ise o zaman her $x, y, z \in X$ için

$$D_1(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\}$$

ve

$$D_2(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)$$

şeklinde $D_1, D_2 : E^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda D_1 ve D_2 nin X üzerinde birer D-metrik oldukları açıktır [3]. Geometrik olarak, D_1 fonksiyonu D-metriği $x, y, z \in X$ elemanlarını içeren kümenin çapını, D_2 fonksiyonu D-metriği ise bu $x, y, z \in X$ noktalarını köşe kabul eden bir üçgenin çevresini göstermektedir [5].

Teorem 3.1.9: (X_1, ρ_1) ve (X_2, ρ_2) iki D-metrik olsun. Bu durumda $X = X_1 \times X_2$ ve her $x, y, z \in X$ için

$$\rho(x,y,z) = \max\{\rho_1(x_1, y_1, z_1), \rho_2(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2)\}$$

şeklinde tanımlanan ρ fonksiyonunu, X ile üzerinde D-metrik olup, (X, ρ) bir D-metrik uzaydır.

İspat: Yukarıdaki şekilde tanımlanan (X, ρ) nun D-metrik olma koşullarından ilk iki şartı, negatif olmama ve simetrikliğin sağlandığı açıktır. Şimdi üçgen eşitsizliğini ispat edelim.

$x, y, z, a \in X = X_1 \times X_2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $a = (a_1, a_2)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\rho(x,y,z) &= \max\{\rho_1(x_1, y_1, z_1), \rho_2(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2)\} \\ &\leq \max\{\rho_1(a_1, y_1, z_1) + \rho_1(x_1, a_1, z_1) + \rho_1(x_1, y_1, a_1)\ ,\ \rho_2(a_2, y_2, z_2) \\ &\qquad + \rho_2(x_2, a_2, z_2) + \rho_2(x_2, y_2, a_2)\}\end{aligned}$$

$$\leq \max\{\rho_1(x_1, y_1, a_1), \rho_2(x_2, y_2, a_2)\} + \max\{\rho_1(x_1, a, z_1), \rho_2(x_2, a_2, z_2)\}$$

$$+ \max\{\rho_1(a_1, y_1, z_1), \rho_2(a_2, y_2, z_2)\}$$

$$= \rho(x, y, a) + \rho(x, a, z) + \rho(a, y, z).$$

Böylece (X, ρ) bir D-metrik uzay olduğu ispat edilmiş olur.

Tanım 3.1.10: (X, D) bir metrik uzay olsun. Bu durumda X-in $\delta(x)$ çapı

$$\delta(x) = \sup\{D(x, y, z): x, y, z \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.11: Bir (X, D) D-metrik uzayında, her $x, y, z \in X$ için $D(x, y, z) \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı var ise bu D-metrik uzayına sınırlıdır denir.Sınırlı olmayan D-metrik uzayına sınırsızdır denir. Başka bir ifade ile $D(x, y, z)$ istediğimiz kadar büyük değerler alır.

Açıklama 3.1.12: $\delta(x) < \infty \Leftrightarrow (X, D)$ D-metrik uzayı sınırlıdır.

Teorem 3.1.12: (X, D) bir D-metrik uzayı ve $M > 0$ sabit bir reel sayı olsun. Bu durumda her $x, y, z \in X$ için

$$\overline{D}(x, y, z) = \frac{MD(x,y,z)}{k + D(x,y,z)} \ , k > 0$$

şeklinde tanımlanan $(X, \overline{D})$ uzayı M ile sınırlı olan bir sınırlı D-metrik uzayıdır.

İspat: İlk olarak $\overline{D}$ fonksiyonunun bir D-metrik olduğunu gösterelim. D-metriğin ilk iki şartının, negatif olmama ve simetri özelliğinin sağladığı açıktır.

Üçgen eşitsizliğinin sağladığını gösterelim.

$x, y, z, a \in X$ olsun. Bu durumda, $k > 0$ için

$$\overline{D}(x, y, z) = \frac{MD(x,y,z)}{k + D(x,y,z)} = M - \frac{Mk}{k + D(x,y,z)} \leq M - \frac{Mk}{k + D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)}$$

$$= \frac{M[D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)]}{k + D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)}$$

$$= \frac{MD(x,y,a)}{k + D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)} + \frac{MD(x,a,z)}{k + D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)} +$$

$$\frac{MD(a,y,z)}{k + D(x,y,a) + D(x,a,z) + D(a,y,z)}$$

$$\leq \frac{MD(x,y,a)}{k + D(x,y,a)} + \frac{MD(x,a,z)}{k + D(x,a,z)} + \frac{MD(a,y,z)}{k + D(a,y,z)}$$

$$= \overline{D}(x, y, a) + \overline{D}(x, a, z) + \overline{D}(a, y, z)$$

Böylece $\overline{D}$ bir D-metriktir. Burada $(X, \overline{D})$ bir D-metrik uzaydır.

Şimdi $(X, \overline{D})$ D-metrik uzayının sınırlı olduğunu ispat edelim. $x, y, z \in X$ olsun. Bu durumda $k > 0$ için

$$\overline{D}(x, y, z) = \frac{MD(x,y,z)}{1 + D(x,y,z)} \leq \frac{MD(x,y,z)}{D(x,y,z)} = M \quad \text{elde edilir.}$$

Bu ise $(X, \overline{D})$ D-metrik uzayının $M > 0$ ile sınırlı olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.13: Eğer (X, D) keyfi bir D-metrik uzay ise, o zaman $(X, \overline{D})$ D-sınırı 1 olan sınırlı bir D-metrik uzaydır. Burada her $x, y, z \in X$ için

$$\overline{D}(x, y, z) = \frac{MD(x,y,z)}{1 + D(x,y,z)}$$

Teorem 3.1.14: Her $n \in \mathbb{N}$ için bütün $x = \{x_n\}$ reel sayı dizilerinin uzayını S ile gösterelim ve her $x, y, z \in S$ için

$$D(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n max\left\{\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}, \frac{|y_n - z_n|}{1+|y_n - z_n|}, \frac{|z_n - x_n|}{1+|z_n - x_n|}\right\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Burada $\sum A_\mathrm{n}$ ile pozitif terimli yakınsak bir dizi gösterilmektedir. Bu durumda (S, D) bir sınırlı D-metrik uzaydır.

İspat: Yukarıdaki şekilde tanımlanan D fonksiyonunun D-metrik uzay olduğu açık olup (S, D) bir D-metrik uzaydır. Şimdi sınırlı olduğunu gösterelim; $x, y, z \in S$ için $D(x, y, z) < \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ olduğundan (S, D) D-metrik uzayı sınırlıdır.

Teorem 3.1.15: (X_1, ρ_1) ve (X_2, ρ_2) D sınırları sırasıyla M_1 ve M_2 olan iki sınırlı D-metrik uzay olsun. Bu durumda, $X = X_1 \times X_2$ ve her $x, y, z \in X$ için

$$\rho(x, y, z) = \max\{\rho_1(x_1, y_1, z_1),\ \rho_2(x_2, y_2, z_2)\}$$

olmak üzere (X, ρ) D-metrik uzayı, D-sınırı $M = \max\{M_1, M_2\}$ ile sınırlıdır.

İspat: (X_1, ρ_1) ve (X_2, ρ_2) D-sınırları sırasıyla M_1, M_2 olduğundan

$$\rho_1(x_1, y_1, z_1) \leq M_1 \quad \text{, her } x_1, y_1, z_1 \in \mathrm{X}_1$$

$$\rho_2(x_2, y_2, z_2) \leq M_2 \quad \text{, her } x_2, y_2, z_2 \in \mathrm{X}_2$$

yazabiliriz. ρ nun tanımından, her $x, y, z \in X$ için

$$\rho(x, y, z) = \max\{\rho_1(x_1, y_1, z_1),\ \rho_2(x_2, y_2, z_2)\} \leq \max\{ M_1, M_2\} = M$$

elde edilir. Bu ise (X, ρ) nun D-sınırının M olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.16: X ile her $n \in \mathbb{N}$ için $x = \{x_n\}$ sınırlı dizilerinin kümesini göstersin ve X^3 üzerinde bir D fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$D(x, y, z) = maks\{sup_n[|x_n - y_n|, |y_n - z_n|, |z_n - x_n|]\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman (X, D) bir sınırsız D-metrik uzaydır.

İspat: Her $x, y, z \in X$ için $D(x, y, z) = maks\{sup_n[|x_n - y_n|, |y_n - z_n|, |z_n - x_n|]\}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun D-metrik olduğu açıktır. Buradan (X, D) bir D-metrik uzaydır. Her $k > 0$ ve her $x, y, z \in X$ için

$\mathrm{D(kx, ky, kz)} = kD(x, y, z)$ olduğundan (X, D) D-metrik uzayı sınırlıdır.

3.2 Açık ve Kapalı Toplar

Tanım 3.2.1: $x_0 \in X$ keyfi fakat sabit bir nokta ve $r > 0$ olsun. x_0 merkezli ve $r \in X$ yarıçaplı top

$$B^*(x_0, r) = \{y \in X : D(x_0, y, y) < r\}$$

şeklinde tanımlanan $B^*(x_0, r) \subset X$ kümesidir.

Benzer şekilde;

$B^*(x_0, r) \subset X$ kapanışı $\bar{B}^*(x_0, r)$ olmak üzere

$\bar{B}^*(x_0, r) = \{y \in X : D(x_0, y, y) \leq r\}$ şeklinde tanımlanır.

$B^*(x_0, r) \subset X$ kümesinin bir açık küme olduğu Dhage [4] tarafından gösterilmiştir. Aslında tüm D-metrik fonksiyonları yukarıdaki özelliğe sahiptir.

Şimdi başka bir $B(x_0, r) \subset X$ tanımlayalım.

$\mathrm{B}(\mathrm{x}_0, \mathrm{r}) = \{y \in B^*(x_0, r) :$ eğer $y, z \in B^*(x_0, r)$ keyfi iki nokta ise o zaman $D(x_0, y, z) < r\}$

$=\{ y, z \in X : D(x_0, y, z) < r\}$

Açıklama 3.2.2: $B(x_0, r) \subset B^*(x_0, r)$.

Açıklama 3.2.3: Eğer $0 < r_1 < r_2$ ise o zaman

i. $B^*(x_0, r_1) \subset B^*(x_0, r_2)$
ii. $B(x_0, r_1) \subset B(x_0, r_2)$

$\bar{B}^*(x_0, r) \subset X$ kümesi,

$\bar{B}(x_0, r) = \{y \in B^*(x_0, r) :$ eğer $y, z \in B^*(x_0, r)$ o zaman $D(x_0, y, z) \leq r\}$

$= \{y, z \in X : D(x_0, y, z) \leq r\}$

Açıklama 3.2.4: $B(x_0, r) \subset \bar{B}(x_0, r)$.

Aşağıda bir (X, D) D-metrik uzayında $B^*(x_0, r)$ ve $B(x_0, r)$ toplarının bazı özelliklerini verelim.

Teorem 3.2.5: $(\mathbb{R}, D_1)$ bir D-metrik uzay olsun. O zaman keyfi fakat sabit bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktası için $B^*(x_0, r)$ ve $B(x_0, r)$ topları ℝ' de

$$B^*(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

ve

$$\mathrm{B}(x_0, r) = \left(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}\right) \text{ kümeleridir.}$$

İspat: $x, y, z \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. D_1 in ℝ üzerindeki tanımına göre

$D_1(x, y, z) = \max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\}$ yazabiliriz.

$x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi fakat sabit ve $r > 0$ için

$$B^*(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} : D_1(x_0, y, y) < r\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < r\}$$

$$= (x_0 - r, x_0 + r)$$

Benzer şekilde;

$$B(x_0,r) \ = \{y \in \mathbb{R} : D_1(x_0,y,z) < r \ her \ z \in B(x_0,r)\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \max\{|x_0 - y|, |y - z||x_0 - z| < r\}$$

Yukarıdaki bağıntı $B(x_0,r)$ kümesinin her $y,z \in \mathbb{R}$ için

$|x_0 - y| < r,\ |x_0 - z| < r,\ |y - z| < r$ yazabiliriz.

Böylece, $|x_0 - y| < \frac{r}{2}$ ve $|x_0 - y| < \frac{r}{2}$ olarak seçersek o zaman

$|x_0 - y| < r,\ |x_0 - z| < r,\ |y - z| < r$ elde ederiz.

Dolayısıyla

$$B(x_0,r) = \{ y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < \frac{r}{2} \} = (x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2})$$

olup ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.6: $B^*(0,1)$, $B^*(1,2)$, $B(0,1)$, $B(0,2)$ için

$B^*(0,1) = (-1,1)$, $\qquad B^*(1,2) = (-1,3)$

$B(0,1) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, $\qquad B(1,2) = (0,2)$

Teorem 3.2.7: $(\mathbb{R}, D_2)$ bir D-metrik uzay, $x_0 \in \mathbb{R}$ keyfi fakat sabit ve $r > 0$ olsun. O zaman $\mathbb{R}$'de

$$B^*(x_0,r) = (x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}) \ \text{ ve } \ B(x_0,r) = (x_0 - \frac{r}{4}, x_0 + \frac{r}{4})$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: D_2 nin tanımına göre her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$D_1(x,y,z) = \mathrm{d(x,y)} + d(y,z) + d(x,z) = |x - y| + |y - z| + |x - z|\}$$

$$B^*(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R} : D_2(x_0,y,y) < r\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \ 2|x_0 - y| < r\}$$

$$= (x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2})$$

Benzer şekilde;

$$B(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R} : D_2(x_0,y,z) < r \; her \; z \in B(x_0,r)\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| + |y - z| + |x_0 - z| < r\}$$

Her $y, z \in \mathbb{R}$ için $|y - z| \leq |x_0 - y| + |x_0 - z|$ eşitsizliğini yazabiliriz.

Buradan;

$$2|x_0 - y| + 2|x_0 - z| < r$$

veya

$$|x_0 - y| + |x_0 - z| < \frac{r}{2} \qquad (1)$$

eşitsizliğini sağlayan tüm $y, z \in \mathbb{R}$ elemanlarını seçersek bu durumda

$$|x_0 - y| + |y - z| + |z - x_0| \leq 2\,|x_0 - y| + 2\,|x_0 - \mathrm{z}|$$

olduğundan y ve z noktaları B(x_0, r) dir.

Böylece (1) eşitsizliğini sağlayan her $y, z \in \mathbb{R}$ için

$$|\mathrm{x}_0 - \mathrm{y}| < \frac{r}{4} \; ve \; |x_0 - z| < \frac{r}{4}$$

Böylece;

$$B(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R} : |x_0 - y| < \frac{r}{4} = (x_0 - \frac{r}{4}, x_0 + \frac{r}{4})$$

olup ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.8:

$$B^*(0,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad B^*(1,2) = (0,2)$$

$$B(0,1) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \qquad B(1,2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Teorem 3.2.9: ($\mathbb{R}^n$, D_1) $n \in \mathbb{N}$ bir D-metrik uzay $x_0 \in \mathbb{R}^n$ keyfi fakat sabit bir nokta ve $r > 0$ olsun. Bu durumda

$B^*(x_0,r)$ ve $B(x_0,r)$ kümeleri

$$B^*(x_0,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - \mathrm{y}\| < r\}$$

$$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - y\| < \tfrac{r}{2}\}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: Bu teoremin ispatı $(\mathbb{R}, D_1)$ D-metrik uzayının ispatına bezer şekilde yapılır.

Teorem 3.2.10: $(\mathbb{R}^n, D_2)$ $n \in \mathbb{N}$ bir D-metrik uzay $x_0 \in \mathbb{R}^n$ keyfi fakat sabit bir nokta ve $r > 0$ olsun. Bu durumda $B^*(x_0, r)$ ve $B(x_0, r)$ kümeleri

$$B^*(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - \mathrm{y}\| < \tfrac{r}{2}\}$$

$$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x_0 - y\| < \tfrac{r}{4}\}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: Bu teoremin ispatı $(\mathbb{R}, D_2)$ D-metrik uzayının ispatına bezer şekilde yapılır.

Şimdi (X, D) D-metrik uzayında $\bar{B}^*(x_0, r)$ ve $\overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ kümeleri

$$\bar{B}^*(x_0, r) = \{y \in X : D(x_0, y, y) \le r\}$$

ve

$$\overline{\mathrm{B}}(x_0, r) = \{y \in X : D(x_0, y, z) \le r\} \text{ her } z \in B(x_0, r) \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıklama 3.2.11: $B^*(x_0, r) \subset \bar{B}^*(x_0, r)$ ve $B(x_0, r) \subset \overline{\mathrm{B}}(x_0, r)$ olduğu açıktır.

Lemma 3.2.12: Eğer $D(x_0, a, a) = r_1 < r$ olacak şekilde bir $a \in B(x_0, r)$ noktası var ise o zaman

$$\overline{\mathrm{B}}(x_0, r_1) \subset B(\mathrm{x}_0, \mathrm{r})$$

Tanım 3.2.13: Bir D-metrik uzayın U kümesi, eğer noktalarının her biri bir top içeriyorsa bu kümeye açıktır denir.

Teorem 3.2.14: $x \in X$ ve $r > 0$ için her $B(x, r)$ topu X de bir açık kümedir. Yani, $B(x, r)$ nin her bir noktası bir top içerir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi fakat sabit bir eleman $r > 0$ olsun. $B(x_0, r) \subset X$ göz önüne alalım ve $a \in B(x_0, r)$ olduğunu kabul edelim. Göstermemiz gereken $B(a, r^*) \subset B(x_0, r)$ olacak şekilde $r^* < r$ olan $r^* > 0$ sayısının var olduğudur. $a \in B(x_0, r)$ olduğundan $D(x_0, a, a) = r_1$ ve $r_1 < r$ olacak şekilde bir $r_1 > 0$ sayısı mevcuttur.

$B^*(x_0, r_1 + \varepsilon) \subset B(x_0, r)$ $r_1 < r$ olacak şekilde keyfi bir ε>0 sayısını seçelim. $B^*(x_0, r_1 + \varepsilon)$ açık olduğu için $B^*(a, r^*) \subset B^*(x_0, r_1 + \varepsilon) \subset B(x_0, r)$ olacak şekilde bir $B^*(a, r^*)$, $r^* > 0$ açık topu mevcuttur. $B(x_0, r^*) \subset B^*(x_0, r)$ olduğundan, $B(a, r^*) \subset B^*(a, r^*)$. Buradan $B(a, r^*) \subset B(x_0, r^*)$ elde edilir. Bu ise $B(x_0, r)$ nin X de bir açık küme olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.15: $x \in X$ ve $r > 0$ için $B(x, r)$ açık topların keyfi birleşimleri ve sonlu arakesitleri açıktır.

İspat: Klasik anlamda yapılan ispat tekniği ile aynıdır.

Tanım 3.2.16: V kümesi bir D-metrik uzay olsun. Eğer V-nin tümleyeni olan $X - V$ X -de açık ise o zaman V kümesi kapalıdır denir. Açıkça, $x \in X$ ve $r > 0$ için $\overline{\mathrm{B}}(x, r)$ topu bir D-metrik uzayında kapalı bir kümedir. Bu durumda $\overline{\mathrm{B}}(x, r)$ X-de bir kapalı toptur.

Şimdi aşağıda bazı kapalı top örnekleri verelim.

Örnek 3.2.17: $(\mathbb{R}, D_1)$ D-metrik uzay olsun. Bu durumda,

$\bar{B}^*(0,1) = [-1,1]$, $\overline{\mathrm{B}}(0,1) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\bar{B}^*(1,4) = [-3,5]$, $\overline{\mathrm{B}}(1,4) = [-1,3]$

Örnek 3.2.18: $(\mathbb{R}, D_2)$ D-metrik uzay olsun. Bu durumda,

$\bar{B}^*(0,2) = [-1,1]$, $\overline{\mathrm{B}}(0,2) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$\bar{B}^*(2,6) = [-1,5]$, $\overline{\mathrm{B}}(2,6) = [\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$

Teorem 3.2.19: Bir D-metrik uzayda, kapalı topların sonlu birleşimi ve keyfi kesişimi kapalıdır.

İspat: Klasik anlamda yapılan ispat tekniği ile aynıdır.

Teorem 3.2.20: Her $\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})}$ topu τ- kapalıdır.

İspat: Bu teoremi ispat etmek için $\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})}$ nin $(\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})})'$ tümleyeninin X-de açık olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $a \in (\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})})'$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda, $D(x_0, a, a) = r_1$ olacak şekilde bir $r_1 > 0$ sayısı mevcuttur.

Genelliği bozmadan, $r_1 > r$ olarak kabul edebiliriz. $B(a, p)$ ile a-merkezli $p = r_1 - r > 0$ yarıçaplı bir açık topu göz önüne alalım. O zaman keyfi $y \in B(a, p)$ için

$$D(x_0, y, y) \geq D(x_0, a, a) - D(y, a, a) > r_1 - p = r$$

yazabiliriz.

Bu bize $\mathrm{y} \in (\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})})'$ olduğunu gösterir. $(\overline{B^*(x_0, \mathrm{r})})' \subset (\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})})'$ olduğu için $\mathrm{y} \in (\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})})'$ elde ederiz. İspatta, $\overline{\mathrm{B}(x_0, \mathrm{r})}$ kümesi, X-de τ- topolojisine göre kapalı bir kümedir. Bu ise ispatı tamamlar.

3.3 D-Metrik Topolojisi

Bu kısımda bir X, D-metrik uzayında topolojiden bahsedeceğiz. Bunun için ilk olarak, X kümesi üzerinde tüm $\beta = \{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ ε -toplarının ailesinin X-de indirgediği topolojiye, X üzerinde D-metrik topolojisi adı verildiğini gösterelim.

Teorem 3.3.1: $\beta = \{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$şeklinde tanımlanan tüm ε -toplarının ailesi, X üzerinde bir τ - topolojisi için bazdır.

İspat: τ, X üzerinde bir topoloji olsun. ε -toplarının $\beta = \{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ ailesinin τ-nun bir bazı olduğunu göstermek için aşağıdaki iki durumun sağlandığını göstermek yeterlidir.

i. $X \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon)$
ii. Eğer bazı $x, y \in X$ için keyfi $a \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ ise,

o zaman, $B(a, \varepsilon_1) \subset B(x, \varepsilon)$ve $B(a, \varepsilon_2) \subset B(y, \varepsilon)$ olacak şekilde $\varepsilon^* > 0$ için bir B(a,ε^*) topu vardır. Bu durumda $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olarak seçersek,

$B(x, \varepsilon^*) \subset B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ elde ederiz.

Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.3.2: D, D-metrik tarafından üretilen bir topoloji ile beraber X, D-metrik uzayına bir D-metrik topolojik uzay adı verilir ve τ -ya da X üzerinde bir D-metrik topoloji denir.

Tanım 3.3.2: Eğer X-in indirgediği bir topoloji ile X üzerinde bir D, D-metriği var ise, o zaman bu X topolojik uzayına D-metriklenebilir denir. Bir X, D-metrik uzayı, X-in indirgediği topoloji özel D, D^* metrikle beraber bir D -metriklenebilir uzaydır.

Yukarıdaki ifadelere göre aşağıdaki bağıntıyı verebiliriz.

Bir V kümesi, bir D-metriği tarafından indirgenmiş D-metrik topoloji içindeki X-de τ -açık olabilmesi için gerekli ve yeter koşul her $x \in V$ için $B_D(x,k) \subset V$ olacak şekilde bir k>0 sayısı mevcuttur. Benzer şekilde eğer $V \in X$ kümesinin $X - V$ tümleyeni X-de τ -açık ise, o zaman V -ye τ -kapalı küme denir.

Dhage [2],[3]; bir X, D-metrik uzayında bir dizinin yakınsaklığı kavramını vermiştir.

Biz burada X, D-metrik topolojisi ile X-deki D-metrik yakınsama topolojisi arasındaki ilişkiyi araştıracağız.

Tanım 3.3.3: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$, bir X, D-metrik uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $m,n \geq n_0$ olmak üzere $D(x_m, x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var ise, o zaman bu $\{x_n\}$ dizisi $x_0 \in X$ noktasına yakınsar denir. Bu diziye de yakınsak dizi denir.

Teorem 3.3.4: Bir D-metrik uzay üzerinde, D-metrik yakınsak topolojisi ve D-metrik topolojisi denktir.

İspat: Bu teoremin ispatı için X-de bir dizinin D-metrik yakınsak topoloji içinde yakınsak olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul bu dizinin X üzerinde D-metrik topoloji içinde yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Her $\varepsilon > 0$ için X-de $B(x_0, \varepsilon)$ ε-toplarını göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\} \subset X$ bir $x_0 \in X$ noktasına D-metrik yakınsak topolojisinde yakınsadığını kabul edelim.

Her $m, n \geq n_0$ için yeterince büyük m, n, x_m, x_n lerin değerleri için bunların $B(x_0, \varepsilon)$ da olduklarını gösterelim.

Yakınsaklığın tanımına göre her $\varepsilon > 0$ için $x_n \to x_0$ olduğundan her $m, n \geq n_0$ olmak üzere $D(x_m, x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. $B(x_0, \varepsilon)$ açık top tanımına göre her $m, n \geq n_0$ için $x_m, x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ olduğu ispatlanır.

Tersine olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\} \subset X$ dizisi bir $x_0 \in X$ noktasına X kümesi üzerinde D-metrik τ-topolojisine göre yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda, her $n \geq n_0$için $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $m \geq n_0$ ise $x_m \in B(x_0, \varepsilon)$ dir.

Şimdi, $B(x_0, \varepsilon)$ top tanımından her $m, n \geq n_0$için $D(x_m, x_n, x_0) < \varepsilon$ Buradan, D-metrik yakınsak topolojide her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \to x_0$olabilmesi için gerek ve yeter şart X üzerinde D-metrik τ-topolojisine göre her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \to x_0$ olmasıdır.

Bu ise ispatı tamamlar.

Bundan sonra, X üzerinde D-metrik τ-topolojisinde, X^3 üzerinde tanımlı D, D-metrik fonksiyonun sürekliliğini ispat edeceğiz.

Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.3.5 : Bir X, D-metrik uzayında,

(i) Her $x, y, z, z' \in X$ için

$$|D(x, y, z) - D(x, y, z')| \leq D(x, z, z') + D(y, z, z')$$

(ii) Her $x, y, z, x', y', z' \in X$ için

$$|D(x, y, z) - D(x', y', z')| \leq D(x', x, z) + D(x', x, y) + D(y', y, z) + D(x', y', z')$$

(iii) Her $x, y, z, x', y', z' \in X$ için

$$|D(x, y, z) - D(x', y', z')| \leq D(x', x, z') + D(x', x, y') + D(y', y, z) + D(y, y', z) + D(x, z, z') + D(y, z, z')$$

İspat: X, bir D-metrik uzay olduğundan, dikdörtgen eşitsizliğinden ispat açıktır.

Teorem 3.3.6: $D(x, y, z)$ D-metrik fonksiyonu, bir değişkende süreklidir.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için $D(x, y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $x, y, z \epsilon X$ olsun. Keyfi $x' \in X$ için, yukarıdaki Lemma 3.3.5' in (i)-özelliğinden,

$$|D(x, y, z) - D(x', y, z)| \leq D(x, y, x') + D(x, z, x') \qquad (2)$$

yazabiliriz. $x' \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ olarak seçersek, (2) den

$|D(x, y, z) - D(x', y, z)| < \varepsilon$ elde ederiz.

Bu ise bize, $D(x, y, z)$ D-metrik fonksiyonunun x -değişkenine göre sürekli olduğunu ispatlar.

Benzer şekilde y ve z değişkenlerine göre de sürekli olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.3.7: $D(x, y, z)$ D-metrik fonksiyonu üç değişkenine göre süreklidir.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ ve $x, y, z \in X$ elemanları $D(x, y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, her $x, y, z, x', y', z' \in X$ için Lemma 3.3.5 'in (iii) özelliğinden,

$$|D(x, y, z) - D(x', y', z')| \leq D(x, y, x') + D(x, z, x') + D(y, z, z') + D(y, z', y) + D(y, y', z') + D(z, z, x') \qquad (3)$$

elde ederiz.

$(x', y', z') \to (x, y, z)$ olarak alırsak, yani $x', y', z' \in B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(z, \frac{\varepsilon}{2})$

(3) eşitsizliğinden, $|D(x, y, z) - D(x', y', z')| < \varepsilon$ olur. Bu ise, $D(x, y, z)$ D-metrik fonksiyonunun tüm üç değişkenine göre sürekli olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Açıklama 3.3.8: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \to x$ olduğunda D-nin sürekliliğinden ve

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathrm{D}(x_n, x_m, x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{D}(x_n, x, x)$$

Şunu söyleyebiliriz ki, bir X kümesi üzerindeki her D, D-metriği X için bir topolojiye indirgenir.

Şimdiki soru, verilmiş bir topolojik uzay için X üzerinde bir D-metriğinin var olup olmadığıdır.

Aşağıdaki örnek, bu sorunun cevabının negatif olduğunu gösteriyor.

Örnek 3.3.9: $X = \{a, b\}$, $a \neq b$ olsun. X kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ şeklinde bir topoloji tanımlayalım. Bu durumda X için D keyfi bir D-metrik ve $D(b, a, a) = r$ olsun.

$a \neq b$ ve $r > 0$ olduğu için $B(b, r) = \{b\}$ çünkü, $B^*(b, r) = \{b\}$ dir. O zaman $\{b\}$ elemanı X üzerinde bir τ-açık alt kümesi değildir.

Böylece (X, τ) D-metriklenebilir topolojik uzay değildir.

Verilen topolojik uzayın metriklenebilir olup olmadığı veya hangi koşullar altında metriklenebildiği genel topolojide önemli bir problemdir. Bir topolojik uzayın metriklenebilme problemini belirleme sorusu için [15]'e ve buradaki referanslara bakarak öğrenebilirsiniz.

Bu doğrultudaki bir sonucu aşağıda verelim.

Teorem 3.3.10: Eğer X topolojik uzayı metriklenebilir ise o zaman X, D-metriklenebilirdir.

İspat: X, metriklenebilir uzay olsun. Bu durumda, X topolojisine indirgenen, X kümesi üzerinde keyfi bir D-metriği vardır.

Şimdi X kümesi üzerinde, alışılmış d-metriğini her $x, y, z \in X$ için

$$D_1(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(z, x)\}$$

ve

$$D_2(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman bu D-metriği, X üzerinde aynı metriği üretir.

Buradan X-in D-metriklenebilir olduğunu görürüz. Bu ise ispatı tamamlar.

3.4 Topolojik Özellikler

Bu kısımda D-metrik τ-topolojili bir X, D-metrik uzayının topolojik özelliklerinden bahsedeceğiz.[7].

Teorem 3.4.1: Bir X, D-metrik uzayı, T_0- uzayıdır.

İspat: $x_0 \neq y_0$ için $x_0, y_0 \in X$ olsun. Bu durumda $r > 0$ için $D(x_0, y_0, y) = r$ ve $B(x_0, r) \subset X$ açık topunu göz önüne alalım. O zaman $x_0 \neq y_0$ olduğundan $y_0 \notin B(x_0, r)$ elde ederiz. Bu ise bize X -in bir T_0- uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 3.4.2: Bir X, D-metrik uzayı, T_1- uzayıdır.

İspat: $x_0 \neq y_0$için $x_0, y_0 \in X$ olsun. $D(x_0, y_0, y_0) = r_1 > 0$ olduğunu kabul edelim ve X-de bir $B(x_0, r_1)$ açık topunu göz önüne alalım. $y_0 \notin B(x_0, r)$ olduğu açıktır. Benzer şekilde,

$D(y_0, x_0, x_0) = r_2 > 0$ olduğunu kabul edelim ve X-de bir $B(y_0, r_2)$ açık topunu göz önüne alalım. Bu durumda da $x_0 \notin B(x_0, r_2)$ olduğu açıktır. Bu ise bize X-in bir T_1- uzayı olduğunu gösterir.

Teorem 3.4.3: (Hausdorff Özelliği) Bir X, D-metrik uzayı, T_2- uzayıdır.

İspat: $x_0 \neq y_0$için $x_0, y_0 \in X$ olsun. Göstermemiz gereken $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ olacak şekilde sırasıyla x_0 ve y_0 içeren B_1 ve B_2 açık topları var olduğudur. X kümesinde sırasıyla x_0 ve y_0 noktalarını içeren iki B_1^* ve B_2^* , τ^*- açık toplarını göz önüne alalım.

$$B_1^* = \{x \in X : D(x_0, x, x) < D(y_0, x, x)\}$$

ve

$$B_2^* = \{x \in X : D(y_0, x, x) < D(x_0, x, x)\}$$

Şimdi $B_1^* \cap B_2^* = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $B_1^* \cap B_2^* \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $z \in B_1^* \cap B_2^*$ olacak şekilde bir z- noktası mevcuttur.

$z \in B_1^*$ olsun o zaman, $D(x_0, z, z) < D(y_0, z, z)$ olur.

$z \in B_2^*$ olsun o zaman, $D(y_0, z, z) < D(x_0, z, z)$ elde ederiz.

Fakat bu bir çelişkidir. Çelişki ${B_1}^* \cap {B_2}^* \neq \emptyset$ kabulümüzden geldi. Yani ${B_1}^* \cap {B_2}^* = \emptyset$ $B_1 \subset {B_1}^*$ ve $B_2 \subset {B_2}^*$ olacak şekilde sırasıyla x_0 ve y_0 noktalarının X içinde B_1 ve B_2 açık toplarını bulabiliriz. Buradan, ${B_1}^* \cap {B_2}^* = \emptyset$ olup ispat tamamlanır. Şimdi D-metrik uzayların normal ve tamamen normal olduklarını gösterelim. Bunu ispat etmek için

$$d(A,B,C) = \inf\{D(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

şeklinde bir d fonksiyonu tanımlayalım.

Burada A, B, C kümeleri X, D-metrik uzayının τ -kapalı alt kümeleridir. Özel olarak,

$d(x,x,A) = \inf\ \{D(x,a,a) : a \in A\}$ olduğu açıktır.

Buradan $d(x,x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$

Lemma 3.4.4: $x \rightarrow d(x,x,A)$ bir X, D-metrik uzayı üzerinde sürekli fonksiyondur.

İspat: $x, y \in X$ için $x \rightarrow y$ olsun. Buradan dörtgen eşitsizliğinden

$$D(x,x,a) \leq D(x,x,y) + D(x,y,a) + D(y,x,a)$$

$$D(y,y,a) \leq D(y,y,x) + D(y,x,a) + D(x,y,a)$$

yukarıdaki eşitsizliklerden

$$D(x,x,A) \leq D(x,x,y) + D(x,y,A) + D(y,x,A)$$

ve

$$D(y,y,A) \leq D(y,y,x) + D(y,x,A) + D(x,y,A)$$

buradan da

$$d(x,x,A) - d(y,y,A) \leq D(x,x,y) + D(y,y,x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ olur.}$$

Bu ise $x \rightarrow d(x,x,A)$ nın X üzerinde sürekli olduğunu gösterir.

Lemma 3.4.5: $x_0 \in X$ keyfi fakat sabit bir eleman $r > 0$ olsun. Eğer

$A^* = \{x \in X : d(x,x,A) < r\}$ ise o zaman $A^* = B^*(A,r) = \bigcup_{a \in A} B^*(a,r)$ A^* ve $A^* = X$ bir τ^*- açık kümesidir.

Teorem 3.4.6: A ve B bir X, D-metrik uzayının, $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde iki kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda eğer $x \in A$ ise $f(x) = 0$ ve $x \in B$ ise $f(x) = 1$ olacak şekilde bir $f: X \to \mathbb{R}$ sürekli reel fonksiyonu vardır.

İspat: $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $f(x) = \frac{\mathrm{d}(x,x,\mathrm{A})}{\mathrm{d}(x,x,\mathrm{A}) + \mathrm{d}(x,x,\mathrm{B})}$ tanımlayalım. Bu durumda $x \to \mathrm{d}(x,x,\mathrm{A})$ sürekli, payda sürekli ve pozitif olduğu için f fonksiyonu X üzerinde süreklidir.

Ayrıca teoremin iddaa edilen şartları da sağladığı açık olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.7: Bir X, D-metrik uzayı normaldir.

İspat: A ve B, X de ayrık ve kapalı iki alt küme olsun. Bu durumda yukarıdaki teoreme göre $f: X \to \mathbb{R}$ eğer $x \in A$ ise $f(x) = 0$ ve $x \in B$ ise $f(x) = 1$ şartlarını sağlayan bir sürekli reel fonksiyon vardır.

Şimdi;

$$U = \{x \in X : f(x) < \tfrac{1}{2}\}$$

ve

$$V = \{x \in X : f(x) > \tfrac{1}{2}\}$$

olacak şekilde X-de iki U ve V açık kümelerini tanımlayalım. Buradan, $A \subset U$, $B \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olduğu açıktır. Bu ise bize X-in normal olduğunu ve ispatın tamamlandığını gösterir.

Teorem 3.4.8: Bir X, D-metrik uzayı tamamen normaldir.

İspat: G_δ, X içerisinde sayılabilir τ-açık kümelerin kesişimi olarak ifade edilebilen A kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda göstermemiz gereken X-deki her A, τ -kapalı kümesi G_δ, $x \in X$ için $g(x) = d(x,x,A)$ şeklinde bir $g: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Buradan, X üzerindeki g'nin sürekli reel bir fonksiyon ve her $x \in X$ için $g(x) = 0$ olduğu açıktır. Şimdi X-de her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n{}^* = \{x \in X : g(x) < \frac{1}{n}\}$$

şeklinde bir $A_n{}^*$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n{}^*$, X-de bir τ^*-açık kümedir. Benzer şekilde, Lemma 3.4.5' ten, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_n{}^*$ ve $A \subset A_n$ olacak şekilde X-de A_n bir τ-açık kümedir. Böylece, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ bu ise bize A -nın X içinde bir G_δ kümesi olduğunu gösterir. Buradan X bir tamamen normal olup, ispat tamamlanır.

3.5 Tamlık

Tanım 3.5.1: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$, bir X, D-metrik uzayında bir dizi olsun. Bu durumda eğer her $\varepsilon > 0$ için her $m, n, p \geq n_0$ olmak üzere $D(x_m, x_n, x_p) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı var ise o zaman bu $\{x_n\}$ dizisine X, D-metrik uzayında D-Cauchy adı verilir.

Tanım 3.5.2: Bir X, D-metrik uzayında her D-Cauchy yine bu X-de bir noktaya yakınsıyorsa, o zaman bu X, D-metrik uzayına tamdır denir.

Örnek 3.5.3: $(\mathbb{R}^n, D_1)$ ve $(\mathbb{R}^n, D_2)$ D-metrik uzayları, tam D-metrik uzaylarıdır.

Teorem 3.5.4: Bir X, D-metrik uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için her $\{x_n\}$ yakınsak dizisi D-Cauchydir.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi, X-de bir $x \in X$ noktasına yakınsasın. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olmak üzere $D(x_m, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece eğer $m, n, p \geq n_0$ için

$$D(x_m, x_n, x_p) \leq D(x_m, x_n, x) + D(x_m, x, x_p) + D(x, x_n, x_p) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise bize her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ nin X-de bir D-Cauchy dizisi olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.5: Eğer bir D-metrik uzayında bir D-Cauchy dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse o zaman bu dizi yakınsaktır.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisinin X, D-metrik uzayında D-Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olmak üzere $D(x_m, x_n, x_p) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. İddiaya göre her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisinin $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x_{km}\}$ alt dizisi olduğu için her $m, n \geq n_0$ olmak üzere

$D(x_m, x_n, x_p) < \varepsilon$ olup bu durumda $x_n \to x$ olur.

Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.5.6: X_1 ve X_2 sırasıyla ρ_1 ve ρ_2 D-metrikli iki D-metrik olsun. Her $x, y, z \epsilon X = X_1 \times X_2$ için

$$\rho(x, y, z) = \max\{\rho_1(x_1, y_1, z_1), \rho_2(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2)\}$$

şeklinde x üzerinde bir ρ D-metriği tanımlayalım. Bu durumda (X, ρ) nun tam olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul (X, ρ_1) ve (X, ρ_2) nin tam olmasıdır.

Teorem 3.5.7: d, X üzerinde alışılmış metrik ve D_1 ve D_2 , X üzerinde uygun olan D-metrikler olsun. Bu durumda (X, D_1) ve (X, D_2) nin tam olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul (X, d) nin tam olmasıdır.

Tanım 3.5.8: Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \ldots$ bağıntısını sağlayan bir X, D-metrik uzayındaki kapalı kümelerin bir $\{F_n\}$ dizisine iç-içe denir.

Teorem 3.5.9 (Ara Kesit Teoremi):

X bir D-metrik uzay ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{F_n\}_{n\to\infty}$ iken $\delta(F_n) \to 0$ olacak şekilde X-in boştan farklı alt kümelerinin bir iç-içe dizisi olsun. Bu durumda X-in tam olabilmesi için gerekli ve yeter koşul $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ sadece bir nokta içermektedir.

İspat: X tam olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in F_n$ alalım. İddiaya göre her $\varepsilon > 0$ için $\delta(F_n) \to 0$ olduğundan $\delta(F_{n_0}) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{F_n\}$ iç-içe olduğundan $m, n, p \geq n_0$ olmak üzere $F_m, F_n, F_p \subset F_{n_0}$.

Bu ise bize her $m, n, p \geq n_0$ için $x_m, x_n, x_p \epsilon F_{n_0} \to D(x_m, x_n, x_p) < \varepsilon$ Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$, X-de bir D-Cauchy dizisidir. Başlangıçta X-i tam olarak şeçtiğimizden $x \in X$ için $x_n \to x$ olur.

Şimdi bu x in $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ nin elemanı olduğunu iddia ediyoruz. Bunun ispatı için $m \in \mathbb{N}$ keyfi olsun. Bu durumda $m > n \rightarrow x_m \in F_n \quad x_n \rightarrow x$ olduğunda her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi sonuçta x'in her komşuluğundadır ve dolayısıyla x'in her komşuluğu F_n–nin noktalarının sonsuz bir sayısını içerir. Böylece x, F_n –nin bir limit noktasıdır. F_n kapalı olduğundan ve $x \in F_n$ dir. F_n keyfi olduğundan $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Şimdi $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ gibi başka bir noktanın var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $D(x,y,y) < \varepsilon$ için $\delta(F_n)_{n\rightarrow\infty}$, $\delta(F_n) \rightarrow 0$ olduğunda $D(x,y,y) = 0$ Buradan $x = y$ demektir.

Teoremin ters kısmının ispatı, klasik metrik uzaylardaki gibi yapılmaktadır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.10: X, D-metrik uzayı ikinci kategoridendir.

Teorem 3.5.11: (Sabit Nokta Teoremi):

f, kendi kendine olan tam bir dönüşüm ve X sınırlı D-metrik uzayı olsun.

Her $x, y, z \in X$ ve $0 \leq a < 1$ için $D(fx, fy, fz) \leq aD(x, y, z)$ sahiptir.

İspat: [3]'te yapılmıştır.

3.6 Kompaktlık

Tanım 3.6.1: X bir D-metrik uzay ve $\varepsilon > 0$ olsun. X-in sonlu bir A alt kümesinin X için bir ε -ağı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ için $x \in B(a, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $a \in A$ noktasının mevcut olmasıdır. Başka bir deyişle A, X için bir ε-ağı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul A-nın sonlu ve $X = \bigcup\{B(a, \varepsilon): a \in A\}$ olmasıdır.

Bir X, D-metrik uzayının tamamen sınırlı olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ için X-in ε -ağına sahip olmasıdır ve X-in her τ-açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahiptir.

Tanım 3.6.2: $\zeta = \{G_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ kümesi bir X, D-metrik uzayının τ-açık örtüsü olsun. Bu durumda ζ için $1 > 0$ reel sayısına Lebesque sayısı denebilmesi için gerekli ve yeterli koşul çapı 1-den küçük olan X-in her alt kümesi G_λ ların en azından bir tanesini içermesidir.

Teorem 3.6.3: Her dizisel kompakt X, D-metrik uzayı tamamen sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki X tamamen sınırlı olmasın. Bu durumda X-in hiç ε-ağı olmayacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı mevcuttur. $\{x_1\} \in X$ olsun. O zaman $D(x_1, x_{2,} x_3) \geq \varepsilon$ olacak şekilde ayrık olması gerekmeyen, $x_{2,} x_3 \in X$ noktaları mevcuttur, aksi halde $\{x_1\}$, X için bir ε -ağıdır. Tekrar $D(x_1, x_{2,} x_3) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_4 \in X$ vardır ve aksi takdirde, $\{x_{1,} x_2\}$ X için bir ε -ağı olmalıdır.

Bu işlemi devam ettirirsek, i$\neq$ j veya k$\neq$ j veya k$\neq$ 1 için D (x_i, x_j, x_k) ≥ ε olacak şekilde bir $\{x_{1,} x_2, \dots\}$ dizisini elde ederiz. Bunu takip ederek her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi keyfi yakınsak alt dizi içermez. Bu ise X-in dizisel kompakt olmadığını gösterir. Bu ise bir çelişkidir.

Bu çelişki ispatı tamamsöylemek gerekir ki, tam veya kompakt alışılmış metrik uzayların bir çok özellikleri tam veya kompakt D-metrik için de geçerlidir.

Aşağıda kompakt D-metrik uzay için ifade edilen sonuçların ispatları klasik anlamdaki metrik uzaylara uygun değişiklikler yapılarak elde edilebileceğinden dolayı ispatsız verilecektir.

Teorem 3.6.4: Bir X, D-metrik uzayında aşağıdaki ifadeler denktir.

a) X, kompakttır.
b) X, sayılabilir kompakttır.
c) X, Bolzano-Weierstrass özelliğine sahiptir.
d) X, dizisel kompakttır.

Teorem 3.6.5: Bir X, dizisel kompakt D-metriğinin her açık örtüsü bir Lebesque sayısıdır.

Teorem 3.6.6: Bir X, D-metrik uzayında,

a) Bir D-metrik uzayının kompakt bir alt örtüsü kapalı ve sınırlıdır.
b) Bir X, D-metrik uzayının kompakt olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul onun tam ve tamamen sınırlı olmasıdır.

Bir tam D-metrik uzayının bir S alt kümesinin kompakt olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul onun kapalı ve tamamen sınırlı olmasıdır.

Teorem 3.6.7: f fonksiyonu bir X, kompakt D-metrik uzayından bir Y, D-metrik uzayı içine sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(X)$ kompakttır. Başka bir ifadeyle, bir kompakt D-metrik uzayın sürekli görüntüsü kompakttır.

Sonuç 3.6.8: Bir X, kompakt D-metrik uzayı üzerinde her reel değerli sürekli fonksiyon sınırlıdır ve onun supremum ve infumum değerini X-de alır.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Metrik uzaylar, topoloji ve sabit nokta teorisi matematikte önemli konulardandır. Gahler [7] ilk defa 2-metrik uzay kavramını vermiş ve yine kendisi genelleştirmiştir. Daha sonra birçok yazar bu alanlarda çalışmalarda bulunmuştur.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında, Gahler'in genelleştirdiği metrik uzaylardaki D-metrik uzay ve topolojik özellikleri; açık-kapalı top, topoloji, topolojik özellikleri, kompaktlık ve tamlık konuları, B.C. Dhage [6]' nin makalesi göz önüne alınarak incelenmiştir.

5. KAYNAKLAR

1. Copson, ET. (1968). Metric spaces, Camb. University Press.Türkoğlu, NŞ. (2016). Effects of climate changes on phonological periods of apple cherry and heat in Turkey. Journal of Human Sciences, 13(1), 1036-1057.

2. Dhage, BC. (1984). A study of some fixed point theorem. Ph.D. Thesis, Marathwada Univ. Aurangabad, India.

3. Dhage, BC. (1992). Generalized metric spaces and mappings with fixed point. *Bull. Cal. Math. Soc.*, 84(4), 329–336.

4. Dhage, BC. (1994). Generalized metric spaces and topological structure II. *Pure Appl. Math. Sci.*, 40(1-2), 37–41.

5. Dhage, BC. Comparison of two contraction principles. *Bull. Cal. Math. Soc.*, (accepted).

6. Dhage, BC. (2000). Generalized Metric Spaces and Topological Structure I, Ananele Stııntıfice Ale Unıversty, Tomul XLVI, SI Matematica, 1-22.

7. Dugundji, J. (1975). Topology, Prentice–Hall of India Pvt. Ltd. New Delhi.

8. Gahler, S. (1963). 2–metriche raume und ihre topologische struktur. *Math. Nachr.*, 26, 115–148.

9. Gahler, S. (1966). Zur geometric 2-metrische raume. *Revue Roumaine de Math. Pures et Appl.*, XI, 664–669.

10. Ha, Ki.S., Cho, Y.J. & White, A. (1988). Strictly convex and 2-convex 2-normed spaces. *Math. Japonica*, 33(3), 375–384.

11. Iseki, K. (1975). Fixed Point Theorems in 2-metric spaces. *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 3, 1–4.

12. Kelley, JL. (1969). General Topology, Van–Nostrand comp., New York.

13. Rhoades, BE. (1979). Contraction type mappings on a 2-metric space. *Math. Nachr.*, 91, 151–155.

14. Sharma, AK. (1980). A note on fixed points in 2-metric spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 11(2), 1580–83.

15. Singal, MK. (1989). Directions in Topology. *Math. Student*, 57(1–4), 10-30. Received: 15.V.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:**	Yetkin ÇETİR
Doğum Tarihi	**:**	
Lisans	**:**	Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2007-2011
İletişim	**:**	
Deneyim	**:**	MEB, Giresun-Piraziz İsmail Yücel EML, 2013-2016 MEB, Beceri Temelli Etkinlik Kitabı Yazımı 2021 MEB, Kavram Temelli Etkinlik Kitabı Yazımı 2021 MEB, Ordu-Altınordu Kız AİHL, 2016-Halen