T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN CHEBYSHEV EŞİTSİZLİKLERİ

SEVDENUR DEMİRBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2020

TEZ ONAY

Sevdenur DEMİRBAŞ tarafından hazırlanan **"KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN CHEBYSHEV EŞİTSİZLİKLERİ"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 24.01.2020 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Prof. Dr. Erhan SET

Jüri Üyeleri	İmza
Üye Prof. Dr. Erhan SET Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....
Üye Doç. Dr. İmdat İşcan Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Erdal ÜNLÜYOL Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi	....

28/ 01 / 2020 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 30 / 01 / 2020 tarih ve 2020 / 42 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Selahattin MADEN

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SEVDENUR DEMİRBAŞ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN CHEBYSHEV EŞİTSİZLİKLERİ

SEVDENUR DEMİRBAŞ

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 46 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: Prof. Dr. ERHAN SET)

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde Chebyshev eşitsizliği ve kesirli analiz hakkında bazı ön bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümün ilk kısmında Chebyshev tipli bir eşitsizlik, Hölder'in integral eşitsizliği, Gamma ve Beta fonksiyonları tanımları yer almaktadır. Bazı kesirli integraller ve bu kesirli integraller yardımıyla elde edilen Chebyshev tipli eşitsizlikler de ikinci kısımda verilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü için yeni Chebyshev tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. İkinci kısmında ise yeni uyumlu kesirli integral operatörü için bazı Chebyshev tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Son bölümde bazı sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Chebyshev eşitsizliği, Kesirli integraller, Mittag-Leffler fonksiyonu, Genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü, Yeni uyumlu kesirli integral operatörü.

ABSTRACT

CHEBYSHEV INEQUALITIES FOR FRACTIONAL INTEGRALS

SEVDENUR DEMİRBAŞ

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 46 PAGES

(SUPERVISOR: Prof. Dr. ERHAN SET)

This thesis consist of four chapters. The first section is introductory and some preliminary information is given about Chebyshev's inequality and fractional analysis in this section.

In the first part of the second section consist of a Chebyshev type inequality, Hölder's inequality for integrals, the definitions of Gamma and Beta functions. Some fractional integrals and Chebyshev type inequalities obtained with the help of these fractional integrals are also given in the second part of this section.

In the first part of the third chapter, new Chebyshev type inequalities are obtained for the extended generalized fractional integral operator. In the second part, some Chebyshev type inequalities are obtained for the new conformable fractional integral operator.

In the last chapter, some results and recommendations are given.

Keywords: Chebyshev inequality, Fractional integrals, Mittag-Leffler function, extended generalized fractional integral operator, new conformable fractional integral operator.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bana destek olan, çalışmamı yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle şekillendiren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan SET'e ve tez yazım aşamasında desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Filiz DEMİRCİ, Barış ÇELİK ve Emrullah Aykan ALAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca, dünyaya geldiğim günden itibaren her an yanımda olan, tez çalışmalarım süresince desteklerini eksik etmeyen değerli babam Adem DEMİRBAŞ ve değerli annem Gönül DEMİRBAŞ'a, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiren abim Yasin DEMİRBAŞ ve erkek kardeşim Furkan DEMİRBAŞ'a sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

B	:	Beta Fonksiyonu
$\mathbf{B_n}$	:	Genişletilmiş Beta Fonksiyonu
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
$\mathbf{(a)_n}$	:	Pochhammer Sembolü
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	:	Sıfır Dahil Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$Re(\alpha)$	:	α Kompleks Sayısının Reel Kısmı
f'	:	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
L[a,b]	:	[a,b] Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
${}_2F_1(\text{-})$	:	f Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
J_a^α	:	α mertebeli Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
J_{a+}^α	:	α mertebeli Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
J_{b-}^α	:	α mertebeli Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}$	:	Saigo Kesirli İntegrali
$I_\beta^{\eta,\alpha}$	:	Erd$\acute{e}$lyi-Kober Kesirli İntegrali
$I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}$	:	Hipergeometrik Kesirli İntegrali
${}_H\mathcal{J}^\alpha$	:	Hadamard Kesirli İntegrali
$P_{0^+}^{\eta,\alpha}$	:	Pathway Kesirli İntegral Operatörü
${}_k^sJ_a^\alpha$	:	*(k,s)*- Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a+;\omega}^\sigma$	:	Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü
$I_{a^+}^\alpha$	:	Üstel Çekirdekli Sol Taraflı Kesirli İntegral Operatörü
$I_{b^-}^\alpha$	:	Üstel Çekirdekli Sağ Taraflı Kesirli İntegral Operatörü
${}_k^\beta\widetilde{\mathfrak{J}}_{a^+}^\alpha$	:	Sol Taraflı Yeni Uyumlu *k*-Kesirli İntegral Operatörü
${}_k^\beta\widetilde{\mathfrak{J}}_{b^-}^\alpha$	:	Sağ Taraflı Yeni Uyumlu *k*-Kesirli İntegral Operatörü
${}^\rho I_{a^+,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}$	:	Sol Taraflı Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegrali
${}^\rho I_{b^-,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}$	:	Sağ Taraflı Genelleştirilmiş Katugampola kesirli integrali
${}_\xi^\eta I^\lambda$	:	Genelleştirilmiş Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü
${}_a^\beta\widetilde{\mathfrak{J}}^\alpha$	:	Sol Taraflı Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü
${}^\beta\widetilde{\mathfrak{J}}_b^\alpha$	:	Sağ Taraflı Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü
$\epsilon(\alpha,\beta,\rho,\lambda)$	:	Prabhakar tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü
$\epsilon_{a^+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}$	:	Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü
$\epsilon_{\alpha,\beta,p,\omega,a^+}^{\gamma,\delta,q}$	:	Salim ve Faraj tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü
$\epsilon_{a+,\rho,\sigma}^{\omega,\delta,q,c}$	:	Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü
$\epsilon_{a+,\rho,\sigma,\tau}^{\omega,\delta,q,r,c}$	:	Genişletilmiş Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü

1. GİRİŞ

Son yüzyılda matematiğin en popüler araştırma konularından bir tanesi eşitsizlikler teorisidir. Hölder, Minkowski, Hermite-Hadamard, Cauchy-Schwarz gibi birçok önemli eşitsizlikle ilgili hem birçok araştırmacı yeni sonuçlar elde etmiş hem de bu tür eşitsizlikler matematiğin ve diğer bilimlerin farklı alanlarında kullanılmıştır. Chebyshev eşitsizliği de eşitsizlik teorisi içerisinde hem teoride hem de uygulamada önemli bir yer tutar. P.L. Chebyshev tarafından elde edilen bu eşitsizlik aşağıdaki gibidir [10, 26, 28]:

f ve g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir iki fonksiyon ve her ikisi de artan veya her ikisi de azalan fonksiyonlar olsun. Ayrıca, $p : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ integrallenebilir foknsiyon olmak üzere,

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \tag{1.0.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Eğer f ve g fonksiyonlarından biri artan diğeri azalan ise bu takdirde (1.0.1) eşitsizliği yön değiştirir. (1.0.1) eşitsizliği literatürde Chebyshev eşitsizliği olarak iyi bilinir ve bu eşitsizliğin iki özel durumu,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx$$

şeklinde olup bu eşitsizlikler de literatürde Chebyshev eşitsizliği olarak adlandırılır. Bu eşitsizliklerin her birinin discrete (ayrık) versiyonları vardır. Örneğin $a = (a_1, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, ..., b_n)$ iki azalmayan (veya artmayan) dizi ve $p = (p_1, ..., p_n)$ negatif olmayan bir dizi ise, bu takdirde

$$\sum_{i=1}^n p_i \sum_{i=1}^n p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n p_i a_i \sum_{i=1}^n p_i b_i \tag{1.0.2}$$

eşitsizliği geçerli olup eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart a veya b dizilerinden en az birinin sabit olmasıdır. $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1$ için,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i$$

şeklinde (1.0.2) eşitsizliğinin özel durumu elde edilir ki bu eşitsizlik de literatürde Chebyshev eşitsizliği olarak adlandırılır.

Birçok araştırmacının dikkatini çeken bu eşitsizliğin hem tarihsel süreci hem de genelleştirmeleri, genişletilmeleri ve yeni versiyonları ile ilgili önemli bir çalışma Mitrinović ve Vasić tarafından yapılmıştır [26].

Son yıllarda kesirli integral operatörleri, eşitsizlik teorisinde oldukça sık kullanılmaya başlamış ve yeni sonuçlar veya genelleştirmeler elde etmek için bir yöntem haline gelmiştir.

Kesirli analiz, tam sayı olmayan mertebeden türev veya integral hesabı anlamına gelip 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital tarafından ortaya atılmıştır. Bu konu günümüzde de oldukça popüler olup özellikle eşitsizlikler teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin Hermite-Hadamard, Minkowski, Grüss gibi birçok önemli eşitsizliğin kesirli versiyonları Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca literatürde Hadamard, Saigo, Uyumlu, Katugampola, Hipergeometrik v.b. farklı kesirli integral operatörleri tanımlanmış olup bu operatörler yardımıyla da birçok eşitsizliğin kesirli versiyonları elde edilmiş ve elde edilmeye devam etmektedir.

Bu tezin amacı da ilk olarak literatürde 2019 yılı ve öncesinde yapılmış, farklı türden kesirli integral operatörleri kullanılarak elde edilmiş olan Chebyshev ve Chebyshev tipli eşitsizlikleri hem kronolojik hem de türüne göre bir arada sunmaktır. İkinci olarak da son yıllarda Andric ve arkadaşları [4] tarafından tanımlanan yeni bir kesirli integral operatörünü ve yeni uyumlu kesirli integral operatörünü kullanarak Chebyshev ve Chebyshev tipli eşitsizliklerin yeni genelleştirmelerini ve varyasyonlarını elde etmektir.

2. LİTERATÜR TARAMASI

2.1 Genel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak olan tanımlar, teoremler, bazı iyi bilinen eşitsizlikler ve temel özellikler verilecektir.

Teorem 2.1.1 $f,\ g\ [a,b] \to \mathbb{R}\ (a,b)$ üzerinde diferansiyellenebilir ve $p,\ [a,b] \to [0,\infty)$ $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $f' \in L_\alpha(a,b)\ g' \in L_\beta(a,b),\ \alpha > 1$ ve $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx - \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \right| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \left| \int_x^y |f'(t)|^\alpha dt \right| dxdy \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\times \frac{1}{2}\left(\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)|x-y| \left| \int_x^y |g'(t)|^\alpha dt \right| dxdy \right)^{\frac{1}{\beta}} \\
\leq\ & \frac{1}{2}||f'||_\alpha ||g'||_\beta \int_a^b \int_a^b |x-y| p(x)p(y)dxdy
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. [16]

Teorem 2.1.2 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^q dxdy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Tanım 2.1.1 (Senkronize Fonksiyon): f ve g fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a,b]$ için

$$\{(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\} \geq 0 \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara senkronize fonksiyonlar denir. Ayrıca (2.1.1) eşitsizliğinden

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geq f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

yazılabilir(Örneğin Bkz. [25]).

1720'li yıllarda Leonard Euler kesirli fonksiyonların genişletilmiş bir hali olan gama fonksiyonunu şu şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.1.2 (Gama Fonksiyonu):
$z \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu veya Euler-Gama fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $Re(z) > 0$ için yakınsaktır. Gama fonksiyonunun en temel özelliği

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

eşitliğidir. Ayrıca bu özellik yardımıyla $\Gamma(1) = 1$ elde edilir. Buradan

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = (2-1)! = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = (3-1)! = 2,$$

ve $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım yöntemiyle

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

eşitliğine ulaşılır [18].

Tanım 2.1.3 (Beta Fonksiyonu):
$\Gamma(\alpha)$, Euler-Gama fonksiyonu ve $\mathbb{Z}_0^-$ pozitif olmayan tamsayılar kümesi olsun. O halde

$$B(\alpha, \beta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt & (Re(\alpha) > 0;\ Re(\beta) > 0) \\ \\ \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-) \end{cases}$$

fonksiyonuna beta fonksiyonu denir [49]. Ayrıca $B_p(x, y)$, genişletilmiş Beta fonksiyonudur.

$$B_p(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} e^{-\frac{p}{t(1-t)}}\, dt \quad (\alpha, \beta, p > 0)$$

Burada $Re(p) > 0$'dır.

2.2 Kesirli İntegraller Yardımıyla Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde bazı kesirli integraller ve bu integraller yardımıyla elde edilen Chebyshev tipli bazı eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.2.1 ($L_p[a,b]$ uzayı): $[a,b]$ aralığında tanımlı ve $p \geq 1$ için

$$\|f\|_p := \left[\int_a^b |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahip tüm reel değerli Lebesque anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi $L_p[a,b]$ ile gösterilir. Burada

$$\|f\|_\infty := \texttt{esssup}_{s\in[a,b]}|f(s)| < \infty$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $L_1[a,b]$ uzayı

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx < \infty$$

normuna sahip fonksiyonlar uzayıdır. Tez boyunca $L_1[a,b]$ uzayı $L[a,b]$ ile gösterilecektir [5].

2.2.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.2 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) $f(x) \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda sırasıyla α.($\alpha > 0$) mertebeden sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a \tag{2.2.1}$$

ve

$$J_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlanır [43].

Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonudur ve $\alpha = 1$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Ayrıca $\alpha = 0$ için $J_{a^+}^0 f(x) = J_{b^-}^0 f(x) = f(x)$'dir.

2009 yılında Belarbi ve Dahmani, Riemann-Liouville kesirli integrallerini kullanarak aynı monotonluğa sahip fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.1 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $t>0$, $\alpha>0$ için,

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}} J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Teorem 2.2.2 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun.Her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için,

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J^{\beta}(fg)(t) + \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} J^{\alpha}(fg)(t) \geq J^{\alpha}f(t)J^{\beta}g(t) + J^{\beta}f(t)J^{\alpha}g(t) \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Teorem 2.2.3 $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. $\exists t>0$, $\alpha>0$ için,

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{1-n} \prod_{i=1}^{n} J^{\alpha}f_i(t). \tag{2.2.5}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

2011 yılında Dahmani ve arkadaşları, Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla türevleri L_p uzaylarına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.4 p, $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyon, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere her $t>0$, $\alpha>0$ için,

$$\begin{aligned} & 2\left|J^{\alpha}p(t)J^{\alpha}pfg(t) - J^{\alpha}pf(t)J^{\alpha}pg(t)\right| \\ \leq \; & \frac{||f'||_r||g'||_s}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}|\tau-\rho|p(\tau)p(\rho)d\tau d\rho \\ \leq \; & ||f'||_r||g'||_s t(J^{\alpha}p(t))^2 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Teorem 2.2.5 p, $[0,\infty)$ aralığında pozitif fonksiyon, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için,

$$\begin{aligned} & \left|J^{\alpha}p(t)J^{\beta}pfg(t) + J^{\beta}p(t)J^{\alpha}pfg(t) - J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}pg(t) - J^{\beta}pf(t)J^{\alpha}pg(t)\right| \\ \leq \; & \frac{||f'||_r||g'||_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}|\tau-\rho|p(\tau)p(\rho)d\tau d\rho \\ \leq \; & ||f'||_r||g'||_s tJ^{\alpha}p(t)J^{\beta}p(t) \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

2.2.2 Saigo Kesirli İntegralleri İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.3 (Saigo Kesirli İntegrali) $\alpha > 0$ ve $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ olsun. Reel değerli α ve $f(t)$ sürekli fonksiyonu için $I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}$ Saigo kesirli integrali,

$$I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{f(t)\} = \frac{t^{-\alpha,-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \; {}_2F_1\big(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{\tau}{t}\big) f(\tau)d\tau, \tag{2.2.8}$$

şeklinde tanımlanır [41](Ayrıca bkz. [24, s.19], [39]).

Burada (2.2.8) 'in sağ tarafındaki ${}_2F_1(-)$ Gaussian hipergeometrik fonksiyonu,

$${}_2F_1(a,b;c;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!} \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlanır ve $(a)_n$ Pochhammer sembolü,

$$(a)_n = a(a+1)...(a+n+1), \quad (a)_0 = 1$$

şeklindedir.

2013 yılında Purohit ve Raina, Saigo kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.6 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $t > 0$, $\alpha > max\{0,-\beta\}$, $\beta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$ için,

$$I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{f(t)g(t)\} \geq \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)t^{\beta}}{\Gamma(1-\beta+\eta)} I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{f(t)\} I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{g(t)\}$$

eşitsizliği geçerlidir [35].

Teorem 2.2.7 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $t > 0$, $\alpha > max\{0,-\beta\}$, $\gamma > max\{0,-\delta\}$, $\beta, \delta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\delta - 1 < \zeta < 0$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)t^{\beta}} I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\{f(t)g(t)\} \\ & + \frac{\Gamma(1-\delta+\zeta)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\gamma+\zeta)t^{\delta}} I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{f(t)g(t)\} \\ \geq \quad & I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{f(t)\} I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\{g(t)\} + I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\{f(t)\} I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{g(t)\}, \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [35].

Teorem 2.2.8 $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $t > 0$, $\alpha > max\{0,-\beta\}$, $\beta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$ için,

$$I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(t)\right\} \geq \left[\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)t^{\beta}}{\Gamma(1-\beta+\eta)}\right]^{n-1} \prod_{i=1}^{n} I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\{f_i(t)\},$$

eşitsizliği geçerlidir [35].

2.2.3 Hadamard Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.4 (Hadamard Kesirli İntegrali Operatörü) (a,b), $0 \le a < b \le \infty$ aralığı $\mathbb{R}^+$'da sınırlı veya sınırsız bir aralık olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$ ve $f \in L[a,b]$ olmak üzere her $t > 1$ için Hadamard kesirli integrali,

$$_H\mathcal{J}^\alpha\{f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \big(\log \frac{t}{\tau}\big)^{\alpha-1} f(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

şeklinde tanımlanır [23].

2013 yılında Chincane ve Pachpatte, Hadamard kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.9 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. Her $t > 0$, $\alpha > 0$ için,

$$_H\mathcal{J}^\alpha\{(fg)(t)\} \ge \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\ln t)^\alpha}\, {_H\mathcal{J}^\alpha}\{f(t)\} {_H\mathcal{J}^\alpha}\{g(t)\}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Teorem 2.2.10 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. Her $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{(\ln t)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\, {_H\mathcal{J}^\alpha}\{(fg)(t)\} + \frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\, {_H\mathcal{J}^\beta}\{(fg)(t)\} \\ \ge \quad & {_H\mathcal{J}^\alpha}\{f(t)\} {_H\mathcal{J}^\beta}\{g(t)\} +_H \mathcal{J}^\alpha\{g(t)\} {_H\mathcal{J}^\beta}\{f(t)\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Teorem 2.2.11 $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $t > 0$, $\alpha > 0$, için,

$$_H\mathcal{J}^\alpha\bigg(\prod_{i=1}^n f_i\bigg)(t) \ge [\,{_H\mathcal{J}^\alpha}(1)]^{1-n} \prod_{i=1}^n {_H\mathcal{J}^\alpha} f_i(t)$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

2014 yılında Ntouyas ve arkadaşları, Hadamard kesirli integralleri yardımıyla türevleri $L_p\big([1,\infty)\big)$ uzaylarına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.12 p, pozitif, f ve g, $[1,\infty)$ aralığında iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([1,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([1,\infty)\big)$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olmak üzere her $t > 1$, $\alpha > 0$

için,

$$\begin{aligned}
& 2\big|{}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)\}{}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)f(t)g(t)\} -{}_H \mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)f(t)\}{}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)g(t)\}\big| \\
\leq\ & \frac{||f'||_r||g'||_s}{\Gamma^2(\alpha)}\int\int_1^t \big(\log\frac{t}{\tau}\big)^{\alpha-1}\big(\log\frac{t}{\rho}\big)^{\alpha-1}\frac{p(\tau)p(\rho)}{\tau\rho}|\tau-\rho|d\tau d\rho \\
\leq\ & ||f'||_r||g'||_s t\big({}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)\}\big)^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [32].

Teorem 2.2.13 p, pozitif, f ve g, $[1,\infty)$ aralığında iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([1,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([1,\infty)\big)$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere her $t>1$, $\alpha>0$ ve $\beta>0$ için,

$$\begin{aligned}
& \big|{}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)\}{}_H\mathcal{J}^{\beta}\{p(t)f(t)g(t)\} +{}_H \mathcal{J}^{\beta}\{p(t)\}{}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)f(t)g(t)\} \\
& -{}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)f(t)\}{}_H\mathcal{J}^{\beta}\{p(t)g(t)\} -{}_H \mathcal{J}^{\beta}\{p(t)f(t)\}{}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)g(t)\} \\
\leq\ & \frac{||f'||_r||g'||_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\int_1^t \big(\log\frac{t}{\tau}\big)^{\alpha-1}\big(\log\frac{t}{\rho}\big)^{\beta-1}\frac{p(\tau)p(\rho)}{\tau\rho}|\tau-\rho|d\tau d\rho \\
\leq\ & ||f'||_r||g'||_s t\, {}_H\mathcal{J}^{\alpha}\{p(t)\}{}_H\mathcal{J}^{\beta}\{p(t)\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [32].

2.2.4 Erdélyi-Kober Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.5 (Erdélyi-Kober Kesirli İntegral Operatörü) $\alpha>0$, $\beta>0$ ve $\eta\in\mathbb{R}$ olsun. Reel değerli bir α ve $f(t)$ sürekli fonksiyonu için $I_{\beta}^{\eta,\alpha}$ Erdélyi Kober kesirli integrali,

$$\begin{aligned}
I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f(t)\} &= \frac{t^{-\beta(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \tau^{\beta\eta}(t^{\beta}-\tau^{\beta})^{\alpha-1}f(\tau)d(\tau^{\beta}) \\
&= \frac{\beta t^{-\beta(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \tau^{\beta(\eta+1)-1}(t^{\beta}-\tau^{\beta})^{\alpha-1}f(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [24].

2014 yılında Purohit ve Kalla, Erdélyi-Kober kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.14 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ ve $\eta\in\mathbb{R}$, $\eta>-1$ için,

$$I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f(t)g(t)\} \geq \frac{\Gamma(1+\alpha+\eta)}{\Gamma(1+\eta)} I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{f(t)\}I_{\beta}^{\eta,\alpha}\{g(t)\}$$

eşitsizliği geçerlidir [34].

Teorem 2.2.15 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\delta>0$ ve $\eta,\zeta\in\mathbb{R}$, $\eta>-1$, $\zeta>-1$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(1+\eta)}{\Gamma(1+\alpha+\eta)} I_\delta^{\zeta,\gamma}\{f(t)g(t)\} + \frac{\Gamma(1+\zeta)}{\Gamma(1+\gamma+\zeta)} I_\beta^{\eta,\alpha}\{f(t)g(t)\} \\ \geq\ & I_\beta^{\eta,\alpha}\{f(t)\} I_\delta^{\zeta,\gamma}\{g(t)\} + I_\delta^{\zeta,\gamma}\{f(t)\} I_\beta^{\eta,\alpha}\{g(t)\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [34].

Teorem 2.2.16 $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$, $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ ve $\eta\in\mathbb{R}$, $\eta>-1$ için,

$$I_\beta^{\eta,\alpha}\left\{\prod_{i=1}^n f_i(t)\right\} \geq \left[\frac{\Gamma(1+\alpha+\eta)}{\Gamma(1+\eta)}\right]^{n-1} \prod_{i=1}^n I_\beta^{\eta,\alpha}\{f_i(t)\}$$

eşitsizliği geçerlidir [34].

2016 yılında Baleanu ve arkadaşları, Erdélyi-Kober kesirli integralleri yardımıyla türevleri L_p uzaylarına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev eşitsizliklerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.17 p, pozitif, f ve g $[0,\infty)$ aralığında iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f'\in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g'\in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere $\forall t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ ve $\eta\in\mathbb{R}$, $\eta>-1$ için,

$$\begin{aligned} & 2\left|I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)\} I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)f(t)g(t)\} - I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)f(t)\} I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)g(t)\}\right| \\ \leq\ & \frac{\beta^2 t^{-2\beta(\eta+\alpha)} ||f'||_r ||g'||_s}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t \tau^{\beta(\eta+1)-1} \rho^{\beta(\eta+1)-1} \\ & \times (t^\beta-\tau^\beta)^{\alpha-1} (t^\beta-\rho^\beta)^{\alpha-1} p(\tau)p(\rho)|\tau-\rho| d\tau d\rho \\ \leq\ & ||f'||_r ||g'||_s t \big(I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)\}\big)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

Teorem 2.2.18 p, pozitif, f ve g $[0,\infty)$ aralığında iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f'\in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g'\in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere $\forall t>0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$, ve $\eta,\zeta\in\mathbb{R}$, $\eta>-1$, $\zeta>-1$ için,

$$\begin{aligned} & \Big|I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)\} I_\delta^{\zeta,\gamma}\{p(t)f(t)g(t)\} + I_\delta^{\zeta,\gamma}\{p(t)\} I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)f(t)g(t)\} \\ & -I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)f(t)\} I_\delta^{\zeta,\gamma}\{p(t)g(t)\} - I_\delta^{\zeta,\gamma}\{p(t)f(t)\} I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)g(t)\}\Big| \\ \leq\ & \frac{\beta\delta t^{-\beta(\eta+\alpha)-\delta(\zeta+\gamma)} ||f'||_r ||g'||_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^t \int_0^t \tau^{\beta(\eta+1)-1} \rho^{\delta(\zeta+1)-1} \\ & \times (t^\beta-\tau^\beta)^{\alpha-1} (t^\delta-\rho^\delta)^{\gamma-1} p(\tau)p(\rho)|\tau-\rho| d\tau d\rho \\ \leq\ & ||f'||_r ||g'||_s t I_\beta^{\eta,\alpha}\{p(t)\} I_\delta^{\zeta,\gamma}\{p(t)\}, \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

2.2.5 Hipergeometrik Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.6 (Hipergeometrik Kesirli İntegral Operatörü) $\alpha > 0,\ \mu > -1,\ \beta, \eta \in \mathbb{R}$; $I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}$ genelleştirilmiş kesirli integrali (Gauss hipergeometrik fonksiyonu açısından), reel değerli α ve sürekli $f(t)$ fonksiyonu için,

$$I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{f(t)\} = \frac{t^{-\alpha-\beta-2\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\mu}(t-\tau)^{\alpha-1}\, {}_2F_1(\alpha+\beta+\mu, -\eta; \alpha; 1-\frac{\tau}{t}) f(\tau) d\tau \quad (2.2.10)$$

şeklinde tanımlanır [12](Ayrıca bkz. [24]). Burada, (2.2.10)'deki operatör için bir çekirdek olarak görünen ${}_2F_1$ fonksiyonu (2.2.9)'da verilen Gauss Hipergeometrik fonksiyonudur.

2014 yılında Baleanu ve arkadaşları, Hipergeometrik kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.19 f ve g $[0,\infty)$ aralığı üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Her $t > 0$, $\alpha > max\{0, -\beta, -\mu\}$, $\beta < 1$, $\mu > -1$, $\beta - 1 < \eta < 0$ için,

$$I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{f(t)g(t)\} \geq \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha+\eta)t^{\beta+\mu}}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\beta+\eta)} I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{f(t)\} I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{g(t)\}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Teorem 2.2.20 f ve g, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Her $t > 0$, $\alpha > max\{0, -\beta, -\mu\}$, $\gamma > max\{0, -\delta, -\nu\}$, $\beta, \delta < 1$, $\mu, \nu > -1$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\delta - 1 < \zeta < 0$ için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha+\eta)t^{\beta+\mu}} I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{f(t)g(t)\} \\
& + \frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\delta+\zeta)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\nu+\gamma+\zeta)t^{\delta+\nu}} I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{f(t)g(t)\} \\
\geq \; & I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{f(t)\} I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{g(t)\} + I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{f(t)\} I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{g(t)\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

Teorem 2.2.21 $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $t > 0$, $\alpha > max\{0, -\beta, -\mu\}$, $\mu > -1$, $\beta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$ için,

$$I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\left\{\prod_{i=1}^{n} f_i(t)\right\} \geq \left[\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha+\eta)t^{\beta+\mu}}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\beta+\eta)}\right]^{n-1} \prod_{i=1}^{n} I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu} f_i(t)$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

2014 yılında Baleanu ve Purohit, Hipergeometrik kesirli integralleri yardımıyla türevleri L_p uzaylarına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.22 p, pozitif, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olmak üzere her $t > 0$, $\beta < 1$, $\mu > -1$, $\alpha > max\{0, -\beta, -\mu\}$, $\beta - 1 < \eta < 0$ için,

$$\begin{aligned}
& 2\Big|I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)\}I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)f(t)g(t)\} - I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)f(t)\}I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)g(t)\}\Big| \\
\leq\ & \frac{t^{-2\alpha-2\beta-4\mu}||f'||_r||g'||_s}{\Gamma^2(\alpha)}\int\int_0^t \tau^\mu\rho^\mu(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} \\
& \times {}_2F_1(\alpha+\beta+\mu,-\eta;\alpha;1-\frac{\tau}{t}){}_2F_1(\alpha+\beta+\mu,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{t})p(\tau)p(\rho)|\tau-\rho|d\tau d\rho \\
\leq\ & ||f'||_r||g'||_s t(I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)\})^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [6].

Teorem 2.2.23 p pozitif, f ve g $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olmak üzere her $t > 0$,$\alpha > max\{0, -\beta-\mu\}$, $\beta < 1$,$\mu > -1$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\gamma > max\{0, -\delta-\nu\}$, $\delta < 1$, $\nu > -1$, $\delta - 1 < \zeta < 0$ için,

$$\begin{aligned}
& \Big|I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)\}I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{p(t)f(t)g(t)\} + I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{p(t)\}I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)f(t)g(t)\} \\
& -I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)f(t)\}I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{p(t)g(t)\} - I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{p(t)f(t)\}I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)g(t)\} \\
\leq\ & \frac{t^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2(\mu+\nu)}||f'||_r||g'||_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}\int\int_0^t \tau^\mu\rho^\nu(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\gamma-1} \\
& \times {}_2F_1\big(\alpha+\beta+\mu,-\eta;\alpha;1-\frac{\tau}{t}\big){}_2F_1\big(\gamma+\delta+\nu,-\zeta;\gamma;1-\frac{\rho}{t}\big)p(\tau)p(\rho)|\tau-\rho|d\tau d\rho \\
\leq\ & ||f'||_r||g'||_s tI_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\{p(t)\}I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\{p(t)\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [6].

2.2.6 Pathway Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.7 (Pathway Kesirli İntegral Operatörü) $f \in L(a,b)$, $\eta \in \mathbb{C}$, $Re(\eta) > 0$, $a > 0$ ve $\alpha < 1$ pathway parametresini alalım. Pathway kesirli integral operatörü,

$$\big(P_{0^+}^{\eta,\alpha}f\big)(x) = x^\eta \int_0^{\left[\frac{x}{a(1-\alpha)}\right]}\left[1 - \frac{a(1-\alpha)t}{x}\right]^{\frac{\eta}{1-\alpha}} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır [30].

2015 yılında Daiya ve arkadaşları, Pathway kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.24 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} fg\right)(x) \geq \frac{[a(1-\alpha)]\Gamma\left(2+\frac{\eta}{1-\alpha}\right)}{x^{\eta+1}\Gamma\left(1+\frac{\eta}{1-\alpha}\right)}\left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} f\right)(x)\left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} g\right)(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

Teorem 2.2.25 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $\alpha > 0$ ve $\gamma, \eta \in \mathbb{R}$ ise,

$$\begin{aligned} & \left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} fg\right)(x)\left(P_{0^+}^{\eta,\gamma}\right)(1) + \left(P_{0^+}^{\eta,\alpha}\right)(1)\left(P_{0^+}^{\eta,\gamma} fg\right)(x) \\ \leq \quad & \left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} f\right)(x)\left(P_{0^+}^{\eta,\gamma} g\right)(x) + \left(P_{0^+}^{\eta,\gamma} f\right)(x)\left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} g\right)(x) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

Teorem 2.2.26 $f_i,\ i=1,2,...,n$, $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. $\exists t > 0$, $\alpha > 0$ ve $\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$\left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} \prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x) \geq \left[P_{0^+}^{\eta,\alpha}(1)\right]^{1-n} \prod_{i=1}^{n}\left(P_{0^+}^{\eta,\alpha} f_i\right)(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

2.2.7 (k,s)-Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.8 **((k,s)-Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü)** f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. (k,s)-Riemann-Liouville kesirli integrali $\alpha > 0$, $k > 0$ ve $s \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ için,

$${}_{k}^{s}J_{a}^{\alpha} f(x) := \frac{(s+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x \left(x^{s+1} - t^{s+1}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1} t^s f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

şeklinde tanımlanır [44]. Burada Γ_k, k-gama fonksiyonudur ve

$$\Gamma_k(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \frac{n!k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}, \ \ (k > 0)$$

şeklinde tanımlanır [15]. k-gama fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır:

1. $\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$.
2. $(x)_{n,k} = \frac{\Gamma_k(x+nk)}{\Gamma_k(x)}$.
3. $\Gamma_k(k) = 1$.
4. $\Gamma_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$ için logaritmik konvekstir.

5. $a \in \mathbb{R}$ için $\Gamma_k(x) = a^{\frac{x}{k}} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}a} dt$'dir.

6. $\frac{1}{\Gamma_k(x)} = xk^{-\frac{x}{k}} e^{\frac{x}{k}\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{nk} \right) \right) e^{-\frac{x}{nk}}$'dır. Burada $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + ... + \frac{1}{n} - \log(n)$'dir.

7. $\Gamma_k(x)\Gamma_k(k-x) = \frac{\pi}{sin(\frac{\pi x}{k})}$.

2016 yılında Sarıkaya ve arkadaşları, (k,s) Riemann Liouville kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.27 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $t > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, (k,s)-Riemann-Liouville kesirli integralleri için,

$$
{}_k^sJ_a^\alpha(fg)(t) \geq \frac{1}{J_a^\alpha(1)}\,{}_k^s J_a^\alpha f(t)\,{}_k^sJ_a^\alpha g(t),
$$

$$
{}_k^sJ_a^\alpha(fg)(t)\,{}_k^sJ_a^\beta(1) + {}_k^sJ_a^\beta(fg)(t)\,{}_k^sJ_a^\alpha(1) \geq {}_k^s J_a^\alpha(f)(t)\,{}_k^sJ_a^\beta g(t) + {}_k^sJ_a^\alpha(g)(t)\,{}_k^sJ_a^\beta f(t)
$$

eşitsizlikleri geçerlidir [44].

2.2.8 Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.9 (Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü) $\sigma(k)(k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere,

$$
\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}(x) = \mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma(0),\sigma(1),\ldots}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k + \lambda)} x^k, \qquad (\rho, \lambda > 0;\, x \in \mathbb{R})
$$

şeklinde verilen fonksiyonların yeni bir sınıfı Raina [40] tarafından tanımlanmıştır. Bu fonksiyon yardımıyla, [40]'de Raina ve [1]'de Agarwal ve arkadaşları, $\lambda, \rho > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ ve $\sigma(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$
\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a^+;\omega}^{\sigma}\varphi(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}[\omega(x-t)^\rho]\varphi(t)dt, \qquad x > a
$$

$$
\mathcal{J}_{\rho,\lambda,b^-;\omega}^{\sigma}\varphi(x) = \int_x^b (t-x)^{\lambda-1} \mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}[\omega(t-x)^\rho]\varphi(t)dt, \qquad x < b
$$

sol ve sağ taraflı kesirli integral operatörlerini tanımlamışlardır.

2017 yılında Usta ve arkadaşları, genelleştirilmiş kesirli integral operatörü için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.28 f ve g, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Her $t,\rho,\lambda>0$ ve $\omega\in\mathbb{R}$ için,

$$\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0^+;\omega}(1)(t)\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0^+;\omega}(fg)(t)\geq\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0^+;\omega}f(t)\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0^+;\omega}g(t),$$

eşitsizliği geçerlidir [51].

Burada $\sigma(k)(k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$ katsayıları, pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisidir.

Teorem 2.2.29 f ve g, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde senkronize iki fonksiyon olsun. Her $t>0$ ve$\rho_1,\rho_2,\lambda_1,\lambda_2>0$ ve $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0^+;\omega_1}(1)(t)\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0^+;\omega_1}(fg)(t)+\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0^+;\omega_2}(1)(t)\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0^+;\omega_2}(fg)(t)\\ \geq\ &\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0^+;\omega_1}f(t)\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0^+;\omega_2}g(t)+\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0^+;\omega_2}f(t)\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0^+;\omega_1}g(t),\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [51].

Burada $\sigma_1(k),\sigma_2(k)(k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$ katsayıları, pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisidir.

Teorem 2.2.30 $(f_i)_{i=1,2,\dots,n}$, $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $t,\rho,\lambda>0$ ve $\omega\in\mathbb{R}$ için,

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0^+;\omega}(1)\right)^{n-1}\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0^+;\omega}\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)\geq\prod_{i=1}^{n}\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0^+;\omega}f_i(t)\right),$$

eşitsizliği geçerlidir [51].

Burada $\sigma(k)(k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$ katsayıları, pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisidir.

2.2.9 Üstel Çekirdekli Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.10 (Üstel Çekirdekli Kesirli İntegral Operatörü) $f\in L[a,b]$ olsun. $\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}$ ve $\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}$ kesirli integralleri, $\alpha\in(0,1)$ olmak üzere;

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}(f)(x)=\frac{1}{\alpha}\int_a^x\exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-t)\right\}f(t)dt,\qquad x>a$$

ve

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}(f)(x)=\frac{1}{\alpha}\int_x^b\exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(t-x)\right\}f(t)dt,\qquad x<b$$

şeklinde tanımlanır [2].

2017 yılında Usta ve arkadaşları, üstel çekirdekli kesirli integral operatörü için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.31 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $x>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için,

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}(1)(x)\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}(fg)(x)\geq\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f(x)\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}g(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [52].

Teorem 2.2.32 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $x>0$ ve $\alpha,\beta\in(0,1)$ için,

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_{0^+}^{\beta}(1)(x)\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}(fg)(x)+\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}(1)(x)\mathcal{I}_{0^+}^{\beta}(fg)(x) \\ \geq\quad & \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f(x)\mathcal{I}_{0^+}^{\beta}g(x)+\mathcal{I}_{0^+}^{\beta}f(x)\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}g(x)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [52].

Teorem 2.2.33 $f_i,\ i=1,2,...,n$, $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $x>0$ ve $\alpha\in(0,1)$ için,

$$\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}(1)(x)\right)^{n-1}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{k}f_i\right)(x)\geq\prod_{i=1}^{k}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f_i(x)\right)$$

eşitsizliği geçerlidir [52].

2.2.10 Yeni Uyumlu k-Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.11 (Yeni Uyumlu k-Kesirli İntegral Operatörü) f, $[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Genelleştirilmiş sol ve sağ yeni uyumlu k-kesirli integralleri $\beta>0$, $Re(\beta)>0$, $k>0$ ve $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ için,

$${}_{k}^{\beta}\mathfrak{J}_{a^+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_a^x\left[\frac{(x-a)^{\alpha}-(\tau-a)^{\alpha}}{\alpha}\right]^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(\tau)}{(\tau-a)^{1-\alpha}}d\tau$$

ve

$${}_{k}^{\beta}\mathfrak{J}_{b^-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\beta)}\int_x^b\left[\frac{(b-x)^{\alpha}-(b-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\right]^{\frac{\beta}{k}-1}\frac{f(\tau)}{(b-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$

şeklinde tanımlanır [36]. Burada Γ_k, k-gama fonksiyonudur.

2018 yılında Qi ve arkadaşları, yeni uyumlu k-kesirli integral operatörleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.34 f ve g, $[0,\infty)$ üzerinde integrallenebilir ve senkronize iki fonksiyon olsun. $\alpha,\beta>0$ için,

$$({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha} fg)(x) \geq \frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha} f)(x)({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha} g)(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

Teorem 2.2.35 f ve g, $[0,\infty)$ üzerinde integrallenebilir ve senkronize iki fonksiyon olsun. $\alpha,\beta,\tau>0$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{x^{\frac{\alpha\tau}{k}}}{\Gamma_k(\tau+k)\alpha^{\frac{\tau}{k}}}({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha} fg)(x) + \frac{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}({}^{\tau}\mathfrak{J}_k^{\alpha} fg)(x) \\ \geq \quad & ({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha} f)(x)({}^{\tau}\mathfrak{J}_k^{\alpha} g)(x)({}^{\tau}\mathfrak{J}_k^{\alpha} f)(x)({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha} g)(x) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

Teorem 2.2.36 $1\leq i\leq n$ için f_i $[a,b]$ aralığında pozitif ve artan fonksiyonlar olsun. $\alpha,\beta>0$ için

$$\left({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha}\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x) \geq \left[\frac{\Gamma_k(\beta+k)\alpha^{\frac{\beta}{k}}}{x^{\frac{\alpha\beta}{k}}}\right]^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\left({}^{\beta}\mathfrak{J}_k^{\alpha} f_i\right)(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

2.2.11 Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.12 (a,b) aralığındaki $\|\varphi\|_{X_c^p}<\infty$ şartını sağlayan kompleks değerli Lebesque ölçülebilir φ dönüşümlerinin uzayı $X_c^p(a,b)$ $(c\in\mathbb{R}\ 1\leq p\leq\infty)$ olsun. Burada

$$\|\varphi\|_{X_c^p}=\left(\int_a^b |x^c\varphi(x)|^p\frac{dx}{x}\right)^{1/p} \quad (1\leq p<\infty)$$

ve

$$\|\varphi\|_{X_c^p}=\texttt{esssup}_{x\in(a,b)}[x^c|\varphi(x)|].$$

şeklinde tanımlıdır.

$c=1/p$ $(1\leq p<\infty)$ için X_c^p uzayı

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}<\infty \quad (1\leq p<\infty)$$

$$\|f\|_\infty=\texttt{esssup}_{a\leq t\leq b}|f(t)|$$

normları ile klasik $L_p(a,b)$ uzayına dönüşür [20].

Tanım 2.2.13 (Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegral Operatörü)

$0 \leq a < x < b \leq \infty$, $\varphi \in X_c^p(a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, ve β, ρ, η, $\kappa \in \mathbb{R}$ olsun. Genelleştirilmiş sol ve sağ Katugampola kesirli integralleri,

$$\left({}^{\rho}I_{a+,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x) := \frac{\rho^{1-\beta}x^{\kappa}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{1-\alpha}}\varphi(\tau)\,d\tau$$

ve

$$\left({}^{\rho}I_{b-,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\varphi\right)(x) := \frac{\rho^{1-\beta}x^{\rho\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\tau^{\kappa+\rho-1}}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{1-\alpha}}\varphi(\tau)\,d\tau$$

şeklindedir [21, 48].

2019 yılında Set ve arkadaşları, genelleştirilmiş Katugampola kesirli integral operatörleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.37 $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $x, \alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$ ve $\eta \in \mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilir senkronize fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg)(x) \geq \frac{1}{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)}({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f)(x)({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g)(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [45].

Teorem 2.2.38 $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $x, \alpha, \rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ ve $\eta \in \mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca, f ve g $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilir senkronize fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} & \Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\sigma,\eta)({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}fg)(x) + \Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\sigma,\beta}fg)(x) \\ \geq \quad & ({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f)(x)({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\sigma,\beta}g)(x) + ({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\sigma,\beta}f)(x)({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}g)(x) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [45].

Teorem 2.2.39 $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $x, \alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$ ve $\eta \in \mathbb{R}_0^+$ olsun. Ayrıca

$$f_j : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \qquad (j = 1, ..., n\ ; n \in \mathbb{N})$$

artan fonksiyon olsun. O zaman,

$$\left({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}\prod_{j=1}^{n} f_j\right)(x) \geq \frac{1}{\left\{\Lambda_{x,\kappa}^{\rho,\beta}(\alpha,\eta)\right\}^{n-1}}\prod_{j=1}^{n}({}^{\rho}I_{\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}f_j)(x) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

eşitsizliği geçerlidir [45].

2.2.12 Genelleştirilmiş Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Tanım 2.2.14 (Genelleştirilmiş Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü) Genelleştrilimiş uyumlu kesirli integrali, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) > 0$, $\xi \in (0,1]$, $\eta \in \mathbb{R}$ ve $\xi + \eta \neq 0$ için,

$$
{}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Phi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{\theta} \left(\frac{\theta^{\xi+\eta} - \tau^{\xi+\eta}}{\xi + \eta} \right)^{\lambda-1} \frac{\Phi(\tau)}{\tau^{1-\xi-\eta}} d\tau.
$$

şeklinde tanımlanır [22, 31].

2019 yılında Nisar ve arkadaşları, genelleştirilmiş uyumlu kesirli integralleri için aşağıdaki Chebyshev tipli eşitsizlikleri elde etmişlerir.

Teorem 2.2.40 Φ ve Ψ $[0,\infty)$ üzerinde integrallenebilir ve senkronize iki fonksiyon olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) > 0$, $\xi \in (0,1]$, $\eta \in \mathbb{R}$ ve $\xi + \eta \neq 0$ için,

$$
({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Phi\Psi)(\theta) \geq \frac{\Gamma(\lambda+1)(\xi+\eta)^{\lambda}}{\theta^{(\xi+\eta)\lambda}} ({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Phi)(\theta)({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Psi)(\theta),
$$

eşitsizliği geçerlidir [31].

Teorem 2.2.41 Φ ve Ψ $[0,\infty)$ üzerinde integrallenebilir ve senkronize iki fonksiyon olsun. $\lambda, \tau \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda)$, $Re(\tau) > 0$, $\xi \in (0,1]$, $\eta \in \mathbb{R}$ ve $\xi + \eta \neq 0$ için,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\theta^{(\xi+\eta)\tau}}{\Gamma(\tau+1)(\xi+\eta)^{\tau}} \left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Phi\Psi\right)(\theta) + \frac{\theta^{(\xi+\eta)\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)(\xi+\eta)^{\lambda}} \left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\tau}\Phi\Psi\right)(\theta) \\
\geq \quad & \left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Phi\right)(\theta)\left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\tau}\Psi\right)(\theta) + \left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\tau}\Phi\right)(\theta)\left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Psi\right)(\theta),
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [31].

Teorem 2.2.42 $(\Phi_j)_{j=1,2,\dots,n}$ $[0,\infty)$ üzerinde pozitif artan fonksiyonlar olsun. $\theta > 0$, $\xi \in (0,1]$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$
{}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\left(\prod_{j=1}^{n}\Phi_j\right)(\theta) \geq \left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}(1)\right)^{1-n} \prod_{j=1}^{n}\left({}_{\xi}^{\eta}\mathcal{I}^{\lambda}\Phi_j\right)(\theta)
$$

eşitsizliği geçerlidir [31].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

3.1.1 Genişletilmiş Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1.1 $E_\alpha(z)$, ile ifade edilen temel Mittag-Leffler fonksiyonu $Re(\alpha) > 0$ için Mittag-Leffler tarafından,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}$$

şeklinde tanımlanır [29].

Tanım 3.1.2 $\alpha, \beta, \rho, \lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $\epsilon(\alpha, \beta, \rho, \lambda)$ kesirli integral operatörü Prabhakar tarafından,

$$\epsilon(\alpha, \beta, \rho, \lambda) f(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta} \lambda (x-t)^{\alpha} f(t) dt, \quad a < x < b \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanır [33]. Burada

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho)_n z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta) n!} \tag{3.1.2}$$

ve Γ, gama fonksiyonudur.

Tanım 3.1.3 $z, \beta, \gamma, \omega, \kappa \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > max\{0, Re(\kappa) - 1\}$; $min\{Re(\beta), Re(\kappa)\} > 0$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $\epsilon^{\omega;\gamma,\kappa}_{a^+;\alpha,\beta}\varphi$ kesirli integral operatörü Srivastava ve Tomowski tarafından,

$$(\epsilon^{\omega;\gamma,\kappa}_{a^+;\alpha,\beta}\varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}[\omega(x-t)^{\alpha}]\varphi(t) dt \quad (x > a) \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlanır [50]. Burada $E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonu,

$$E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!} \tag{3.1.4}$$

şeklindedir [50].

Özel olarak $\kappa = q\, (q \in (0,1) \cup \mathbb{N})$ ve $min\{Re(\beta), Re(\gamma)\} > 0$ alınırsa, Shukla ve Prajapati tarafından tanımlanan,

$$E^{\gamma,q}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{qn}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!} \tag{3.1.5}$$

fonksiyonu elde edilir [47]. Burada $(\gamma)_{qn}$,

$$(\gamma)_{qn} = \frac{\Gamma(\gamma + qn)}{\Gamma(\gamma)}$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş Pochhammer sembolünü gösterir ve Γ, gama fonksiyonudur.

Tanım 3.1.4 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $min\{Re(\alpha),\ Re(\beta),\ Re(\gamma),\ Re(\delta)\} > 0$, $p, q > 0$, $q \leq Re(\alpha) + p$, $f \in L[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ olsun. $\epsilon^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p,\omega,a^+}$ kesirli integral operatörü Salim ve Faraj tarafından,

$$(\epsilon^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p,\omega,a^+} f)(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(\omega(x-t)^{\alpha}) f(t)dt \tag{3.1.6}$$

şeklinde tanımlanır [42]. Burada

$$E^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{qn}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{(\delta)_{pn}} \tag{3.1.7}$$

şeklinde olup $(\gamma)_{qn}$ genelleştirilmiş Pochhammer sembolünü gösterir ve Γ, gama fonksiyonudur.

Tanım 3.1.5 $p \geq 0$, $q > 0$, $\omega, \delta, \lambda, \sigma, c, \rho \in \mathbb{C}$, $Re(c) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\sigma) > 0$, $Re(\delta) > 0$, $f \in L[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ olsun. $(\epsilon^{\omega,\delta,q,c}_{a^+,\rho,\sigma} f)$ kesirli integral operatörü Rahman ve arkadaşları tarafından,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,c}_{a^+,\rho,\sigma} f)(x) = \int_a^x (x-\tau)^{\sigma-1} E^{\delta,q,c}_{p,\sigma}(\omega(x-\tau)^{\rho}; p) f(\tau)d\tau \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlanır [38]. Burada $E^{\delta,q,c}_{\rho,\sigma}(z;p)$ fonksiyonu,

$$E^{\delta,q,c}_{\rho,\sigma}(z;p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(\delta + nq, c-\delta)}{B(\delta, c-\delta)} \frac{(c)_{nq}}{\Gamma(\rho n + \sigma)} \frac{z^n}{n!} \tag{3.1.9}$$

şeklindedir. Burada B beta fonksiyonu, B_p genişletilmiş beta fonksiyonu, $(c)_{qn}$ genelleştirilmiş Pochhammer sembolü ve Γ gama fonksiyonudur.

Mittag-Leffler fonksiyonunun daha genişletilmiş ve genelleştirilmiş versiyonu literatürde aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.6 $\rho, \sigma, \tau, \delta, c \in \mathbb{C}$, $Re(\rho), Re(\sigma), Re(\tau) > 0, Re(c), Re(\delta), > 0$ ile $p \geq 0$, $q > 0$ ve $0 < r \leq q + Re(\rho)$ olsun. $E^{\delta,q,r,c}_{\rho,\sigma,\tau}(z;p)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E^{\delta,q,r,c}_{\rho,\sigma,\tau}(z;p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(\delta + nr, c-\delta)}{B(\delta, c-\delta)} \frac{(c)_{nr}}{\Gamma(\rho n + \sigma)} \frac{z^n}{(\tau)_{nq}} \tag{3.1.10}$$

şeklinde tanımlanır [4]. Burada B beta fonksiyonu, B_p genişletilmiş beta fonksiyonu, $(c)_{nr}$ genelleştirilmiş Pochhammer sembolü, ve Γ gama fonksiyonudur.

Sonuç 3.1.1 (3.1.10)'da verilen Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonların bir genellemesidir, yani

(i) $p = 0$ alınırsa, (3.1.10) Salim ve Faraj tarafından tanımlanan (3.1.7) fonksiyonuna indirgenir.

(ii) $\tau = q = 1$ alınırsa, (3.1.10) Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan (3.1.9) fonksiyonuna indirgenir.

(iii) $p = 0$ ve $\tau = q = 1$ alınırsa, (3.1.10) Shukla ve Prajapati tarafından tanımlanan (3.1.5) fonksiyonuna indirgenir(Ayrıca bkz. [50]).

(iv) $p = 0$ ve $\tau = q = r = 1$ alınırsa, (3.1.10) Prabhakar tarafından tanımlanan (3.1.2) fonksiyonuna indirgenir.

Teorem 3.1.1 (3.1.10)'deki seri $r < q + Re(\rho)$ olması koşuluyla z'nin tüm değerleri için mutlak yakınsaktır. Ayrıca, $r = q + Re(\rho)$ ise, $|z| < \frac{q^q \Re(\rho)^{Re(\rho)}}{r^r}$ için $E^{\delta,q,r,c}_{\rho,\sigma,\tau}(z;p)$ yakınsaktır [4].

Genişletilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla elde edilen $\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau} f$ kesirli integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.7 $\omega, \rho, \sigma, \tau, \delta, c \in \mathbb{C}$, $Re(\rho)$, $Re(\sigma)$, $Re(\tau) > 0$, $Re(c)\, Re(\delta) > 0$ ile $p \geq 0$, $r > 0$ ve $0 < q \leq r + Re(\rho)$, $f \in L[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ olsun. $\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau} f$ genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü,

$$\left(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau} f\right)(x;p) = \int_a^x (x-t)^{\sigma-1} E^{\delta,q,r,c}_{\rho,\sigma,\tau}(\omega(x-t)^\rho;p) f(t)dt \tag{3.1.11}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Sonuç 3.1.2 (3.1.11)'de verilen kesirli integral operatörü aşağıdaki kesirli integral operatörlerinin bir genellemesidir, yani

(i) $p = 0$ alınırsa, (3.1.11) Salim ve Faraj tarafından tanımlanan (3.1.6) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(ii) $\tau = r = 1$ alınırsa, (3.1.11) Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan (3.1.8) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(iii) $p=0$ ve $\tau=r=1$ alınırsa, (3.1.11) Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan (3.1.3) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(iv) $p=0$ ve $\tau=r=q=1$ alınırsa, (3.1.11) Prabhakar tarafından tanımlanan (3.1.1) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(v) $p=\omega=0$ alınırsa, I^{σ}_{a+} sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenir.

Bu operatör ile ilgili şu özelliği verebiliriz:

Teorem 3.1.2 $\omega,\rho,\sigma,\tau,\delta,c\in\mathbb{C}$, $Re(\rho)$, $Re(\sigma)$, $Re(\tau)>0$, $Re(c)>Re(\delta)>0$, $p\geq 0$, $0<q\leq r+Re(\rho)$ ile $f\in L[a,b]$, $x\in[a,b]$ olsun. $\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{a^{+},\rho,\sigma,\tau}$ kesirli integral operatörü $L[a,b]$ üzerinde sınırlı ve

$$||\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{a^{+},\rho,\sigma,\tau}f||_1\leq C||f||_1$$

eşitsizliği geçerlidir [4].
Burada C $(0<C<\infty)$ sabiti aşağıda verildiği gibidir.

$$C=(b-a)^{Re(\sigma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|B_p(\delta+nq,c-\delta)|}{|B(\delta,c-\delta)|}\frac{|(c)_{nq}|}{\big(Re(\rho)n+Re(\sigma)\big)|\Gamma(\rho n+\sigma)|}\frac{|\omega(b-a)^{Re(\rho)}|^n}{|(\tau)_{nr}|}.$$

Bu bölümde yukarıda verilen tanım ve teoremlerden hareketle, genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörünü kullanarak Chebyshev ve Chebyhsev tipli eşitsizliklerin yeni genelleştirmeleri elde edilmiştir.

Teorem 3.1.3 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Her $x>0$, $\alpha>0$ için,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^{+},\alpha,\beta,\sigma}fg)(x;p)\geq\frac{1}{(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^{+},\alpha,\beta,\sigma})(1)}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^{+},\alpha,\beta,\sigma}f)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^{+},\alpha,\beta,\sigma}g)(x;p) \tag{3.1.12}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f ve g senkronize fonksiyon olduğundan, $\tau\geq 0$, $\rho\geq 0$ için,

$$\big(f(\tau)-f(\rho)\big)\big(g(\tau)-g(\rho)\big)\geq 0 \tag{3.1.13}$$

yazılır. Buradan

$$f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)\geq f(\tau)g(\rho)+f(\rho)g(\tau) \tag{3.1.14}$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi, (3.1.14)'in her iki tarafı $\tau \in (0,x)$ olmak üzere,

$$(x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)$$

ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& (x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\tau)g(\tau) \\
& +(x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\rho)g(\rho) \\
\geq\ & (x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\tau)g(\rho) \\
& +(x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\rho)g(\tau)
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra (3.1.15) eşitsizliğinde $(0,x)$ üzerinde integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\tau)g(\tau)d\tau \\
& +\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\rho)g(\rho)d\tau \\
\geq\ & \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\tau)g(\rho)d\tau \\
& +\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\rho)g(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
& (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}fg)(x;p)+\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)f(\rho)g(\rho)d\tau \\
\geq\ & g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}f)(x;p)+f(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}g)(x;p)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Böylece

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}fg)(x;p)+f(\rho)g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)\geq g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}f)(x;p)+f(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}g)(x;p) \tag{3.1.16}$$

olur. (3.1.16)'nın her iki tarafı $\rho \in (0,x)$ olmak üzere,

$$(x-\rho)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big),$$

ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}fg)(x;p)(x-\rho)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) \\
& +f(\rho)g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)(x-\rho)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) \\
\geq\ & g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}f)(x;p)(x-\rho)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) \\
& +f(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}g)(x;p)(x-\rho)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (3.1.17) eşitsizliğinde $(0, x)$ üzerinde integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} fg)(x;p) \int_0^x (x-\rho)^{(\beta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)d\rho \\ & +(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1) \int_0^x (x-\rho)^{(\beta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) f(\rho)g(\rho)d\rho \\ \geq \ & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} f)(x;p) \int_0^x (x-\rho)^{(\beta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) g(\rho)d\rho \\ & +(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} g)(x;p) \int_0^x (x-\rho)^{(\beta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) f(\rho)d\rho \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} fg)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1) + (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} fg)(x;p) \\ \geq \ & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} f)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} g)(x;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} g)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} f)(x;p) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} fg)(x;p) \geq \frac{1}{(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)} (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} f)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} g)(x;p)$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.3 (3.1.12)'de $p = \omega = 0$ alınırsa, (2.2.3)'deki Riemann-Liouville kesirli integrali için Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.4 (3.1.12) 'deki farklı parametre seçenekleri için, aşağıdaki gibi kesirli integral eşitsizlikleri belirlenebilir.

(i) $p = 0$ alınırsa, [42]'de Salim ve Faraj tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(ii) $\sigma = r = 1$ alınırsa, [38]'de Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\sigma = r = 1$ alınırsa, [50]'de Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\sigma = r = q = 1$ alınırsa, [33]'de Prabhakar tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.4 $\alpha, \beta, \theta, \lambda > 0$, f ve g, $[0, \infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. $\forall x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için,

$$\begin{aligned} & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} fg)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,\sigma})(1) + (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,\sigma} fg)(x;p) \\ \geq \ & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} f)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,\sigma} g)(x;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,\sigma} f)(x)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} g)(x;p) \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Teorem 3.1.3 'de olduğu gibi, benzer argümanlar kullanarak,

$$\begin{aligned}
& (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} fg)(x;p)(x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) \\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)(x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) f(\rho)g(\rho) \\
\geq \quad & (x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} f)(x;p) \\
& +(x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) f(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} g)(x;p)
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.19) eşitsizliğinde $(0,x)$ üzerinde integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
& (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} fg)(x;p) \int_0^x (x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) d\rho \\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1) \int_0^x (x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) f(\rho)g(\rho) d\rho \\
\geq \quad & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} f)(x;p) \int_0^x (x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) g(\rho) d\rho \\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} g)(x;p) \int_0^x (x-\rho)^{(\theta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big) f(\rho) d\rho
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.5 (3.1.18)'de $p = \omega = 0$ alınırsa (2.2.4) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.6 Eğer f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize değilse, (diğer bir deyişle, $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \leq 0$, $\exists x, y \in [0,\infty)$), (3.1.12) ve (3.1.18) eşitsizlikleri ters çevrilir.

Sonuç 3.1.7 Teorem 3.1.4'de $\beta = \theta$, $\alpha = \lambda$ alınırsa, Teorem 3.1.3 elde edilir.

Sonuç 3.1.8 (3.1.18) 'deki farklı parametre seçenekleri için, aşağıdaki gibi kesirli integral eşitsizlikleri belirlenebilir.

(i) $p = 0$ alınırsa, [42]'de Salim ve Faraj tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(ii) $\sigma = r = 1$ alınırsa, [38]'de Rahman ve arkadaşları tarafından kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\sigma = r = 1$ alınırsa, [50]'de Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iv) $p=0$ ve $\sigma=r=q=1$ alınırsa, [33]'de Prabhakar tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.5 $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ $[0,\infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Her $x>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x;p) \geq \left((\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)\right)^{1-n}\prod_{i=1}^{n}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}f_i)(x;p) \tag{3.1.20}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Bu teorem tümevarım yöntemi ile ispatlanır. Açıkca $n=1$ ve her $x>0$, $\alpha>0$ için,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(f_1)(x;p) \geq (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(f_1)(x;p)$$

olduğu görülür. $n=2$ (3.1.12)'de uygulanırsa, her $x>0$, $\alpha>0$ için,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(f_1f_2)(x;p) \geq ((\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1))^{-1}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(f_1)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(f_2)(x;p)$$

elde edilir. Şimdi, $n=n-1$ için,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(x;p)\right) \geq \left((\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)\right)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}f_i)(x;p) \tag{3.1.21}$$

olduğu kabul edilsin (tümevarım hipotezi). $(f_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ pozitif artan fonksiyonlar olduğundan, $(\prod_{i=1}^{n-1} f_i)(x;p)$ artan fonksiyondur. Dolayısıyla $\prod_{i=1}^{n-1} f_i = g$, $f_n = f$ fonksiyonlarına Teorem 3.1.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x;p) &= (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}fg)(x;p)\\ &\geq ((\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1))^{-1}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(f_n)(x;p)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.21) hipotezi dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(x;p) &\geq ((\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1))^{-1}((\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1))^{2-n}\\ &\times\left(\prod_{i=1}^{n-1}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}f_i)\right)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(f_n)(x;p)\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.9 (3.1.20)'de $p=\omega=0$ alınırsa (2.2.5) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.10 (3.1.20) 'deki farklı parametre seçenekleri için, aşağıdaki gibi kesirli integral eşitsizlikleri belirlenebilir.

(i) $p = 0$ alınırsa, [42]'de Salim ve Faraj tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(ii) $\sigma = r = 1$ alınırsa, [38]'de Rahman ve arkadaşları tarafından kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\sigma = r = 1$ alınırsa, [50]'de Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\sigma = r = q = 1$ alınırsa, [33]'de Prabhakar tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.6 t, $[0,\infty)$ aralığında pozitif, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki dife- ransiyellenebilir fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olmak üzere her $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için,

$$\begin{aligned}
& 2\left|(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} tfg)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} t)(x;p) - (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} tf)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} tg)(x;p)\right| \\
\leq\ & ||f'||_r ||g'||_s \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| t(\tau)t(\rho) \\
& \times E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) d\tau d\rho \\
\leq\ & ||f'||_r ||g'||_s x \big(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} t(x;p)\big)^2
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f ve g, Teorem 3.1.6'nın şartlarını sağlayan iki fonksiyon ve t, $[0,\infty)$ aralığından pozitif fonksiyon olsun.

$$H(\tau,\rho) := \big(f(\tau) - f(\rho)\big)\big(g(\tau) - g(\rho)\big); \tau, \rho \in (0,x), x > 0 \tag{3.1.23}$$

şeklinde tanımlansın. (3.1.23),

$$(x-\tau)^{(\beta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)\ t(\tau); \tau \in (0,x)$$

ile çarpılıp ve elde edilen özdeşliğin τ'ya göre $(0,x)$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)} E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) t(\tau) H(\tau,\rho) d\tau \\
=\ & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} tfg)(x;p) - f(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} tg)(x;p) \\
& - g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} tf)(x;p) + f(\rho)g(\rho)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma} t)(x;p)
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

özdeşliği elde edilir. Şimdi, (3.1.24) özdeşliği

$$(x-\rho)^{(\beta-1)}E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)t(\rho);\rho\in(0,x)$$

ile çarpılıp ve elde edilen özdeşliğin ρ'ya göre $(0,x)$ üzerinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x(x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)\\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)t(\tau)t(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\\
=\ &(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tfg)(x;p)(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}t)(x;p)-(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tf)(x;p)(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tg)(x;p)\\
&-(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tg)(x;p)(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tf)(x;p)+(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tfg)(x;p)(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}t)(x;p)
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x(x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)\\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)t(\tau)t(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\\
=\ &2\Big((\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tfg)(x;p)(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}t)(x;p)-(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tf)(x;p)(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}^{\omega,\delta,q,r,c}tg)(x;p)\Big)
\end{aligned}\tag{3.1.25}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$H(\tau,\rho):=\int_\tau^\rho\int_\tau^\rho f'(y)g'(z)dydz$$

olduğundan, çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$|H(\tau,\rho)|\leq\left|\int_\tau^\rho\int_\tau^\rho|f'(y)|^r dydz\right|^{r^{-1}}\left|\int_\tau^\rho\int_\tau^\rho|g'(z)|^s dydz\right|^{s^{-1}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan,

$$\left|\int_\tau^\rho\int_\tau^\rho|f'(y)|^r dydz\right|^{r^{-1}}=|\tau-\rho|^{r^{-1}}\left|\int_\tau^\rho|f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}}$$

ve

$$\left|\int_\tau^\rho\int_\tau^\rho|g'(z)|^s dydz\right|^{s^{-1}}=|\tau-\rho|^{s^{-1}}\left|\int_\tau^\rho|g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}}$$

olduğundan, H aşağıdaki eşitsizliği sağlar,

$$|H(\tau,\rho)|\leq|\tau-\rho|\left|\int_\tau^\rho|f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}}\left|\int_\tau^\rho|g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}}.\tag{3.1.26}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x(x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)\\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)t(\tau)t(\rho)\big|H(\tau,\rho)\big|d\tau d\rho\\
\leq\ &\int_0^x\int_0^x(x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho|t(\tau)t(\rho)E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)\\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)\\
&\times\left|\int_\tau^\rho|f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}}\left|\int_\tau^\rho|g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}}d\tau d\rho
\end{aligned}\tag{3.1.27}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.27) eşitsizliğinin sağ tarafına Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)} E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) t(\tau)t(\rho)\Big|H(\tau,\rho)\Big| d\tau d\rho \\
\leq\ & \Bigg[\int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| t(\tau)t(\rho) E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)\Big|\int_\tau^\rho |f'(y)|^r dy\Big| d\tau d\rho\Bigg]^{r^{-1}} \\
&\times\Bigg[\int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| t(\tau)t(\rho) E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)\Big|\int_\tau^\rho |g'(z)|^s dz\Big| d\tau d\rho\Bigg]^{s^{-1}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi,

$$\Big|\int_\tau^\rho |f'(y)|^r dy\Big| \leq ||f'||_{r,}^{r}, \quad \Big|\int_\tau^\rho |g'(z)|^s dz\Big| \leq ||g'||_{s,}^{s} \tag{3.1.28}$$

eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)} E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \qquad (3.1.29)\\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) t(\tau)t(\rho)\Big|H(\tau,\rho)\Big| d\tau d\rho \\
\leq\ & \Bigg[||f'||_{r,}^{r} \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| t(\tau)t(\rho) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) d\tau d\rho\Bigg]^{r^{-1}} \\
&\times\Bigg[||g'||_{s,}^{s} \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| t(\tau)t(\rho) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) d\tau d\rho\Bigg]^{s^{-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.29)'dan,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)} E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) t(\tau)t(\rho)\Big|H(\tau,\rho)\Big| d\tau d\rho \\
\leq\ & ||f'||_r ||g'||_s \Bigg[\int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| t(\tau)t(\rho) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) d\tau d\rho\Bigg]^{r^{-1}} \\
&\times\Bigg[\int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| t(\tau)t(\rho) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big) d\tau d\rho\Bigg]^{s^{-1}} \qquad (3.1.30)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)\\
&\times E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)t(\tau)t(\rho)\big|H(\tau,\rho)\big|d\tau d\rho\\
\leq\ & ||f'||_r||g'||_s\Bigg[\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}|\tau-\rho|t(\tau)t(\rho)\\
&\times E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)d\tau d\rho\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

yazılır. (3.1.25) ve (3.1.31) arasındaki ilişkilerle ve modülün özellikleri kullanılarak (3.1.22)'deki ilk eşitsizlik elde edilir.

$$0\leq\tau\leq x,\quad 0\leq\rho\leq x$$

olduğundan,

$$0\leq|\tau-\rho|\leq x$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)\\
&\times E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)t(\tau)t(\rho)\big|H(\tau,\rho)\big|d\tau d\rho\\
\leq\ & ||f'||_r||g'||_s x\Bigg[\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\beta-1)}\\
&\times E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\rho)^{\alpha};p\Big)t(\tau)t(\rho)d\tau d\rho\Bigg]\\
=\ & ||f'||_r||g'||_s\ x\Big(\big(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}t\big)(x;p)\Big)^2
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 3.1.6 ispatlanmış olur.

Eğer Teorem 3.1.6'da $t(x)=1$ alınırsa, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 3.1.11 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $f'\in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g'\in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ olmak üzere her $x>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için,

$$\begin{aligned}
&\left|(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}fg)(x;p)-\frac{1}{(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)}(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}f)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}g)(x;p)\right|\\
\leq\ & \frac{1}{2}\big(||f'||_r||g'||_s x(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma})(1)\big)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.12 (3.1.22) 'deki farklı parametre seçenekleri için, aşağıdaki gibi kesirli integral eşitsizlikleri belirlenebilir.

(i) $p = 0$ alınırsa, [42]'de Salim ve Faraj tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(ii) $\sigma = r = 1$ alınırsa, [38]'de Rahman ve arkadaşları tarafından kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\sigma = r = 1$ alınırsa, [50]'de Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\sigma = r = q = 1$ alınırsa, [33]'de Prabhakar tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.13 (3.1.22)'de $p = \omega = 0$ alınırsa, (2.2.6) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.7 t, $[0,\infty)$ aralığında pozitif, f ve g, $[0,\infty)$ aralığında iki dife- ransiyellenebilir fonksiyon olsun. $f' \in L_r\big([0,\infty)\big)$, $g' \in L_s\big([0,\infty)\big)$, $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olmak üzere her $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$, $\theta > 0$ için,

$$\begin{aligned}
& \Big|(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}t)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}tfg)(x;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}t)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}tfg)(x;p) \\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}tf)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}tg)(x;p) - (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}tf)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}tg)(x;p)\Big| \\
\leq \; & ||f'||_r||g'||_s \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)}|\tau-\rho|t(\tau)t(\rho) \\
& \times E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,p}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)d\tau d\rho \\
\leq \; & ||f'||_r||g'||_s x(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}t)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}t)(x;p) \qquad (3.1.33)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (3.1.24) özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)}E^{\delta,q,r,c}_{\alpha,\beta,\sigma}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \qquad (3.1.34) \\
& \times E^{\delta,q,r,c}_{\lambda,\theta,p}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)t(\tau)t(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho \\
= \; & (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}t)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}tfg)(x;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}t)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}tfg)(x;p) \\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}tf)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}tg)(x;p) - (\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\lambda,\theta,p}tf)(x;p)(\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{0^+,\alpha,\beta,\sigma}tg)(x;p)
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. (3.1.26) bağıntısından,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)} E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)t(\tau)\big|H(\tau,\rho)\big|d\tau \\
\leq\; &\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}|\tau-\rho| E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)t(\tau) \\
&\times\left|\int_\tau^\rho |f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}} \left|\int_\tau^\rho |g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}} d\tau
\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)} E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\lambda,\theta,p}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)t(\tau)t(\rho)\big|H(\tau,\rho)\big|d\tau d\rho \\
\leq\; &\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)}|\tau-\rho| E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\lambda,\theta,p}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)t(\tau)t(\rho)\left|\int_\tau^\rho |f'(y)|^r dy\right|^{r^{-1}} \left|\int_\tau^\rho |g'(z)|^s dz\right|^{s^{-1}} d\tau d\rho
\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

olur. (3.1.36)'nin sağ tarafına çift katlı integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)} E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\lambda,\theta,p}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)t(\tau)t(\rho)\big|H(\tau,\rho)\big|d\tau d\rho \\
\leq\; &\Bigg[\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)}|\tau-\rho| E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\lambda,\theta,p}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)t(\tau)t(\rho)\left|\int_\tau^\rho |f'(y)|^r dy\right| d\tau d\rho\Bigg]^{r^{-1}} \\
&\times\Bigg[\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)}|\tau-\rho| E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\lambda,\theta,p}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)t(\tau)t(\rho)\left|\int_\tau^\rho |g'(z)|^s dz\right| d\tau d\rho\Bigg]^{s^{-1}}
\end{aligned} \tag{3.1.37}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.28) ve (3.1.37)'den,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)} E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big) \\
&\times E_{\lambda,\theta,p}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)t(\tau)t(\rho)\big|H(\tau,\rho)\big|d\tau d\rho \\
\leq\; &||f'||_r||g'||_s\int_0^x\int_0^x (x-\tau)^{(\beta-1)}(x-\rho)^{(\theta-1)}|\tau-\rho|t(\tau)t(\rho) \\
&\times E_{\alpha,\beta,\sigma}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\tau)^{\alpha};p\Big)E_{\lambda,\theta,p}^{\delta,q,r,c}\Big(\omega(x-\rho)^{\lambda};p\Big)d\tau d\rho
\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

yazılır. (3.1.34), (3.1.38) ve modülün özellikleri kullanılarak (3.1.33)'deki ilk eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 3.1.14 (3.1.33)'de parametrelerin farklı seçimleri için, aşağıdaki gibi kesirli integral eşitsizlikleri belirlenebilir.

(i) $p = 0$ alınırsa, [42]'de Salim ve Faraj tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(ii) $\sigma = r = 1$ alınırsa, [38]'de Rahman ve arkadaşları tarafından kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\sigma = r = 1$ alınırsa, [50]'de Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\sigma = r = q = 1$ alınırsa, [33]'de Prabhakar tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Chebyshev eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.15 Teorem 3.1.7'de $\beta = \theta$, $\alpha = \lambda$ alınırsa Teorem 3.1.6 elde edilir.

Sonuç 3.1.16 (3.1.33)'de $p = \omega = 0$ alınırsa (2.2.7) eşitsizliği elde edilir.

3.1.2 Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü İçin Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde yeni uyumlu kesirli integral operatörü ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1.8 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ olsun. Sol ve sağ yeni uyumlu kesirli integral operatörleri sırasıyla,

$$ {}^{\beta}_{a}\mathfrak{J}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}} dt; \tag{3.1.39} $$

$$ {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}_{b} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^b \left(\frac{(b-x)^{\alpha} - (b-t)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(b-t)^{1-\alpha}} dt \tag{3.1.40} $$

şeklinde tanımlanır [17].

Sonuç 3.1.17 (i) $a = 0$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, (3.1.39)'daki kesirli integral (2.2.1) Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenir.

(ii) $b = 0$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, (3.1.40)'daki kesirli integral (2.2.2) Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenir.

(iii) $a = 0$ ve $\alpha \to 0$ alınırsa, (3.1.39)'daki kesirli integral [3]'deki Hadamard kesirli integraline indirgenir.

(iv) $b = 0$ ve $\alpha \to 0$ alınırsa, (3.1.40)'daki kesirli integral [3]'deki Hadamard kesirli integraline indirgenir.

(v) $a = 0$ alınırsa, (3.1.39)'daki kesirli integral [19]'daki genelleştirilmiş kesirli integrale indirgenir.

(vi) $b = 0$ alınırsa, (3.1.40)'daki kesirli integral [19]'daki genelleştirilmiş kesirli integrale indirgenir.

Bu bölümde bu operatör,

$$^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x \left(\frac{x^\alpha - t^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} dt$$

şeklinde kullanılacaktır.

Teorem 3.1.8 f ve g, $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilir iki senkronize fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$(^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha} fg)(x) \geq \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}{x^{\alpha\beta}} (^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha} f)(x)(^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha} g)(x) \tag{3.1.41}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\alpha, \beta > 0$ ve Γ gama fonksiyonudur.

İspat. f ve g, $[0, \infty)$ aralığında senkronize olduğu için,

$$\big(f(u) - f(v)\big)\big(g(u) - g(v)\big) \geq 0$$

veya eşdeğer olarak;

$$f(u)g(u) + f(v)g(v) \geq f(u)g(v) + f(v)g(u) \tag{3.1.42}$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.1.42) eşitsizliğinin her iki tarafı $(x \in \mathbb{R}^+, 0 < u < x)$ olmak üzere,

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}} \left(\frac{x^\alpha - u^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1}$$

ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}} \left(\frac{x^\alpha - u^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} f(u)g(u) + \frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}} \left(\frac{x^\alpha - u^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} f(v)g(v) \\ \geq\ & \frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}} \left(\frac{x^\alpha - u^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} f(u)g(v) + \frac{1}{\Gamma(\beta)u^{1-\alpha}} \left(\frac{x^\alpha - u^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta-1} f(v)g(u) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının $(0,x)$ üzerinde, u değişkenine göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(u)g(u)}{u^{1-\alpha}}du+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(v)g(v)}{u^{1-\alpha}}du \\
\geq\ &\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(u)g(v)}{u^{1-\alpha}}du+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(v)g(u)}{u^{1-\alpha}}du
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
&({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha fg)(x)+f(v)g(v)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{du}{u^{1-\alpha}} \\
\geq\ & g(v)({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha f)(x)+f(v)({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha g)(x)
\end{aligned}$$

ve

$$({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}f(v)g(v) \geq g(v)({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha f)(x)+f(v)({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha g)(x) \quad (3.1.43)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{x^\alpha-u^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{du}{u^{1-\alpha}} &= \alpha^{\beta-1}\int_0^x (x^\alpha-u^\alpha)^{\beta-1}u^{\alpha-1}du \\
&= \alpha^{\beta-1}x^{\alpha(\beta-1)}\int_0^x u^{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{u}{x}\right)^\alpha\right)^{\beta-1}du \\
&= \frac{\alpha^{\beta-1}x^{\alpha(\beta-1)}x^\alpha}{\alpha}\int_0^1 (1-t)^{\beta-1}dt \\
&= \frac{x^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta}\quad \frac{-(1-t)^\beta}{\beta}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{x^{\alpha\beta}}{\beta\alpha^\beta}
\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.1.43) eşitsizliğinin her iki tarafı,

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}$$

ifadesi ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha fg)(x) \\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}f(v)g(v) \\
\geq\ &\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}g(v)({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha f)(x) \\
&+\frac{1}{\Gamma(\beta)v^{1-\alpha}}\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}f(v)({}^\beta\mathfrak{J}^\alpha g)(x) \quad (3.1.44)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi (3.1.44) eşitsizliğinde $(0,x)$ üzerinde integral alınırsa,

$$
\begin{aligned}
& ({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{dv}{v^{1-\alpha}} \\
& +\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(v)g(v)}{v^{1-\alpha}}dv \\
\geq\ & ({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{g(v)}{v^{1-\alpha}}dv \\
& +({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{f(v)}{v^{1-\alpha}}dv.
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x) \\
\geq\ & ({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)+({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)
\end{aligned}
$$

yazılır. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1.18 Eğer Teorem 3.1.8'de $\alpha=1$ alırsak, (3.1.41) eşitsizliği Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren (2.2.3) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.1.9 f ve g, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilir iki senkronize fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
& \frac{x^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^\tau}({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x) \\
\geq\ & ({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)+({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)
\end{aligned}
\tag{3.1.45}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\alpha,\beta,\tau>0$ ve Γ Gamma fonksiyonudur.

İspat. (3.1.43) eşitsizliğinin her iki tarafı,

$$
\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\Big(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\Big)^{\tau-1}
$$

ifadesi ile çarpılırsa;

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\Big(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\Big)^{\tau-1}({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x) \\
& +\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\Big(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\Big)^{\tau-1}\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}f(v)g(v) \\
\geq\ & \frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\Big(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\Big)^{\tau-1}g(v)({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x) \\
& +\frac{1}{\Gamma(\tau)v^{1-\alpha}}\Big(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\Big)^{\tau-1}f(v)({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x).
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafında v değişkenine göre 0 ile x arasında integral alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x)}{\Gamma(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{dv}{v^{1-\alpha}}\\
&+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}\frac{1}{\Gamma(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{f(v)g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
\geq\ &\frac{({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)}{\Gamma(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{g(v)}{v^{1-\alpha}}dv\\
&+\frac{({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)}{\Gamma(\tau)}\int_0^x\left(\frac{x^\alpha-v^\alpha}{\alpha}\right)^{\tau-1}\frac{f(v)}{v^{1-\alpha}}dv.
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^\tau}({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x)+\frac{x^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}fg)(x)\\
\geq\ &({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)+({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}f)(x)({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}g)(x)
\end{aligned}$$

yazılır ve bu eşitsizliğin v değişkenine göre $(0,x)$ aralığında integrali alınırsa, Teorem 3.1.8'in ispatında olduğu gibi istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1.19 Teorem 3.1.9'da $\tau=\beta$ alınırsa, Teorem 3.1.8 elde edilir.

Sonuç 3.1.20 Teorem 3.1.9'da $\alpha=1$ alınırsa, (3.1.45) eşitsizliği Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren (2.2.4) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 3.1.10 $(f_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ $[a,b]$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. $\alpha,\beta>0$ için,

$$\left({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(x)\geq\left(\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}{x^{\alpha\beta}}\right)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f_i)(x). \tag{3.1.46}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Bu teorem $n\in\mathbb{N}$ için tümevarım yöntemiyle ispatlanır. $n=1$ için (3.1.46) açıkça sağlanır. $n=2$ için, f_1 ve f_2 fonksiyonlarının her ikisi de $\mathbb{R}^+$ da artan olduğundan,

$$\big(f_1(x)-f_1(y)\big)\big(f_2(x)-f_2(y)\big)\geq 0.$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi, $n=2$ için (3.1.46)'nın ispatı Teorem 3.1.8'e paralel olarak devam edecektir. Farz edelim ki eşitsizlik (3.1.46), bazı $n\in\mathbb{N}$ için geçerlidir. Görülür ki $f:=\prod_{i=1}^{n}f_i$ $\mathbb{R}^+$ da artandır. Artan her f_i için $g:=f_{n+1}$ olsun. $n=2$, f ve g fonksiyonlarına uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}f_if_{n+1}\right)(x)\ &\geq\ \frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}{x^{\alpha\beta}}\left({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}\prod_{i=1}^{n}f_i\right)\left({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f_{n+1}\right)(x)\\
&\geq\ \left(\frac{\Gamma(\beta+1)\alpha^\beta}{x^{\alpha\beta}}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n+1}\left({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}f_i\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. n için tümevarım hipotezi ikinci eşitsizlik için kullanılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.21 Teorem 3.1.10'da $\alpha = 1$ alınırsa, (3.1.46) eşitsizliği Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren (2.2.5) eşitsizliğine indirgenir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinin temelini oluşturan üçüncü bölümde, ilk olarak genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü içeren yeni Chebyshev tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra yeni uyumlu kesirli integral operatörü içeren yeni Chebyshev tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların bazı özel halleri literatürde mevcut önceki çalışmaları kapsamaktadır. Elde edilen bu yeni sonuçlar üç farklı makale olarak hazırlanmıştır. Bu makalelerden birincisi, "On some new Chebyshev type inequalities for fractional integral operators containing a further extension of Mittag-Leffler function in the kernel" başlıklı çalışmadır. İkincisi, "Chebyshev type inequalities involving extended generalized fractional integral operators" başlıklı çalışmadır. Üçüncüsü ise, "Conformable fractional integral inequalities of Chebyshev type" başlıklı çalışma altında "International Conference on Mathematics and Related Sciences (ICMRS 2018)" uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup "Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales" isimli dergide basılmıştır [46]. İlgili araştırmacılar bu tezde verilen yöntemlerden, özdeşliklerden ve sonuçlardan faydalanarak bu tezde kullanılmayan kesirli integral operatörleri için Chebyshev tipli eşitsizlikler elde edebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Agarwall, RP., Luo, MJ. & Raina, RK. (2016). On Ostrowski type inequalities. *Fasciculi Mathematici*, 204, 5-27.

[2] Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M. & Torebek, BT. (2019). Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Dragomir-Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via fractional integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 353, 120-129.

[3] Anatoly, AK. (2001). Hadamard-type fractional calculus. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 38(6), 1191-1204.

[4] Andrić, M,. Farid, G. & Pečarić, J. (2018). A further extension of Mittag-Leffler function. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 21(5), 1377-1395.

[5] Awan, KM. (2016). On the Stefensen's generalization of the Chebyshev functional with applications, Ph.D Thesis, University of Sargodha, Pakistan.

[6] Balenau, D. & Purohit, SD. (2014). Chebyshev type integral inequalities involving the fractional hypergeometric operators. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Hindawi.

[7] Balenau, D., Purohit, SD. & Agarwal, P. (2014). On fractional integral inequalities involving hypergeometric operators. *Chinese Journal of Mathematics,* 2014.

[8] Balenau, D., Purohit, SD. & Prajapati, JC. (2016). Integral inequalities involving generalized Erdélyi-Kober fractional integral operators. *Open Mathematics*, 14(1), 89-99.

[9] Belarbi, S. & Dahmani, Z. (2009). On some new fractional integral inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 10(3), 1-12.

[10] Čebyšev, PL. (1882). O priblizennyh vyraženijah odnih integralov čerez drugie. Soobščenija i Protokoly Zasedamiǐ Matematišeskogo Obšestva pri Imperatorskom Har'kovskom Universite, 2, 93-98. Polnoe Sobranie Sočinenii P. L. Čebyševa. Moskva, Leningrad 1948a, 128-131.

[11] Chinchane, VL. & Pachpatte, D. (2013). A not on some integral inequalities via Hadamard integral. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 4(1), 125-129.

[12] Curiel, L. & Galué, L. (1996). A generalization of the integral operators involving the Gauss hypergeometric function. *Revista Téchnica de la Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia*, 19(1), 17-22.

[13] Dahmani, Z., Mechouar, O. & Brahami, S. (2011). Certain inequalities related to the chebyshev's functional involving a Riemann-Liouville operator. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3(4), 38-44.

[14] Daiya, J., Ram, J. & Saxena, RK. (2015). New fractional integral inequalities associated with pathway operator. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 19(2), 121-126.

[15] Diaz, R. & Pariguan, E., (2007). On hypergeometric functions and pochhammer k-symbol. *Divulgaciones Matemáticas*, 15(2), 179-192.

[16] Dragomir, SS. (1998). Some integral inequalities of Grüss type. *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications Research Report Collection*, 1(2).

[17] Jarad, F., Uğurlu, E., Abdeljawad, T. & Baleanu, D. (2017). On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, 2017, 247.

[18] Kannapan, P. (2009). Functional Equations and Inequalities with Applications. *Springer*,New York, USA, 803.

[19] Katugampola, UN. (2011). A new approach to generalized fractional integrals. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 860-865.

[20] Katugampola, UN. (2014). New approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4), 1-15.

[21] Katugampola, UN. (2016). New fractional integral unifying six existing fractional integrals. preprint arXiv:1612.08596.

[22] Khan, TU. & Khan, MA. (2019). Generalized conformable fractional integral operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 346, 378-389.

[23] Kilbas, AA., Srivastava, HM. & Trujillo, JJ. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier Science Limited, 204, Amsterdam, 523.

[24] Kiryakova, VS. (1994). Generalized Fractional Calculus and Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 301.

[25] Marangozoğlu E. (2018). Genelleştirilmiş h, k-Riemann-Liouville kesirli integraller için Grüss tipli integral eşitsizlikler, Genelleştirilmiş h,k-Riemann-Liouville kesirli integraller için Grüss tipli integral eşitsizlikleri. Yüksek lisans tezi, Fen bilimleri enstitüsü, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş.

[26] Mitrinović, DS. & Vasić, PM. (1974). History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities. *Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i Fizika*, (461-497), 1-30.

[27] Mitrinović, DS., Pečarić, JE. & Fink, AM. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, UK, 744

[28] Mitrinović, DS . & Pečarić, JE. (1990). History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities, II, Rad JAZU (Zagreb), 450, fasc. 9, 139-156.

[29] Mittag-Leffler, GM. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(z)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 137(2), 514-558.

[30] Nair, SS. (2009). Pathway fractional integration operator. *Fractional Calculus and Applied Anaysis*, 12(3), 237-251.

[31] Nisar, KS., Rahman, G. & Mehrez, K. (2019). Chebyshev type inequalities via gene- ralized fractional conformable integrals. *Journal of Inequalities Applications*, 2019(245).

[32] Ntouyas, SK., Purohit, SD. & Tariboon, J. (2014). Certain Chebyshev type integral inequalities involving Hadamard's fracional operators. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article ID 249091, Hindawi.

[33] Prabhakar, TR. (1971). A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Mathematical Journal*, 19, 7-15.

[34] Purohit, SD. & Kalla, SL. (2014). Certain inequalities related to the Chebyshev's functional involving Erdély Kober operators. *Scientia Series A, Mathematical Sciences*, 25, 55-63.

[35] Purohit, SD. & Raina, RK. (2013). Chebyshev type inequalities for the saigo fractional integrals and their q-analogues. *Journal of Mathematical Inequalities.* 7(2), 239-249.

[36] Qi, F., Habib, S., Mubeen, S. & Naeem, MN. (2019). Generalized k-Fractional conformable integrals and related inequalities. *American Institute of Mathematical Sciences Series Applied Mathematics*, 4(3), 343-358.

[37] Qi, F., Rahman, G., Hussain, SM., Du, WS. & Nisar, KS. (2018). Some inequalities of Čebyšev type for conformable k-fractional integral operators. *Symmetry*, 10(11), 614.

[38] Rahman, G., Baleanu, D., Qurashi, MA., Purohit, SD., Mubeen, S. & Arshad, M. (2017). The extended Mittag-Leffler function via fractional calculus. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 4244–4253.

[39] Raina, RK. (2010). Solution of Abel-type integral equation involving the Appell hypergeometric function. *Integral Transforms and Special Functions*, 21(7), 515-522.

[40] Raina, RK. (2005). On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators. *East Asian Mathematical Journal*, 21(2), 191-203.

[41] Saigo, M. (1978). A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions. *Kyushu University*, 11, 135-143.

[42] Salim, TO. & Faraj, AW. (2012). A generalization of Mittag-Leffler function and integral operator associated with fractional calculus. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 3(5), 1-13.

[43] Samko, SG., Kilbas, AA. & Marichev, OI. (1993). Fractional Integrals and Derivatives. (1), Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon.

[44] Sarıkaya, MZ., Dahmani, Z., Kırış, ME. & Ahmad, F. (2016). (k,s)-Riemann-Liouville fractional integral and applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(1), 77-89.

[45] Set, E., Choi, J. & Mumcu, İ. (2017). Chebyshev type inequalities involving generalized katugampola fractional integral operators. *Tamkang Journal of Mathematics*, 50(4), 381-390.

[46] Set, E., Mumcu, İ. & Demirbaş, S. (2019). Conformable fractional integral inequalities of Chebyshev type. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A Matemáticas*, 113(3), 2253-2259.

[47] Shukla, AK. & Prajapati, JC. (2007). On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336(2), 797-811.

[48] Sousa, J. & De Oliviera, EC. (2017). The Minkowski's inequality by means of a generalized fractional integral. *American Institute of Mathematical Sciences,* 3(1), 131-147.

[49] Srivastava, HM. & Choi, J. (2012). Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

[50] Srivastava, HM. & Tomovski, Z. (2009). Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Applied Mathematics and Computation*, 211(1), 198-210.

[51] Usta, F., Budak, H. & Sarıkaya, MZ. (2017). On Chebyshev type inequalities for fractional integral operators. In AIP Conference Proceedings, 1833(1), 020045. AIP Publishing.

[52] Usta, F., Sarıkaya, MZ. & Budak, H. (2017). Some new Chebyshev type integral inequalities via fractional integral operator with exponential kernel. Proceeding of 111^{th} The IIER International Conference, 23^{rd}-24^{th} July, Mecca, Saudi Arabia.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Sevdenur DEMİRBAŞ
Doğum Yeri	Fatsa
Doğum Tarihi	07.11.1994
Uyruğu	❒ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	05318445837
E-Posta Adresi	svdnrdmrbs@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Atatürk Üniversitesi
Fakülte	Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi
Bölümü	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Tarihi	09.01.2017
Yayınlar	