T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BLOK MATRİSLERDE MOORE-PENROSE İNVERS HESAPLAMA YÖNTEMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

BİLGE DEMİREL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

BİLGE DEMİREL

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BLOK MATRİSLERDE MOORE-PENROSE İNVERS HESAPLAMA YÖNTEMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

BİLGE DEMİREL

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 74 SAYFA

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde blok parçalanmış matrislerde Moore-Prnrose kavramı ele alınmıştır. Bununla ilgili olarak öncelikle sütun parçalanmış bir $A = (A_1, A_2)$ matrisinin Moore-Penrose inversi için bazı özel formüller geliştirilmiştir. Daha sonra operator değerli 2x2 blok parçalanmış matrislerin Moore-Penrose inverslere sahip olabilmeleri için gerek ve yeter şartlar verilerek bu inverslerin bireysel alt bloklar cisinden bazı yeni gösterimleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiş ve beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matris, Kare Matris, Nonsingüler Matris, Parçalanmış Martis, Determinant, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Moore-Penrose İnvers, Rank.

ABSTRACT

CALCULATION METHODS OF MOORE-PENROSE INVERSE IN BLOCK MATRICES AND SOME ITS APPLICATIONS

BİLGE DEMİREL

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 74 PAGES

SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, it is given an introduction and the aim of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems which is used in this thesis stated and proved. In the third chapter, it is considered Moore-Penrose invers of block partitioned martices. Firstly, with concerning this, it is given some particular formulae for the Moore–Penrose inverse of a columnwise partitioned matrix $A = (A_1, A_2)$. Then we obtained necessary and sufficient conditions for $2x2$ block operator valued matrices to be Moore-Penrose invertible and give some new representations of such inverses in terms of the individual blocks. In the fourth chapter, it is given some results and propositions and references that used in this thesis are listed in fifth chapter.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Singular Matrix, Partitioned Matrix, Determinant, Inverse of a Matrix, Generalized Invers, Moore-Penrose Invers, Rank.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman engin bilgi ve deneyimleriyle yolumu aydınlatan değerli hocam sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN’ e içten teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hem de hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K cismi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$	: $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{m}}$ **veya** $\mathbb{C}_{\boldsymbol{m,n}}$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\boldsymbol{I_n}$	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	: A matrisinin transpoz matrisi
$\overline{\boldsymbol{A}}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
$\boldsymbol{A}^{*}$	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	: A matrisinin determinantı
$\mathbf{Ek}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ek matrisi
$\boldsymbol{A_{ij}}$	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
$\boldsymbol{A^{-1}}$	: A matrisinin inversi
$\mathbf{indeks}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin indeksi
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin rankı
$\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin izi
$\boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\boldsymbol{\Re}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$\boldsymbol{A}^{-}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1})}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$\boldsymbol{A}^{(\mathbf{2})}$	: A matrisinin dış inversi
$\boldsymbol{A_0}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{(\mathbf{1,2})}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ **veya** $\boldsymbol{A}^{+}$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
$\mathbf{köş}(\boldsymbol{A})$	: A matrisinin köşegen elemanları
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Bugün matris teorisi, teorik matematik, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi ve elektrik mühendisliği gibi çeşitli teknik alanlar içinde gerekli matematiksel temel bilginin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından beri bilinmektedir. İngiliz matematikçi Sylvester, 1850 yılında 'matris' kavramını kullanmıştır. 1853 yılında İngiliz bilgini Hamilton '*Lineer and Vector Functions*' isimli eserinde matrislerin bazı özelliklerinden faydalanmış fakat matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçisi olan Cavley, 1858 yılında zamanında çok meşhur olan '*Memorie on the Theory of Matrices*' isimli çalışmasında matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha sonraları Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili yeni kavram ve teoremler üzerinde çalışmışlardır.

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda herhangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao, bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde, singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Ancak Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır. Rao, daha sonraki bir çalışmasında ise lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olacak ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville, Bjerhammer, Ben-Israel ve Charnes, Chipman, Chipman ve Rao, Scroggs ve Odell sayılabilir. Bott ve Duffin, bir kare matrisin kısıtlı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda oldukça fazla kullanılır. Chernoff, singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. 1967 yılında bir yayınında Rao, değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır. Genelleştirilmiş inverslerle ilgili sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünün mevcut olup-olmadığının ve mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan Moore-penrose invers adı verilen bir genelleştirilmiş invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Daha sonra keyfi mertebeden bir matrisi blok matrisler şeklinde parçalayarak alt blokların durumlarına göre bu matrislerin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversleri için bazı ifadeler ortaya konulmuş ve ayrıca bu tipten inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler verilmiştir. Bununla ilgili olarak, verilen bir matris 1x2 veya 2x2 tipinde blok parçalanmış matris biçiminde ifade edilerek Moore–Penrose inversler için çeşitli rank şartları altında bazı genel formüller verilmiş ve blok parçalanmada içerilen alt blok matrislerin durumlarına göre Moore-Penrose inversler için bazı yeni ifadeler elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1 i) $\mathbb{K}$ bir cisim, $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililerinin kümesini $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile gösterelim. Bir $f: A \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \longrightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

olarak tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olmak üzere keyfi seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu sayı tablosuna $\mathbb{K}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipinde bir matris denir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

veya kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. Her bir (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına ise A matrisinin (i, j)–yinci bileşeni denir.

ii) Bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ veya $\mathbb{K}^{m \times n}$ ile gösterilir.

iii) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde olmak üzere, eğer her (i, j) için $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ise A ve B matrislerine eşit matrisler denir.

iv) $A = [a_{ij}]$ matrisi $m \times n$ tipinde olmak üzere, her bir (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine sıfır matris denir.

v) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı, (i, j)–yinci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+: \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + +b_{12} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

vi) $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Başka bir deyişle

$$.: \ \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c,A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

dir.

vii) $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matris olup

$$.: \ \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A,B) \longrightarrow A.B = C$$

$$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = \left[\textstyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right], \ 1 \le i \le m, \ \ 1 \le j \le n$$

şeklinde veya daha açık olarak

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Uygun A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.2 Eğer özel olarak $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı matrise bir reel matris ve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alınırsa matrise bir kompleks matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.3 i) Eğer bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise, yani matrisin satır sayısı sütun sayısına eşitse, A matrisine bir kare matris denir. Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$elemanlarına köşegen (esas köşegen) elemanları denir.

ii) Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisinin köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise bu matrise köşegen matris denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots , a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = \text{k}$, $\text{k} \in \mathbb{K}$ ise matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan bir kare matrise birim matris denir ve $n-$ yinci mertebeden bir birim matris

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

v) Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satır ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$matrisine A matrisinin transpozu denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

olduğu kolayca görülür.

vi) A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine simetrik matris denir.

vii) A ve B aynı mertebeden iki kare matris olmak üzere eğer $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere değişmeli matrisler denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.4 i) $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine tanımlı birebir ve örten bağıntısına veya buna eş değer olarak $1,2, \dots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2, \dots n\}$ kümesinin bir σ permütasyonu denir. Böyle bir permütasyon,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n \quad , \; j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu şekildeki permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya çift veya tek permütasyon denir. O halde bir σ permütasyonunun işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

ii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı bir kare matris olsun. Ayrıca

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım $a_{1j_1}.a_{2j_2}.\dots.a_{nj_n}$ şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi bu şekilde $n!$ tane çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani,

$$|A| = \sum_\sigma (sgn\sigma) a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n mertebedendir. Bu durumda 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir. Başka bir deyişle $A = [a]$ ise, bu durumda $\det(A) = |a| = a$ olur. Öte yandan 2×2 tipindeki bir A matrisi için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

iii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının $|M_{ij}|$ ile gösterilen minörü, A matrisinden i–yinci satırın ve j–yinci sütunun atılması ile oluşan alt kare matrisin determinantıdır.

iv) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin keyfi bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. Bu durumda bir a_{ij} elemanının A_{ij} ile gösterilen kofaktörü (veya işaretli minörü veya eş çarpanı),

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\,|M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır.

v) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp elde edilen çarpanların toplanmasıyla hesaplanır. Başka bir deyişle herhangi i ve j $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|M_{ik}| \tag{2.3}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|M_{ik}| \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Her bir i için, (2.3) açılımına, *A* matrisinin determinantının i–yinci satıra göre açılımı, her bir j için, (2.4) açılımına ise A matrisinin determinantının j–yinci sütuna göre açılımı denir.

vi) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için eğer $|A| = 0$ ise, *A* matrisine singüler matris, $|A| \neq 0$ ise, *A* matrisine nonsingüler (veya regüler) matris denir (Branson R., 1999).

Tanım 2.5 i) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

matrisine *A* matrisinin ek matrisi denir ve

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

ii) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine A matrisinin inversi denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup,

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \tag{2.5}$$

ile verilir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.6}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.3 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisi için A^{-1} invers matrisi tektir.

ii) A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) A ve B çarpıma uygun nonsingüler matrisler ise AB çarpımı da nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Branson R., 1999).

Tanım 2.6 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için eğer $A^2 = A$ ise, bu takdirde A matrisine idempotent matris denir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine bunların eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği (eş matrisi) denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir (Branson R., 1999).

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine hermitian matris denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine normal matris denir.

v) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine birimsel (unitary) matris denir.

vi) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matris olmak üzere, eğer $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortogonal matris denir (Branson R., 1999).

Teorem 2.5 A ve B uygun matrisler olmak üzere,

i) $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

ii) $(A^*)^* = A$.

iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

iv) $(AB)^* = B^* A^*$.

eşitlikleri sağlanır (Branson R., 1999).

Tanım 2.7 i) $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim. Bu durumda A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin satır rankı ve A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin sütun rankı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.6 Bir matrisin herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi o matrisin satır rankını değiştirmez (Branson R., 1999).

Teorem 2.7 i) Elemanter işlemler herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez.

ii) Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir (Branson R., 1999).

Tanım 2.8 Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve rank(A) veya $r(A)$ şeklinde gösterilir (Branson R., 1999).

Teorem 2.8 A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.9 $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine nonsingüler matris denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine singüler matris denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.10 i) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ kümesine A marisinin null (sıfır) uzayı denir.

ii) $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. $\Re(A) = \{y: Ax = y\}$ kümesine A matrisinin ranj (sütun) uzayı denir (Hacısalihoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.9 Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere,

i) $m = n = r \Rightarrow PAQ = I$

ii) $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I\,, 0]$

iii) $m > r,\ n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dir (Lancaster, P., 1969).

Teorem 2.10 Çarpıma uygun A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani,

$$r(AB) \leq \min\{r(A)\,,\ r(B)\} \tag{2.7}$$

dir (Lancaster, P., 1969)

2.2 Genelleştirilmiş İnversler

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^+ veya $A^\dagger$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A,$

(ii) $GAG = G,$

(iii) $(AG)^* = AG,$

(iv) $(GA)^* = GA.$ (2.8)

Bu durumda eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu G matrisine, A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine, A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir.

Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise, A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

Bir A nonsingüler matrisinin inversi olan A^{-1} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayacağı açıktır. Yani $A^{-1} = A^{+}$ olur. Bununla birlikte, eğer A bir singüler matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^{+} matrisinin mevcut olup olmadığı ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Bu kısımda her A matrisi için bir A^{+} matrisinin var ve tek olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu şekilde tanımlanan Moore–Penrose inversin birtakım özellikleri verilecektir.

Teorem 2.11 Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^{+} matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

Teorem 2.12 Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir tek A^{+} matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise $A^{+} = 0$ olup $A \neq 0$ alınabilir. A matrisi r ranklı olsun. Böylece

$$A = BC \tag{2.9}$$

olarak parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı olup, B^*B ve CC^* matrisleri nonsingülerdir. Bu durumda, A^{+}

$$A^{+} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.10}$$

olarak alınırsa, A^{+} matrisi istenen Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^{+}A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$

$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$

(ii) $A^{+}AA^{+} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^{+},$

(iii) $(AA^{+})^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$

$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$$

olduğu görülür. Moore–Penrose inversin tek olduğunu göstermek için A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki A_1^+ ve A_2^+ Moore–Penrose inversinin mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani, A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.13 $m \times n$ tipinde bir A matrisinin Moore–Penrose inversi $n \times m$ tipindedir.

Teorem 2.14 i) $m \times n$ tipinde bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^+ = \frac{1}{m.n}A^*$ dir.

ii) $a,\ n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü ise, bu durumda $a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$ şeklindedir.

iii) $a,\ 1 \times n$ tipinde bir satır vektörü ise, bu durumda a^+, $a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$ şeklindedir.

İspat: i) Bunun için verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

(i) $AA^+A = A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^*A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^+AA^+ = \left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = \frac{1}{m.n}(A^*A)\left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = \left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = A^+,$

(iii) $(AA^+)^* = \left(A\frac{1}{m.n}A^*\right)^* = A\frac{1}{m.n}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = \left(\frac{1}{m.n}A^*A\right)^* = \frac{1}{m.n}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

ii) a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = a(a^*a)^{-1}a^*a = a(a^*a)^{-1}(a^*a) = a,$

(ii) $a^+aa^+ = (a^*a)^{-1}a^*a(a^*a)^{-1}a^* = (a^*a)^{-1}a^* = a^+$,

(iii) $(aa^+)^* = [a(a^*a)^{-1}a^*]^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^+$,

(iv) $(a^+a)^* = [(a^*a)^{-1}a^*a]^* = (a^*a)^{-1}a^*a = a^+a$

olduğu görülür.

iii) a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten,

(i) $aa^+a = aa^*(aa^*)^{-1}a = (aa^*)(aa^*)^{-1}a = a$,

(ii) $a^+aa^+ = a^*(aa^*)^{-1}aa^*(aa^*)^{-1} = a^*(aa^*)^{-1} = a^+$,

(iii) $(aa^+)^* = [aa^*(aa^*)^{-1}]^* = aa^*(aa^*)^{-1} = aa^+$,

(iv) $(a^+a)^* = [a^*(aa^*)^{-1}a]^* = a^*(aa^*)^{-1}a = a^+a$

olduğu görülür.

Teorem 2.15 A herhangi bir matris olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.11}$$

İspat: (2.9) bağıntısındaki gibi $A = BC$ alınsın. Bu durumda $A^* = C^*B^*$ olduğundan,

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \text{ ve } \quad (A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

elde edilir ki, bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten,

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+,$$

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+,$$

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$$

olur. Böylece,

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

elde edilir. Buradan da $(A^*)^+ = (A^+)^*$ olduğu görülür.

Teorem 2.16 Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani, herhangi bir A matrisi için, $(A^+)^+ = A$ olur.

Teorem 2.17 Herhangi bir A matrisi için $r(A) = r(A^+)$ dır.

İspat: Eğer Teorem 2.10 $AA^+A = A$ eşitliğine uygulanırsa

$$r(A) = r(AA^+A) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A^+),$$

ve benzer şekilde, $A^+AA^+ = A^+$ ifadesine uygulanırsa

$$r(A^+) = r(A^+AA^+) \leq \min\{r(A),\ r(A^+)\} \leq r(A)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten istenen sonuç sağlanır.

Bu teoremin sonucu olarak eğer A matrisinin rankı r ise, $A^+, AA^+, A^+A, AA^+A, A^+AA^+$ matrislerinin her birinin rankının da r olduğu görülür.

Teorem 2.18 Eğer A simetrik ve idempotent bir matris ise, bu takdirde $A^+ = A$ dir.

Teorem 2.19 $B = \text{Köş}\{\mathrm{b}_{11}, \mathrm{b}_{22}, \dots, \mathrm{b}_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^+, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $\mathrm{b}_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $\mathrm{b}_{ii} = 0$ ise "0" olan bir köşegen matristir.

Teorem 2.19 i) A, $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^+ = I_m$,

ii) A, $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise, $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^+A = I_n$ olur.

İspat: Her iki durum için verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda,

i) (i) $AA^+A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A,$

(ii) $A^+AA^+ = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}$

$$= A^*(AA^*)^{-1}(AA^*)(AA^*)^{-1} = A^*(AA^*)^{-1} = A^{+\dagger},$$

(iii) $(AA^+)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$

$$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^+A$

olur.

ii) (i) $AA^+A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$

(ii) $A^+AA^+ = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^*$$

$$= (A^*A)^{-1}A^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = ((A^*A)^{-1}A^*A)^* = ((A^*A)^{-1}(A^*A))^* = I^* = I$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A) = (A^*A)^{-1}A^*A = A^+A$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.20 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere B ve C matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde olmak üzere $r(A) = r(B) = r$ olsun. Bu takdirde,

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{2.12}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: B matrisi sütun ranklı ve C matrisi satır ranklı olduğundan Teorem 2.19 e göre $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ ve $B^+ = (BB^*)^{-1}B^*$ olur ve buradan,

$$C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$$

elde edilir. Bu ise zaten $(BC)^+$ matrisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. PARÇALANMIŞ MATRİSLERDE MOORE-PENROSE İNVERSLER

3.1 Sütun Parçalanmış Matrisin Moore-Penrose İnversi

Bu kısımda tam sütun rank varsayımı altında sütun parçalanmış bir $A = (A_1, A_2)$ matrisinin Moore-Penrose inversi için bazı özel formüller geliştirilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar genelleştirilmiş ve genişletilmiştir. Genelleştirme A_1 ve A_2 bloklarının ranj uzaylarının ayrık olması şartının zayıflığını içerirken genişletme A' nın tüm genelleştirilmiş inverslerinin sınıfının dikkate alınmasından ibarettir. Öte yandan eğer $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ biçiminde satır parçalanmış olarak verilirse, bu takdirde $B' = (B_1', B_2')$ yazılabileceğinden ve $(K^*)^+ = (K^+)^*$ olduğu gerçeği dikkate alınırsa aşağıda verilecek teoremlerin benzerleri satır parçalanmış matrisler için de düzenlenebilir. Bu nedenle bu kısımda satır parçalanmış matris durumu ele alınmamıştır.

$\mathbb{C}^{mxn} = \mathbb{C}_{mxn}$ kümesi $m \times n$ kompleks matrisler kümesini göstermek üzere $A\{1\}$ ile $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin tüm genelleştirilmiş inverslerinin kümesini gösterelim, yani

$$A\{1\} = \{G \in \mathbb{C}^{nxm}: AGA = A\} \tag{3.1}$$

olsun.

Aşağıdaki iki lemma bundan sonraki kısımlarda verilecek sonuçların belirlenmesinde önemli bir rol oynayacaktır. Bunlardan birincisi, Penrose tarafından verilen bir matrisin Moore–Penrose inversinin bir karakterizasyonunu sağlar.

Lemma 3.1 Bir $G \in \mathbb{C}^{nxm}$ matrisinin bir $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin Moore–Penrose inversi olabilmesi için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(G^*) \subseteq \mathfrak{R}(A)$ ve GA matrisinin $\mathfrak{R}(A^*)$ üzerine ortogonal izdüşüm olmasıdır (Baksalary K.J. ve Baksalary, O. M., 2007).

İspat. Bu durumda $\mathfrak{R}(A^*)$ ranj uzayı üzerindeki bir ortogonal izdüşüm A^+A olarak ifade edilebildiğinden, ispat

$$G = A^+ \Leftrightarrow \text{Bir } L \in \mathbb{C}^{nxn} \text{ için } G = LA^* \text{ ve } GA = A^+A \tag{3.2}$$

olduğunun gösterilmesine dönüşür. Bu durumda ispatın "⇒ kısmı" $L = A^+(A^+)^*$ alarak kolayca görülürken, bunun tersi sonuç, (3.2) ifadesinin sağ tarafındaki iki koşulun $LA^*A = A^+A$ eşitliğine yol açtığını ve dolayısıyla A^+ ile önden çarpılarak ve Moore-Penrose şartlarının dikkate alınmasıyla $LA^* = A^+$ yani $G = A^+$ olduğunu gösterir.

İkinci sonuç ise $A_1 \in \mathbb{C}_{mxn_1}$ ve $A_2 \in \mathbb{C}_{mxn_2}$ olmak üzere

$$\Re(A_1) \cap \Re(A_2) = \{0\} \tag{3.3}$$

ilişkisinin karakterizasyonlarını sağlar. Devamında bu sonuçlar, $n = n_1 + n_2$ olmak üzere sütun parçalanmış bir

$$A = (A_1 \colon A_2) \in \mathbb{C}_{mxn} \tag{3.4}$$

matrisine genişletilecektir.

Lemma 3.2 Bir $A \in \mathbb{C}_{mxn}$ matrisi (3.4) formunda verildiği gibi parçalanmış olsun. Ayrıca $P_i \in \mathbb{C}_{mxm}$ ve $Q_i \in \mathbb{C}_{mxm}$ ortogonal izdüşümleri

$$P_i = A_i A_i^+ \text{ ve } Q_i = I_m - P_i \ ,i = 1,2. \tag{3.5}$$

şeklinde verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Baksalary K.J. ve Baksalary, O. M., 2007):

(a) $\Re(A_1) \cap \Re(A_2) = \{0\}$,
(b) $\Re(A_1^*) = \Re(A_1^* Q_2)$,
(c) $\Re(A_2^*) = \Re(A_2^* Q_1)$,
(d) $\Re(A_1^* P_2) \subseteq \Re(A_1^* Q_2)$,
(e) $\Re(A_2^* P_1) \subseteq \Re(A_2^* Q_1)$.

İspat. Bu durumda $\Re(A_1^* Q_2) \subseteq \Re(A_1^*)$ ve $\Re(A_2^* Q_1) \subseteq \Re(A_2^*)$ özellikleri göz önüne alındığında, (b) ve (c) koşulları sırasıyla

$$\Re(Q_2 A_1) = \Re(A_1) \text{ ve } \Re(Q_1 A_2) = \Re(A_2)$$

eşitliklerine karşılık gelir. Bu eşitlikler

$$r\big((A_1 \colon A_2)\big) = r(A_1) + r(A_2) - dim[\Re(A_1) \cap \Re(A_2)],$$

olmak üzere

$$r\big((A_1 \colon A_2)\big) = r(A_1) + r(Q_1 A_2) = r(A_2) + r(Q_2 A_1)$$

eşitliğiyle birleştirilirse bu takdirde (a) ⇔ (b) ve (a) ⇔ (c) olduğunu gösterir. Ayrıca, (b) ⇒ (d) ve (c) ⇒ (e) durumlarının açık olduğu görülür. Öte yandan, (d) ve (e) koşullarının sırasıyla

$$\Re(A_1^*(P_2 \colon Q_2)) \subseteq \Re(A_1^* Q_2) \text{ ve } \Re(A_2^*(P_1 \colon Q_1)) \subseteq \Re(A_2^* Q_1) \tag{3.6}$$

ile eşdeğer olduğu açıktır. Ancak $(P_i : Q_i)(P_i : Q_i)^* = P_i + Q_i = I_m$, $i = 1,2$, ve uygun boyutlardaki herhangi iki K ve L matrisi için $\Re(KLL^*) = \Re(KL)$ eşitliğinin sağlandığı gerçeği dikkate alınırsa, (3.6) içermeleri (b) ve (c)' deki koşullarla çakışır. Sonuç olarak, (b) ⇔ (d) ve (c) ⇔ (e) olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 $A \in \mathbb{C}_{mxn}$ matrisi (3.4) 'de verildiği gibi parçalanmış bir matris ve Q_1 , $Q_2 \in \mathbb{C}_{mxm}$ matrisleri (3.5)' da belirtilen ortogonal izdüşümler olsun**.** Ayrıca,

$$G = \begin{pmatrix} (Q_2A_1)^+ \\ (Q_1A_2)^+ \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Baksalary K.J. ve Baksalary, O. M., 2007):

(a) $G = A^+$,

(b) $G \in \{A_1\}$,

(c) $\Re(A_1) \cap \Re(A_2) = \{0\}$.

İspat. Moore-Penrsose inversin özelliklerinden (a) ⇒ (b) olduğu açıktır**.** Ayrıca, (3.7) formundaki G için, (b) 'yi oluşturan $AGA = A$ eşitliğinin

$$(A_1(Q_2A_1)^+ + A_2(Q_1A_2)^+)A_i = A_i \qquad i = 1,2 \tag{3.8}$$

eşitliğine karşılık geldiği görülür. Öte yandan

$$(Q_2A_1)^+ = (Q_2A_1)^+Q_2 \ \text{ ve } \ (Q_1A_2)^+ = (Q_1A_2)^+Q_1 \ , \tag{3.9}$$

olduğundan (3.8) eşitliğinden $AGA = A$' nın

$$A_1(Q_2A_1)^+Q_2A_1 = A_1 \ \text{ ve } \quad A_2(Q_1A_2)^+Q_1A_2 = A_2 \tag{3.10}$$

koşullarını içerdiği sonucuna varılır. Bunların Lemma 3.2' deki (b) ve (c) ifadeleriyle açıkça çakıştıklarını belirterek, teoremin (b) ⇒ (c) kısmının sağlandığı görülür. Sonuç olarak, (3.9) eşitliklerine göre, (3.7) ifadesinde temsil edilen G matrisi için

$$GA = \begin{pmatrix} (Q_2A_1)^+Q_2A_1 & 0 \\ 0 & (Q_1A_2)^+Q_1A_2 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, Moore-Penrese invers tanımı ve (3.10) eşitlikleri dikkate alınırsa $(GA)^2 = GA = (GA)^*$ ve $GAA^* = A^*$ olduğu ve böylece GA nın $\Re(A^*)$ üzerinde bir ortogonal izdüşüm olduğu, yani $GA = A^+A$ olduğu gösterilmiş olur. Üstelik, her keyfi $K \in \mathbb{C}_{mxn}$ matrisi için

$$(K^*K)^+K^* = K^+ \tag{3.11}$$

eşitliği sağlandığından, L matrisinin

$$L_{11} = (A_1^*Q_2A_1)^+ , \qquad L_{12} = -(A_1^*Q_2A_1)^+A_1^*(A_2^+)^* ,$$

$$L_{21} = -(A_2^*Q_1A_2)^+A_2^*(A_1^+)^*, \quad L_{22} = (A_2^*Q_1A_2)^+$$

olmak üzere

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

formundaki parçalanışının dikkate alınması P_1 ve P_2 matrisleri (3.5) deki gibi olmak üzere

$$LA^* = \begin{pmatrix} (A_1^*Q_2A_1)^+A_1^* - (A_1^*Q_2A_1)^+A_1^*P_2 \\ -(A_2^*Q_1A_2)^+A_2^*P_1 + (A_2^*Q_1A_2)^+A_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_1^*Q_2A_1)^+A_1^*Q_2 \\ (A_2^*Q_1A_2)^+A_2^*Q_1 \end{pmatrix} = G,$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $\mathfrak{R}(G^*) \subseteq \mathfrak{R}(A)$ olduğu görülür ve Lemma 3.1 e göre, bu içermenin $GA = A^+A$ ile birleştirilmesi, (c) ⇒ (a) olduğunu gösterir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2 $A \in \mathbb{C}_{mxn}$ matrisi (3.4) 'de verildiği gibi parçalansın ve $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}_{mxm}$ matrisleri (3.5)' de verilen ortogonal izdüşümler olsun**.** Ayrıca,

$$H = \begin{pmatrix} A_1^+ + A_1^+A_2(Q_1A_2)^+ \\ A_2^+ + A_2^+A_1(Q_2A_1)^+ \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Baksalary K.J. ve Baksalary, O. M., 2007).

(a) $H = A^+$,

(b) $H \in \{A_1\}$,

(c) $\mathfrak{R}(A_1) \cap \mathfrak{R}(A_2) = \{0\}$.

İspat. Moore-Penrose invers tanımından (a) ⇒ (b) olduğu açıkça görülür. Ayrıca, (3.13) formundaki H matrisi için, (b)' yi oluşturan $AHA = A$ eşitliğinin

$$(P_1 - P_1A_2(Q_1A_2)^+ + P_2 - P_2A_1(Q_2A_1)^+)A_i = A_i \, , i = 1{,}2, \tag{3.14}$$

eşitliğine karşılık geldiği görülür, burada P_1 ve P_2 matrisleri (3.5) de verildiği gibidir. Bu nedenle (3.9) 'e göre, (3.14)' deki iki koşul

$$P_2A_1(Q_2A_1)^+Q_2A_1 = P_2A_1 \quad \text{ve} \quad P_1A_2(Q_1A_2)^+Q_1A_2 = P_1A_2 \tag{3.15}$$

eşitliklerine karşılık gelir.

(3.15)' deki eşitliklerin Lemma 3.2 'de verilen (d) ve (e) ifadelerini oluşturan içermeler olarak yeniden ifade edilebileceği dikkate alınırsa teoremin (b) ⇒ (c) parçasının sağlandığı görülür.

Son olarak, Lemma 3.2' nin (a) ⇔ (d) ve (a) ⇔ (e) kısımları göz önüne alındığında, eğer $\mathfrak{R}(A_1) \cap \mathfrak{R}(A_2) = \{0\}$ bu takdirde

$$A_2^+A_1(Q_2A_1)^+Q_2A_1 = A_2^+A_1 \quad \text{ve} \quad A_1^+A_2(Q_1A_2)^+Q_1A_2 = A_1^+A_2 \tag{3.16}$$

elde edilir (açıkça görülür ki bu koşullar, (3.15)' deki iki eşitliğin sırasıyla A_2^+ ve A_1^+ ile önden çarpılmasıyla elde edilir). Sonuç olarak, (3.9) ve (3.16) göz önüne alınırsa, HA çarpımının

$$HA = \begin{pmatrix} A_1^+A_1 & 0 \\ 0 & A_2^+A_2 \end{pmatrix}$$

ifadesine dönüşebileceği ve Moore-Penrose şartlarından $(HA)^2 = HA = (HA)^*$ ve $HAA^* = A^*$ olduğu görülür. Bu koşullar HA çarpımının $\mathfrak{R}(A^*)$ üzerinde ortogonal izdüşüm olduğunu, yani $HA = A^+A$ olduğunu gösterir. Ayrıca, (3.11) 'e göre

$$L_{11} = (A_1^*A_1)^+ + A_1^+A_2(A_2^*Q_1A_2)^+A_2^*(A_1^+)^*, \quad L_{12} = -A_1^+A_2(A_2^*Q_1A_2)^+,$$

$$L_{21} = -A_2^+A_1(A_1^*Q_2A_1)^+, \quad L_{22} = (A_2^*A_2)^+ + A_2^+A_1(A_1^*Q_2A_1)^+A_1^*(A_2^+)^*,$$

ile birlikte (3.12) formunda verilen L' matrisi için

$$LA^* = \begin{pmatrix} A_1^+ + A_1^+A_2(A_2^*Q_1A_2)^+A_2^*P_1 - A_1^+A_2(A_2^*Q_1A_2)^+A_2^* \\ -A_2^+A_1(A_1^*Q_2A_1)^+A_1^* + A_2^+ + A_2^+A_1(A_1^*Q_2A_1)^+A_1^*P_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^+ - A_1^+A_2(A_2^*Q_1A_2)^+A_2^*Q_1 \\ A_2^+ - A_2^+A_1(A_1^*Q_2A_1)^+A_1^*Q_2 \end{pmatrix} = H$$

eşitliğini sağladığı doğrulanabilir. Bu nedenle Lemma 3.1 dikkate alınarak (c) ⇒ (a) olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1 $A \in \mathbb{C}_{mxn}$ matrisi (3.4)' de olduğu gibi parçalansın ve Q_1, $Q_2 \in \mathbb{C}_{mxm}$ matrisleri (3.5) eşitliğinde verilen ortogonal izdüşümler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir (Baksalary K.J. ve Baksalary, O. M., 2007):

(a) $\Re(A_1) \cap \Re(A_2) = \{0\}$,

(b) $(Q_2A_1)^+ = A_1^+ - A_1^+A_2(Q_1A_2)^+$,

(c) $(Q_1A_2)^+ = A_2^+ - A_2^+A_1(Q_2A_1)^+$.

İspat. Moore-Penrose inversin tekliği göz önüne alındığında, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 ye göre eğer A_1 ve A_2 matrisleri (a) koşulunu sağlarsa, (b) ve (c)' deki eşitliklerin sırasıyla (3.7) ve (3.13) 'de verilen G ve H alt matrislerinin dikkate alınmasının bir sonucu olduğu açıktır. Tersine olarak (3.9) dikkate alınırsa, (b)' deki eşitlik A_1 ile ve (c)' deki eşitlik ise A_2 ile çarpılarak

$$(Q_2A_1)^+Q_2A_1 = A_1^+A_2 \quad \text{ve} \quad (Q_1A_2)^+Q_1A_2 = A_2^+A_2$$

veya buna denk olarak $\Re(A_1^*Q_2) = \Re(A_1^*)$ ve $\Re(A_2^*Q_1) = \Re(A_2^*)$ olduğu görülür. Dolayısıyla Lemma 3.2' nin (a) $\Leftrightarrow$ (b) ve (a) $\Leftrightarrow$ (c) kısımlarının dikkate alınmasıyla ispatın tamamlandığı görülür.

Yukarıdaki analiz bağlamında ortaya çıkan doğal bir soru şudur: Teorem 3.1 ve Teorem 3.2' nin (veya aslında $(c) \Rightarrow (a)$ durumlarının) G ve H matrisleri sırasıyla (3.7) ve (3.13)' de tanımlandığı gibi olmak üzere, G matrisinden $Q_1 = I_m$ ve $Q_2 = I_m$ ve H matrisinden $A_1^+A_2(Q_1A_2)^+ = 0$ ve $A_2^+A_1(Q_2A_1)^+ = 0$ matrisleri çıkarılarak M matrisi

$$M = \begin{pmatrix} A_1^+ \\ A_2^+ \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

formunda sadeleştirilebilir mi? Bu sorunun cevabı olumsuzdur. Örneğin, (3.4) ifadesinde tanımlanan A matrisini oluşturan A_1 ve A_2 alt matrislerini

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve } A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak alalım. Bu takdirde, açıkça görülür ki $\Re(A_1) \cap \Re(A_2) = \{0\}$ dır. Fakat

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

matrisi A matrisinin Moore-Penrose inversi değildir.

Bununla birlikte, (3.17) formundaki M matrisinin $M = A^+$ şartını sağlaması için (3.3)' ün nasıl güçlendirilebileceğini sormak hala ilgi çekicidir. Bu sorunun cevabı ise bir ortogonal bileşen kavramına gönderme yapan aşağıdaki teoreme dayanır.

Teorem 3.3 $A \in \mathbb{C}_{mxn}$ matrisi $(3.4)'$de olduğu gibi parçalansın. M matrisi (3.17) formunda verilmiş bir matris olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir (Baksalary K.J. ve Baksalary, O. M., 2007):

(a) $M = A^{+}$,

(b) $M \in A\{1\}$,

(c) $\Re(A_1) \subseteq \Re^{\perp}(A_2)$ veya buna eşdeğer olarak $\Re(A_2) \subseteq \Re^{\perp}(A_1)$.

İspat. Moore-Penrose invers tanımına göre, $(a) \Rightarrow (b)$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca, (3.17) formundaki M matrisi için, (b)' yi oluşturan $AMA = A$ eşitliğinin P_1 ve P_2 matrisleri (3.5) de verildiği gibi olmak üzere

$$P_i A_j = 0 \ , \ i = 1{,}2\,;\, i \neq j, \tag{3.18}$$

eşitliğine denk olacağı görülebilir. Bu durumda (3.18) eşitlikleri A_i^{+}, $i = 1{,}2$ ile soldan çarpıldığında

$$A_i^{+} A_j = 0\,,\ i = 1{,}2\,;\, i \neq j, \tag{3.19}$$

eşitlikleri elde edilir.

Açıkça gösterilebilir ki (3.18) eşitlikleri alternatif olarak $\Re(A_j) \subseteq \Re^{\perp}(A_i)$, $i = 1{,}2$; $i \neq j$, formunda da yazılabilir. Bu ise teoremin (b) $\Rightarrow$ (c) kısmını oluşturur. Teoremin (c) maddesinde ortaya konan iki kapsamanın eşdeğer olduğunu göstermek için, Moore-Penrose tanımına göre aşağıdaki ilişkilerin sağlandığını doğrulamak yeterlidir.

$$A_1^{+}A_2 = 0 \Leftrightarrow (A_1A_1^{+})^{*}\left(A_2A_2^{\dagger}\right)^{*} = 0 \Leftrightarrow A_2A_2^{+}A_1A_1^{+} = 0 \Leftrightarrow A_2^{+}A_1 = 0.$$

Sonuç olarak, (3.19) bağlamında MA çarpımının

$$MA = \begin{pmatrix} A_1^{+}A_1 & 0 \\ 0 & A_2^{+}A_2 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

şeklinde olabileceği ve Moore-Penrose invers tanımından $(MA)^2 = MA = (MA)^{*}$ ve $MAA^{*} = A^{*}$ eşitliklerinin sağlandığı görülür. Bu koşullar ise bize MA çarpımının $\Re(A^{*})$ üzerinde bir ortogonal izdüşüm olduğunu, yani $MA = A^{+}A$ olduğunu gösterir. Ayrıca (3.11) eşitliğine göre (3.12) formundaki L matrisinin

$$L_{11} = (A_1^{*}A_1)^{+}\ , L_{12} = 0,\ L_{21} = 0\ ,\ L_{22} = (A_2^{*}A_2)^{+}$$

şeklinde parçalanabileceği yani $LA^* = M$ olduğu doğrulanabilir. Bu nedenle Lemma 3.1' den (c) ⇒ (a) olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

3.2 Operatör Değerli Blok Parçalanmış Matrislerin Moore-Penrose İnversleri

Bu kısımda blok parçalanmış operatör değerli matrislerin Moore-Penrose inversinin olması için gerek ve yeter şartlar vererek blokların durumuna göre Moore-Penrose inverslerin yeni gösterimleri verilecektir.

Moore-Penrose invers sistem teorisi, fark denklemleri, diferansiyel denklemler ve yinelemeli prosedürlerinin incelenmesinde kullanılmaktadır. Bu sonuçların sonsuz boyutlu durumlara genişletilmesi yararlı olacaktır. Ayrıca bu inversler sayısız sistem teorisine, soyut Cauchy problemlerine, sonsuz lineer diferansiyel denklem sistemlerine ve muhtemel kısmi diferansiyel denklemlere ve diğer ilginç konulara da uygulanabilmektedir. $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{K}$ sonsuz boyutlu ayrılabilir ve karmaşık Hilbert uzayları olsun. $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ile $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ ya tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesini gösterelim.

Lemma 3.3 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, kapalı bir aralığa sahip olsun. Bu takdirdeA_1 tersinir olmak üzere A,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \Re(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Re(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{pmatrix},$$

formuna sahipse $A^+ = A_1^{-1} \oplus 0$ formundadır.

Lemma 3.4 A ve B $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ da iki matris olsun. Bu takdirde

(1) $\Re(A) + \Re(B) = \Re((AA^* + BB^*)^{\frac{1}{2}})$ dir.

(2) $\Re(A)$ kapalıdır ancak ve ancak $\Re(A) = \Re(AA^*)$ dir.

(3) $A \geq 0$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ da pozitif bir operatör ise bu takdirde $\overline{\Re\left(A^{\frac{1}{2}}\right)} = \overline{\Re(A)}$ dir.

Lemma 3.5 2×2 blok operatör değerli $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(A) + \Re(B)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

dir.

İspat. $T=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ alalım. Bu takdirde $\Re(T)=\Re(A)+\Re(B)=\Re((AA^*+BB^*)^{\frac{1}{2}})$ olacaktır. Bu ise gösterir ki $\Re(T)$ kapalıdır ancak ve ancak $\Re(AA^*+BB^*)$ Lemma 3.4 e göre kapalıdır. Dolayısıyla eğer T^+ mevcut ise $(AA^*+BB^*)^+$ da mevcuttur. $T^+=T^*(TT^*)^+$ olacağından

$$T^+=\begin{pmatrix}A^* & 0\\ B^* & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(AA^*+BB^*)^+ & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^*(AA^*+BB^*)^+ & 0\\ B^*(AA^*+BB^*)^+ & 0\end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Lemma 3.6 (1) Blok operatör değerli $\begin{pmatrix}A & 0\\ B & 0\end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(A^*)+\Re(B^*)$ nin kapalı olmasıdır, bu durumda

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ B & 0\end{pmatrix}^+=\begin{pmatrix}(A^*A+B^*B)^+A^* & (A^*A+B^*B)^+B^*\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

olacaktır.

(2) Blok operatör değerli $\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & A\end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(A)+\Re(B)$ nin kapalı olmasıdır, bu durumda

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & A\end{pmatrix}^+=\begin{pmatrix}0 & B^*(A^*A+B^*B)^+\\ 0 & A^*(A^*A+B^*B)^+\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

olacaktır.

$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}), B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ ve $C\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ olsun. Aşağıda verilen lemma, A veya B matrislerinin tersinir olması durumunda blok üst üçgensel operatörü değerli $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersinin gösterimini vermektedir.

Lemma 3.7 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}), B\in\mathcal{B}(\mathcal{K}), C\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ve B tersinir olsun. Bu takdirde blok operatörü değerli $\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(A)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda $\Delta=(BB^*+C^*(1-AA^+)C)^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}^+=\begin{pmatrix}A^+-A^+C\Delta C^*(1-AA^+) & -A^+C\Delta B^*\\ \Delta C^*(1-AA^+) & \Delta B^*\end{pmatrix}$$

dir.

İspat. İlk olarak, Sonuç 3.1' e göre keyfi tersinir bir M operatörü için $\begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & M \end{pmatrix}$ matrisinin tersinir olduğunu ve

$$\begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & M \end{pmatrix}^+ = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N^* & M^* \end{pmatrix}^+\right)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (NN^*+M^*M)^{-1}N^* & (NN^*+M^*M)^{-1}M^* \end{pmatrix}$$

şeklinde verildiğini belirtelim. İkinci olarak, B tersinir olsun. $\mathfrak{R}(A)$ kapalı olduğundan, $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ matrisi burada A_1, $\mathfrak{R}(A^*)$ dan $\mathfrak{R}(A)$ ya tersinir bir operatör olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_1 \\ 0 & A_1 & C_2 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{N}(A) \\ \mathfrak{R}(A^*) \\ \mathcal{K} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{N}(A^*) \\ \mathfrak{R}(A) \\ \mathcal{K} \end{pmatrix},$$

formuna sahiptir. $N = (0, C_1)$, $M = \begin{pmatrix} A_1 & C_2 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ve $\Delta = (BB^* + C^*(1-AA^+)C)^{-1} = (BB^* + {C_1}^*C_1)^{-1}$ olsun. Bu durumda kolayca gösterilebilir ki

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (NN^*+M^*M)^{-1}N^* & (NN^*+M^*M)^{-1}M^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -A_1^{-1}C_2\Delta C_1^* & A_1^{-1} & -A_1^{-1}C_2\Delta B^* \\ \Delta C_1^* & 0 & \Delta B^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ - A^+C\Delta C^*(1-AA^+) & -A^+C\Delta B^* \\ \Delta C^*(1-AA^+) & \Delta B^* \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

Lemma 3.7 un ispatına benzer olarak, aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Lemma 3.8 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ve A tersinir olsun. Bu takdirde blok operatör değerli $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(B)$ nin kapalı olmasıdır, bu durumda $\Delta = (AA^* + C(I - B^+B)C^*)^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^*\Delta & -A^*C\Delta B^+ \\ (I-B^+B)C^*\Delta & B^+ - (I-B^+B)C^*\Delta CB^+ \end{pmatrix},$$

dir.

Lemma 3.9 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ve B tersinir olsun. Bu takdirde blok operatör değerli $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(C)$ nin kapalı olmasıdır, bu durumda $\Delta = (B^*B + A^*(I - CC^+)A)^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \Delta A^*(I - C^+C) & \Delta B^* \\ C^+ - C^+A\Delta A^*(I - CC^+) & -C^+A\Delta B^* \end{pmatrix},$$

dir.

Şimdi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $D \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ve $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ olmak üzere blok operatör değerli

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

matrisinin Moore-Penrose invers gösterimlerini vereceğiz. Hatırlayalım ki, S, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operatörlerinin $*$-dik olduğu söylenir, eğer, $ST^* = 0$ ve $S^*T = 0$ ise. Bu durum $S \perp^* T$ ile gösterilir. Eğer $S \perp^* T$ ise bu takdirde $(S + T)^+ = S^+ + T^+$ olacağı kolayca kontrol edilebilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

Teorem 3.4 M matrisi (3.24) daki gibi tanımlanmış olsun.

(1) Eğer $AC^* + BD^* = 0$, $\mathfrak{R}(A) + \mathfrak{R}(B)$ ve $\mathfrak{R}(C) + \mathfrak{R}(D)$ kapalı ise bu takdirde M matrisi Moore-Penrose tersinir olup

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & C^*(DD^* + CC^*)^+ \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & D^*(DD^* + CC^*)^+ \end{pmatrix}$$

dir.

(2) Eğer $A^*B + C^*D = 0$, $\mathfrak{R}(A^*) + \mathfrak{R}(C^*)$ ve $\mathfrak{R}(B^*) + \mathfrak{R}(D^*)$ kapalı ise bu takdirde M matrisi Moore-Penrose tersinir olup

$$M^+ = \begin{pmatrix} (A^*A + C^*C)^+A^* & (A^*A + C^*C)^+C^* \\ (D^*D + B^*B)^+B^* & (D^*D + B^*B)^+D^* \end{pmatrix}.$$

dir.

İspat. $S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ olsun. $\mathfrak{R}(A) + \mathfrak{R}(B)$ ve $\mathfrak{R}(C) + \mathfrak{R}(D)$ kapalı olduğundan, Lemma 3.9 ve Sonuç 3.15 den

$$S^+ = \begin{pmatrix} A^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \\ B^*(AA^* + BB^*)^+ & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad T^+ = \begin{pmatrix} 0 & C^*(DD^* + CC^*)^+ \\ 0 & D^*(DD^* + CC^*)^+ \end{pmatrix}$$

elde edilir. $AC^* + BD^* = 0$ olduğundan $S \perp^* T$ yazılabilir. Böylece

$$M^{+}=\begin{pmatrix} A^{*}(AA^{*}+BB^{*})^{+} & C^{*}(DD^{*}+CC^{*})^{+} \\ B^{*}(AA^{*}+BB^{*})^{+} & D^{*}(DD^{*}+CC^{*})^{+} \end{pmatrix}$$

olacaktır. (2) nin ispatı (1) in ispatına benzer şekilde olup ayrıntılar atlanmıştır.

Eğer $S'=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ve $T'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri $S' \perp^{*} T'$ olacak şekilde seçilirse aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Teorem 3.5 M matrisi (3.24) verildiği gibi olsun ve $\Re(A)$ ve $\Re(D)$ kapalı olmak üzere $AC^{*}=0$ ve $D^{*}C=0$ olsun.

(1) $\Re(A) \cap \Re(D)=\{0\}$ ise M matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(C)$ ve $\Re(B_0)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda $\Delta=(D^{*}D+(B-B_0)^{*}(I-B_0B_0^{+})(B-B_0))^{+}$ ve $B_0=(I-AA^{+})B(I-D^{+}D)$ olmak üzere

$$M^{+}=\begin{pmatrix} A^{+} & C^{+} \\ B_0^{+}+(D^{+}D+B_0^{+}B_0-B_0^{+}B)\Delta(B-B_0)^{*}(I-B_0B_0^{+}) & (D^{+}D+B_0^{+}B_0-B_0^{+}B)\Delta D^{*} \end{pmatrix}$$

olacaktır.

(2) $\Re(D^{*}) \cap \Re(B^{*})=\{0\}$ ise M matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(C)$ ve $\Re(B_0)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda

$$\Delta=(AA^{*}+(B-B_0)(I-B_0^{+}B_0)(B-B_0)^{*})^{+}, \quad B_0=(I-AA^{+})B(I-D^{+}D)$$

olmak üzere

$$M^{+}=\begin{pmatrix} A^{*}\Delta(A^{+}A+B_0B_0^{+}-BB_0^{+}) & C^{+} \\ B_0^{+}+(I-B_0^{+}B_0)(B-B_0)^{*}\Delta(A^{+}A+B_0B_0^{+}-BB_0^{+}) & D^{+} \end{pmatrix}$$

olacaktır.

(3) $\Re(A) \cap \Re(D)=\{0\}$ ve $\Re(D^{*}) \cap \Re(B^{*})=\{0\}$ ise M matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(C)$ ve $\Re(B)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{+}=\begin{pmatrix} A^{+} & B^{+} \\ C^{+} & D^{+} \end{pmatrix}$$

olacaktır.

İspat. (1) $\Re(A) \cap \Re(B)=\{0\}$ olup $\Re(A)$ ve $\Re(D)$ kapalı olduğu için S' matrisi

$$S' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{N}(A) \\ \Re(A^*) \\ \Re(D^*) \\ \mathcal{N}(D) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{N}(A^*) \\ \Re(A) \\ \Re(D) \\ \mathcal{N}(D^*) \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

biçimindedir. Lemma 3.4 ve Lemma 3.8 den kolayca görülebilir ki S' matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(B_2) = \Re((I - A^+A)B(I - D^+D))$$

nın kapalı olmasıdır, bu durumda $T = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 \\ A_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T^+ & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Eğer Lemma 3.6 da A, B ve C yerine sırasıyla $(0, B_1)$, $A_1 \oplus D_1$ veB_2 alınırsa bu takdirde $\Delta' = (D_1^* D_1 + B_1^*(I - B_2 B_2^+)B_1)^{-1}$ olmak üzere

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & A_1^{-1} & 0 \\ \Delta' B_1^*(I - B_2 B_2^+) & 0 & \Delta' D_1^* \\ B_2 - B_2^+ B_1 \Delta' B_1^*(I - B_2 B_2^+) & 0 & -B_2^+ B_1 \Delta' D_1^* \end{pmatrix},$$

elde edilir. Dolayısıyla $\Delta = (D^*D + (B - B_0)^*(I - B_0 B_0^+)(B - B_0))^+$ ve $B_0 = (I - AA^+)B(I - D^+D)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1^{-1} \end{matrix} & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \\ \Delta' B_1^*(I - B_2 B_2^+) & 0 & \Delta' D_1^* & 0 \\ B_2 - B_2^+ B_1 \Delta' B_1^*(I - B_2 B_2^+) & 0 & -B_2^+ B_1 \Delta' D_1^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ B_0^+ + (D^+D + B_0^+ B_0 - B_0^+ B)\Delta(B - B_0)^*(I - B_0 B_0^+) & (D^+D + B_0^+ B_0 - B_0^+ B)\Delta D^* \end{pmatrix}$$

elde edilir. $AC^* = 0, D^*C = 0$ olduğundan $S' \perp^* T'$ olacaktır ve dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}^+$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ & C^+ \\ B_0^+ + (D^+D + B_0^+ B_0 - B_0^+ B)\Delta(B - B_0)^*(I - B_0 B_0^+) & (D^+D + B_0^+ B_0 - B_0^+ B)\Delta D^* \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

(2) nin ispatı (1) in ispatına benzer şekilde olduğundan ayrıntılar atlanmıştır.

(3) $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ve $\Re(D^*) \cap \Re(B^*) = \{0\}$ ise bu takdirde (7) eşitliğinde $B_1 = 0$ olduğuna dikkat edelim.

Eğer $S_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ ve $T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ matrislerini $S_0 \perp^* T_0$ olacak şekilde seçersek aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Teorem 3.6 M matrisi (3.24) da verildiği gibi olsun. Ayrıca $\Re(B)$ ve $\Re(C)$ kapalı olmak üzere $BD^* = 0$ ve $C^*D = 0$ olsun. Bu takdirde

(1) $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ise bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(D)$ ve $\Re(A_0)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda $\Delta = (C^*C + (A - A_0)^*(I - A_0A_0^+)(A - A_0))^+$ ve $A_0 = (I - BB^+)A(I - C^+C)$ olmak üzere

$$M^+ = \begin{pmatrix} A_0^+ + (C^+C + A_0^+A_0 - A_0^+A)\Delta_0(A - A_0)^*(I - A_0A_0^+)B^+ & (C^+C + A_0^+A_0 - A_0^+A)\Delta_0 C^*D^+ \\ B^+ & D^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır.

(2) $\Re(A^*) \cap \Re(C^*) = \{0\}$ ise bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(D)$ ve $\Re(A_0)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda

$$\Delta = (BB^* + (A - A_0)(I - A_0A_0^+)(A - A_0)^*)^+ ,\ A_0 = (I - BB^+)A(I - C^+C)$$

olmak üzere

$$M^+ = \begin{pmatrix} A_0^+ + (I - A_0^+A_0)(A - A_0)^*\Delta_0(B^+B + A_0A_0^+ - AA_0^+) & C^+ \\ B^*\Delta_0(BB^+ + A_0A_0^+ - AA_0^+) & D^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır.

(3) $\Re(A) \cap \Re(D) = \{0\}$ ve $\Re(A^*) \cap \Re(C^*) = \{0\}$ ise bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(A)$ ve $\Re(D)$ nın kapalı olmasıdır, bu durumda

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & C^+ \\ B^+ & D^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır.

İspat. (1) $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ve $\Re(B)$ ve $\Re(C)$ kapalı olduğu için S_0 matrisi

$$S_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & C_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{N}(C) \\ \mathfrak{R}(C^*) \\ \mathfrak{R}(B^*) \\ \mathcal{N}(B) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{N}(B^*) \\ \mathfrak{R}(B) \\ \mathfrak{R}(C) \\ \mathcal{N}(C^*) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

biçimindedir. Lemma 3.8 den kolayca görülebilir ki S_0 Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}(A_1) = \mathfrak{R}((I - BB^+)A(I - C^+C))$ nn kapalı olmasıdır ve bu durumda $T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \\ 0 & C_1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} T_0^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir. Böylece Lemma 3.4 den dolayı $\Delta_0 = (C^*C + (A - A_0)^*(I - A_0A_0^+)(A - A_0))^+$ ve $A_0 = (I - BB^+)A(I - C^+C)$ olmak üzere

$$T_0^+ = \begin{pmatrix} A_1^+ + A_1^+A_2\Delta_0'{A_2}^*(I - A_1^+A_1) & 0 & -A_1^+A_2\Delta_0'{C_1}^* & 0 \\ \Delta_0'{A_2}^*(I - A_1^+A_1) & 0 & \Delta_0'{C_1}^* & 0 \\ 0 & B_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu nedenle $\Delta_0 = (C^*C + (A - A_0)^*(I - A_0A_0^+)(A - A_0))^+$ ve $A_0 = (I - BB^+)A(I - C^+C)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A_0^+ + (C^+C + A_0^+A_0 - A_0^+A)\Delta_0(A - A_0)^*(I - A_0A_0^+)B^+ & (C^+C + A_0^+A_0 - A_0^+A)\Delta_0C^* \\ B^+ & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Öte yandan $BD^* = 0$, $C^*D = 0$ olduğundan $S_0 \perp^* T_0$ olup buradan da

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^+ =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^+ + (C^+C + A_0^+A_0 - A_0^+A)\Delta_0(A - A_0)^*(I - A_0A_0^+)B^+ & (C^+C + A_0^+A_0 - A_0^+A)\Delta_0C^* \\ B^+ & D^+ \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde, (2) ve (3) durumları da ispatlanabilir.

A ve D matrisleri Moore-Penrose tersinir olsun.

$$X_1 = \mathfrak{R}(A^*), X_2 = \mathcal{N}(A), X_3 = \mathfrak{R}(D^*), X_4 = \mathcal{N}(D),$$

$$Y_1 = \mathfrak{R}(A), Y_2 = \mathcal{N}(A^*), Y_3 = \mathfrak{R}(D), Y_4 = \mathcal{N}(D^*)$$

ve

$$I_0 = I \oplus \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \oplus I$$

gösterimlerini göz önüne alalım. Bu takdirde M matrisi $\sum_{i=1}^{4} X_i$ den $\sum_{i=1}^{4} Y_i$ ye bir operatör olup aşağıdaki operatör matris formuna sahiptir.

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_3 \\ 0 & 0 & B_4 & B_2 \\ C_1 & C_3 & D_1 & 0 \\ C_4 & C_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_0^* \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & B_3 \\ C_1 & D_1 & C_3 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 & B_2 \\ C_4 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix} I_0 \qquad (3.27)$$

burada A_1 ve D_1 tersinir matrislerdir. Eğer

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix},\ B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_3 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix},\ C_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_4 \\ C_4 & 0 \end{pmatrix},\ D_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.28)$$

alınırsa bu takdirde

$$M = I_0^* \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} I_0 \quad , \quad M^+ = I_0^* \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}^+ I_0$$

olduğu görülür.

Genelleştirilmiş Schur bileşeni Moore-Penrose tersinirliğin çalışılmasında önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıda genelleştirilmiş Schur bileşenine göre bazı ifadeler verilecektir. Önce bazı notasyonları verelim.

$$K = AA^+B(I - D^+D),\ H = DD^+C(I - A^+A),\ E = (I - AA^+)B(I - D^+D),$$

$$F = (I - DD^+)C(I - A^+A), \quad S = DD^+(D - CA^+B)D^+D\ ,$$

$$R = \begin{pmatrix} A^+ + A^+BS^+CA^+ & -A^+BS^+ \\ -S^+CA^+ & S^+ \end{pmatrix} \qquad (3.29)$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki genel sonucu verebiliriz.

Teorem 3.7 S, $\Re(D^*)$ den $\Re(D)$ ye tersinir bir operatör olsun, $\Re(A)$ ve $\Re(D)$ kapalı olmak üzere $(I - AA^+)BD^+D = 0$ ve $(I - DD^+)CA^+A = 0$ olsun. Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose tersinir olması için gerek ve yeter şart $\Re(E)$ ve $\Re(F)$ nın kapalı olmasıdır ve bu durumda

$$M^+ = \begin{pmatrix} 0 & F^+ \\ E^+ & 0 \end{pmatrix} + \left[(R^*)^+ + \begin{pmatrix} 0 & (I - F^+F)H^* \\ (I - E^+E)K^* & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\times R^* \left[I + R \begin{pmatrix} K(I - E^+E)K^* & 0 \\ 0 & H(I - E^+E)H^* \end{pmatrix} R^*\right]^+ R \begin{pmatrix} I - KE^+ & 0 \\ 0 & I - HF^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır.

İspat. Öncelikle belirtelim ki

$$D - CA^{+}B = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_4 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_4 & B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 - C_1 A_1^{-1} B_1 & -C_1 A_1^{-1} B_3 \\ -C_4 A_1^{-1} B_1 & -C_4 A_1^{-1} B_3 \end{pmatrix}$$

dir. $D - CA^{+}B, \mathfrak{R}(D^*)$ den $\mathfrak{R}(D)$ ye tersinir bir operatör olduğundan $D_1 - C_1 A_1^{-1} B_1$ nin de tersinir olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla A_0 tersinir olup $S_1 = D_1 A_1^{-1} B_1$ olmak üzere

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1} B_1 S_1^{-1} C A_1^{-1} & -A_1^{-1} B_1 S^{+} \\ -S_1^{-1} C_1 A_1^{-1} & A_1^{-1} \end{pmatrix} \qquad (3.30)$$

olacaktır. R matrisi (3.29) deki gibi tanımlansın. Bu durumda doğrudan bir hesaplama

$$R = I_0^* \begin{pmatrix} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_0$$

olduğunu gösterir. Bu durumda

$$I_0^* \begin{pmatrix} 0 & B_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_0 = \begin{pmatrix} 0 & AA^{+}B(I - D^{+}D) \\ DD^{+}C(I - A^{+}A) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ H & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_0^* \begin{pmatrix} 0 & D_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_0 = \begin{pmatrix} 0 & (I - AA^{+})B(I - D^{+}D) \\ (I - DD^{+})C(I - A^{+}A) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{pmatrix},$$

ve

$$I_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0^{+} \end{pmatrix} I_0 = \begin{pmatrix} 0 & F^{+} \\ E^{+} & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_0^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - D_0^{+} D_0 \end{pmatrix} I_0 = \begin{pmatrix} I - F^{+}F & 0 \\ 0 & I - E^{+}E \end{pmatrix}$$

olduğuna dikkat edelim. $(I - AA^{+})B(I - D^{+}D) = 0$ ve $(I - DD^{+})C(I - A^{+}A) = 0$ olduğundan $B_4 = 0$ ve $C_4 = 0$ olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla $C_0 = 0$ dır. Şimdi $\Delta_0 = (A_0 A_0^* + B_0(I - D_0^{+} D_0) B_0^*)^{-1}$ olarak alalım. Bu takdirde

$$I_0^* \begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_0 = I_0^* \begin{pmatrix} (A_0^*)^{-1}[I + (A_0)^{-1} B_0 (I - D_0^{+} D_0) B_0^* (A_0^*)^{-1}]^{-1} (A_0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_0$$

$$= I_0^* \begin{pmatrix} (A_0^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[I + \begin{pmatrix} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - D_0^+ D_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A_0^*)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^+ \begin{pmatrix} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} I_0$$

$$= R^* \left(I + R \begin{pmatrix} 0 & K \\ H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - F^+F & 0 \\ 0 & I - E^+E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & H^* \\ K^* & 0 \end{pmatrix} R^* \right)^+ R$$

$$= R^* \left(I + R \begin{pmatrix} K(I - E^+E)K^* & 0 \\ 0 & H(I - F^+F)H^* \end{pmatrix} R^* \right)^+ R$$

olduğu görülür. Lemma 3.6 dan

$$M^+ = I_0^* \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ 0 & D_0 \end{pmatrix}^+ I_0$$

$$= I_0^* \begin{pmatrix} A_0^* \Delta_0 & -A_0^* \Delta_0 B_0 D_0^+ \\ (I - D_0^+ D_0) B_0^* \Delta_0 & D_0^+ - (I - D_0^+ D_0) B_0^* \Delta_0 B_0 D_0^+ \end{pmatrix} I_0$$

$$= I_0^* \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0^+ \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} A_0^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (I - D_0^+ D_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0^* & 0 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[I - \begin{pmatrix} 0 & B_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_0^+ \end{pmatrix} \right] \right\} I_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & F^+ \\ E^+ & 0 \end{pmatrix} + \left[(R^*)^+ + \begin{pmatrix} I - F^+F & 0 \\ 0 & I - E^+E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & H^* \\ K^* & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\times R^* \left[I + R \begin{pmatrix} K(I - E^+E)K^* & 0 \\ 0 & H(I - F^+F)H^* \end{pmatrix} R^* \right]^+ R \left[I - \begin{pmatrix} 0 & K \\ H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F^+ \\ E^+ & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & F^+ \\ E^+ & 0 \end{pmatrix} + \left[(R^*)^+ + \begin{pmatrix} 0 & (I - F^+F)H^* \\ (I - E^+E)K^* & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\times R^* \left[I + R \begin{pmatrix} K(I - E^+E)K^* & 0 \\ 0 & H(I - F^+F)H^* \end{pmatrix} R^* \right]^+ R \begin{pmatrix} I - KE^+ & 0 \\ 0 & I - HF^+ \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

Campbell ve Meyer çalışmalarında, bir üst üçgensel $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ blok matrisinin Moore-Penrose inversinin de bir üst üçgensel blok matris olması için gerek ve yeter şartın $\Re(B) \subset \Re(A)$ ve $\Re(B^*) \subset \Re(D^*)$ olduğunu göstermişlerdir. Bu sonucun sonsuz boyut durumunda sağlandığını ve Teorem 3.7 un çok özel bir durumu olduğunu gösterebiliriz.

Sonuç 3.2 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $D \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ olmak üzere $\Re(A)$ ve $\Re(D)$ kapalı olsunlar. Bu durumda $T^+ = \begin{pmatrix} A^+ & A^+BD^+ \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(B) \subset \Re(A)$ ve $\Re(B^*) \subset \Re(D^*)$ olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$): $\Re(B) \subset \Re(A)$ ve $\Re(B^*) \subset \Re(D^*)$ ise, Teorem 3.10 a göre K, H, E ve F matrislerinin her biri sıfıra eşit olacaktır. Dolayısıyla $S = D$ ve $R = \begin{pmatrix} A^+ & -A^+BD^+ \\ 0 & D^+ \end{pmatrix}$ olacaktır. Buradan da

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^+ = (R^*)^+ + R^*R = (RR^+)^*R = RR^+R = R$$

olduğu görülür.

($\Rightarrow$): $TT^+ = \begin{pmatrix} AA^+ & -AA^+BD^+ + BD^+ \\ 0 & DD^+ \end{pmatrix}$ ve $T^+T = \begin{pmatrix} A^+A & -A^+BD^+D + A^+B \\ 0 & D^+D \end{pmatrix}$

matrisleri yarı adjoint olduğundan $-AA^+BD^+ + BD^+ = 0$ ve $-A^+BD^+D + A^+B = 0$ eşitlikleri yazılabilir. $TT^+T = T$ olacağından $B = AA^+B = BD^+D$ olduğu görülür. Dolayısıyla da $\Re(B) \subset \Re(A)$ ve $\Re(B^*) \subset \Re(D^*)$ olacaktır.

3.3 Blok Matrislerin Moore-Penrose İnversi için Bazı Yeni İfadeler

Bu kısımda 2×2 tipinde $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde blok parçalanmış bir matrisin Moore-Penrose inversi konusu tartışılacaktır. Bununla ilgili olarak M blok matrisinin Moore-Penrose inversi için, herhangi bir kısıtlama olmaksızın A, B, C ve D bireysel bloklarının durumuna göre genel ifadeler türetilecektir. Ayrıca bazı varsayımlar altında, Moore-penrose inversler daha da basitleştirilecektir.

2× 2 tipinde parçalanmış $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ blok matrisinin genelleştirilmiş inversleriyle ilgili olarak A, B, C ve D bireysel bloklarının özel durumlarına göre genel ifadelerin türetilmesi uzun zamandır bilim insanlarının uğraş alanı olmuş ve bununla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ parçalı matrisinin genelleştirilmiş inversleri için herhangi bir kısıtlama olmaksızın bazı genel ifadeler literatürde detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ancak M^+ Moore-Penrose inversi için ifade oldukça karmaşık olduğundan M^+ ile ilgili daha basit formüller verebilmek için bazı kısıtlamalar konulmuştur. B ve C^* matrislerinin aynı olması özel durumunda M matrisi bir sınırlı matris olacaktır. Bu kısımda herhangi bir kısıtlama olmaksızın M matrisinin Moore-Penrose inversi için bazı genel ifadeler türeteceğiz. Bununla beraber, M matrisinin blokları üzerine bazı özel kısıtlamalar konulduğunda, M matrisinin Moore-Penrose invers biraz daha basitleştirilebilir.

$A\epsilon\mathbb{C}_n^m$ matrisi herhangi bir matris ve M ve N matrisleri de sırasıyla m ve n-yinci mertebeden pozitif definit matrisler olsun. Bu takdirde

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (MAX)^* = MAX, \quad (NXA)^* = NXA$$

şartlarını sağlayan bir X matrisine A matrisinin ağırlıklı Moore-Penrose inversi denir ve $X = A_{MN}^+$ ile gösterilir. M ve N nin uygun boyutta birim matrisler olması özel durumunda X matrisine A matrisinin Moore-Penrose inversi adı verilir ve $X = A^+$ ile gösterilir.

Lemma 3.10 $\mathrm{K} = A^+\mathrm{B}$ ve $U = (I - AA^+)B$ olsun. Bu takdirde

$$(A, B)^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KW \\ W \end{pmatrix}$$

dir, burada

$$W = U^+ + (I - U^+U)S^-K^*A^+(I - BU^+) \tag{3.31}$$

ve

$$S = I(I - U^+U)K^*K(I - U^+U) \tag{3.32}$$

olacaktır.

Bu kısım boyunca 2×2 tipindeki M blok matrisini

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

şeklinde alacağız ve

$$K = A^+B\ , \quad H = CA^+, \quad Z = D - CA^+B\ , \tag{3.34a}$$

$$U = (I - AA^+)B, \quad V = C(I - A^+A) \tag{3.34b}$$

gösterimlerini kullanacağız. Bu durumda öncelikle $U = 0$ ve $V = 0$ özel durumları için bir formül elde edip daha sonra da $M^+ = M^*(MM^*)^{(1,3)}$ yi kullanarak M^+ için genel ifadelerin elde edilmesinde bunu uygulayacağız.

Bununla ilgili olarak öncelikle Z Schur complementine göre aşağıdaki iki özel durumu dikkate alabiliriz:

1. Durum: $U = 0,\ V = 0$, ve Z nonsingüler olsun. Bu takdirde

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ + KZ^{-1}H & -KZ^{-1} \\ -Z^{-1}H & Z^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

olacaktır.

2. Durum: $U = 0,\ V = 0$ ve $Z = 0$ olsun. Bu takdirde

$$M^+ = \begin{pmatrix} \left(I - \widetilde{K}^{-1}K^*\right)A^+\left(I - H^*\widetilde{H}^{-1}H\right) & \left(I - K\widetilde{K}K^*\right)A^+H^*H\widetilde{H}^{-1} \\ \widetilde{K}^{-1}K^*A^+\left(I - H^*\widetilde{H}^{-1}H\right) & \widetilde{K}^{-1}K^*A^+A^*\widetilde{H}^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

dir, burada $\widetilde{K} = I + K^*K$ ve $\widetilde{H} = I + HH^*$ dir. Eğer

$$X = \begin{pmatrix} -K \\ I \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Y = (-H, \quad I) \tag{3.37}$$

alınırsa bu takdirde (3.35) ve (3.36) sırasıyla

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + XZ^{-1}Y \tag{3.38}$$

ve

$$M^+ = (I - XX^+)\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(I - Y^+Y) \tag{3.39}$$

olarak yazılabilir. (3.38) ve (3.39) ifadelerini $M^+ = G$ alarak

$$G = [I - X(I - Z^+Z)X^+]\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[I - Y^+(I - ZZ^+)Y] + XZ^+Y \tag{3.40}$$

biçiminde birleştirebiliriz.

Teorem 3.8 Eğer $U = 0,\ V = 0$ ise bu takdirde $M^+ = G$ olması için gerek ve yeter şart

$$ZZ^+HH^* = HH^*ZZ^+, \qquad Z^+ZK^*K = K^*KZ^+Z \tag{3.41}$$

olmasıdır.

İspat. $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ Z \end{pmatrix},\ YM = (0 \quad Z)$ olduğunda

$$MX(I - Z^+Z) = 0, \qquad (I - ZZ^+)YM = 0 \tag{3.42}$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$MG = \begin{pmatrix} AA^+ & 0 \\ H & 0 \end{pmatrix}[I - Y^+(I - ZZ^+)Y] + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}ZZ^+Y$$

olur ve $Y^+ = Y^* H^{-1}$ ve $AA^+ H^* = H^*$ olduğundan bu da

$$MG = \begin{pmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - Y^* \widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^+)Y \tag{3.43}$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde (3.42) eşitlikleri kullanılarak ve $X^+ = \widetilde{K}^{-1} X^*$ ve $K^* A^+ A = K^*$ olduğu göz önüne alınarak

$$GM = \begin{pmatrix} A^+ A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - X(I - Z^+ Z) K^{-1} X^* \tag{3.44}$$

elde edilir. Son olarak (3.42) ve (3.43) den

$$MGM = (MG)M = M, \quad GMG = G(MG) = G$$

olduğu görülür. Böylece $(MG)^* = MG \Leftrightarrow ZZ^+ HH^* = HH^* ZZ^+$ ve $(GM)^* = GM \Leftrightarrow Z^+ Z K^* K = K^* K Z^+ Z$ elde edilmiş olur. Buradan açıkça görülür ki (3.35) ve (3.36) Teorem 3.8 in özel durumlarıdır.

Sonuç 3.2 Eğer $U = 0,\ V = 0, (I - ZZ^+)C = 0$ ve $B(I - Z^+ Z) = 0$ ise, bu takdirde

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + XZ^+ Y \tag{3.45}$$

dir.

İspat. $C = ZZ^+ C$ olduğundan $HH^* = ZZ^+ HH^* = (ZZ^+ HH^*)^* = HH^* ZZ^+$ dir. Benzer şekilde, $B = BZ^+ Z$ olduğundan $K^* K = K^* K Z^+ Z = Z^+ Z K^* K$ olacaktır. Böylece Teorem 3.8 kullanılarak (3.45) bağıntısı elde edilir.

Teorem 3.9 Eğer $U = 0,\ V = 0$ alınırsa, bu takdirde

$$M^+ = [I - X(I - Z^g Z)X^+] \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [I - Y^+(I - ZZ^g)Y] + XZ^g Y, \tag{3.46}$$

olacaktır, yani, $Z^g = Z^+_{\widetilde{H}^{-1}, \widetilde{K}}$ olmak üzere

$$(M^+)_{11} = [I - K(I - Z^g Z)K^{-1} K^*] A^+ \left[I - H^* \widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g)H\right] + KZ^g H,$$

$$(M^+)_{12} = \left[I - K(I - Z^g Z)\widetilde{K}^{-1} K^*\right] A^+ H^* \widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g) - KZ^g,$$

$$(M^+)_{21} = (I - Z^g Z)\widetilde{K}^{-1} K^* A^+ \left[I - H^* \widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g)H\right] - Z^g H,$$

$$(M^+)_{22} = (I - Z^g Z)\widetilde{K}^{-1} K^* A^+ H^* \widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g) + Z^g \tag{3.47}$$

dir.

İspat. (3.46) nın sağ tarafı G olsun. Bu takdirde,

$$MX(I - Z^g Z) = 0\,, \quad YY^+ = I \ \text{ ve } \begin{pmatrix} AA^+ & 0 \\ H & 0 \end{pmatrix} Y^+ = Y^+ - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$MG_1 = \begin{pmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - Y^* \widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g)Y \tag{3.48}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$(I - ZZ^g)YM = 0, \ X^+X = I \ \text{ ve } \quad X^+ \begin{pmatrix} A^+A & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X^+ - (0, I)$$

olduğundan

$$GM = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - X(I - Z^g Z)\widetilde{K}^{-1}X^* \tag{3.49}$$

olacaktır. Öte yandan Z^g nin tanımından, $Y^* \widetilde{H}^{-1}(I - ZZ^g) - Y$ matrisi Hermitian matristir. Çünkü $\widetilde{H}^{-1}ZZ^g$ matrisi bir Hermityen matristir. Aynı düşünceyle (3.49) görülen $X(I - Z^g \mathrm{Z})\widetilde{K}^{-1}X^*$ matrisi de bir Hermityen olacaktır. Bu nedenle

$$MGM = M\,, \quad GMG = G, \quad (MG)^* = MG, \qquad (GM)^* = GM$$

olur.

Eğer özel olarak, A matrisi tersinir bir matris ise, bu takdirde $U = 0,\ \ V = 0$ olacaktır ve bu durumda M^+ inversini bulmak için Teorem 3.9 yi uygulayabiliriz. Teorem 3.9 nin önemli uygulamalarından birisi de herhangi bir kısıtlama olmaksızın pozitif semi definit bir matrisin Moore-Penrose inversinin bulunmasında kullanılabilir olmasıdır.

Sonuç 3.3 Eğer $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix}$ matrisi pozitif semi definit bir matris ise,

$$M^+ = [I - X(I - Z^g Z)X^+] \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [I - X^{*+}(I - ZZ^g)X^*] + XZ^g X^* \tag{3.50}$$

dir, burada

$$Z^g = Z^+_{\widetilde{K}^{-1}, \widetilde{K}} \tag{3.51}$$

olacaktır. Ayrıca, M matrisi için özel bir (1,3)- invers aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$M^{(1.3)} = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [I - X^{*+}(I - ZZ^g)X^*] + XZ^g X^*. \tag{3.52}$$

Herhangi bir M matrisi için MM^* matris çarpımı pozitif semi definit olacağından Moore-Penrose inversi $M^+ = M^*(MM^*)^{(1,3)}$ eşitliğinden kolayca hesaplanabilir. Gerçekten bunun için

$$M_1 = MM^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^* & D_1 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

alalım. Şimdi Z_1, K_1 ve $Z_1 Z_1^g$ matrisleri için ifadeler türetelim. Öncelikle M_1 için Z_1 esas Schur complementini hesaplayalım. W Lemma 3.9 da tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$(A,B)^* A_1^+ = (A,B)^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KW \\ W \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

olacağından Z_1 matrisi için

$$Z_1 = D_1 - B_1^* A_1^+ B_1 = (C,D)[I - (A,B)^* A_1^+ (A,B)](C,D)^*$$

$$= (C,D)[I - (A,B)^+ (A,B)](C,D)^*$$

yazılabilir. Bu durumda (3.54) ve $C(I - A^+A)C^* = C(I - A^+A)(I - A^+A)C^* = QQ^*$ olduğu gerçeği dikkate alınırsa

$$Z_1 = VV^* + Z[(I - WB)D^* - WAC^*] \tag{3.55}$$

olduğu gösterilebilir. Öte yandan $A^+W = 0$ olduğundan

$$U^+A = 0\,, \quad U^+U = U^+B \tag{3.56}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.32) deki S nin tanımından, $I - U^+U$ ve S değişmeli olup $I - U^+U$ ve S^{-1} de değişmelidir. Böylece

$$S^{-1}(I - U^+U)K^*K(I - U^+U) = I - S^{-1} \tag{3.57}$$

olduğu görülür. Buradan da

$$I - WB = S^{-1}(I - U^+U), \quad WA = S^{-1}(I - U^+U)K^* \tag{3.58}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak da

$$Z_1 = VV^* + ZS^{-1}(I - U^+U)Z^* \tag{3.59}$$

yazılabilir. Diğer yandan

$$K_1^* = B_1^* A_1^+ = (B,D)(A,C)^* A_1^+ = (B,D)(A,C)^+ = H + ZW \tag{3.60}$$

olduğundan X_1^* ve $\widetilde{K}_1$ matrisleri

$$X_1^* = (-(H+ZW), I), \qquad \widetilde{K}_1 = I + (H+ZW)(H+ZW)^* \tag{3.61}$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda Sonuç 3.3 den

$$M^+ = M^* \begin{pmatrix} A_1^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[I - X_1^{*+}\left(I - Z_1 Z_1^g\right) X_1^* \right] + \begin{pmatrix} V^* - (WA)^* Z^* \\ (I - WB)^* Z^* \end{pmatrix} Z_1^g X_1^* \tag{3.62}$$

yazılabilir. Böylece (3.54) ve (3.58) birlikte kullanılarak

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KW & 0 \\ W & 0 \end{pmatrix} \left[I - X_1^{*+}\left(I - Z_1 Z_1^g\right) X_1^* \right]$$

$$+ \begin{pmatrix} V^* - KS^{-1}(\,I - U^+U)Z^* \\ S^{-1}(\,I - U^+U)Z^* \end{pmatrix} Z_1^g X_1^* \tag{3.63}$$

yazılabilir, burada

$$Z_1^g = (Z_1)^+_{\widetilde{K}_1^{-1}, \widetilde{K}_1} \tag{3.64}$$

dir. Şimdi

$$\tilde{V} = \left(V, Z(\,I - P^+P)\right), \quad N = kö\c{s}(I, S) \tag{3.65}$$

alalım. Bu takdirde (3.59) deki Z_1 matrisi

$$Z_1 = \tilde{V} N^{-1} \tilde{V}^* \tag{3.66}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda öncelikle $Z_1 Z_1^g$, $S^{-1}(\,I - U^+U)Z^* Z_1^g$ ve $V^* Z_1^g$ matrislerini hesaplayalım ve daha sonra bunları (3.46) de yerlerine yazarak M^+ matrisini elde edelim. Böylece

$$N^{-1} \tilde{V}^* Z_1^g = (\tilde{V})^+_{\widetilde{K}_1^{-1}, N} = (V, Z(I - U^+U))^+_{\widetilde{K}_1^{-1}, N} \tag{3.67}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$N^{-1} \tilde{V}^* Z_1^g = \begin{pmatrix} V^* \\ S^{-1}(\,I - U^+U)Z^* \end{pmatrix} Z_1^g, \tag{3.68}$$

olur ve buradan da

$$(V)^+_{\widetilde{K}_1^{-1}, N} = \begin{pmatrix} V^g - V^g Z(\,I - U^+U)\Phi \\ \Phi \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

elde edilir, burada

$$\Phi = Y^g + (I - Y^g Y) T^{-1} (\,I - U^+U) Z^* V^{g^*} V^g,$$

$$T = S + (I - U^+U)Z^*V^{g^*}V^g(I - U^+U)\,,$$

$$Y = (I - VV^g)Z(I - U^+U),$$

$$V^g = V^+_{\widetilde{K}_1^{-1},I} \quad , \quad Y^g = Y^+_{\widetilde{K}_1^{-1},T}$$

olacaktır. Bu nedenle,

$$Z_1Z_1^g = \tilde{V}(\tilde{V})^+_{\widetilde{K}_1^{-1},N} = VV^g - VV^gZ(I - U^+U)H + Z(I - U^+U)\Phi$$

$$= VV^g + Y\Phi = VV^g + YY^g \tag{3.70}$$

olur. Öte yandan S^{-1} ve $I - U^+U$ matrisleri değişmeli olduğundan, (3.68) ve (3.69) ifadelerinin bunlara karşılık gelen alt matrislerinden

$$\Phi = S^{-1}(I - U^+U)Z^*Z_1^g = (I - U^+U)S^{-1}Z^*Z_1^g = (I - U^+U)\Phi,$$

$$V^*Z_1^g = V^g - V^gZ\Phi.$$

olduğu görülür. Böylece (3.46) ifadesinden

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - KW & 0 \\ W & 0 \end{pmatrix}[I - X_1^{*+}(I - VV^g - YY^g)X_1^*] + \begin{pmatrix} V^g - V^gZV - K\Phi \\ \Phi \end{pmatrix}X_1^*$$

olduğu, yani

$$(M^+)_{11} = (A^+ - KW)\big[I - (H + ZW)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - VV^g - YY^g)(H + ZW)\big]$$

$$-(V^g - V^gZV - KV)(H + ZW),$$

$$(M^+)_{12} = (A^+ - KW)(H + ZW)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - VV^g - YY^g) + V^g - V^gZ\Phi - K\Phi,$$

$$(M^+)_{21} = W\big[I - (H + ZW)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - VV^g - YY^g)(H + ZW)\big] - \Phi(H + ZW),$$

$$(M^+)_{22} = W(H + ZW)^*\widetilde{K}_1^{-1}(I - VV^g - YY^g) + \Phi$$

olduğu görülür.

Şimdi Moore-Penrose inversin daha basit formlara dönüşebilir olması durumundaki bazı özel durumları tartışalım. $U = 0 \Leftrightarrow \Re(B) \subseteq \Re(\mathrm{A})$ ve $V = 0 \Leftrightarrow \Re(C^*) \subseteq \Re(A^*)$ olduğunu ve aynı zamanda U nin tam sütun ranklı olması için gerek ve yeter şart B nin tam sütun ranklı ve $\Re(B) \cap \Re(A) = \{0\}$ olması ve V nin tam sütun ranklı olması için C nin tam sütun ranklı ve $\Re(C^*) \cap \Re(A^*) = \{0\}$ olmasının gerek ve yeter şart olduğunu görmek zor değildir.

1. Durum: Eğer U matrisi tam sütun ranklı ise bu takdirde $Y=0,\ \Phi=0, W=U^{+}$ olacağından $\widetilde{K}_1=I+HH^*+Z(U^*U)^{-1}Z^*$ olup

$$(M^{+})_{11}=A^{+}-KP^{+}-V^{g}H-V^{g}Z\,U^{+}$$
$$-[A^{+}H^{*}-K(U^{*}U)^{-1}Z^{*}]\widetilde{K}_1^{-1}(I-VV^{g})(H+ZU^{+}),$$
$$(M^{+})_{12}=V^{g}+[A^{+}H^{*}-K(U^{*}U)^{-1}Z^{*}]\widetilde{K}_1^{-1}(I-VV^{g})$$
$$(M^{+})_{21}=U^{+}-(U^{*}U)^{-1}Z^{*}\widetilde{K}_1^{-1}(I-VV^{g})(H+ZU^{+}),$$
$$(M^{+})_{22}=(U^{*}U)^{-1}Z^{*}\widetilde{K}_1^{-1}(I-VV^{g})$$

olacaktır.

2. Durum: Eğer U matrisi tam sütun ranklı ve V matrisi tam satır ranklı ise

$$M^{+}=\begin{pmatrix}A^{+}-KU^{+}-V^{+}H-V^{+}Z\,U^{+} & V^{+}\\ U^{+} & 0\end{pmatrix}$$

olacaktır.

3. Durum: U matrisi tam sütun ranklı ve $V=0$ ise, bu takdirde $\widetilde{K}_1=I+HH^*+Z(U^*U)^{-1}Z^*$ ve

$$M^{+}=\begin{pmatrix}A^{+}-KU^{+}-[A^{+}H^{*}-K(U^{*}U)^{-1}Z^{*}]\widetilde{K}_1^{-1}(H+ZU^{+}), & [A^{+}H^{*}-K(U^{*}U)^{-1}Z^{*}]\widetilde{K}_1^{-1}\\ U^{+}-(U^{*}U)^{-1}Z^{*}\widetilde{K}_1^{-1}(H+ZPU^{+}) & (U^{*}U)^{-1}Z^{*}\widetilde{K}_1^{-1}\end{pmatrix}$$

olacaktır.

4. Durum: V matrisi tam satır ranklı bir matris ise, bu takdirde $V^{g}=V^{+}$, $Y=0$, $\Phi=T^{-1}(I-U^{*}U)Z^{*}(VV^{*})^{-1}$ olup

$$M^{+}=\begin{pmatrix}A^{+}-KW-(V^{+}-V^{+}ZV-K\Phi)(H+ZW) & V^{+}-V^{+}ZV-K\Phi\\ W-\Phi(H+ZW) & \Phi\end{pmatrix}$$

olacaktır. Öte yandan sağ-sol simetriklik ve 1. Durum kullanılarak da M^{+} inversini hesaplayabiliriz. Bunun için öncelikle $(M^{*})^{+}$ matrisini bularak, M^{+} matrisini $M^{+}=(M^{*})^{+*}$ eşitliğinden elde edebiliriz. Gerçekten, eğer Φ matrisi tam satır ranklı ise $\widetilde{H}_1=I+K^{*}K+Z^{*}(\Phi\Phi^{*})^{-1}Z$ ve $U^{g}=U^{+}_{I,\widetilde{H}_1}$ olup buradan

$$(M^{+})_{11}=A^{+}-KU^{g}-V^{+}H-V^{+}ZU^{g}$$
$$-(K+V^{+}Z)(I-U^{g}U)\widetilde{H}_1^{-1}[K^{*}A^{+}-Z^{*}(VV^{*})^{-1}H],$$

$$(M^+)_{12} = V^+ - (K + V^+Z)(I - U^gU)\widetilde{H}_1^{-1}Z^*(VV^*)^{-1}$$

$$(M^+)_{21} = U^g + (I - U^gU)\widetilde{H}_1^{-1}[K^*A^+ - Z^*(VV^*)^{-1}H],$$

$$(M^+)_{22} = (I - U^gU)\widetilde{H}_1^{-1}Z^*(VV^*)^{-1}$$

elde edilir.

5. Durum: Φ matrisi tam satır ranklı ve $W = 0$ ise $\widetilde{H}_1 = I + K^*K + Z^*(VV^*)^{-1}Z$ olup, bu durumda M^+ matrisi

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^+ - V^+H - (K + V^+Z)\widetilde{H}_1^{-1}[K^*A^+ - Z^*(VV^*)^{-1}H] & V^+ - (K + V^+Z)\widetilde{H}_1^{-1}Z^*(VV^*)^{-1} \\ \widetilde{H}_1^{-1}[K^*A^+ - Z^*(VV^*)^{-1}H] & \widetilde{H}_1^{-1}Z^*(VV^*)^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır.

Hung and Markham bir çalışmalarında $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose invesini bulmak için bir metod ortaya koymuşlardır. Bu kısımda Moore-Penrose invesin nasıl elde edildiğini göstermek için bizim sonuçlarımızı kullanacağız.

Bizim metodumuzda U(veya V)= 0 veya U(veya V) tam ranklı olduğunda M^+ kolaylıkla hesaplanabilir. Ayrıca yukarıdaki tartışmalara göre W(veya Φ)= 0 veya W(veya Φ) tam ranklı olup olmadığı da kolayca kontrol edilebilir. Özel olarak eğer A matrisi tersinir ise bu takdirde, $U = (I - AA^+)C = 0$ ve $V = B(I - A^+A) = 0$ olup Teorem 3.9 uygulanabilirdir.

Örnek 3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = (1 \quad 1)$, $D = (0 \quad 1)$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda öncelikle, U ve V matrislerini hesaplayalım. Bunun için A matrisi tersinir bir matris olduğundan, $U = 0$ ve $V = 0$ olması durumunda Teorem 3.9 uygulanabilir. Öte yandan $Z = D - CA^+B = 0_{1\times 2}$ olduğundan (3.44) ifadesi (3.45) ifadesine dönüşecektir. Bu takdirde (3.38) ve (3.41) ifadelerindeki notasyonlar dikkate alınarak

$$K = A^+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = CA^+(1 \quad 1),$$

$$X = \begin{pmatrix} -K \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = (-H \quad 1) = (-1, \quad -1, \quad 1).$$

elde edilir. Buradan bazı basit hesaplamalar yapıldıktan sonra M^+ matrisinin

$$M^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{15} & \frac{1}{3} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{15} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu elde edilir.

3.4 Simetrik Matrislerin Moore-Penrose İnversi

Bu kısımda simetrik bir matrisin Moore-penrose inversi için bir ifade elde edilecektir. Bununla ilgili olarak keyfi simetrik non-negatif definit bir A matrisini ve onun Moore-Penrose inversi A^+ matrisini

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F' & H \end{pmatrix} \text{ ve } A^+ = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_2' & G_4 \end{pmatrix}$$

olarak gözönüne alalım. Bu durumda E, F ve H blokları cinsinden G_1, G_2 ve G_4 blokları için açık ifadeler verilecektir. Daha önce verilen notasyonlara ek olarak aynı mertebeden iki simetrik A ve B matrisinin $B - A$ farkı simetrik non-negatif definit olduğunda $A \leq\ _L B$ yazalım. Bu durumda A matrisi Lowner kısmi sıralamasına göre B matrisinin altındadır denir.

Simetrik bir A matrisinin E ve H muhtemelen farklı mertebeden simetrik kare matrisler olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F' & H \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

olarak parçalandığını varsayalım. Bu durumda

$$0 \leq\ _L A \Leftrightarrow 0 \leq\ _L E,\ EE^+F = F \quad 0 \leq\ _L HA - F'E^+F \tag{3.72}$$

ve benzer şekilde

$$0 \leq\ _L A \Leftrightarrow 0 \leq\ _L H,\ \ FH^+H = F \quad 0 \leq\ _L E - FH^+F' \tag{3.73}$$

olduğu açıktır. E matrisinin A' daki genelleştirilmiş Schur komplementinin

$$S = H - F'E^+F, \tag{3.74}$$

olduğunu ve ayrıca (A/E) ile gösterildiğini hatırlayalım. A nın nonnegatif definitliğinden (A/E) 'nin, A' nın her genelleştirilmiş ters A^- için $(A/E) = H - F'E^-F$ olması anlamında tek türlü olduğunu söyleyebiliriz. Benzer şekilde H matrisinin A daki genelleştirilmiş Schur komplementi ise

$$(A/H) = E - FH^+F' \tag{3.75}$$

olacaktır. Bu durumda rank her iki Schur komplementi üzerinde toplamsaldır, yani

$$r\begin{pmatrix} E & F \\ F' & H \end{pmatrix} = r(E) + r(A/E) = r(H) + r(A/H) \tag{3.76}$$

eşitliği gerçeklenir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F' & H \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} E^+ + E^+FS^+F'E^+ & -E^+FS^+ \\ -S^+F'E^+ & S^+ \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

Banachiewicz invers alma formülü sağlanır, eğer

$$r\begin{pmatrix} E & F \\ F' & H \end{pmatrix} = r(E) + r(H) \tag{3.78}$$

rank eşitliği geçerli ise. Bununla birlikte, genel durum için benzer bir formül bilinmemektedir ve aşağıdaki teoremde sunulacaktır.

Teorem 3.10 A matrisi $0 \leq {}_L A$ olmak üzere (3.71) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

$$A^+ = \begin{pmatrix} E^+ + E^+FS^\sim F'E^+ & -E^+FS^\sim \\ -S^\sim F'E^+ & S^\sim \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E^+(FZ + Z'F')E^+ & E^+Z' \\ ZE^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

olacaktır, burada

$$S^\sim = (Z, I)\begin{pmatrix} E^+ + E^+FS^+F'E^+ & -E^+FS^+ \\ -S^+F'E^+ & S^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z' \\ I \end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

$$Z = (I - S^+S)F'E^+(I + E^+F(I - S^+S)F'E^+)^{-1}, \tag{3.81}$$

$$S = H - F'E^+F = (A/E) \tag{3.82}$$

dir. Üstelik $S^\sim$ matrisi S matrisinin bir genelleştirilmiş inversidir, yani $SS^\sim S = S$ dir.

İspat. Simetrik ve nonnegatif definit A matrisi U ve V matrisleri için

$$A = \begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix}(U, V) = \begin{pmatrix} U'U & U'V \\ V'U & V'V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F' & H \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda A matrisinin Moore Penrose tersi

$$A^+ = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} = (U,V)^+ \begin{pmatrix} U' \\ V' \end{pmatrix}^+ = (U,V)^+[(U,V)^+]'$$

şeklinde olacaktır, burada $G_3 = G_2'$ olup G_1, G_2 ve G_4' matrislerini belirlememiz gerekir. Öte yandan,

$$C = (I - UU^+)V \text{ ve } K = ZU^+(I - VC^+)$$

$$Z = (I - C^+C)[I + (I - C^+C)V'(U^+)'U^+V(I - C^+C)]^{-1}V'(U^+)'$$

olmak üzere

$$(U,V)^+ = \begin{pmatrix} U^+ - U^+V(C^+ + K) \\ C^+ + K \end{pmatrix}$$

olduğu Kısım 3.1 den bilinmektedir. Bu durumda $C^+(U^+)' = 0$ eşitliği kullanılarak

$$G_1 = (U'U)^+ + U^+VG_4V'(U^+)' - U^+VK(U^+)' - U^+K'V'(U^+)'$$

$$G_2 = -U^+VG_4 + U^+K'$$

ve

$$G_4 = (C^+ + K)(C^+ + K)' .$$

olduğu görülür. Bu nedenle

$$C'C = S\,, \quad C^+C = (C'C)^+C'C = S^+S$$

ve

$$V'(U^+)' = V'U(U'U)^+ = F'E^+, \quad U^+V = (U'U)^+U'V = E^+F$$

özdeşliklerinden

$$Z = (I - S^+S)[I + (I - S^+S)F'E^+E^+F(I - S^+S)]^{-1}F'E^+$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla

$$[I + (I - S^+S)F'E^+E^+F(I - S^+S)]^{-1}$$
$$= I - (I - S^+S)F'E^+(I + E^+F(I - S^+S)F'E^+)^{-1}E^+F(I - S^+S)$$

inversiyon formülü kullanılarak

$$Z = (I - S^+S)F'E^+(I + E^+F(I - S^+S)F'E^+)^{-1}$$

eşitliğine ulaşılır. Aynı şekilde $C^+(U^+)' = 0$ eşitliği kullanılarak

$$K(U^+)' = ZU^+(U^+)' = Z(U'U)^+ = ZE^+$$

$$K(C^+)' = -ZU^+V(C'C)^+ = -ZE^+FS^+$$

ve

$$KK' = Z(E^+ + E^+FS^+F'E^+)Z'$$

olduğu ve buradan da

$$G_1 = E^+ + E^+FG_4F'E^+ - E^+FZE^+ - E^+F'Z'E^+$$

$$G_2 = -E^+FG_4 + E^+Z'$$

ve

$$\begin{aligned} G_4 &= (C'C)^+ + K(C^+)' + C^+K' + KK' \\ &= S^+ - ZE^+FS^+ - S^+F'E^+Z' + Z(E^+ + E^+FS^+F'E^+)Z' \\ &= (Z, I)\begin{pmatrix} E^+ + E^+FS^+F'E^+ & -E^+FS^+ \\ -S^+F'E^+ & S^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z' \\ I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olduğu görülür. $SG_4S = S$ olduğu kolayca görülebileceğinden ispat tamamlanır.

Hemen bir sonuç olarak, $S^{\sim}$ matrisinin A^+ daki genelleştirilmiş Schur komplementi için bir formül verilebilir.

Sonuç 3.4 A matrisi $0 \leq {}_LA$ olmak üzere (3.71) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde $S^{\sim}$ ve Z matrisleri sırasıyla (3.80) ve (3.81) de verildikleri gibi olmak üzere

$$(A^+/S^{\sim}) = E^+ + E^+Z'(S^{\sim})^+ZE^+, \tag{3.83}$$

dir.

İspat. $0 \leq {}_LA$ olduğundan (3.73) e göre

$$(-E^+FS^{\sim} + E^+Z')(S^{\sim})^+S^{\sim} = -E^+FS^{\sim} + E^+Z'$$

yazılabilir. Böylece

$$E^+Z'(S^{\sim})^+S^{\sim} = E^+Z'$$

olacaktır. Bununla birlikte $(S^{\sim})^+S^{\sim} = S^{\sim}(S^{\sim})^+$ eşitliği dikkate alınırsa (3.83) eşitliğinin sağlandığı kolayca görülebilir.

E^- ve S^- matrisleri sırasıyla E ve S' nin genelleştirilmiş inversinin herhangi bir özel seçimleri olmak üzere, her

$$A^{-}=\begin{pmatrix} E^{-}+E^{-}FS^{-}F'E^{-} & -E^{-}FS^{-} \\ -S^{-}F'E^{-} & S^{-} \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

matrisinin A nın bir genelleştirilmiş inversi olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla (3.79) formülü A' nın genelleştirilmiş inversi için iki farklı A_1^- ve A_2^- seçeneğini içerir, yani, $E^-=E^+$ ve $S^-=S^{\sim}$ olmak üzere A_1^- (3.84) deki gibi ve $E^-=E^+$ ve $S^-=S^+$ olmak üzere A_2^- (3.84) deki gibi verilebilir.

İkinci bir sonuç olarak $A^+=A_2^-$ olması için gerek ve yeter koşullar verebiliriz.

Sonuç 3.5 A matrisi $0\leq {}_LA$ olmak üzere (3.71) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $A^{+}=\begin{pmatrix} E^{+}+E^{+}FS^{+}F'E^{+} & -E^{+}FS^{+} \\ -S^{+}F'E^{+} & S^{+} \end{pmatrix}$

(ii) $(I-S^+S)F'E^+=0$

(iii) $S^{\sim}=S^+$

(iv) $(A^+/S^{\sim})=E^+$

(v) $S^{\sim}SS^{\sim}=S^{\sim}$

burada $S^{\sim}$ matrisi (3.80) de verildiği gibidir.

İspat. (i) sağlanmış olsun. Bu takdirde AA^+ simetrik olmak zorunda olduğundan

$$AA^{+}=\begin{pmatrix} EE^{+} & 0 \\ (I-S^{+}S)F'E^{+} & SS^{+} \end{pmatrix}$$

eşitliği (ii) yi verir. Eğer (ii) sağlanırsa, (3.81) den dolayı Z sıfır olacaktır, bu da kolayca (iii) e yol açar. Eğer (iii) sağlanıyorsa $(S^{\sim})^+=(S^+)^+=S$ olup $SZ=0$ olduğu dikkate alınarak Sonuç 3.4 den (iv) ün sağlandığı görülür. Eğer (iv) sağlanırsa,

$$r(A^+)=r(S^{\sim})+r(A^+/S^{\sim})$$

eşitliği yardımıyla, $r(S^{\sim})=r(A)-r(E)=r(S)$ olduğu gösterilerek

$$r(A)=r(S^{\sim})+r(E)$$

elde edilir. Fakat $S^{\sim}$matrisi S matrisinin bir genelleştirilmiş tersi olduğundan, $r(S^{\sim})=r(S)$ özdeşliği (v) e eşdeğerdir. Eğer (v) sağlanırsa, bu takdirde

$$E^+Z'(S^{\sim})^+S^{\sim}=E^+Z'(S^{\sim})^+S^{\sim}SS^{\sim}=E^+Z'SS^{\sim}=E^+Z'$$

yazılabilir. Ancak $Z'S = 0$ olduğundan $E^+Z' = 0$ elde edilir ki bu da Teorem 3.10 a göre (i) koşulunun sağlandığı anlamına gelir.

Sonuç 3.5 deki (i)-(v) koşullarının her birinin (3.78) ifadesine eşdeğer olduğuna dikkat edelim. Bu, (ii) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter şart $(I - S^+S)F'E^+F = 0$ olmasıdır gerçeğine dayanır, ki bu da $(I - SS^+)H = 0$ eşitliğine, yani $H = SS^+H$ eşitliğine denktir, bu ise $r(H) \leq r(S)$ eşitsizliğini verir. Ancak $r(S) \leq r(H)$ eşitsizliği daima doğru olduğundan, (ii) koşulu $r(H) = r(S) = r(A) - r(E)$ ye, yani (3.78) ifadesine eşdeğerdir.

Şimdi $(A^+/S^\sim)$ Schur komplementini yeniden ele alalım. Sonuç 3.4 den kolayca görülebilir ki

$$0 \leq {}_L (A^+/S^\sim) \leq {}_L E^+ \tag{3.85}$$

dir. Buna ek olarak aşağıdaki teorem, $(A^+/S^\sim)$ genelleştirilmiş Schur komplementinin Lowner kısmi sıralamasına göre her zaman $(A/H)^+$ ile karşılaştırılabileceğini gösterir.

Teorem 3.11 A matrisi $0 \leq {}_L A$ olmak üzere (3.71) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde

$$0 \leq {}_L (A^+/S^\sim) \leq {}_L (A/H)^+ \tag{3.86}$$

dir, burada $S^\sim$ matrisi (3.80) da verildiği gibidir.

İspat. $\Re(A)$ ve $\mathcal{N}(A)$ sırasıyla bir A matrisinin sütun uzayını ve sıfır uzayını göstersin. Eğer A matrisi sadece reel özdeğerlere sahip bir kare matris ise, $ch_1(A)$, A matrisinin en büyük özdeğerini ifade eder. Örneğin, $0 \leq {}_L (A^+/S^\sim) \leq {}_L (A/H)^+$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(A^+/S^\sim) \subseteq \Re(A/H) \text{ ve } ch_1[(A^+/S^\sim)(A/H)] \leq 1$$

olmasıdır. Bunun sağlandığını görmek için A matrisi (3.71) de verildiği gibi parçalansın C, K ve Z matrisleri ise yukarıda verildiği gibi olsun. $W = C^+ + K$ olsun. Bu takdirde $\Re(A^+/S^\sim) \subseteq \Re(A/H)$ olması için gerek ve yeter şartın $\Re[U^+(I - W^+W)] \subseteq \Re[U'(I - VV^+)]$ olduğunu göstererek

$$(A^+ / S^\sim) = U^+(I - W^+W)(U^+)' \text{ ve } (A / H) = U'(I - VV^+)U$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilebilir. Bunun için bir $z \in \Re(I - W^+W) = \mathcal{N}(W)$ vektörü için $y \in \Re[U^+(I - W^+W)]$, yani $y = U^+z$ olduğunu varsayalım. z vektörü için $C^+z = -Kz$ yazılabilir. Bu eşitlik soldan C ile çarpılarak, $CK = 0$ olacağından $CC^+z = -CKz = 0$ olduğunu verir. Buradan da $C^+z = 0$ ve $Kz = 0$ olur. Sondaki özdeşlik $C^+z = 0$ olduğundan $ZU^+z = ZU^+VC^+z = 0$ eşitliğine eşdeğerdir. Bu ise $y = U^+z \in \Re(U')$ vektörünün $\mathcal{N}(Z)$ uzayına ait olduğunu, yani $y \in \Re(U') \cap \mathcal{N}(Z)$ olduğunu gösterir. Öte yandan $y \in \mathcal{N}(Z)$ olduğundan

$$(I - C^+C)L^{-1}V'(U^+)'y = 0 \tag{3.87}$$

yazılabilir, burada $L = I + (I - C^+C)V'(U^+)'U^+V(I - C^+C)$ dir. (3.12)' ye benzer bir invers alma formülünden $C^+CL^{-1} = C^+C$ ve $LC^+C = C^+C$ elde edilir. Dolayısıyla (3.87) eşitliğinin

$$L(I - C^+C)L^{-1}V'(U^+)'y = (I - C^+C)V'(U^+)'y = 0 \tag{3.88}$$

eşitliğine eşdeğer olduğu görülmektedir. Bu ise $V'(U^+)'y \in \mathcal{N}(I - C^+C) = \Re(C') = \Re[V'(I - UU^+)]$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $V'(U^+)'y - V'(I - UU^+)x = 0$, yani $(U^+)'y - (I - UU^+)x \in \mathcal{N}(V') = \Re(I - VV^+)$ olacak şekilde bir x vektörü vardır. Bu ifadelerden ikincisini soldan U' ile çarpıp $U'(U^+)'y = y$ olduğu dikkate alınırsa $y \in \Re[U'(I - VV^+)]$ olduğunu gösterir. Geriye

$$ch_1[(A^+/S^{\sim})(A/H)] \leq 1 \tag{3.89}$$

göstermek kalıyor. İki nonnegatif definit matrisin çarpımının sadece sıfırdan küçük olmayan reel öz değerlere sahip olduğunu belirtelim. Ayrıca X ve Y gibi iki keyfi matrisinin XY çarpımının sıfır olmayan özdeğerleri YX çarpımının trivialden farklı öz değerleri ile çakışır. Bu nedenle (3.87) den P_1, P_2 ve P_3 dik izdüşümleri sırasıyla $P_1 = I - VV^+$, $P_2 = UU^+$ ve $P_3 = I - W^+W$ olmak üzere

$$ch_1[(A^+/S^{\sim})(A/H)] = ch_1(P_1P_2P_3P_2) = ch_1(P_1P_2P_3P_2P_1) \tag{3.90}$$

yazılabilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} P_1P_2P_3P_2P_1 &= P_1P_2P_1 - P_1P_2(I - P_3)P_2P_1 \\ &= P_1 - P_1(I - P_2)P_1 - P_1P_2(I - P_3)P_2P_1 \end{aligned}$$

yazılarak

$$I - P_1P_2P_3P_2P_1 = (I - P_1) - P_1(I - P_2)P_1 + P_1P_2(I - P_3)P_2P_1$$

matrisinin simetrik nonnegatif definit olduğu görülür. Yani, $ch_1(P_1P_2P_3P_2P_1) \leq 1$ olup $P_1P_2P_3P_2P_1 \leq {}_L I$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Belirtelim ki her zaman $0 \leq {}_L(A/H) \leq {}_L E$ olacağından,

$$0 \leq {}_L E^+ \leq {}_L(A/H)^+ \Leftrightarrow r(E) = r(A\,/\,H)$$

yazılabilir. Öte yandan $r(E) = r(A/H)$ koşulunun (3.78) rank koşuluna eşdeğer olduğu kolaylıkla görülebilir.

3.5 Rank Toplamsallığı Altında Parçalı Matrislerin Moore-Penrose İnversi

Bu kısımda 2×2 tipinde blok parçalanmış bir matrisin Moore-Penrose inversi konusu rank toplamsallığı koşulları altında tartışılacaktır. Bununla ilgili olarak M blok matrisinin Moore-Penrose inversi için A, B, C ve D bireysel bloklarının sırasıyla $m \times n$, $m \times k$, $l \times n$ ve $l \times k$ tipinde matrisler olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

matrisinin

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = r(A,B) + r(C,D) \tag{3.91}$$

rank toplamsallık şartını sağladığını varsayalım. Bu takdirde öncelikle daha önce verilen gösterimler de dikkate alınarak matrislerin Moore-Penrose inversleri ve rankları hakkında bazı iyi bilinen sonuçları aşağıdaki gibi verebiliriz.

Lemma 3.11 A, B, C ve D bireysel bloklarının sırasıyla $m \times n$, $m \times k$, $l \times n$ ve $l \times k$ tipinde matrisler olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$r(A,B) = r(A) + r(E_AB) = r(B) + r(E_BA)\ ,$$

$$r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(CF_A) = r(C) + r(AF_C)\ ,$$

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = r(B) + r(C) + r(E_BAF_C),$$

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix},$$

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r(A) + r\begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix},$$

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + r(A,B) - r(A) + r\left(E_{C_1}S_AF_{B_1}\right)$$

dir, burada $S_A = D - CA^+B$ ve $B_1 = E_AB$, $C_1 = CF_A$ dir.

Lemma 3.12 $A,\ B,\ C$ ve D bireysel bloklarının sırasıyla $m \times n,\ m \times k,\ l \times n$ ve $l \times k$ tipinde matrisler olduğunu varsayalım.

(i) Eğer $r(A,B) = r(A) + r(B)$ ise, yani $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ise bu takdirde

$$(E_A B)^+(E_A B) = B^+B \text{ ve } (AB)^+(AB) = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & B^+B \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

dir.

(ii) Eğer $r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = r(A) + r(C)$ ise, yani $\Re(A^*) \cap \Re(C^*) = \{0\}$ ise bu takdirde

$$(CF_A)^+(CF_A) = CC^+ \text{ ve } \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & CC^+ \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

dir.

Lemma 3.13 $A,\ B \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ise $r(A) + r(B) = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ (3.94)

(ii) $\Re(A^*) \cap \Re(C^*) = \{0\}$ ise $r(A) + r(B) = r(A,B)$ (3.95)

dir.

Lemma 3.14 $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) Eğer N matrisi

$$r(N) = r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + r(B) = r(A,B) + r(C) \tag{3.96}$$

rank toplamsallık şartını sağlarsa bu takdirde $L = (E_B A F_C)^+$ olmak üzere

$$N^+ = \begin{pmatrix} L & C^+ - LAC^+ \\ B^+ - B^+AL & B^+(ALA - A)C^+ \end{pmatrix} \tag{3.97}$$

dir.

(ii) Eğer N matrisi

$$r(N) = r(A) + r(B) + r(C) \tag{3.98}$$

rank toplamsallık şartını sağlarsa veya buna denk olarak $\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}$ ve $\Re(A^*) \cap \Re(C^*) = \{0\}$ ise bu takdirde $L = (E_B A F_C)^+$ matrisi $A(E_B A F_C)^+ A = A$ eşitliğini sağlar ve

$$N^+ = \begin{pmatrix} L & C^+ - LAC^+ \\ B^+ - B^+AL & 0 \end{pmatrix} \tag{3.99}$$

dir.

Lemma 3.15 (3.91) deki rank toplamsallık şartı aşağıdaki dört şarta denktir:

$$\Re\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \Re(M), \quad \Re\begin{pmatrix} A^* \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \Re(M^*) \tag{3.100}$$

$$r\begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ CF_A & S_A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} E_A B \\ S_A \end{pmatrix} + r(CF_A) = r(CF_A, S_A) + r(E_A B) \tag{3.101}$$

burada $S_A = CA^+B$ dir.

İspat.

$$V_1 = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}, W_1 = (A, B) \text{ ve } W_2 = (C, D) \tag{3.102}$$

olsun. Bu takdirde (3.91) rank şartı

$$\Re(V_1) \cap \Re(V_2) = \{0\} \text{ ve } \Re({W_1}^*) \cap \Re({W_2}^*) = \{0\} \tag{3.103}$$

eşitliklerine denk olacaktır. Bu durumda kolayca gösterilebilir ki

$$r\begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ W_2 & 0 \end{pmatrix} = r(W_1, A) + r(W_2, 0) = r(W_1) + r(W_2) = r(M),$$

$$r\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} V_1 \\ A \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} V_2 \\ 0 \end{pmatrix} = r(V_1) + r(V_2) = r(M)$$

eşitliklerinin her ikisi de (3.100) deki iki içerme bağıntısına denktir. Öte yandan

$$\begin{pmatrix} E_A B \\ S_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B - AA^+B \\ D - CA^+B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} A^+B = V_2 - V_1 A^+ B$$

$$\begin{aligned}(CF_A, S_A) &= (C - CA^+A, D - CA^+B) \\ &= (C, D) - CA^+(A, B) = W_2 - CA^+W_1\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle

$$r\begin{pmatrix} E_A B \\ S_A \end{pmatrix} = r(V_2 - V_1 A^+ B) = r\begin{pmatrix} V_2 \\ V_1 A^+ B \end{pmatrix} = r(V_2),$$

$$r(CF_A, S_A) = r(W_2 - CA^+W_1) = r(W_2, CA^+W_1) = r(W_2)$$

olacaktır. Bu iki eşitlik ve yukarıdaki rank formüllerinden

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} 0 & E_A B \\ CF_A & S_A \end{pmatrix} &= r(M) - r(A) \\ &= r(V_1) + r(V_2) - r(A) = r\begin{pmatrix} E_A B \\ S_A \end{pmatrix} + r(CF_A), \end{aligned}$$

$$r\begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix} = r(M) - r(A)$$

$$= r(W_1) + r(W_2) - r(A) = r(CF_A, S_A) + r(E_AB)$$

eşitlikleri sağlanır. Bunların her ikisi de tamı tamına (3.101) deki rank toplamsallık şartıdır. Tersine olarak $r(A)$ yı (3.101) her tarafına ekleyerek yukarıdaki rank formülleri uygulanırsa

$$r\begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ CF_A \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} E_AB \\ S_A \end{pmatrix}$$

$$= r(A, E_AB) + r(CF_A, S_A) \tag{3.104}$$

olduğu görülür. Öte yandan (3.100) deki iki içerme bağıntısı aynı zamanda

$$r(M) = r\begin{pmatrix} A & E_AB & 0 \\ CF_A & S_A & C \end{pmatrix}$$

$$= r(A, E_AB) + r(CF_A, S_A, C) = r(A, B) + r(C, D)$$

ve

$$r(M) = r\begin{pmatrix} A & E_AB \\ CF_A & S_A \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ CF_A \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} E_AB \\ S_A \\ B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$$

eşitliklerine denktir. Bu ikisi ise (3.91) ifadesinin ta kendisidir. Benzer şekilde aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 3.16 (3.91) deki rank toplamsallık şartı aşağıdaki dört şarta denktir:

$$\mathfrak{R}\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathfrak{R}(M), \quad \mathfrak{R}\begin{pmatrix} A^* \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathfrak{R}(M^*) \tag{3.105}$$

$$r\begin{pmatrix} S_D & BF_D \\ E_DC & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} S_D \\ E_DC \end{pmatrix} + r(BF_D) = r(S_D, BF_D) + r(E_DC) \tag{3.106}$$

burada $S_D = BD^+C$ dir.

Şimdi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ matrisinin

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = PNQ = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ CA^+ & I_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A^+B \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \tag{3.107}$$

şeklinde çarpanlarına ayrıldığını varsayalım, burada $S_A = D - CA^+B$ matrisi A nın M deki Schur komplementi, P ve Q ise iki nonsingüler matris olsun. Amacımız (3.91) şartı altında M nin Moore-Penrose inversinin M nin bu ayrışımına bağlı olup olmayacağının belirlenmesidir. M nin bu ayrışımına bağlı olarak akla gelebilecek ilk soru hangi şartlar altında $Q^{-1}N^{+}P^{-1}$ ters çarpımının M nin Moore-Penrose inversi olacağıdır. Bu soruyu cevaplandırmak için $(PNQ)^{+} = Q^{-1}N^{+}P^{-1}$ olması için gerek ve yeter şart

$$r(N, P^{*}PN) = r(N),\ \ r\begin{pmatrix} N \\ NQQ^{*} \end{pmatrix} = r(N) \tag{3.108}$$

olmasıdır ki bu da

$$r\big(PNQ, P^{*}P(PNQ)\big) = r(PNQ),\ r\begin{pmatrix} PNQ \\ (PNQ)QQ^{*} \end{pmatrix} = r(PNQ) \tag{3.109}$$

olmasına denktir. Şimdi (3.109) eşitliklerinde $M = PNQ$ alıp gerekli sadeleştirmeler yapılarak aşağıdaki basit sonucu verebiliriz.

Lemma 3.17 (3.107) de verilen M matrisinin Moore-Penrose inversinin

$$M^{+} = Q^{-1}N^{+}P^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -A^{+}B \\ 0 & I_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{+} & I_l \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

şeklinde olması için gerek ve yeter şart M matrisinin

$$\Re\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \Re(M) \text{ ve } \Re\begin{pmatrix} A^{*} \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \Re(M^{*}) \tag{3.111}$$

şartlarını sağlamasıdır.

Açıkça görülür ki (3.111) şartları (3.100) denklemindeki iki içerme bağıntısının ta kendisidir. Bunlar (3.91) de verilen genel rank toplamsallık şartlarıyla sağlanır. Böylece M nin (3.91) şartı altındaki Moore-Penrose inversi doğal olarak (3.110) daki gibi yazılabilir. Burada akla gelebilecek bir diğer soru (3.100) denkleminde N^{+} matrisinin nasıl olacağı sorusudur. Bunun için N matrisini

$$N = N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix} \tag{3.112}$$

olarak yazalım. Bu durumda $N_1^{*}N_2 = 0$ ve $N_2N_1^{*} = 0$ olacağı açıktır. Böylece M blok matrisini $N = N_1 + N_2$ nin Moore-Penrose inversi

$$N^{+} = N_1^{+} + N_2^{+} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{+} + \begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix}^{+} \tag{3.113}$$

olarak yazılabilir. Eğer (3.113) eşitliğinde N_2^+ nin blok ifadesi bilinebilirse bu durumda N^+ nin blok ifadesi bilinebilir. Buradan da (3.110) ifadesinden M^+ matrisinin blok ifadesi verilebilir. Gerçekten (3.113) eşitliğindeki N_2^+ matrisinin blok ifadesi bilindikten sonra

$$r\begin{pmatrix} 0 & E_AB \\ CF_A & S_A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} E_AB \\ S_A \end{pmatrix} + r(CF_A) = r(CF_A, S_A) + r(E_AB)$$

rank toplamsallık şartı sağlandığında M matrinin Moore-Penrose inversi aşağıdaki şekilde bulunabilir.

Teorem 3.12 Eğer (3.107) deki M matrisi (3.91) de verilen genel toplamsallık şartını sağlarsa, bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi aşağıdaki iki formda verilebilir:

$$M^+ = \begin{pmatrix} H_1 - H_2CA^+ - A^+BH_3 + A^+BJ^+(D)CA^+ & H_2A^+BJ^+(D) \\ H_3 - J^+(D)CA^+ & J^+(D) \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

$$M^+ = \begin{pmatrix} J^+(A) & J^+(C) \\ J^+(B) & J^+(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(E_{B_2}S_DF_{C_2}\right)^+ & \left(E_{D_2}S_BF_{A_1}\right)^+ \\ \left(E_{A_2}S_CF_{D_1}\right)^+ & \left(E_{C_1}S_AF_{B_1}\right)^+ \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

Burada

$$S_A = D - CA^+B,\ S_B = C - DB^+A,\ \ S_C = B - AC^+D,\ S_D = A - BD^+C,$$

$$A_1 = E_BA,\ B_1 = E_AB, A_2 = AF_C,\ B_2 = BF_D,$$

$$C_1 = CF_A,\ C_2 = E_DC, D_1 = E_CA,\ D_2 = DF_B,$$

$$H_1 = A^+ + C_1^+[S_AJ^+(D)S_A - S_A]B_1^+,$$

$$H_2 = C_1^+[I - S_AJ^+(D)],\ H_3 = [I - S_AJ^+(D)]B_1^+, \quad J(D) = E_{C_1}S_AF_{B_1}$$

dir.

İspat. Yukarıdaki tartışmaya göre (3.107) deki M matrisi (3.91) genel rank toplamsallık şartını sağlarsa bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi (3.110) daki gibi ve N^+ matris de (3.113) deki gibi olacaktır. Öte yandan eğer (3.107) deki M matrisi (3.91) genel rank toplamsallık şartını sağlarsa (3.112) deki N_2 matrisi (3.101) deki rank toplamsallık şartını sağlar. Bu nedenle N_2 matrisinin Moore-Penrose inversi

$$N_2^+ = \begin{pmatrix} C_1^+[S_A J^+(D) S_A - S_A] B_1^+ & C_1^+ - C_1^+ S_A J^+(D) \\ B_1^+ - J^+(D) S_A B_1^+ & J^+(D) \end{pmatrix} \tag{3.116}$$

olarak yazılabilir, burada $B_1 = E_A B, C_1 = CF_A$ ve $J(D) = E_{C_1} S_A F_{B_1}$ dir. Önce (3.116) ifadesi (3.113) de ve daha sonra (3.113) ifadesi (3.110) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} M^+ &= Q^{-1} N^+ P^{-1} \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} A^+ + C_1^+[S_A J^+(D) S_A - S_A] B_1^+ & C_1^+ - C_1^+ S_A J^+(D) \\ B_1^+ - J^+(D) S_A B_1^+ & J^+(D) \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned} \tag{3.117}$$

olduğu görülür. (3.117) ifadesi 2x2 tipinde bir blok matris şeklinde yazılarak M^+ matrisinin (3.114) deki ifadesi elde edilir. Öte yandan (3.107) de verilen M matrisi ayrıca üç benzer formda B, C ve D nin M deki S_B, S_C ve S_D Schur komplementleri N matrisinin sırasıyla alt sol, üst sağ ve üst sol kısımları olmak üzere

$$M = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ CB^+ & I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_B A & B \\ S_B & DF_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B^+ A & I_k \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} I_m & AC^+ \\ 0 & I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AF_C & S_C \\ C & E_C D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C^+ D \\ 0 & I_k \end{pmatrix},$$

ve

$$M = \begin{pmatrix} I_m & BD^+ \\ 0 & I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_D & BF_C \\ E_D C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ D^+ C & I_k \end{pmatrix}$$

şeklinde de parçalanabilir. M matrisinin bu parçalanışlarına dayanarak M matrisinin Moore-Penrose inversi rank toplamsallık şartları altında (3.117) ye eşdeğer olarak

$$M^+ = \begin{pmatrix} * & J^+(C) \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ J^+(B) & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^+(A) & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

formlarında da ifade edilebilir. Sonuç olarak bir matrisin Moore-Penrose inversinin tekliğinden ve (3.116) ifadesi kullanılarak (3.117) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.13 (3.107) deki M matrisinin Moore-Penrose inversinin

$$M^+ = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} \tag{3.118}$$

olduğunu varsayalım. Eğer M matrisi (3.91) rank toplamsallık şartını sağlarsa bu takdirde M ve M^+ daki alt matrisler aşağıdaki dört rank eşitliğini sağlar:

$$r(G_1) = r(V_1) + r(W_1) - r(M) + r(D) \tag{3.119}$$

$$r(G_2) = r(V_1) + r(W_2) - r(M) + r(B) \tag{3.120}$$

$$r(G_3) = r(V_2) + r(W_1) - r(M) + r(C) \tag{3.121}$$

$$r(G_4) = r(V_2) + r(W_2) - r(M) + r(A) \tag{3.122}$$

$$r(G_1) = r(G_4) = r(A) + r(D), r(G_2) = r(G_3) = r(B) + r(C) \tag{3.123}$$

Burada $V_1,\ V_2,\ W_1$ ve W_2 matrisleri (3.102) verildikleri gibidir. Ayrıca MM^+ ve M^+M çarpımları için

$$MM^+ = \begin{pmatrix} W_1W_1^+ & 0 \\ 0 & W_2W_2^+ \end{pmatrix}, \quad M^+M = \begin{pmatrix} V_1^+V_1 & 0 \\ 0 & V_2^+V_2 \end{pmatrix} \tag{3.124}$$

yazılabilir.

İspat. (3.119)-(3.122) de verilen dört rank eşitliğinin sağlandığı M^+ matrisi için (3.115) denklemindeki ifadelerden ve Lemma 3.11 de verilen rank eşitliklerinden kolayca görülür. (3.123) deki iki eşitlik ise sırasıyla (3.119)-(3.121) ve (3.120)- (3.122) eşitliklerinin toplanması sonucuyla oluşur. (3.124) deki iki sonuç genel rank toplamsallık şartı ve Lemma 3.12 (i) ve (ii) den türetilebilir.

Yukarıda verilen iki teoremden aşağıdaki sonuçlar türetilebilir:

Sonuç 3.6 (3.107) deki M matrisi (3.105) denklemini ve aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\Re(C_1) \cap \Re(S_A) = \{0\}, \Re(B_1^*) \cap \Re(S_A^*) = \{0\} \tag{3.125}$$

Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = Q^{-1}\begin{pmatrix} A^+ & C_1^+ - C_1^+S_AJ^+(D) \\ B_1^+ - J^+(D)S_AB_1^+ & J^+(D) \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ - H_2CA^+ - A^+BH_3 + A^+BJ^+(D)CA^+ & H_2 - A^+BJ^+(D) \\ H_3 - J^+(D)CA^+ & J^+(D) \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $C_1,\ B_1,\ H_2$ ve H_3 matrisleri (3.114) de ve P ve Q matrisleri ise (3.107) de verildikleri gibidir.

İspat. (3.125) şartları (3.112) deki N_2 matrisinin $r(N_2) = r(E_AB) + r(CF_A) + r(S_A)$ rank toplamsallık şartını sağladığını gösterir ki bu da (3.101) denkleminin bir özel durumudur. Bu nedenle N_2 matrisinin Moore-Penrose inversi (3.99) daki gibi daha basit bir formda yazılabilir. Buna karşılık olarak (3.117) denklemi Sonuç 3.6 daki gibi sadeleştirilebilir.

Sonuç 3.7 (3.107) deki M matrisi (3.105) denklemini ve aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\Re(BS_A^*) \subseteq \Re(A)\, , \Re(C^*S_A) \subseteq \Re(A^*) \tag{3.126}$$

Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} I_n & -A^+B \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & (CF_A)^+ \\ (E_AB)^+ & S_A^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^+ & I_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ - A^+B(E_AB)^+ - (CF_A)^+CA^+ + A^+BS_A^+CA^+ & (CF_A)^+ - A^+BS_A^+ \\ (E_AB)^+ - S_A^+CA^+ & S_A^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $S_A = CA^+B$ dir.

İspat. (3.126) daki şartlar sırasıyla $(E_AB)^+S_A^* = 0$ ve $S_A^*(CF_A)^+ = 0$ eşitliklerine denktir. Bu durumda (3.113) eşitliğinde

$$N_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & (CF_A)^+ \\ (E_AB)^+ & S_A^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır. Bu nedenle (3.117) ifadesi Sonuç 3.7 deki gibi sadeleştirilebilir.

Sonuç 3.8 (3.107) deki M matrisi aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\begin{aligned} &\Re(B) \subseteq \Re(A), \qquad \Re(C^*) \subseteq \Re(A^*), \\ &\Re(C) \subseteq \Re(S_A), \qquad \Re(B^*) \subseteq \Re(S_A^*) \end{aligned} \tag{3.127}$$

Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} I_n & -A^+B \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & S_A^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^+ & I_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ + A^+BS_A^+CA^+ & -A^+BS_A^+ \\ -S_A^+CA^+ & S_A^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $S_A = D - CA^+B$ dir.

İspat. (3.127) daki şartlar altında M matrisinin rankı (3.91) deki rank toplamsallık şartını sağlar. Bu durumda (3.113) eşitliğinde

$$N_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_A^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır. Bu nedenle (3.117) ifadesi Sonuç 3.8 deki gibi sadeleştirilebilir.

Sonuç 3.9 (3.107) deki M matrisi (3.105) denklemini ve aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\Re(B) \cap \Re(A) = \{0\}, \ \ \Re(C^*) \cap \Re(A^*) = \{0\}, \tag{3.128}$$

$$\Re(D) \subseteq \Re(C), \quad \Re(D^*) \subseteq \Re(B^*) \tag{3.129}$$

Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} I_n & -A^+B \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ - C_1^+ S_A B_1^+ & C_1^+ \\ B_1^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^+ & I_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ - A^+BB_1^+ - C_1^+CA^+ - C_1^+S_AB_1^+ & C_1^+ \\ B_1^+ & S_A^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $S_A = D - CA^+B, B_1 = E_AB$ ve $C_1 = CF_A$ dir.

İspat. (3.128) ve (3.129) daki şartlar altında M matrisinin rankı (3.91) deki rank toplamsallık şartını sağladığı kolayca görülebilir. Bu durumda $J(D) = 0$ olup (3.113) eşitliğinde

$$N_2^+ = \begin{pmatrix} -C_1^+S_AB_1^+ & -C_1^+ \\ B_1^+ & 0 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Bu nedenle (3.117) ifadesi Sonuç 3.9 deki gibi sadeleştirilebilir.

Sonuç 3.10 (3.107) deki M matrisi (3.105) denklemini ve aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\Re(B) \cap \Re(A) = \{0\}, \ \ \Re(C^*) \cap \Re(A^*) = \{0\}, \tag{3.130}$$

$$\Re(S_A) \subseteq \mathcal{N}(C^*), \qquad \Re(S_A^*) \subseteq \mathcal{N}(B) \tag{3.131}$$

Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} I_n & -A^+B \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & (CF_A)^+ \\ (E_AB)^+ & S_A^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^+ & I_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^+ - A^+B(E_AB)^+ - (CF_A)^+CA^+ & (CF_A)^+ \\ (E_AB)^+ & S_A^+ \end{pmatrix}$$

olacaktır, burada $S_A = D - CA^+B$ dir.

İspat. (3.131) deki şart $C^+S_A = 0$ ve $S_AB^+ = 0$ eşitliklerine denktir. Bu ise $S_A^+C = 0$ ve $BS_A^+ = 0$ olması demektir.bu eşitlikler ve (3.130) ifadesi dikkate alınırsa

$$(CF_A)^+S_A = 0 \ \text{ ve } \ S_A(E_AB)^+ = 0 \tag{3.132}$$

elde edilir. (3.130) ve (3.132) eşitlikleri birleştirilirse M matrisinin (3.100) ve (3.101) deki şartları sağladığı kolayca görülebilir. Bu durumda (3.117) deki N^+ matrisi

$$N^+ = \begin{pmatrix} A^+ & (CF_A)^+ \\ (E_AB)^+ & S_A^+ \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Bu nedenle (3.117) ifadesi Sonuç 3.10 daki gibi sadeleştirilebilir.

Sonuç 3.11 (3.107) deki M matrisi (3.105) denklemini ve aşağıdaki rank toplamsallık şartını sağlasın.

$$r(M) = r(A) + r(B) + r(C) + r(D) \tag{3.133}$$

Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} (E_BAF_C)^+ & (E_DCF_A)^+ \\ (E_ABF_D)^+ & (E_CDF_B)^+ \end{pmatrix} \tag{3.134}$$

olacaktır.

İspat. (3.133) deki şart (3.91) deki genel rank rank toplamsallık şartının bir özel durumudur. Bunun yanında (3.133) eşitliği aşağıdaki dört eşitliğe denktir.

$$\Re(A) \cap \Re(B) = \{0\}, \qquad \Re(C) \cap \Re(D) = \{0\},$$

$$\Re(C^*) \cap \Re(A^*) = \{0\}, \quad \Re(B^*) \cap \Re(D^*) = \{0\}$$

şartlarına denktir. Dolayısıyla

$$\Re(A_1^*) = \Re(A^*),\ \Re(A_2) = \Re(A),\ \Re(A_1^*) = \Re(A^*),\ \Re(B_2) = \Re(B)$$

$$\Re(C_1) = \Re(A),\ \ \Re(C_2^*) = \Re(C^*),\ \ \Re(D_1^*) = \Re(D^*),\ \Re(A_2) = \Re(D)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan da sırasıyla

$$A_1^+A_1 = A^+A,\ \ A_2^+A_2 = AA^+,$$

$$B_1^+B_1 = B^+B\ ,\ \ B_2B_2^+ = BB^+$$

$$C_1C_1^+ = CC^+,\ \ C_2^+C_2 = C^+C,$$

$$D_1^+D_1 = D^+D,\ \ D_2D_2^+ = DD^+$$

eşitlikleri yazılabilir. Sonuç olarak eğer (3.92) ve (3.93) ifadeleri (3.115) ifadesine uygulanırsa (3.134) eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.12 (3.107) deki M matrisi $r(M) = r(A) + r(D)$ rank eşitliğini ve aşağıdaki dört içerme bağıntısını sağlasın.

$$\Re(A) \subseteq \Re(B), \;\; \Re(C) \subseteq \Re(D),$$

$$\Re(C^*) \subseteq \Re(A^*), \;\; \Re(B^*) \subseteq \Re(D^*),$$

Bu takdirde M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} (A - BD^+C)^+ & -A^+B(D - CA^+B)^+ \\ -(D - CA^+B)^+CA^+ & -(D - CA^+B)^+ \end{pmatrix}$$

formunda olacaktır.

Sonuç 3.13 (3.107) deki M matrisi $r(M) = r(A) + r(D)$ rank eşitliğini sağlasın. Eğer

$$\Re(A) = \Re(B), \;\; \Re(C) = \Re(D),$$

$$\Re(C^*) = \Re(A^*), \;\; \Re(B^*) = \Re(D^*),$$

ranj uzayı eşitlikleri sağlanıyorsa bu durumda M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^+ = \begin{pmatrix} S_D^+ & S_B^+ \\ S_C^+ & S_A^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - BD^+C)^+ & (C - DB^+A)^+ \\ (B - AA^+D)^+ & (D - CA^+B)^+ \end{pmatrix}$$

formunda olacaktır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünün mevcut olup-olmadığının ve mevcut olması durumunda çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan Moore-penrose invers adı verilen bir genelleştirilmiş invers kavram ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Daha sonra keyfi mertebeden bir matrisi blok matrisler şeklinde parçalayarak alt blokların durumlarına göre bu matrislerin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversleri için bazı ifadeler ortaya konulmuş ve ayrıca bu tipten inversleri hesaplamada kullanılan bazı yeni yöntemler verilmiştir. Bununla ilgili olarak, verilen bir matris 1x2 veya 2x2 tipinde blok parçalanmış matris biçiminde ifade edilerek Moore–Penrose inversler için çeşitli rank şartları altında bazı genel formüller verilmiş ve blok parçalanmada içerilen alt blok matrislerin durumlarına göre Moore-Penrose inversler için bazı yeni ifadeler elde edilmiştir.

Yapılan çalışmalara ilaveten ele alınan bir matris daha değişik mertebeden alt bloklara parçalanarak bu blokların özelliklerine göre parçalanmış matrislerin Moore-Penrose inverslerinin hesaplamasında kullanılacak yeni formüller geliştirilebilir. Burada ele alınan rank şartlarından farkı bir takım rank şartları da geliştirilebilir. Ayrıca matrislerin Moore-Penrose inverslerinin hesaplanmasında kullanılmak üzere bilgisayar programları ve çeşitli hesaplama algoritmaları türetilerek bu program ve algoritmalardan yararlanılması önerilebilir. Elde edilen bulgulardan yararlanarak çeşitli mertebeden lineer denklem sistemleri için çözüm yöntemleri geliştirilip uygulanabilir. Özellikle istatistik alanında genel veya kısıtlamalı lineer modellerde parametre tahminlerinin incelenmesinde katsayılar parametre matrislerinin Moore-Penrose inverslerinin kullanılması sağlanabilir.

5. KAYNAKLAR

Adetunde I.A. ve ark., 2010. On the Generalized Inverse of a Matrix. American Journalof Scientific Research, Issue 7, 77-89.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 1993. Around a Formula for The Rank for a Matrix Product with Some Statistical Applications, in: R.S. Rees (Ed.), Graphs, Matrices, and Designs: Festschrift in Honor of Norman J. Pullman on His Sixtieth Birthday, Marcel Dekker, New York, 1-18.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 2002. Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form, Linear Algebra and its Appl. 354,41-47.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2004. Relationships between generalized inverses of a matrix and generalized inverses of its rank-one-modifications. Linear Algebra and its Appl. 388, 31-44.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2007. Particular formulae for the Moore-Penrose inverse of a coloumnwise partitioned matrix, Linear Algebra and its Appl. 421, 16-23.

Ben-Israel, A., 2002, The Moore of the Moore–Penrose inverse, Electron. J. Linear Algebra 9, 150–157.

Ben-Israel A., Greville T.N.E. 1974.*Generalized Inverses: Theory and Applications*, Wiley-Interscience , New York ,

Burns F., Carlson D., Haynsworth E., and Markham T., 1974, Generalized inverse formulas using the Schur-complement, SIAM J. Appl. Math., 26,254-259.

Boullion L.Thomas and Odell L.Patrick , 1971. Generalized İnverse Matrices, Wiley-Interscience , New York.

Carl D. Meyer, Jr., 1973. Generalized Inverses and Ranks of Block Matrices, SIAM J. Appl. Math. 25, 597-602.

Castro-Gonzalez N., Martinez-Serrano M.F., Robles J., 2015. Expressions fort he Moore-Penrose inverse a block matrices involving the Schur complement, Linear Algebra and its Applications 471, 353-368.

Cegielski A. 2001.Obtuse cones and Gram matrices with non-negative inverse, Linear Algebra Appl.335,167-181.

Chipman, J. S., 1968, Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices, Symposium Proceedings, Texas Technological College. Mathematics Series No. 4, 114-176.

Cline, R.E., 1964. Representations for the generalized inverse of a partitioned matrix, J. Soc. Indust. Appl. Math. 12, 588–600.

Deng, C.Y., Du, H. K., 2009. Representations of the Moore-Penrose inverse of 2x2 block operator valued matrices, J. Korean Math. Soc. 46(6), 1139-1150.

Doymuş, N., 2006. Matrislerin Genelleştirilmiş Tersleri ve Kronecker Çarpımlarının Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas, 63 s.

Grob Jürgen, 2000. The Moore-Penrose inverse of a partitioned nonnegative definite matrix,Linear Algebra and its Applications 321, 113-121.

Hacısalihoğlu, H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Hall F.J., Hartwig R., 1976. Further results on generalized inverses of partitioned matrices, SIAM J.Appl. Math. 30 (4) 617-624.

Hall F.J., 1979. The Moore-Penrose inverse of particular bordered matrices, J.Austral. Math.Soc.,Ser A 27, 467-478.

Hartwig, R.E., 1976. Block generalized inverses , *Arch. Rational Mech. Anal*. 61,197-251.

Hartwig, R.E., 1976.Singular value decomposition and the Moore-Penrose inverses of bordered matrices, SIAM J.*Appl.Math*. 31,31-41.

Harville, D.A., 1997.Matrix Algebra From a Statistician's Perspective,Springer, New York

Hung, C.H., Markham, T.L. 1975. The Moore-penrose inverces of a partitioned matrix $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$. Czechoslavak Math. Journal, 25, 3, 354-361.

Hung, C.H., Markham, T.L. 1975. The Moore-penrose inverces of a partitioned matrix $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$. Linear Algebra and its Applications, 11,73-86.

Lancaster, P., 1969. *Theory of Matrices*, Academic Pres, New York, 570 s.

Marsaglia, G., Styan, G.P.H., 1974. Rank Conditions for Generalized Inverses of Partitioned Matrices. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A Vol. 36, No. 4 , 437-442 s.

Meyer C.D. 1972.The Moore-Penrose inverse of a bordered matrix, Linear Algebra Appl. 5, 375-382

Meyer C.D. 1973.Generalized inverses and ranks of block matrices, SIAM J.Appl.Math. 25,597-602

Miao Jian-Ming 1991. General Expressions for the Moore-Penrose inverse of a $2x2$ block matrix, Linear Algebra and its applications 151, 1-15

Mihalyffy, L. 1971. An Alternative representation of the generalized inverces of partitioned matrices, Linear Algebra and its Appl. 4, 95-100.

Milliken G.A., Akdeniz F., 1977. A theorem on the difference of the generalized inverses of two nonnegative definite matrices, Communications in Statistics Theory and Methods 6 ,73-79

Mitra, S. K., 1968, On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 107-114.

Mitra, S. K., 1968, A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 323-330.

Noble B.,1966. A method for computing the generalized inverse of a matrix, SIAM J. Numer. Anal. 3, 582-584

Noble B., 1969.Applied Linear Algebra, Prentice-Hall, New Jersey

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413.

Pringle, R.M., Rayner A.A.,1970 Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models, SIAM Rev. 12,107-115

Pringle, R.M.,Rayner A.A., 1971.Generalized Inverse Matrices ,Griffin,London

Rao, C.R., 1962, A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158.

Rao, C.R., 1966, Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Rao, C.R., 1967, Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, C.R., Mitra, S.K. 1971. Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Rohde C.A. 1965. Generalized inverses of partitioned matrices, SIAM J. Appl. Math. 13,1033-1035

Tewarson R.P., 1967 A direct method for generalized matrix inversion, SIAM J.Numer.Anal. 4,499-507

Tian, Y., 1998. The Moore-penrose inverses of mxn block matrices and their applications, Linear Algebra Appl. 283,35-60

Tian, Y., 2004. Using rank formulas to characterize equalities for Moore-Penrose inverses of matrix products. Applied Math. and Computation, 147, 581-600 s.

Tian, Y., Takane, Y., 2004. More on generalized inverces of partitioned matrices with Banachiewicz-Schur forms, Applied Math. and Computation, 148, 1-13.

Tian Y.., Jürgen G. 2006. Invariance properties of a triple matrix product involving generalized inverses, Linear Algebra and its Appl. 417, 94-107.

Tian, Y., Takane, Y., 2009. More on generalized inverces of partitioned matrices with Banachiewicz-Schur forms, Linear Algebra Appl. 430, 1641-1655

Tian Y., Styan G. P.H., 2009. On some matrix equalities for generalized inverses with applications, Linear Algebra and its Appl. 430, 2716-2733.

Topal, T., 2016. 2x2 Blok Matrislerde Moore-Penrose İnversler İçin Bazı Yeni Gösterimler, Yüksek Lisan Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu Üniversitesi.

Tseng, Y. Y., 1949, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol. 67, 431-434.

Tseng, Y. Y., 1949, Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 67, 607-610.

Wang, G., Chen Y., 1986.A recursive algorithm for computing the weighted Moore-Penrose inverse $A^{+}_{M,N}$, J.Comput. Math.4, 74-85

Wei, Y., 2003.The representation and approximation for the weighted Moore-Penrose inverse in Hilbert space, Appl. Math. Comput. 136, no. 2-3, 475-486.

Wei, Y., Ding, J., 2001. Representations for Moore-Penrose inverses in Hilbert spaces, Appl. Math. Lett. 14, no. 5, 599-604.

Yan Zi-Zong 2014. New representations of the Moore-Penrose inverse of $2x2$ block matrices, Linear Algebra and its Applications 456, 3-15

Zekraoui, H., Guedjiba, S., 2008. On Algebric Properties of Generalized Inverses of Matrices, Internal Journal of Algebra. Vol. 2, no. 13, 633-643.

Zlobec. S., 1970. An explicit form the Moore-Penrose inverse of an arbitrary complex matrix,SIAM Rev.12, 132-134.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Bilge Demirel
Doğum Yeri	Ordu
Doğum Tarihi	11.12.1995
Uyruğu	■ T.C. ❐ Diğer:
Telefon	05435417909
E-Posta Adresi	bilge.demirel.07@hotmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Ordu Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	11.06.2017
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Yayınlar	
…..	