T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TİMELİKE BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN GEODEZİK EĞRİLİKLERİ VE TABİİ LİFTLERİ

ÖMER FARUK ÇALIŞKAN

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans
derecesi için hazırlanmıştır.

ORDU 2013

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Ömer Faruk ÇALIŞKAN tarafından ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında hazırlanan "Timelike Bertrand Eğri Çiftlerinin Küresel Göstergelerinin Geodezik Eğrilikleri ve Tabii Liftleri" adlı bu tez, jürimiz tarafından 28 / 01 / 2013 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Başkan : Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN İmza:
Matematik, Gazi Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT İmza :
Matematik, Ordu Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI İmza :
Matematik, Ordu Üniversitesi

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 08.02.13 tarih ve 2013/56 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

08/02/2013

Enstitü Müdürü
Doç. Dr. A. Fikret BALTA

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza
Ömer Faruk ÇALIŞKAN

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

TİMELİKE BERTRAND EĞRİ ÇİFTLERİNİN KÜRESEL GÖSTERGELERİNİN GEODEZİK EĞRİLİKLERİ VE TABİİ LİFTLERİ

Ömer Faruk ÇALIŞKAN

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2013
Yüksek Lisans Tezi, 81s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma dört bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Genel bilgiler bölümünde Öklid uzayı ve Lorentz uzayı ile ilgili bilgilere yer verildi. Materyal ve yöntem bölümünde Öklid uzayında Bertrand eğri çiftleri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Bulgular bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ timelike Bertrand eğri çifti alınarak bu eğri çiftlerinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrisinin IL^3 e göre yay uzunlukları, $S_1^{\,2}$ Lorentz küresi ve $H_0^{\,2}$ Hiperbolik küreye göre geodezik eğrilikleri hesaplanarak bu iki eğrinin yay uzunlukları ile geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca α^{*} eğrisinin küresel göstergelerinin tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartı α eğrisine bağlı olarak ifade edildi.

Anahtar Kelimeler: Lorentz uzayı, Bertrand eğri çifti, Geodezik eğrilik, Geodezik spray, Tabii lift.

ABSTRACT

THE NATURAL LIFT CURVES AND GEODESIC CURVATURES OF THE SPHERICAL INDICATRICES OF THE TIMELIKE BERTRAND CURVE COUPLE

Ömer Faruk ÇALIŞKAN

University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematic, 2013
MSc. Thesis, 81p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

This study consists four fundamental chapter. In introduction, it is discussed aim of and why this study is taken into consideration. In general in formation part, the basic consepts of Euclidean space and Lorentzian space have been pointed out. In material and method part, Bertrand curves are defined in the 3-dimensional Euclidean space.

In the last chapter is the original part of the study. In this chapter, arc-lengths and geodesic curvatures of the spherical indicatrix curves with the fixed pole curve of Bertrand curves have been obtained with respect to IL^3 and S_1^2 or H_0^2. In addition, the relations among the geodesic curvatures and arc-lengths are given. Finally, the condition being the natural lifts of the spherical indicatrix curves of the α^* curve are an integral curve of the geodesic spray has expressed depending on α curve.

Key Words: Lorentzian Space, Bertrand Curve, Geodesic Spray, Geodesic Curvatures, Natural Lift.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT' a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR'a, Matematik Bölümü öğretim üyeleri Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN' e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI hocalarıma en içten şükranlarımı sunuyorum.

Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından (Proje No: TF-1228) desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	: Levi-Civita konneksiyonu
$\bar{D}$	: S_1^2 Lorentz küresindeki konneksiyon
$\bar{\bar{D}}$	: H_0^2 Hiperbolik küredeki konneksiyon
E^3	: 3-boyutlu Öklid Uzayı
g	: Lorentz metriği
H_0^{n-1}	: (n-1)-boyutlu Hiperbolik küre
S_1^{n-1}	: (n-1)-boyutlu Lorentz küresi
H_0^2	: Hiperbolik birim küre
S_1^2	: Birim Lorentz küresi
k_g	: IL^3 deki geodezik eğrilik
IL^n	: n- Boyutlu Lorentz uzayı
$\Vert\ \Vert_{IL}$	: Norm
S	: Şekil operatörü
W	: Darboux vektörü
γ_g	: H_0^2 (veya) S_1^2 deki geodezik eğrilik

1. GİRİŞ

3-Boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Özellikle iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak, birçok teoriler geliştirilmiştir. Bunlardan en iyi bilineni Bertrand eğrileri, Manheim eğrileri ve İnvolüt-Evolüt eğrileridir. Bertrand eğri çifti ilk olarak 1850 yılında Bertrand Russel tarafından tanımlanmıştır. Bertrand eğri çifti, birinci eğrinin aslinormal vektörü ile ikinci eğrinin aslinormal vektörü lineer bağımlı olan eğri çiftidir. Bu tanımlamadan sonra Bertrand eğri çifti üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır (Görgülü ve Özdamar 1986, Ekmekçi ve İlarslan 2001, Balgetir ve ark. 2004, Şenol ve ark. 2012).

Manheim eğrisi ilk olarak 1878 yılında A. Manheim tarafından ortaya atılmış ve son yıllarda Liu ve Wang tarafından yeniden tanımlanmıştır (Wang ve Liu 2007, 2008).

İnvolüt-Evolüt eğri çiftleri ile ilgili bilinen, temel teorem ve problemlere, Millman ve Parker (1977), Hacısalihoğlu (1983) ve Sabuncuoğlu (2006) açıklık getirmişlerdir.

Yukarıda belirtilen eğriler, farklı uzaylarda da ele alınarak incelenmiş ve birçok karakterizasyonlar elde edilmiştir. Öklid uzayı ve Lorentz uzayında Manheim eğrileri ile İnvolüt-Evolüt eğrilerin küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri, tabii liftleri ve tabii lift eğrilerinin tanjant demeti üzerinde geodezik spray için integral eğrisi olma şartları üzerinde çalışmalar yapılmıştır (Çalışkan ve ark. 1984, Sivridağ ve Çalışkan 1991, Turgut ve Esin 1992, Bilici ve ark. 2002, Bilici 2009, Bilici 2011, Ergun ve Çalışkan 2011, Demet 2012, Şenyurt 2012).

Bu çalışmada ise α ve α^* eğrileri timelike alınarak $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike Bertrand eğri çifti tanımı yeniden ifade edildi. Buradan timelike α^* eğrisinin $\left(T^*\right),\left(N^*\right)$ ve $\left(B^*\right)$ küresel gösterge eğrileri ile $\left(C^*\right)$ sabit pol eğrisinin IL^3 Lorantz uzayına, S_1^2 Lorentz küresine veya $H_0{}^2$ hiperbolik küreye göre yay uzunlukları ile geodezik eğrilikleri hesaplandı ve bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca α^* eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin tabii liftlerinin geodezik sprayın integral eğrisi olması için, α eğrisinin nasıl bir eğri olması gerektiği hakkında önemli sonuçlar verildi.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Çalışkan ve ark. (1984) tarafından yapılan bir çalışmada, $\alpha : I \to M$ eğrisinin $\overline{\alpha} : I \to \chi(M)$ tabii liftinin, geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şartın M üzerinde bir geodezik eğri olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca bir α eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin tabii liftlerinin geodezik sprayın integral eğrisi olması için α eğrisinin nasıl bir eğri olması gerektiğine dair sonuçlar da bulmuşlardır.

Bilici (2009) doktora tezinde, Lorentz uzayında non-null eğrilerin involütleri için eğrilikler ve burulmalar, Frenet vektörleri, Frenet vektörlerinin S_1^2 birim Lorenz küresi veya H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerindeki küresel gösterge eğrilerinin yay uzunlukları, IL^3, S_1^2 veya H_0^2 ye göre geodezik eğrilikleri ve Frenet ani dönme vektörlerinden yararlanarak bazı önemli sonuçlar elde etmiştir.

Ekmekçi ve İlarslan (2001) yaptıkları bir çalışmada, IL^n Lorentz uzayında Bertrand eğri çiftlerini tanımlayarak bu eğri çiftler arasında uzaklığın sabit olduğunu ve eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açının sabit olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Bertrand eğri çiftleri için Manheim ve Schell teoremlerini ispatlamışlardır.

Ergun ve Çalışkan (2011) yaptıkları bir çalışmada, Lorentz uzayında integral eğrisi, tabii lift eğrisi ve geodezik eğriyi tanımlayarak, $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin $\overline{\alpha} : I \to \chi(\overline{M})$ tabii liftinin, geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şartın $\overline{M}$ üzerinde bir geodezik eğri olması gerektiğini belirtmişlerdir.

Şenyurt (2012) yaptığı bir çalışmada, Öklid uzayında Manheim eğrilerinin küresel göstergelerinin yay uzunluklarını, geodezik eğriliklerini hesaplamıştır. Ayrıca (α, α^*) Manheim eğri çifti olmak üzere, α^* eğrisinin küresel göstergelerinin tabii litlerinin geodezik sprayın integral eğrisi olması için α eğrisinin nasıl bir eğri olması gerektiğine dair sonuçlar vermiştir.

3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid Uzayı ile Lorentz Uzayına ait temel kavramlara yer verilmiştir.

3.1. Öklid Uzayı

Tanım 3.1.1: A boş olmayan bir cümle, V de $\Im$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : A \times A \to V$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir:

$A_1 : \forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q)+f(Q,R)=f(P,R)$,

$A_2 : \forall P \in A,\ \forall \alpha \in \mathrm{V}$ için $f(P,Q)=\alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 3.1.2: V, A ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, ..., P_n \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, ..., P_0P_n\}$ cümlesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisine A afin uzayının bir **afin çatısı** denir. Burada P_0 noktasına çatının **başlangıç noktası** ve $P_i,\ 1 \le i \le n,$ noktalarına da çatının **birim noktaları** denir. $boyV = n$ ise A ya n**-boyutlu bir afin uzay** denir.

Tanım 3.1.3: V, A ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to IR$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir: $\forall\ x, y, z \in V$ için

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax+by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle,$$
$$\langle x, ay+bz\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle x,z\rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x,y\rangle = \langle y,z\rangle,$$

iii) Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x,x\rangle \ge 0,\ \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}.$$

Tanım 3.1.4: Reel standart afin uzayı IR^n olmak üzere, $\forall\ X,Y \in IR^n$ için

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \to IR,\ \langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma IR^n de **standart iç çarpım** veya **Öklid iç çarpım** denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu IR^n vektör uzayı ile birleşen afin uzayına n **-boyutlu standart Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir.

Örnek 3.1.1: $X, Y \in IR^2$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : IR^2 \times IR^2 \to IR, \ \langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos\theta, \ 0 \le \theta \le \pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 3.1.5: $X \in E^n$ noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları $(x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. $x_i : E^n \to IR$, $1 \le i \le n,$ fonksiyonuna E^n nin i **-yinci koordinat fonksiyonu** denir.

Tanım 3.1.6: $d : E^n \times E^n \to IR, \ d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(X, Y) \in IR$ sayısına da X ile Y noktaları arasındaki **uzaklık** denir.

Tanım 3.1.7: IR^n iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı E^n olmak üzere, $\{P_0, P_1, ..., P_n\} \in E^n$ nokta $(n+1)$-lisi için, $\{P_0P_1, P_0P_2, ..., P_0P_n\}$ cümlesi E^n nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$ cümlesine E^n de bir **Öklid çatı** veya **dik çatı** denir.

Tanım 3.1.8: $\alpha : I \subset IR \to E^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyona E^n de bir **eğri** denir. Burada I aralığına α eğrisinin **parametre aralığı** ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin **parametresi** denir.

Tanım 3.1.9: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\| : I \to IR \, , \ \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna **skaler hız fonksiyonu**, $\|\alpha'(t)\| \in IR$ sayısına α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **skaler hızı**,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}|_t = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, ..., \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right)|_t$$

vektörüne de α eğrisinin **hız vektörü** denir.

Tanım 3.1.10: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ eğrisi için $\left\| \alpha'(s) \right\| = 1$ ise eğriye **birim hızlı eğri**, $s \in I$ parametresine de **eğrinin yay parametresi** denir. Her eğri birim hızlı yapılabilir.

Tanım 3.1.11: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eğri ve $a, b \in I$ için

$$s = \int_a^b \left\| \alpha'(t) \right\| ds \tag{3.1.1}$$

reel sayısına $\alpha(a)$ ile $\alpha(b)$ noktaları arasındaki **yay uzunluğu** denir.

Tanım 3.1.12: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eğri ve $\phi = \left\{ \alpha', \alpha'', \alpha''', ... \alpha^{(r)} \right\}$ cümlesi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in Sp\left\{ \phi \right\}, \;\; k > r$$

olmak üzere ϕ cümlesinden **Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi** ile elde edilen $\left\{ V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s) \right\}$ ortonormal sistemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Serret Frenet r-ayaklısı,** $\forall \; V_i, \; 1 \le i \le r,$ vektörüne de **Serret Frenet** vektörü denir.

Teorem 3.1.1: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

1) $s \in I$ yay parametresi ise

$$\begin{cases} V_1(s) = \alpha'(s) \\[2ex] V_2(s) = \dfrac{1}{\left\| \alpha''(s) \right\|} \alpha''(s) \\[2ex] V_3(s) = T(s) \times N(s) \end{cases}$$

2) $s \in I$ yay parametresi değilse

$$\begin{cases} V_1(s) = \dfrac{1}{\left\| \alpha'(s) \right\|} \alpha'(s) \\[2ex] V_2(s) = B(s) \times N(s) \\[2ex] V_3(s) = \dfrac{1}{\left\| \alpha'(s) \times \alpha''(s) \right\|} \left(\alpha'(s) \times \alpha''(s) \right) \end{cases}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 3.1.13: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun.

$$\begin{aligned} k_i &: I \to IR, \quad 1 \le i < r \\ & s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin i**-yinci eğrilik fonksiyonu**, $\forall\, s \in I$ için $k_i(s) \in IR$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i**-yinci eğriliği** denir.

Teorem 3.1.2: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$, i-yinci eğriliği $k_i(s)$ olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} V_1'(s) = k_1(s) V_2(s) \\ \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), \qquad 1 \le i < r \\ \\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_r(s) \end{cases}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu 1983).

$n = 3$ özel halinde α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ile gösterilir. Burada T ye teğet vektör, N ye asli normal vektör ve B ye de binormal vektör denir. α eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri de sırasıyla κ ve τ ile gösterilir ve κ ya eğrinin eğriliği, τ ya da burulması adı verilir. Bu halde Frenet formülleri

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s) \\ \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s) \\ \\ B'(s) = -\tau(s) N(s) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

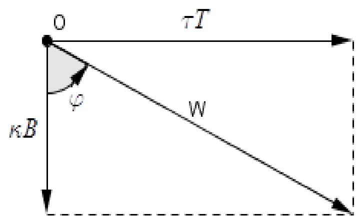
şeklinde olur (Hacısalihoğlu 1983).

Diğer taraftan, bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı her s anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) ekseni** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = N \wedge N' \ ,$$

$$W = \tau T + \kappa B \qquad (3.1.3)$$

şeklinde olur ve bu vektöre **Darboux vektörü** adı verilir (Şekil 3.1.1.).



Şekil 3.1.1. Darboux vektörü

W ile B vektörleri arasındaki açı φ ile gösterilirse şekilden,

$$\sin\varphi = \frac{\tau}{\|W\|} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \qquad (3.1.4)$$

yazılır. W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C = \frac{\tau}{\|\vec{W}\|} T + \frac{\kappa}{\|\vec{W}\|} B$$

olur. Burada κ ile τ nun yerine $(3.1.4)$ deki karşılıkları yazılırsa

$$C = \sin\varphi T + \cos\varphi B \qquad (3.1.5)$$

bulunur.

Tanım 3.1.14: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki 1. ve 2. eğrilikleri sırasıyla $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ olsun.

$$H_1 : I \to IR$$

$$s \to H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna α eğrisinin **1-inci harmonik eğriliği** denir.

Tanım 3.1.15: $\alpha : I \to E^n$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü, sabit bir U vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye bir **eğilim çizgisi**, $S_p\{U\}$ ya da eğilim çizgisinin **eğilim ekseni** denir.

Teorem 3.1.3: $\alpha : I \to E^3$ eğrisi bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $H_1(s) = sbt.$

İspat: $"\Rightarrow"$ Kabul edelim ki α bir eğilim çizgisi olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere, eğilim çizgisi tanımına göre

$$\langle T(s), U\rangle = \cos\theta$$

olur. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$\langle T'(s), U\rangle = 0,$$

$$\kappa\langle N(s), U\rangle = 0$$

bulunur. Bu durumda $N \perp U$ olur. $U \in S_p\{T(s), B(s)\}$ olduğundan

$$U = aT(s) + bB(s)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle U, T(s)\rangle &= a = \cos\theta \\ \langle U, B(s)\rangle &= b = \sin\theta \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

olur. $(3.1.6)$ bağıntısından

$$U = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\langle N(s), U\rangle = 0$$

ifadesinin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle N'(s), U\rangle + \langle N(s), U'\rangle = 0,$$

$$\left\langle \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U\right\rangle = 0,$$

$$\kappa(s)\left\langle T(s), U\right\rangle - \tau(s)\langle B(s), U\rangle = 0,$$

$$\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0,$$

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = sbt.,$$

$$H_1(s) = sbt.$$

elde edilir.

$"\Leftarrow"$ Kabul edelim ki $\forall\ s \in I$ için $H_1(s) = sbt.$ olsun. İddia ediliyor ki α bir eğilim çizgisidir.

$H_1(s) = sbt.$ ise $H_1(s) = \tan\theta$ alınabilir. Buradan

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta\kappa(s) - \sin\theta\tau(s) = 0$$

olur. Şimdi

$$\vec{U} = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

vektörünü tanımlayalım. Açının sabit olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa

$$U' = \cos\theta T' + \sin\theta B',$$
$$U' = (\cos\theta\kappa(s) - \sin\theta\tau(s))N(s)$$

olur ve norm alınırsa

$$\|U'\| = 0 \;\Rightarrow\; U = sbt\,.$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\langle\alpha'(s), U\rangle = \langle T(s), U\rangle$$

$$= \langle T(s), \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)\rangle$$

$$= \cos\theta = sbt.$$

olur ki bu da α bir eğilim çizgisi olması demektir.

Teorem 3.1.4: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $\tau = 0$ olmasıdır (Hacısalihoğlu 1983).

İspat: "$\Rightarrow$" Kabul edelim ki α birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda $\forall\, s \in I$ için $\alpha(s)$ noktalarının tümü bir E düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali q, düzlem üzerinde herhangi bir nokta p olsun. Bu durumda

$$\langle\alpha(s) - p, q\rangle = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle\alpha'(s), q\rangle + \langle\alpha(s) - p, q'\rangle = 0,$$
$$\langle\alpha'(s), q\rangle = 0$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$\langle\alpha''(s), q\rangle = 0$$

bulunur. Buradan q vektörünün T ve N ye dik olduğu görülür. Bu durumda q vektörü B ye paralel olur. Dolayısıyla

$$B(s) = \pm \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$B' = 0$$

bulunur ve

$$B'(s) = -\tau(s) N(s)$$

eşitliğinden

$$\tau(s) = 0$$

elde edilir.

"$\Leftarrow$" Kabul edelim ki $\tau(s) = 0$ olsun. $B'(s) = -\tau(s) N(s)$ idi. Buradan

$$B'(s) = 0,$$
$$B(s) = c = sbt.$$

olur. Şimdi

$$F : I \to IR$$
$$s \to F(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle$$

fonksiyonu tanımlansın. $s = 0$ ise $F(0) = 0$ dır. F nin s ye göre türevi alınırsa

$$F'(s) = \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha'(s) - \alpha(0), B'(s) \rangle$$

$$= \langle T(s), B(s) \rangle + < T(s), -\kappa(s) N(s) \rangle$$

$$= 0,$$

$$F(s) = sbt.$$

Buna göre

$$\langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle = 0$$

eşitliği, α eğrisinin $\alpha(0)$ noktasından geçen ve B vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.5: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır (Hacısalihoğlu 1983).

İspat: $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s) = \left\| \alpha''(s) \right\|$$

dir. Bu durumda

$$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \left\| \alpha''(s) \right\| = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0 \ , \ \Rightarrow \ \alpha'(s) = b.$$

$$\alpha(\mathrm{s}) = \mathrm{bs+c}, \quad \mathrm{b,c} \in \mathrm{IR}.$$

Tanım 3.1.16: E^n, n -boyutlu Öklid uzayında $\forall \, p \in M$ için $\nabla f|_p \neq 0$ olmak üzere

$$M = \left\{ x \in E^n \mid f : U \to IR, \ x \to f(x) = c, \ c \in IR, f \text{ dif.bilir fonk., } U \text{ açık alt cümle} \right\}$$

şeklinde tanımlanan boş olmayan M cümlesine $(n-1)$-**boyutlu yüzey** veya $(n-1)$-**yüzey** veya **hiperyüzey** olarak denir.

Örnek 3.1.2: E^n de birim küre S^{n-1} ile gösterilir ve denklemi

$$S^{n-1} = \left\{ X = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid f(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu küre yüzeyine E^n de bir hiperküre adı verilir. Burada

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

olmak üzere

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right), (2x_1, 2x_2, ..., 2x_n) \rangle$$

şeklinde ve $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ için daima $\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ dır.

Tanım 3.1.17: $M \subset E^3$ de bir yüzey, $\alpha : I \to M$ birim hızlı bir eğri ve M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı X olsun.

$$\frac{d}{ds}(\alpha(s)) = X(\alpha(s)) \tag{3.1.7}$$

ise α eğrisine X in bir **integral eğrisi** denir. M yüzeyinin P noktasındaki tanjant uzayı $T_M(P)$, vektör alanı uzayı $\chi(M) = \bigcup_{P \in M} T_M(P)$ olmak üzere

$$\overline{\alpha} : I \to \chi(M) \ , \ \overline{\alpha}(s) = (\alpha(s), \alpha'(s))$$

şeklinde tanımlı eğriye, $\alpha : I \to M$ eğrisinin **tabii lifti** denir (Thorpe 1979, Çalışkan ve ark. 1984). M yüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere $\forall\, X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X \mathrm{N} \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne **Şekil operatörü (Weingarten Dönüşümü)** denir. $v \in \chi(M)$ için

$$X(v) = -\langle v, S(v)\rangle \mathrm{N}\big|_P \tag{3.1.9}$$

şeklinde tanımlanan $X \in \chi(M)$ vektör alanına **geodezik spray** denir (Thorpe 1979).

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y\rangle \mathrm{N} \tag{3.1.10}$$

şeklinde tanımlanan denkleme de M üzerinde **Gauss denklemi** denir. Burada; $\overline{D}$ Gauss anlamında kovaryant türev operatörü olup, bu operatör M üzerinde bir Riemann konneksiyonudur.

$\alpha : I \to M$ eğrisinin birim teğet vektörü T olsun.

$$D_T T = 0 \tag{3.1.11}$$

ise α eğrisine E^3 **de bir geodezik eğri**,

$$\overline{D}_T T = 0 \tag{3.1.12}$$

ise α eğrisine M **üzerinde bir geodezik eğri** denir. Buna göre;

$$k_g = \|D_T T\| \tag{3.1.13}$$

ifadesine α eğrisinin E^3 **'e göre geodezik eğriliği** ve

$$\gamma_g = \|\overline{D}_T T\| \tag{3.1.14}$$

ifadesine de α eğrisinin M **'ye göre geodezik eğriliği** denir.

α eğrisinin T, N, B Frenet vektörlerinin birim küre üzerinde çizdiği $(T),(N)$ ve (B) küresel gösterge eğrileri ile C birim Darboux vektörünün birim küre üzerinde çizdiği (C) sabit pol eğrisinin E^3e göre yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri sırasıyla,

$$\begin{cases} s_T = \int_0^s \kappa ds \\ \\ s_N = \int_0^s \|W\| ds \end{cases}, \quad \begin{cases} s_B = \int_0^s \tau ds \\ \\ s_C = \int_0^s \varphi' ds \end{cases} \tag{3.1.15}$$

$$\begin{cases} k_T = \dfrac{1}{\cos\varphi} \\ \\ k_N = \sqrt{1+\left(\dfrac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} k_B = \dfrac{1}{\sin\varphi} \\ \\ k_C = \sqrt{1+\left(\dfrac{\|W\|}{\varphi'}\right)^2} \end{cases}. \tag{3.1.16}$$

S^2 ye göre geodezik eğrilikleri,

$$\begin{cases} \gamma_T = \tan\varphi \\ \\ \gamma_N = \dfrac{\varphi'}{\|W\|} \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_B = \cot\varphi \\ \\ \gamma_C = \dfrac{\|W\|}{\varphi'} \end{cases} \tag{3.1.17}$$

şeklinde verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Teorem 3.1.6: $\alpha : I \to M$ eğrisinin $\overline{\alpha} : I \to \chi(M)$ tabii lifti, X geodezik sprayının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart M üzerinde bir geodezik eğri olmasıdır (Çalışkan ve ark. 1984).

İspat: : "$\Rightarrow$" X geodezik sprayının bir integral eğrisi olsun. Bu durumda

$$X\left(\overline{\alpha}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\overline{\alpha}(t)\right)\Big|_{\alpha(t)}$$

olur. X , $\chi(M)$ üzerinde bir geodezik spray olduğundan

$$X\left(\overline{\alpha}(t)\right) = -\left\langle \overline{\alpha}(t), S\left(\overline{\alpha}(t)\right)\right\rangle N\big|_{\alpha(t)}$$

yazılır. Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}\right) = -\left\langle \dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}, S\left(\dot{\alpha}(t)\big|_{\alpha(t)}\right)\right\rangle \frac{d}{dt} N\big|_{\alpha(t)}$$

bulunur. Bu son eşitlik bütün $\alpha(t)$ ler için doğru olduğundan ve

$$\frac{d\overline{\alpha}}{ds} = D_{\alpha'(s)}\left(\alpha'(s)\right)$$

eşitliği de göz önüne alındığında

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = -\left\langle \dot{\alpha}(t), S(\dot{\alpha}(t)) \right\rangle N$$

olur. Gauss denkleminden

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0$$

bulunur. Böylece α nın M üzerinde bir geodezik olduğu görülür.

$"\Leftarrow"$ α nın M üzerinde bir geodezik olsun. Bu durumda

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0$$

olur. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)\Big|_{\alpha(t)} + \left\langle \dot{\alpha}(t), S(\dot{\alpha}(t)) \right\rangle N\Big|_{\alpha(t)} = 0$$

yazılır. X bir geodezik spray olduğundan

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))\Big|_{\alpha(t)} - X(\dot{\alpha}(t))\Big|_{\alpha(t)} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}(t))\Big|_{\alpha(t)} = X(\dot{\alpha}(t))\Big|_{\alpha(t)}$$

olur. Tabii lift tanımından

$$\frac{d}{dt}(\bar{\alpha}(t))\Big|_{\alpha(t)} = X(\bar{\alpha}(t))$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Bir α eğrisinin (T) teğetler göstergesinin $(\bar{T})$ tabii lifti geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T + \left\langle \dot{\alpha}_T, S(\dot{\alpha}_T) \right\rangle T(s) = 0$$

yazılır. Birim küre için $S = I_2$ olduğundan

$$D_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T + \|\dot{\alpha}_T\|^2 T(s) = 0,$$

$$D_{\dot{\alpha}_T}\kappa N + \kappa^2 T(s) = 0,$$

$$\frac{d}{ds_T}(\kappa N) + \kappa^2 T(s) = 0$$

bulunur. Türev alınırsa,

$$\left(\kappa^2-\kappa\right)T+\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)N-\tau B=0.$$

$\overline{D}_{\dot{\alpha}_T}\dot{\alpha}_T=0$ olması için

$$\begin{cases}\kappa^2-\kappa=0\ , & \left(\kappa=0,1\right)\\ \dfrac{\kappa'}{\kappa}=0\ , & \left(\kappa=sbt\ ,\ \kappa\neq 0\right)\\ \tau=0 & \end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.1: α eğrisi bir birim çember ise α eğrisinin teğetler göstergesi birim küre yüzeyi üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $\left(\overline{T}\right)$ tabii lifti $T\left(S^2\right)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir (Çalışkan ve ark. 1984).

α eğrisinin $\left(N\right)$ asli normaller göstergesinin $\left(\overline{N}\right)$ tabii lifti geodezik spray için bir integral eğrisi ise

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N=0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N+\left\langle\dot{\alpha}_N,S\left(\dot{\alpha}_N\right)\right\rangle N\left(s\right)=0,$$

$$D_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N+\left\|\dot{\alpha}_N\right\|^2N\left(s\right)=0,$$

$$D_{\dot{\alpha}_N}\left(-\kappa T+\tau B\right)+\left(\kappa^2+\tau^2\right)N\left(s\right)=0,$$

$$\frac{d}{ds_N}\left(-\kappa T+\tau B\right)+\left(\left\|W\right\|^2\right)N\left(s\right)=0,$$

olur. Türev alınırsa,

$$-\kappa T+\left(\left\|W\right\|^3-\left\|W\right\|^2\right)N+\tau B=0$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_N}\dot{\alpha}_N=0$ olması için

$$\begin{cases} \kappa' = 0\ , & (\kappa = sbt.) \\ \tau' = 0\ \ , & (\tau = sbt.) \\ \kappa = \tau = 0 & \text{veya } \kappa^2 + \tau^2 = 1 \end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.2: α eğrisi bir dairesel helis ise α nın asli normaller göstergesi, birim küre yüzeyi üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $(\overline{N})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir (Çalışkan ve ark. 1984).

α eğrisinin (B) binormaller göstergesinin $(\overline{B})$ tabii lifti geodezik spray için bir integral eğrisi ise

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B + \langle \dot{\alpha}_B, S(\dot{\alpha}_B) \rangle B(s) = 0,$$

$$\frac{d}{ds_B}(\dot{\alpha}_B) + \|\dot{\alpha}_B\|^2 B(s) = 0,$$

olur. Türev alınırsa,

$$\kappa T + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right) N + (\tau^2 - \tau) B = 0$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_B}\dot{\alpha}_B = 0$ olması için

$$\begin{cases} \kappa = 0\ , \\ \dfrac{\tau'}{\tau} = 0\ \ , \\ \tau^2 - \tau = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.3: (B) binormaller göstergesi, birim küre üzerinde bir büyük çember olacak şekilde herhangi bir α eğrisi yoktur. Bu durumda, $(\overline{B})$ tabii lifti $T(S^2)$

tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisi olamaz (Çalışkan ve ark. 1984).

α eğrisinin (C) sabit pol eğrisinin $(\overline{C})$ tabii lifti geodezik sprayın bir integral eğrisi ise

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C = 0$$

dır. Gauss denkleminden

$$D_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C + \langle \dot{\alpha}_C, S(\dot{\alpha}_C)\rangle C(s) = 0,$$

$$\frac{d}{ds_C}(\dot{\alpha}_C) + \|\dot{\alpha}_C\|^2 C(s) = 0$$

olur. C nin türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(\theta''\cos\theta - \theta'^2\sin\theta + \theta'^3\sin\theta\right)T + \left(\kappa\theta'\cos\theta + \theta'\sin\theta\right)N$$

$$+\left(\theta''\sin\theta - \theta'^2\cos\theta + \theta'^3\cos\theta\right)B = 0,$$

bulunur. $\overline{D}_{\dot{\alpha}_C}\dot{\alpha}_C = 0$ olması için

$$\begin{cases} \theta''\cos\theta - \theta'^2\sin\theta + \theta'^3\sin\theta = 0 \ , \\ \kappa\theta'\cos\theta + \theta'\sin\theta = 0, \\ \theta''\sin\theta - \theta'^2\cos\theta + \theta'^3\cos\theta = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Bu son denklemler $\theta' = 0$ veya $\kappa = \tau = 0$ olduğunu gösterir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.4: α eğrisi bir helis ise (C) sabit pol eğrisi birim küre üzerinde bir büyük çemberdir. Bu durumda, $(\overline{C})$ tabii lifti $T(S^2)$ tanjant demeti üzerinde geodezik sprayın bir integral eğrisidir (Çalışkan ve ark. 1984).

3.2. Lorentz Uzayı

Tanım 3.2.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to IR$$

dönüşümü $\forall\ a,b \in IR$ ve $\forall\ u,v,w \in V$ için;

i) $g(u,v) = g(v,u)$,

ii) $g(au+bv,w) = ag(u,w) + bg(v,w)$

$g(u,av+bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde **simetrik bilineer form** denir.

Tanım 3.2.2: V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form g olsun.

i) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\mathrm{g}(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna **pozitif tanımlı**,

ii) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\mathrm{g}(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna **negatif tanımlı**,

iii) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\mathrm{g}(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna **yarı-pozitif tanımlı**,

iv) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\mathrm{g}(v,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna **yarı-negatif tanımlı**,

v) $\forall\ v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\mathrm{g}(v,w)=0 \Rightarrow w=0$ ise g simetrik bilineer formuna **non-dejeneredir** denir (O'neill 1983).

Tanım 3.2.3: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to IR$$

dönüşümü simetrik, bilineer ve non-dejenere ise g ye V üzerinde bir **skaler çarpım**, bu durumda V vektör uzayına da **skaler çarpım uzayı** denir (O'neill 1983).

Tanım 3.2.4: V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to IR$ simetrik bilineer form olsun.

$$g_w : W \times W \to IR$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formunun **indeksi** denir ve v ile gösterilir. g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq boyV$ dir.

Tanım 3.2.5: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi v olmak üzere $v=1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir (O'neill 1983).

Tanım 3.2.6: IR^n, n-boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ için,

$$g: IR^n \times IR^n \to IR$$
$$(X,Y) \to g(X,Y)=\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir skalar çarpım fonksiyonudur ve bu fonksiyona **Lorentz metriği** denir.

Tanım 3.2.7: IR^n üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte $\{IR^n, g\}$ ikilisine n-boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca **Lorentz uzayı** denir ve IL^n ile gösterilir.

Tanım 3.2.8: IL^n , n-boyutlu bir Lorentz uzayı olsun. Bir $X \in IL^n$ vektörü için;

i) $g(X,X)>0$ (veya $X=0$) ise X vektörüne **spacelike vektör** (uzay benzeri),

ii) $g(X,X)<0$ ise X vektörüne **timelike vektör** (zaman benzeri),

iii) $g(X,X)=0$ ise X vektörüne **lightlike veya null vektör** (ışık benzeri) denir (O'neill 1983).

Tanım 3.2.9: Bir $X \in IL^n$ vektörünün normu

$$\|X\|_{IL}=\sqrt{|g(X,X)|}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.10: $e=(0,0,...,0,1)$ olmak üzere $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in IL^n$ timelike vektör olmak üzere, $g(X,e)<0$ $(g(X,e)>0)$ ise X timelike vektörüne **future pointing (past pointing)** denir (O'neill 1983).

Tanım 3.2.11: $X,Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere; $g(X,Y)=0$ ise, bu durumda X ve Y vektörlerine **ortogonal vektör** denir (O'neill 1983).

Teorem 3.2.1: $X,Y \in IL^n$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere; $g(X,Y)=0$ olsun. Eğer X timelike vektör ise bu durumda Y spacelike vektördür (Turgut 1995).

Teorem 3.2.2: IL^n , n-boyutlu bir Lorentz uzayı ve $X \in IL^n$ olsun. Bu durumda,

i) $\|X\|_{IL} > 0.$

ii) $\|X\|_{IL} > 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür,

iii) X bir timelike vektör ise $\|X\|_{IL}^{2} = -g(X,X)$ dir,

iv) X bir spacelike vektör ise $\|X\|_{IL}^{2} = g(X,X)$ dir (O'neill 1983).

Tanım 3.2.12: $\alpha :$ I $\to IL^n$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektörü T olmak üzere;

i) $g(T,T) > 0$ ise α eğrisine **spacelike eğri**,

ii) $g(T,T) < 0$ ise α eğrisine **timelike eğri**,

iii) $g(T,T) = 0$ ise α eğrisine **lightlike** veya **null eğri** denir (O'neill 1983).

Tanım 3.2.13: $\alpha : I \to IL^n$ bir eğri olsun. $a,b \in I$ olmak üzere α eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu;

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \tag{3.2.1}$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 3.2.14: IL^3 , 3-boyutlu bir Lorentz uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$X \times Y = (x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

vektörüne X ve Y nin vektörel çarpımı (dış çarpımı) denir. $X \times Y$ veya $X \Lambda Y$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \text{ ise} \\ \\ 0, \ i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathrm{e}_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere vektörel çarpım

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & \mathrm{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & \mathrm{y}_2 & \mathrm{y}_3 \end{bmatrix}.$$

Buna göre e_1, e_2 ve e_3 birim vektörlerin vektörel çarpımı

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = -e_1, \quad \mathrm{e}_3 \times e_1 = -e_2$$

dir. Burada saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Eğer saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilirse,

$$e_1 \times e_2 = -e_3, \;\; e_2 \times e_3 = e_1, \;\; e_3 \times e_1 = e_2$$

olur. Bu durumda vektörel çarpım

$$X \times Y = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.15: $\alpha : I \to M \subset IL^n$ diferensiyellenebilir eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olsun.

i) α timelike bir eğri olsun.

Bu durumda α nın Frenet vektörleri; T timelike, N ve B spacelike vektörlerdir. Bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$T \times N = -B \;, N \times B = T \;, B \times T = -N$$

dir. Buna bağlı olarak Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ \\ N' = \kappa T - \tau B \\ \\ B' = \tau N \end{cases} \tag{3.2.2}$$

şeklinde olur (Woestijne 1990). Bu durumda Frenet ani dönme vektörü de

$$W = \tau T - \kappa B$$

şeklinde bulunur (Uğurlu 1997).

ii) α spacelike bir eğri olsun.

Bu durumda α eğrisi iki farklı Frenet denklem sistemine sahiptir.

a) 1. Hal: T ve B spacelike, N timelike vektör olsun. Bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$T \times N = -B \;, N \times B = -T \;, B \times T = N$$

olur ve Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \tag{3.2.3}$$

şeklinde bulunur (Woestijne 1990). Bu durumda Frenet ani dönme vektörü

$$W = -\tau T + \kappa B$$

şeklinde olur (Uğurlu 1997).

b) 2. Hal: T ve N spacelike, B timelike vektör olsun. Bu durumda

$$T \times N = B \;, N \times B = -T \;, B \times T = -N$$

ve Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklinde bulunur (Woestijne 1990). Frenet ani dönme vektörü de

$$W = \tau T - \kappa B$$

olur (Uğurlu 1997).

Teorem 3.2.3:

i) $X, Y \in IL^n$ pozitif (negatif) timelike vektör olsun. Bu durumda

$$g(X,Y) \leq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart X ve Y nin lineer bağımlı olmasıdır. X ve Y pozitif(negatif) timelike vektörler ise

$$g(X,Y) = \|X\|\|Y\|\cosh\varphi, \;\; \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir.

ii) $X, Y \in IL^n$ spacelike vektörler olsun. Bu durumda

$$|g(X,Y)| \leq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Eğer X ve Y nin gerdiği düzlem spacelike ise

$$g(X,Y) = \|X\|\|Y\|\cos\varphi, \ \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \varphi \leq \pi$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian spacelike açı** denir.

iii) $X, Y \in IL^n$ spacelike vektör olsun. Eğer X ve Y nin gerdiği düzlem timelike ise

$$|g(X,Y)| \geq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda

$$g(X,Y) = \|X\|\|Y\|\cosh\varphi, \ \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir.

iv) $X \in IL^n$ spacelike ve $Y \in IL^n$ pozitif timelike vektör olsun. Bu durumda

$$|g(X,Y)| = \|X\|\|Y\|\sinh\varphi, \ \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ açısına X ve Y vektörleri arasındaki **Lorentzian timelike açı** denir (Ratcliffe 1984).

Teorem 3.2.4: IL^3 Lorentz uzayında $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu vektörler için

i) $g(X \times Y, Z) = -\det(X, Y, Z)$,

ii) $(X \times Y) \times Z = -g(X, Z)Y + g(Y, Z)X$,

iii) $g(X \times Y, X) = 0$ ve $g(X \times Y, Y) = 0$,

iv) $g(X \times Y, X \times Y) = -g(X, X)g(Y, Y) + (g(X, Y))^2$

bağıntıları vardır (Turgut 1995).

Teorem 3.2.5. IL^3 Lorentz uzayında iki vektör X ve Y olsun. Bu durumda

i) X ve Y spacelike vektör ise $X \times Y$ bir timelike vektördür.

ii) X ve Y timelike vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

iii) X spacelike ve Y timelike vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

iv) X ve Y null vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

v) X timelike ve Y null vektör ise $X \times Y$ bir spacelike vektördür.

vi) X spacelike ve Y null vektör olmak üzere $g(X,Y) = 0$ ise $X \times Y$ bir null vektör, eğer $g(X,Y) \neq 0$ ise $X \times Y$ spacelike vektördür (Turgut 1995).

3.3. Yarı-Riemann Manifoldu

Tanım 3.3.1: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde simetrik non-dejenere ve sabit indeksli

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,IR)$$

fonksiyonuna bir **metrik tensör** denir.

Tanım 3.3.2: IR^n, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall\, P\in IR^n$ ve $X_P=(x_1,x_2,...,x_n)$, $Y_P=(y_1,y_2,...,y_n)\in T_{IR^n}(P)$ için

$$g(X_P,\mathrm{Y}_P)=\sum_{i=0}^{n-v}x_iy_i-\sum_{i=n-v+1}^{n}x_iy_i$$

eşitliğiyle verilen v-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya **yarı-Öklidyen uzay** denir ve $IR_v^{\ n}$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 3.3.3: $IR_v^{\ n}$, yarı-Öklidyen uzayında $v=1$ ve $n\geq 2$ ise $IR_1^{\ n}$ yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n-uzay denir.

Tanım 3.3.4: M, bir diferensiyellenebilir manifold g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olsun. (M,g) ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir ve M ile gösterilir.

Tanım 3.3.5: M, bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir.

Tanım 3.3.6: M, bir yarı-Riemann manifoldu olsun. boy$M\geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir.

Tanım 3.3.7: M bir Lorentz manifoldu, $\overline{M}$ de M nin bir Lorentz altmanifoldu ve M üzerindeki konneksiyon D olsun.

$$D:\chi\left(\overline{M}\right)\times\chi\left(\overline{M}\right)\to\chi\left(\overline{M}\right)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona $\overline{M}$ Lorentz alt manifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon denir.

Tanım 3.3.8: $\overline{M}$, M nin bir Lorentz altmanifoldu ve M üzerindeki konneksiyon D olsun. $\forall\, X,Y\in\overline{\chi(M)}$ için

$$\overline{D}_XY=\tan D_XY$$

şeklinde tanımlı $\bar{D}$ fonksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 3.3.9: $\overline{M}$, M nin bir Lorentz altmanifoldu olsun.

$$II : \chi\left(\overline{M}\right)\times\chi\left(\overline{M}\right)\to\chi\left(\overline{M}\right)^{\perp}$$

$$\left(X,Y\right)\to II\left(X,Y\right)=norD_X Y$$

şeklinde tanımlı fonksiyona $\overline{M}$ nin **ikinci temel form tensörü** denir (O'neill 1983).

Tanım 3.3.10: n-boyutlu bir M Lorentz manifoldunun $\left(n-1\right)$-boyutlu bir $\overline{M}$ Lorentz alt manifolduna M nin **Lorentz hiperyüzeyi** denir.

Tanım 3.3.11: M nin bir Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. $\forall\ X,Y\in\chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$g\left(S\left(X\right),Y\right)=g\left(II\left(X,Y\right),N\right)$$

şeklinde tanımlı S ye $\overline{M}$ nin N den elde edilen **şekil operatörü** denir. S şekil operatörü $\overline{M}$ nin her P noktasında

$$S_P : T_{\overline{M}}\left(P\right)\to T_{\overline{M}}\left(P\right)$$

lineer ve self adjoint (eki kendisine eşit) bir dönüşümdür (O'neill 1983).

Teorem 3.3.1: M nin Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$, $\overline{M}$ nin N birim normal vektör alanından elde edilen şekil operatörü S olsun. Bu durumda $X\in\chi\left(\overline{M}\right)$ için

$$S\left(X\right)=-D_X N$$

dir (O'neill 1983).

Tanım 3.3.12: M bir Lorentz manifoldu, $\overline{M}$ de M nin bir hiperyüzeyi olsun. $\overline{M}$ nin N normalinden elde edilen şekil operatörü S, M üzerindeki konneksiyon D ve $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\bar{D}$ olmak üzere, $X,Y\in\chi\left(\overline{M}\right)$ için Gauss denklemi

$$D_X Y=\bar{D}_X Y+\varepsilon g\left(S\left(X\right),Y\right)N \qquad (3.3.1)$$

şeklindedir. Burada $\varepsilon=g\left(N,N\right)$ dir (O'neill 1983).

Tanım 3.3.13: M Lorentz manifoldunun bir Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. $\alpha : I\to\overline{M}$ eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere

$$g\left(S\left(T\right),T\right)=0$$

ise α eğrisine **asimptotik çizgi** denir.

Tanım 3.3.14: M Lorentz manifoldunun bir Lorentz hiperyüzeyi $\overline{M}$ olsun. M üzerindeki konneksiyon D ve $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyon $\bar{D}$ olsun. $\alpha : I \to \overline{M}$ eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere

$$\bar{D}_T T = 0 \qquad (3.3.2)$$

ise α eğrisine $\overline{M}$ üzerinde **geodezik eğri**,

$$D_T T = 0 \qquad (3.3.3)$$

ise α eğrisine M üzerinde **geodezik eğri** denir.

Tanım 3.3.15: IR_1^{n+1}, Minkowski $(n+1)$-uzayında

$$S_1^n\left(r\right)=\left\{X \in IR_1^{n+1} \middle| g\left(X,X\right)=r^2,\ r \in IR,\ r = sabit\right\}$$

ile tanımlanan hiperkuadriğe n**-boyutlu Lorentz hipeküresi** veya n**-Lorentz hiperküresi** denir.

$$H_0^n\left(r\right)=\left\{X \in IR_1^{n+1} \middle| g\left(X,X\right)=-r^2,\ r \in IR,\ r = sabit\right\}$$

nokta kümesine de n **-boyutlu** r**-yarıçaplı hiperbolik küre** denir.

$n=3$ için özel halinde

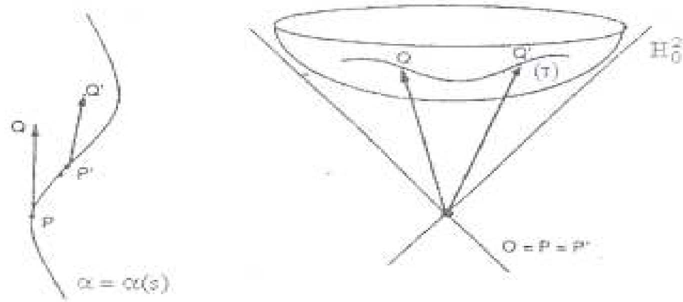
$$S_1^2\left(r\right)=\left\{X \in IR_1^{3} \middle| g\left(X,X\right)=r^2,\ r \in IR,\ r = sabit\right\}$$

nokta kümesine r**-yarıçaplı Lorentz küresi**,

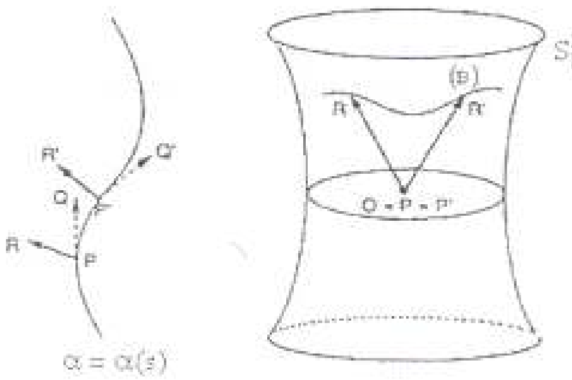
$$H_0^2\left(r\right)=\left\{X \in IR_1^{3} \middle| g\left(X,X\right)=-r^2,\ r \in IR,\ r = sabit\right\}$$

nokta kümesine de r**-yarıçaplı hiperbolik küre** denir.

Tanım 3.3.16: $\alpha : I \to IL^3$ birim hızlı non-null eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T,N,B\}$ olsun. $\{T,N,B\}$ Frenet vektörlerinin başlangıç noktaları eğriyi çizerken uç noktalarının cümlesi S_1^2 birim Lorentz küresi veya H_0^2 hiperbolik birim küresi üzerinde çizdiği eğrilere α eğrisinin **teğetler göstergesi** (birinci küresel göstergesi), **asli normaller göstergesi** (ikinci küresel göstergesi) ve **binormaller göstergesi** (üçüncü küresel göstergesi) denir ve sırasıyla $(T),(N),(B)$ ile gösterilir.



Şekil 3.3.1. Timelike bir eğrinin (Time konisi üzerinde) teğetler göstergesi



Şekil 3.3.2. Timelike bir eğrinin (Lorentzian küresi üzerinde) binormaller göstergesi

C birim Darboux vektörünün S_1^2 veya H_0^2 üzerinde çizdiği eğriye **sabit pol eğrisi** denir ve (C) ile gösterilir.

Tanım 3.3.17:

1) $\alpha : I \to IL^3$ birim hızlı timelike eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği κ ve burulması τ olsun. Bu durumda T timelike, N ve B spacelike vektörlerdir. Buna bağlı olarak α eğrisinin Frenet ani dönme vektörü

$$W = \tau T - \kappa B, \qquad \|W\|_{IL} = \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} \tag{3.3.4}$$

şeklinde olur. Bu halde birim Darboux vektörü için iki durum vardır:

a) W spacelike ise $(|\kappa| > |\tau|)$ $-B$ ile W vektörleri arasındaki Lorentzian timelike açı φ olmak üzere

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh \varphi \\ \tau = \|W\| \sinh \varphi \end{cases}, \qquad \|W\|^2 = g(W, W) = \kappa^2 - \tau^2 \tag{3.3.5}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C=\sinh\varphi T-\cosh\varphi B \tag{3.3.6}$$

şeklinde bulunur.

b) W timelike $\left(|\kappa|<|\tau|\right)$ ise

$$\begin{cases}\kappa=\|W\|\sinh\varphi\\ \\ \tau=\|W\|\cosh\varphi\end{cases},\qquad \|W\|^2=-g\left(W,W\right)=-\left(\kappa^2-\tau^2\right) \tag{3.3.7}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C=\cosh\varphi T-\sinh\varphi B \tag{3.3.8}$$

şeklinde bulunur.

2) $\alpha:I\to IL^3$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. T ve B spacelike, N timelike vektör olarak alınırsa α eğrisinin Frenet ani dönme vektörü

$$W=-\tau T+\kappa B,\qquad \|W\|=\sqrt{\left|\kappa^2-\tau^2\right|} \tag{3.3.9}$$

şeklinde olur. Burada $g\left(W,W\right)=\tau^2-\kappa^2>0$ olduğundan W spacelike vektördür. B ile W vektörleri arasındaki Lorentzian spacelike açı φ ile gösterilirse,

$$\begin{cases}\kappa=\|W\|\cos\varphi\\ \\ \tau=\|W\|\sin\varphi\end{cases} \tag{3.3.10}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C=-\sin\varphi T+\cos\varphi B \tag{3.3.11}$$

şeklinde bulunur.

3) $\alpha:I\to IL^3$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. T ve N spacelike, B timelike vektör olarak alınırsa α eğrisinin Frenet ani dönme vektörü

$$W=\tau T-\kappa B,\qquad \|W\|=\sqrt{\left|\tau^2-\kappa^2\right|} \tag{3.3.12}$$

şeklinde olur. Bu halde birim Darboux vektörü için iki durum vardır:

a) W spacelike $\left(|\tau|>|\kappa|\right)$ ise

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh \varphi \\ \\ \tau = \|W\| \cosh \varphi \end{cases}, \qquad \|W\|^2 = g(W,W) = \tau^2 - \kappa^2 \tag{3.3.13}$$

olur ve birim Darboux vektörü

$$C = \cosh \varphi T - \sinh \varphi B \tag{3.3.14}$$

olur.

b) W timelike $\left(|\tau| < |\kappa|\right)$ ise

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh \varphi \\ \\ \tau = \|W\| \sinh \varphi \end{cases}, \qquad \|W\|^2 = -g(W,W) = -\left(\tau^2 - \kappa^2\right) \tag{3.3.15}$$

olur ve birim Darboux vektörü

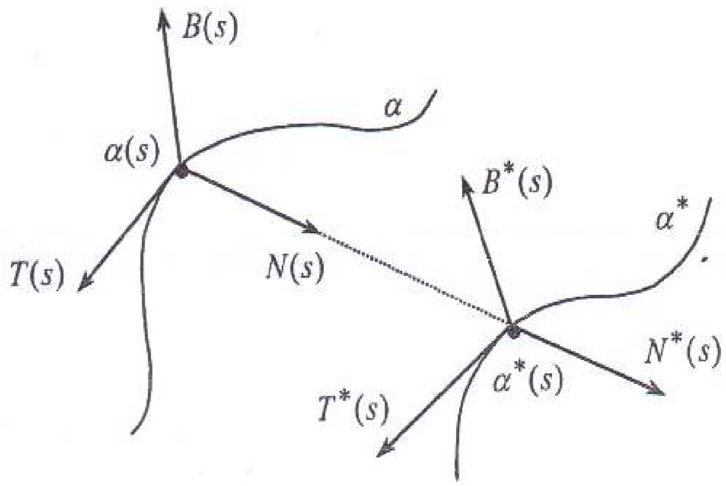
$$C = \sinh \varphi T - \cosh \varphi B \tag{3.3.16}$$

şeklinde bulunur.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Öklid uzayında Bertrand eğri çiftleri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Tanım 4.1: $\alpha : I \to E^3$ ve $\alpha^* : I \to E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. α ile α^* eğrisinin aslinormal vektörleri lineer bağımlı ise (α, α^*) ikilisine Bertrand Eğri Çifti denir (Hacısalihoğlu 1983, Sabuncuoğlu 2006).



Şekil 4.1. Bertrand Eğri Çifti

Bu tanıma göre Bertrand eğri çiftinin denklemi;

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) + \lambda N(s)$$

veya

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) - \lambda N(s)$$

şeklindedir. Bu eğrilerin Frenet çatıları arasında

$$\begin{cases} T^* = \cos\theta T - \sin\theta B \\ \\ N^* = N \\ \\ B^* = \sin\theta T + \cos\theta B \end{cases}$$

bağıntısı mevcuttur. Burada θ, T ile T^* vektörleri arasındaki açıdır (Sabuncuoğlu 2006).

Teorem 4.1: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olsun. Bu eğriler arasındaki uzaklık sabittir (Hacısalihoğlu 1983, Sabuncuoğlu 2006).

İspat: Şekil 4.1.'den

$$\alpha^*\left(s\right)=\alpha\left(s\right)+\lambda N\left(s\right)$$

yazılır. Bu bağıntının türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha^*}{ds}=\frac{d\alpha^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=\alpha'\left(s\right)+\lambda' N\left(s\right)+\lambda N'\left(s\right)$$

olur ve Frenet formüllerinden

$$T^*\left(s^*\right)\frac{ds^*}{ds}=\left(1-\lambda\kappa\left(s\right)\right)T\left(s\right)+\lambda' N\left(s\right)+\lambda\tau\left(s\right)B\left(s\right)$$

bulunur. $\left\{N\left(s\right),N^*\left(s\right)\right\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\lambda'=0,$$

$$\lambda=sbt.$$

olur. Diğer yandan

$$\alpha^*\left(s\right)-\alpha\left(s\right)=\lambda N\left(s\right)$$

olduğundan

$$d\left(\alpha(s),\alpha^*(s)\right)=\left\|\lambda N(s)\right\|$$

$$=|\lambda|=sbt.$$

bulunur.

Teorem 4.2: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olsun. Bu eğrilerin karşılıklı noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açının ölçümü sabittir (Sabuncuoğlu 2006).

İspat: $\alpha: I \to E^3$ ve $\alpha^*: I \to E^3$ eğrilerinin Frenet çatıları $\{T(s),N(s),B(s)\}$ ve $\{T^*(s),N^*(s),B^*(s)\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{ds}\left\langle T(s),T^*(s)\right\rangle=\left\langle \frac{dT}{ds},T^*\right\rangle+\left\langle T,\frac{dT^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds}\right\rangle$$

$$=\left\langle \kappa N,T^*\right\rangle+\frac{ds^*}{ds}\left\langle T,\kappa^* N^*\right\rangle$$

$$=\kappa\left\langle N,T^*\right\rangle+\frac{ds^*}{ds}\kappa^*\left\langle T,N^*\right\rangle$$

yazılabilir. $\{N(s),N^*(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$\left\langle N,T^*\right\rangle=0$$

ve

$$\left\langle T,N^*\right\rangle=0$$

olur. Bu ifadeler yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left\langle T(s),T^*(s)\right\rangle=0$$

bulunur. Buradan

$$\left\langle T(s), T^*(s) \right\rangle = sbt.$$

olur. T ile T^* vektörleri arasındaki açı θ ile gösterilirse

$$\left\langle T(s), T^*(s) \right\rangle = \cos\theta = sbt$$

olduğu görülür.

Teorem 4.3: (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ ise bunlar arasında

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1\,, \qquad \mu = \lambda\cot\theta \tag{4.1}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu 1983).

İspat: $\alpha^*(s^*) = \alpha(s) + \lambda N(s)$ ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa) T(s) + \lambda\tau B$$

olur. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılır ise

$$\begin{cases} \cos\theta \dfrac{ds^*}{ds} = 1 - \lambda\kappa \\ \\ \sin\theta \dfrac{ds^*}{ds} = \lambda\tau \end{cases}$$

bulunur. Bulunan ifadeler taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\cos\theta}{1 - \lambda\kappa} = \frac{\sin\theta}{\lambda\tau}$$

veya

$$\cot\theta = \frac{1 - \lambda\kappa}{\lambda\tau}$$

olur. Burada $\mu = \lambda\cot\theta$ alınırsa

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1$$

bulunur.

Teorem 4.4: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ, α^* eğrisinin eğrilikleri κ^* ve τ^* olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa^* = \dfrac{\lambda\kappa - \sin^2\theta}{\lambda\left(1-\lambda\kappa\right)} \\ \\ \tau^* = \dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau} \end{cases} \qquad (4.2)$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu 2006).

İspat: $\alpha^*\left(s^*\right) = \alpha\left(s\right) + \lambda N\left(s\right)$ ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = \left(1-\lambda\kappa\right)T\left(s\right) + \lambda\tau B$$

olur. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases} \cos\theta \dfrac{ds^*}{ds} = 1-\lambda\kappa \\ \\ \sin\theta \dfrac{ds^*}{ds} = \lambda\tau \end{cases} \qquad (4.3)$$

bulunur. $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olduğundan $\alpha\left(s\right) = \alpha^*\left(s\right) - \lambda N\left(s\right)$ yazılabilir. Burada s ye göre türev alınırsa

$$T = T^* \frac{ds^*}{ds}\left(1+\lambda\kappa^*\right) - \lambda\tau^* B^* \frac{ds^*}{ds}$$

olur. Bu ifade sırasıyla T^* ve B^* ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases} \cos\theta \dfrac{ds}{ds^*} = \left(1+\lambda\kappa^*\right) \\ \\ \sin\theta \dfrac{ds}{ds^*} = \lambda\tau^* \end{cases} \qquad (4.4)$$

bulunur. (4.3) ve (4.4) bağıntılarından $\cos\theta$ ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\cos^2\theta = (1-\lambda\kappa)(1+\lambda\kappa^*)$$

$$= 1+\lambda\kappa^* - \lambda\kappa - \lambda^2\kappa\kappa^*$$

olur. Burada son eşitlikten κ^* ifadesi

$$\kappa^* = \frac{\lambda\kappa - \sin^2\theta}{\lambda(1-\lambda\kappa)}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde (4.3) ve (4.4) bağıntılarından $\sin\theta$ ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\sin^2\theta = \lambda^2\tau\tau^*,$$

$$\tau^* = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2\tau}$$

olur.

Sonuç 4.1: (4.1) ifadesinden $1-\lambda\kappa$ değeri, (4.2) de yerine yazılırsa

$$\kappa^* = \frac{\sin^2\theta - \lambda\kappa}{\lambda^2\tau}\tan\theta$$

şeklinde olur.

5. BULGULAR

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ Bertrand eğri çifti timelike alındığında ilk olarak eğrilerin Frenet çatıları arasındaki bağıntılar bulundu. Ayrıca Darboux vektörlerinin lineer bağımlı olduğu gösterildi. İkinci olarak α^{*} eğrisinin $\left(T^{*}\right),\left(N^{*}\right),\left(B^{*}\right)$ küresel gösterge eğrileri ile $\left(C^{*}\right)$ sabit pol eğrisinin IL^{3} Lorentz uzayına, S_1^2 Lorentz küresine veya H_0^2 Hiperbolik küreye göre yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri hesaplanarak, bunlar arasındaki bağıntılar bulundu. Son olarak α^{*} eğrisinin küresel göstergelerinin tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartı araştırılarak α eğrisinin nasıl bir eğri olması gerektiği ifade edildi.

5.1. Timelike Bertrand Eğri Çiftleri

Tanım 5.1.1 : $\alpha : I \to IL^{3}$ ve $\alpha^{*} : I \to IL^{3}$ diferensiyellenebilir timelike iki eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\left\{T(s),N(s),B(s)\right\}$ ve α^{*} eğrisinin $\alpha^{*}(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\left\{T^{*}(s),N^{*}(s),B^{*}(s)\right\}$ ile gösterilsin. α ile α^{*} eğrilerinin aslinormal vektörleri lineer bağımlı ise, $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ eğri ikilisine **Timelike Bertrand eğri çifti** denir.

Lorentz uzayında $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ Bertrand eğri çifti için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

1. $\alpha : I \to IL^{3}$ eğrisi timelike olduğunda $\alpha^{*} : I \to IL^{3}$ eğrisi timelike veya spacelike olabilir. Buna göre

a) T^{*} timelike vektör, N^{*} ile B^{*} spacelike vektördür,

b) T^{*} ile N^{*} spacelike vektör, B^{*} timelike vektördür.

Bu durumda

$$\begin{cases} g(T,T) = -1 \\ \\ g(N,N) = +1 \\ \\ g(B,B) = +1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} g(T^*,T^*) = \pm 1 = \varepsilon_0 \\ \\ g(N^*,N^*) = +1 \\ \\ g(B^*,B^*) = \pm 1 = \varepsilon_0. \end{cases}$$

2. $\alpha : I \to IL^3$ spacelike binormalli spacelike eğri olduğunda $\alpha^* : I \to IL^3$ spacelike binormalli spacelike eğri olur. Bu durumda

$$\begin{cases} g(T,T) = +1 \\ \\ g(N,N) = -1 \\ \\ g(B,B) = +1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} g(T^*,T^*) = +1 \\ \\ g(N^*,N^*) = -1 \\ \\ g(B^*,B^*) = +1. \end{cases}$$

3. $\alpha : I \to IL^3$ timelike binormalli spacelike eğri olduğunda $\alpha^* : I \to IL^3$ eğrisi timelike veya spacelike olabilir. Buna göre,

a) T^* timelike vektör, N^* ile B^* spacelike vektördür,

b) T^* ile N^* spacelike vektör, B^* timelike vektördür.

Bu durumda

$$\begin{cases} g(T,T) = +1 \\ \\ g(N,N) = +1 \\ \\ g(B,B) = -1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} g(T^*,T^*) = \pm 1 = \varepsilon_0 \\ \\ g(N^*,N^*) = +1 \\ \\ g(B^*,B^*) = \pm 1 = \varepsilon_0. \end{cases}$$

Teorem 5.1.1: (α, α^*) timelike Bertrand eğri çiftleri arasındaki uzaklık sabittir (Ekmekçi ve İlarslan 2001).

İspat: (α, α^*) timelike Bertrand eğri çifti olduğundan $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s) N(s)$ yazılabilir. s ye göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} T^* \frac{ds^*}{ds} &= T + \frac{d\lambda}{ds} N(s) + \lambda N'(s) \\ &= T + \frac{d\lambda}{ds} N(s) + \lambda(\kappa T - \tau B) \end{aligned}$$

$$=T\left(1+\lambda\kappa\right)+\frac{d\lambda}{ds}N-\lambda\tau B$$

olur. Son eşitlikte her iki taraf N ile iç çarpılır ise

$$\frac{ds^*}{ds}\langle T^*,N\rangle=\left(1+\lambda\kappa\right)\langle T,N\rangle+\frac{d\lambda}{ds}\langle N,N\rangle-\lambda\tau\langle N,B\rangle,$$

$$\lambda'=0$$

$$\lambda=sbt$$

bulunur. Diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonu tanımından

$$d\left(\alpha^*\left(s^*\right),\alpha\left(s\right)\right)=\left\|\alpha^*\left(s^*\right)-\alpha\left(s\right)\right\|$$

$$=\left\|\lambda N\left(s\right)\right\|$$

$$=\left|\lambda\right|=sbt$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.2: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike Bertrand eğri çifti olsun. Bu eğrilerin $\alpha\left(s\right)$ ve $\alpha\left(s^*\right)$ noktalarındaki teğet vektör alanları arasındaki açının ölçümü sabittir (Ekmekçi ve İlarslan 2001).

Teorem 5.1.3: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisi ile α^* eğrisinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T,N,B\}$ ve $\left\{T^*,N^*,B^*\right\}$ olmak üzere, bu çatılar arasında

$$\begin{cases} T^*=-\cosh\theta T+\sinh\theta B \\ N^*=N \\ B^*=-\sinh\theta T+\cosh\theta B \end{cases}\qquad(5.1.1)$$

bağıntısı vardır. Buradaki θ açısı, T ile T^* timelike vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: $\alpha^*\left(s^*\right)=\alpha\left(s\right)+\lambda N\left(s\right)$ ifadesinin s ye göre türevi alınırsa

$$T^*\frac{ds^*}{ds}=\left(1+\lambda\kappa\right)T\left(s\right)-\lambda\tau B\qquad(5.1.2)$$

olur. Bu ifade sırasıyla T ve B ile iç çarpılır ise

$$\begin{cases} -\cosh\theta \dfrac{ds^*}{ds} = 1+\lambda\kappa \\ \\ -\sinh\theta \dfrac{ds^*}{ds} = \lambda\tau \end{cases} \tag{5.1.3}$$

bulunur. Bu ifade $(5.1.2)$ de yerine yazılırsa

$$T^* = -\cosh\theta T + \sinh\theta B \tag{5.1.4}$$

olur. Buradan tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned} \kappa^* N^* \frac{ds^*}{ds} &= -\kappa N \cosh\theta + \tau N \sinh\theta \\ &= N\left(-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right) \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

bulunur. Son eşitlikte norm alınırsa

$$\kappa^* \frac{ds^*}{ds} = -\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta$$

olur. Bu ifade $(5.1.5)$ de yerine yazılırsa

$$N^* = N \tag{5.1.6}$$

bulunur. $B^* = -\left(T^* \times N^*\right)$ ifadesinden

$$B^* = -\sinh\theta T + \cosh\theta B \tag{5.1.7}$$

elde edilir. Böylece $(5.1.1)$ bağınıtısı gösterilmiş olur.

Teorem 5.1.4: $\left(\alpha,\alpha^*\right)$ timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ ise bunlar arasında

$$\mu\tau - \lambda\kappa = 1 \quad \text{ve} \quad \mu = \lambda\coth\theta \tag{5.1.8}$$

bağıntısı vardır.

İspat: $(5.1.3)$ ifadesi taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\cosh\theta}{1+\lambda\kappa} = \frac{\sinh\theta}{\lambda\tau}$$

veya

$$\coth\theta = \frac{1+\lambda\kappa}{\lambda\tau}$$

olur. Burada $\mu = \lambda \coth\theta$ alınırsa

$$\mu\tau - \lambda\kappa = 1$$

bulunur.

Teorem 5.1.5: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ, α^* eğrisinin eğriliği κ^* ve torsiyonu τ^* olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa^* = \dfrac{\lambda\kappa - \sinh^2\theta}{\lambda\left(1+\lambda\kappa\right)} \\ \\ \tau^* = -\dfrac{\sinh^2\theta}{\lambda^2\tau} \end{cases} \tag{5.1.9}$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ Bertrand eğri çifti olduğundan $\alpha\left(s\right) = \alpha^*\left(s\right) - \lambda N\left(s\right)$ yazılabilir. Burada s ye göre türev alınırsa

$$T = T^* \frac{ds^*}{ds}\left(1 - \lambda\kappa^*\right) + \lambda\tau^* B^* \frac{ds^*}{ds}$$

olur. Bu ifade sırasıyla T^* ve B^* ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases} -\cosh\theta \dfrac{ds}{ds^*} = \left(1 - \lambda\kappa^*\right) \\ \\ \sinh\theta \dfrac{ds}{ds^*} = \lambda\tau^* \end{cases} \tag{5.1.10}$$

bulunur. $\left(5.1.3\right)$ ve $\left(5.1.10\right)$ bağıntılarından $\cosh\theta$ ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\cosh^2\theta = \left(1 + \lambda\kappa\right)\left(1 - \lambda\kappa^*\right)$$

$$= 1 - \lambda\kappa^* + \lambda\kappa - \lambda^2\kappa\kappa^*$$

bulunur. Burada son eşitlikten κ^* ifadesi

$$\kappa^* = \frac{\lambda\kappa - \sinh^2\theta}{\lambda\left(1+\lambda\kappa\right)} \tag{5.1.11}$$

şeklinde olur. Benzer şekilde $\left(5.1.3\right)$ ve $\left(5.1.10\right)$ bağıntılarından $\sinh\theta$ ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\sinh^2\theta = -\lambda^2\tau\tau^*,$$

$$\tau^* = -\frac{\sinh^2\theta}{\lambda^2\tau}$$

bulunur.

Sonuç 5.1.1: (α,α^*) timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ, α^* eğrisinin eğriliği κ^* olmak üzere bu eğrilikler arasında

$$\kappa^* = \frac{\lambda\kappa - \sinh^2\theta}{\lambda^2\tau\coth\theta} \tag{5.1.12}$$

bağıntısı vardır.

İspat: $(5.1.8)$ ifadesinden

$$1+\lambda\kappa = \lambda\tau\coth\theta \tag{5.1.13}$$

olur. Bu ifade $(5.1.11)$ de yerine yazılırsa

$$\kappa^* = \frac{\lambda\kappa - \sinh^2\theta}{\lambda^2\tau\coth\theta}$$

bulunur.

Teorem 5.1.6: (α,α^*) timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin W Darboux vektörü ile α^* eğrisinin W^* Darboux vektörü arasında

$$W^* = \frac{\sinh\theta}{\lambda\tau}W \tag{5.1.14}$$

bağıntısı vardır.

İspat: α^* timelike eğri olduğundan $W^* = \tau^*T^* - \kappa^*B^*$ dir. $(5.1.4)$, $(5.1.7)$, $(5.1.9)$ ve $(5.1.12)$ bağıntıları burada yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$W^* = \frac{\sinh\theta}{\lambda\tau}\left[\frac{1}{\lambda}\tanh\theta(1+\lambda\kappa)T - \kappa B\right]$$

olur. Burada $(5.1.13)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$W^* = \frac{\sinh\theta}{\lambda\tau}\left[\tau T - \kappa B\right],$$

$$W^* = \frac{\sinh\theta}{\lambda\tau}W$$

bulunur.

5.2. Timelike α Eğrisinin Küresel Göstergelerinin Yay Uzunlukları

Çalışmamızın bu bölümünde α timelike eğrisinin (T), (N), (B) küresel gösterge eğrileri ile (C) sabit pol eğrisinin yay uzunlukları hesaplanmıştır. Burada T timelike vektör, N ve B spacelike vektörlerdir.

(T) Teğetler göstergesinin yay uzunluğu s_T ile gösterilirse Tanım 3.2.13 den,

$$s_T = \int_0^s \left\| \frac{dT}{ds} \right\| ds = \int_0^s \left\| \kappa N \right\| ds,$$

$$s_T = \int_0^s |\kappa| ds \tag{5.2.1}$$

olur.

(N) aslinormaller göstergesinin yay uzunluğu s_N ile gösterilirse,

$$s_N = \int_0^s \left\| \frac{dN}{ds} \right\| ds,$$

$$s_N = \int_0^s \left\| \kappa T - \tau B \right\| ds = \int_0^s \left| -\kappa^2 + \tau^2 \right| ds,$$

$$s_N = \int_0^s \left\| W \right\| ds$$

şeklinde bulunur.

(B) binormaller göstergesinin yay uzunluğu s_B ile gösterilirse,

$$s_B = \int_0^s \left\| \frac{dB}{ds} \right\| ds = \int_0^s \left\| \tau N \right\| ds,$$

$$s_B = \int_0^s |\tau| ds \tag{5.2.2}$$

olur.

(C) sabit pol eğrisinin yay uzunluğu s_C ile gösterilirse,

$$s_T = \int_0^s \left\| \frac{dC}{ds} \right\| ds,$$

$$s_T = \int_0^s |\varphi'| ds$$

şeklinde bulunur.

5.3. Timelike α Eğrisinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e Göre Geodezik Eğrilikleri

(T) teğetler göstergesinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_T ile gösterilsin. (T) nin yay parametresi s_T ve birim teğet vektörü T_T olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_T = \left\| D_{T_T} T_T \right\|$$

şeklinde yazılır. (T) eğrisinin denklemi

$$\alpha_T(s_T) = T(s)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin s_T parametresine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\alpha_T}{ds_T} = \frac{d\alpha_T}{ds}\frac{ds}{ds_T},$$

$$T_T = \kappa N \frac{ds}{ds_T}$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_T} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.3.1}$$

bulunur. Bu ifade T_T de yerine yazılırsa

$$T_T = N \tag{5.3.2}$$

olur. Tekrar türev alınırsa

$$D_{T_T} T_T = \frac{dT_T}{ds_T} = \frac{dT_T}{ds}\frac{ds}{ds_T},$$

$$D_{T_T} T_T = \frac{dN}{ds}\frac{ds}{ds_T}$$

veya $(3.2.2)$ ve $(5.3.1)$ denklemlerinden

$$D_{T_T} T_T = T - \frac{\tau}{\kappa} B \tag{5.3.3}$$

bulunur. Geodezik eğrilik tanımından

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2} \right|} \tag{5.3.4}$$

olur. Bu ifade;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$ denkleminden

$$\frac{\tau}{\kappa} = \tanh \varphi$$

olur ve buna göre geodezik eğrilik

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \tanh^2 \varphi \right|},$$

$$k_T = \frac{1}{\cosh \varphi} \tag{5.3.5}$$

şeklinde bulunur.

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$ denkleminden

$$\frac{\tau}{\kappa} = \coth \varphi$$

olur ve bu durumda geodezik eğrilik

$$k_T = \sqrt{\left| -1 + \coth^2 \varphi \right|},$$

$$k_T = \frac{1}{\sinh \varphi} \tag{5.3.6}$$

şeklinde olur.

(N) aslinormaller göstergesinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_N ile gösterilsin. (N) nin yay parametresi s_N ve birim teğet vektörü T_N olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_N = \left\| D_{T_N} T_N \right\|$$

şeklinde yazılır. (N) eğrisinin denklemi

$$\alpha_N(s_N) = N(s)$$

dir. Burada s_N ye göre türev alınırsa

$$T_N = \kappa T - \tau B \frac{ds}{ds_N}$$

olur. Norm alınırsa,

$$\frac{ds}{ds_N} = \frac{1}{\|W\|}$$

bulunur. Bu değer T_N ifadesinde yerine yazılırsa

$$T_N = \frac{\kappa}{\|W\|} T - \frac{\tau}{\|W\|} B \tag{5.3.7}$$

olur. Burada;

a) W **spacelike** ise $(5.3.7)$ ifadesi $(3.3.5)$ denkleminden

$$T_N = -\cosh\varphi T + \sinh\varphi B$$

şekline dönüşür. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$D_{T_N} T_N = \left(\varphi' \sinh\varphi T + \|W\| N - \varphi' \cosh\varphi B\right) \frac{1}{\|W\|} \tag{5.3.8}$$

olur. Geodezik eğrilik tanımından,

$$k_N = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{\left|(\varphi')^2 + \|W\|^2\right|} \tag{5.3.9}$$

şeklinde bulunur.

b) W **timelike** ise $(5.3.7)$ ifadesi $(3.3.7)$ denkleminden

$$T_N = -\sinh\varphi T + \cosh\varphi B$$

şekline dönüşür. T_N nin türevi alınırsa

$$D_{T_N} T_N = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(-\cosh\varphi T + \sinh\phi B\right) + N$$

olur. Geodezik eğrilik tanımından,

$$k_N = \frac{1}{\|W\|} \sqrt{\left|-(\varphi')^2 + \|W\|^2\right|} \tag{5.3.10}$$

şeklinde bulunur.

(B) binormaller göstergesinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_B ile gösterilsin. (B) nin yay parametresi s_B ve birim teğet vektörü T_B olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_B = \left\|D_{T_B} T_B\right\|$$

şeklinde yazılır. (B) nin denklemi

$$\alpha_B(s_B) = B(s)$$

dir. Her iki tarafın s_B parametresine göre türevi alınırsa,

$$T_B = \tau N \frac{ds}{ds_B}$$

olur. Norm alınırsa,

$$\frac{ds}{ds_B} = \frac{1}{|\tau|}$$

bulunur. Bu değer T_B ifadesinde yerine yazılırsa

$$T_B = \pm N$$

olur. Pozitif yönlendirme seçilirse,

$$T_B = N$$

alınabilir. Buradan tekrar türev alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_B} T_B = \frac{\kappa}{\tau} T - B$$

elde edilir. Geodezik eğrilik tanımından

$$k_B = \sqrt{-\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1} \qquad (5.3.11)$$

olur. Bu ifade;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$ denkleminden

$$\frac{\kappa}{\tau} = \coth\varphi$$

olur. Bu değer $(5.3.11)$ de yerine yazılırsa

$$k_B = \frac{1}{\sinh\varphi} \qquad (5.3.12)$$

şekline dönüşür.

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$ denkleminden

$$\frac{\kappa}{\tau} = \sinh\varphi$$

olur. Bu değer $(5.3.11)$ de yerine yazılırsa

$$k_B = \frac{1}{\cosh \varphi} \qquad (5.3.13)$$

şeklinde bulunur.

(C) sabit pol eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_C ile gösterilsin. (C) nin yay parametresi s_C ve birim teğet vektörü T_C olmak üzere geodezik eğrilik

$$k_C = \left\| D_{T_C} T_C \right\|$$

şeklinde yazılır. (C) nin denklemi

$$\alpha_C(s_C) = C(s)$$

dir. Burada C nin spacelike veya timelike olmasına göre geodezik eğrilik değişecektir. Buna göre;

a) W **spacelike** ise $(3.3.6)$ dan

$$C = \sinh \varphi T - \cosh \varphi B$$

olur. s_C parametresine göre türev alınırsa,

$$T_C = \cosh \varphi T - \sinh \varphi B$$

olur. Tekrar türev alınırsa,

$$D_{T_C} T_C = \sinh \varphi T - \cosh \varphi B + \frac{\|W\|}{\varphi'} N \qquad (5.3.14)$$

bulunur. Geodezik eğrilik tanımı dikkate alınırsa

$$k_C = \sqrt{1 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'} \right)^2} \qquad (5.3.15)$$

olur.

b) W **timelike** ise $(3.3.8)$ den

$$C = \cosh \varphi T - \sinh \varphi B$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$T_C = \sinh \varphi T - \cosh \varphi B,$$

tekrar türev alınırsa,

$$D_{T_C} T_C = \cosh \varphi T - \sinh \varphi B - \frac{\|W\|}{\varphi'} N \qquad (5.3.16)$$

bulunur. Geodezik eğrilik tanımından

$$k_C = \sqrt{\left| -1 + \left(\frac{\|W\|}{\varphi'} \right)^2 \right|} \tag{5.3.17}$$

şeklinde olur. Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.3.1: $\alpha : I \to IL^3$ timelike eğrisinin (T), (N) ve (B) küresel gösterge eğrileri ile (C) sabit pol eğrisinin IL^3 göre,

yay uzunlukları;

$$\begin{cases} s_T = \int_0^s |\kappa| ds \\ s_N = \int_0^s \|W\| ds \end{cases}, \quad \begin{cases} s_B = \int_0^s |\tau| ds \\ s_C = \int_0^s |\varphi'| ds \end{cases},$$

geodezik eğrilikleri;

a) W **spacelike** ise

$$\begin{cases} k_T = \dfrac{1}{\cosh\varphi} \\ k_N = \sqrt{\left| 1 + \left(\dfrac{\varphi'}{\|W\|} \right)^2 \right|} \end{cases}, \quad \begin{cases} k_B = \dfrac{1}{\sinh\varphi} \\ k_C = \sqrt{\left| 1 + \left(\dfrac{\|W\|}{\varphi'} \right)^2 \right|} \end{cases},$$

b) W **timelike** ise

$$\begin{cases} k_T = \dfrac{1}{\sinh\varphi} \\ k_N = \sqrt{\left| 1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\|W\|} \right)^2 \right|} \end{cases}, \quad \begin{cases} k_B = \dfrac{1}{\cosh\varphi} \\ k_C = \sqrt{\left| -1 + \left(\dfrac{\|W\|}{\varphi'} \right)^2 \right|} \end{cases}$$

şeklinde verilir.

5.4. Timelike α Eğrisinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 ye göre Geodezik Eğrilikleri

S_1^2 Lorentz küresi veya H_0^2 hiperbolik küreye göre (T), (N), (B) küresel gösterge eğrilerinin geodezik eğriliklerini hesaplayabilmek için IL^3 deki konneksiyon D, S_1^2 deki konneksiyon $\bar{D}$, H_0^2 deki konneksiyon $\bar{\bar{D}}$, S_1^2 ve H_0^2 nin birim normal vektör alanı ξ olmak üzere

$$D_X Y = \bar{D}_X Y + \varepsilon g\big(S(X), Y\big)\xi, \qquad \varepsilon = g(\xi, \xi)$$

ve

$$D_X Y = \bar{\bar{D}}_X Y + \varepsilon g\big(S(X), Y\big)\xi, \qquad \varepsilon = g(\xi, \xi)$$

Gauss denklemlerinden yararlanılacaktır. Burada S, S_1^2 ve H_0^2 nin şekil operatörü olup, buna karşılık gelen matris

$$S = I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Bilici 2009).

(T) teğetler göstergesinin H_0^2 deki geodezik eğriliği γ_T ile gösterilirse,

$$\gamma_T = \left\| \bar{\bar{D}}_{T_T} T_T \right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_T} T_T = \bar{\bar{D}}_{T_T} T_T + \varepsilon g\big(S(T_T), T_T\big)T$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g(T, T) = -1, \quad S(T_T) = -T_T, \text{ ve } \mathrm{g}\big(S(T_T), T_T\big) = -1$$

dir. Bu değerler yerine yazılırsa Gauss denklemi

$$\bar{\bar{D}}_{T_T} T_T = D_{T_T} T_T - T$$

şeklinde olur. $(5.3.3)$ bağıntısı bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\bar{\bar{D}}_{T_T} T_T = -\frac{\tau}{\kappa} B \tag{5.4.1}$$

veya norm alınırsa

$$\gamma_T = \left|\frac{\tau}{\kappa}\right|$$

bulunur. Bu ifade;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$ denkleminden

$$\gamma_T = \tanh\varphi, \tag{5.4.2}$$

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$ denkleminden

$$\gamma_T = \coth\varphi \tag{5.4.3}$$

şeklinde olur.

(N) aslinormaller göstergesinin S_1^2 deki geodezik eğriliği γ_N ile gösterilirse,

$$\gamma_N = \left\|\bar{D}_{T_N} T_N\right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_N} T_N = \bar{D}_{T_N} T_N + \varepsilon g(S(T_N), T_N) N$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g(N,N) = +1, \quad S(T_N) = -T_N, \text{ ve } \mathrm{g}(S(T_N), T_N) = +1$$

dir. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_N} T_N = D_{T_N} T_N - N$$

olur. $(5.3.8)$ bağıntısı bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_N} T_N = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right) \tag{5.4.4}$$

bulunur. Bu ifadenin normu alınırsa geodezik eğrilik

$$\gamma_N = \frac{\varphi'}{\|W\|} \tag{5.4.5}$$

şeklinde olur.

(B) binormaller göstergesinin S_1^2 deki geodezik eğriliği γ_B ile gösterilirse,

$$\gamma_B = \left\|\bar{D}_{T_B} T_B\right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_B} T_B = \bar{D}_{T_B} T_B + \varepsilon g\left(S\left(T_B\right), T_B\right) B$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g\left(B,B\right) = +1, \quad S\left(T_B\right) = -T_B \text{ ve } g\left(S\left(T_B\right),T_B\right) = -1$$

dir. Bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_B}T_B = D_{T_B}T_B + B$$

olur. $(5.3.11)$ bağıntısı bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_B}T_B = \frac{\kappa}{\tau}T \tag{5.4.6}$$

bulunur. Buradan norm alınırsa

$$\gamma_B = \left|\frac{\kappa}{\tau}\right|$$

elde edilir. Bu ifade;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$ denkleminden

$$\gamma_B = \coth\varphi, \tag{5.4.7}$$

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$ denkleminden

$$\gamma_B = \tanh\varphi \tag{5.4.8}$$

şeklinde olur.

(C) sabit pol eğrisinin S_1^2 deki geodezik eğriliği γ_C ile gösterilirse,

$$\gamma_C = \left\|\bar{D}_{T_C}T_C\right\|$$

dir. Gauss denkleminden

$$D_{T_C}T_C = \bar{D}_{T_C}T_C + \varepsilon g(S(T_C),T_C)C$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g\left(C,C\right) = +1, \quad S\left(T_C\right) = -T_C, \text{ ve } g\left(S\left(T_C\right),T_C\right) = -1$$

dir. Bu değerler Gauss denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_C}T_C = D_{T_C}T_C - C$$

olur. Buna göre;

a) W **spacelike** ise $(3.3.6)$ ve $(5.3.14)$ bağıntılarından

$$\bar{D}_{T_C}T_C = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B + \frac{\|W\|}{\varphi'}N - \left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right),$$

$$\bar{D}_{T_C} T_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} N \tag{5.4.9}$$

olur. Burada norm alınırsa

$$\gamma_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} \tag{5.4.10}$$

bulunur.

b) W **timelike** ise $(3.3.8)$ ve $(5.3.16)$ bağıntılarından

$$\bar{D}_{T_C} T_C = \cos\varphi T - \sinh\varphi B - \frac{\|W\|}{\varphi'} N - (\cosh\varphi T - \sinh\varphi B),$$

$$\bar{D}_{T_C} T_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} N \tag{5.4.11}$$

olur. Burada norm alınırsa

$$\gamma_C = \frac{\|W\|}{\varphi'} \tag{5.4.12}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.4.1: $\alpha : I \to IL^3$ timelike eğrisinin (T), (N) ve (B) küresel gösterge eğrileri ile (C) sabit pol eğrisinin S_1^2 deki geodezik eğrilikleri sırasıyla;

1) $\begin{cases} \gamma_T = \tanh\varphi, & W \textit{ spacelike ise} \\ \gamma_T = \coth\varphi, & W \textit{ timelike ise} \end{cases}$

2) $\gamma_N = \dfrac{\varphi'}{\|W\|}$

3) $\begin{cases} \gamma_B = \coth\varphi, & W \textit{ spacelike ise} \\ \gamma_B = \tanh\varphi, & W \textit{ timelike ise} \end{cases}$

4) $\gamma_C = \dfrac{\|W\|}{\varphi'}$

şeklindedir.

5.5. Timelike α^* Eğrisinin Küresel Göstergelerinin Yay Uzunlukları

Çalışmamızın bu bölümünde timelike α^* eğrisinin (T^*), (N^*), (B^*) küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin yay uzunlukları hesaplandı. Ayrıca α ile α^* eğrilerinin küresel gösterge eğrileri ile sabit pol eğrilerinin yay uzunlukları arasında bağıntılar bulundu.

(T^*) teğetler göstergesinin yay uzunluğu s_{T^*} ile gösterilirse Tanım 3.2.13 den,

$$s_{T^*} = \int_0^{s^*} \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| ds^*$$

veya

$$s_{T^*} = \int_0^{s} \left\| \frac{dT^*}{ds} \right\| ds \tag{5.5.1}$$

yazılır. $(5.1.4)$ bağıntısının türevi alınırsa

$$\frac{dT^*}{ds} = \left(-\kappa \cosh\theta + \tau \sinh\theta\right) N$$

olur. Norm alınırsa

$$\left\| \frac{dT^*}{ds} \right\| = \left| -\kappa \cosh\theta + \tau \sinh\theta \right|$$

bulunur. Bu ifade $(5.5.1)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$s_{T^*} = \int_0^{s} \left| -\kappa \cosh\theta + \tau \sinh\theta \right| ds,$$

veya

$$s_{T^*} \leq \left|\cosh\theta\right| \int_0^{s} |\kappa| \, ds + \left|\sinh\theta\right| \int_0^{s} |\tau| ds$$

olur. Buradan $(5.2.1)$ ve $(5.2.2)$ bağıntıları yerine yazılırsa

$$s_{T^*} \leq \left|\cosh\theta\right| s_T + \left|\sinh\theta\right| s_B$$

elde edilir.

(N^*) aslinormaller göstergesinin yay uzunluğu s_{N^*} ile gösterilirse,

$$s_{N^*} = \int_0^s \left\| \frac{dN^*}{ds} \right\| ds$$

olur. Burada $(5.1.6)$ bağıntısı dikkate alınırsa

$$s_{N^*} = \int_0^s \left\| \frac{dN^*}{ds} \right\| ds = \int_0^s \left\| \frac{dN}{ds} \right\| ds,$$

$$s_{N^*} = s_N .$$

(B^*) binormaller göstergesinin yay uzunluğu s_{B^*} ile gösterilirse,

$$s_{B^*} = \int_0^s \left\| \frac{dB^*}{ds} \right\| ds \qquad (5.5.2)$$

dir. $(5.1.7)$ ifadesinin türevi alınırsa,

$$\frac{dB^*}{ds} = (-\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta) N$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\left\| \frac{dB^*}{ds} \right\| = \left| -\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta \right|$$

olur. Bu ifade $(5.5.2)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$s_{B^*} = \int_0^s \left| -\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta \right| ds,$$

veya

$$s_{B^*} \le \left|\sinh\theta\right| \int_0^s |\kappa| ds + \left|\cosh\theta\right| \int_0^s |\tau| ds$$

bulunur. Burada $(5.2.1)$ ve $(5.2.2)$ bağıntıları yerine yazılırsa

$$s_{B^*} \le \left|\sinh\theta\right| s_T + \left|\cosh\theta\right| s_B$$

elde edilir.

(C^*) sabit pol eğrisinin yay uzunluğu s_{C^*} ile gösterilirse,

$$s_{C^*} = \int_0^s \left\| \frac{dC^*}{ds} \right\| ds \qquad (5.5.3)$$

dir. Buna göre;

a) W^* **spacelike** ise $(3.3.6)$ bağıntısından

$$C^* = \sinh\varphi^* T^* - \cosh\varphi^* B^*$$

olur. Burada φ^*, W^* ile B^* vektörleri arasındaki açıdır. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\frac{dC^*}{ds} = \left(\varphi^*\right)'\left(\cosh\varphi^* T^* - \sinh\varphi^* B^*\right) + N^*\left(\kappa^*\sinh\varphi^* - \tau^*\cosh\varphi^*\right),$$

$$\frac{dC^*}{ds} = \left(\varphi^*\right)'\left(\cosh\varphi^* T^* - \sinh\varphi^* B^*\right)$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\left\|\frac{dC^*}{ds}\right\| = \left|\left(\varphi^*\right)'\right|$$

olur. Bu ifade $(5.5.3)$ de yerine yazılırsa

$$s_{C^*} = \int_0^s \left|\left(\varphi^*\right)'\right| ds \tag{5.5.4}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan $(3.3.5)$ bağıntısı dikkate alındığında

$$\left.\begin{aligned} \sinh\varphi^* &= \frac{\tau^*}{\left\|W^*\right\|} \\ \cosh\varphi^* &= \frac{\kappa^*}{\left\|W^*\right\|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tanh\varphi^* = \frac{\tau^*}{\kappa^*}$$

olur. κ^* ve τ^* ın $(5.1.9)$ ve $(5.1.12)$ deki değerleri burada yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\varphi^* = \arctan h\left(\frac{\sinh^2\theta\coth\theta}{\sinh^2\theta - \lambda\kappa}\right)$$

şeklinde bulunur. Her iki tarafın türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\left(\varphi^*\right)' = \frac{\lambda\kappa'\sinh\theta\cosh\theta}{\lambda^2\kappa^2 - \sinh^2\theta\left(1+2\lambda\kappa\right)} \tag{5.5.5}$$

olur. Bu ifade $(5.5.4)$ de yerine yazılırsa

$$s_{C^*} = \int_0^s \left|\frac{\lambda\kappa'\sinh\theta\cosh\theta}{\lambda^2\kappa^2 - \sinh^2\theta\left(1+2\lambda\kappa\right)}\right| ds$$

elde edilir.

b) W^* **timelike** ise $(3.3.7)$, $(3.3.8)$, $(5.1.9)$ ve $(5.1.12)$ bağıntıları dikkate alınır ve a)' da yapılan işlem sırası takip edilirse, W^* ın spacelike olması durumudaki sonuç elde edilmektedir.

Bunların neticesinde aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.5.1: (α,α^*) timelike Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin $\{T^*,N^*,B^*\}$ Frenet vektörlerinin (T^*), (N^*) ve (B^*) küresel gösterge eğrileri ile birim Darboux vektörünün çizdiği (C^*) sabit pol eğrisinin IL^3 e göre yay uzunlukları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

1) $s_{T^*} \leq \ |\cosh\theta|\ s_T + |\sinh\theta|\ s_B$

2) $s_{N^*} = s_N$

3) $s_{B^*} \leq \ |\sinh\theta|\ s_T + |\cosh\theta|\ s_B$

4) $s_{C^*} = \int\limits_0^s \left| \dfrac{\lambda\kappa'\sinh\theta\cosh\theta}{\lambda^2\kappa^2 - (1+2\lambda\kappa)\sinh^2\theta} \right| ds$.

5.6. Timelike α^* Eğrisinin Küresel Göstergelerinin IL^3 e göre Geodezik Eğrilikleri

(T^*) eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{T^*} ile gösterilsin. (T^*) ın yay parametresi s_{T^*} ve birim teğet vektörü T_{T^*} olmak üzere

$$k_{T^*} = \left\| D_{T_{T^*}} T_{T^*} \right\|$$

yazılır. α^* eğrisinin yay parametresi s^* ve birim teğet vektörü T^* olmak üzere, (T^*) eğrisinin denklemi

$$\alpha^*{}_{T^*}\left(s_{T^*}{}^*\right) = T^*(s)$$

dir. Burada s_{T^*} parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d\alpha^{*}_{T^*}\left(s_{T^*}\right)}{ds_{T^*}} = \frac{dT^*\left(s\right)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds_{T^*}}$$

veya

$$T_{T^*} = \frac{dT^*}{ds}\frac{ds}{ds_{T^*}} \tag{5.6.1}$$

olur. $(5.1.4)$ bağıntısından T^* ın türevi alınırsa

$$\frac{dT^*}{ds} = \left(-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right)N$$

bulunur. Bu ifade $(5.6.1)$ de yerine yazılırsa

$$T_{T^*} = N\left(-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right)\ \frac{ds}{ds_{T^*}} \tag{5.6.2}$$

olur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{T^*}} = \frac{1}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|} \tag{5.6.3}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade $(5.6.2)$ de yerine yazılırsa

$$T_{T^*} = N$$

elde edilir. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$D_{T_{T^*}}T_{T^*} = \frac{dN}{ds}\ \frac{ds}{ds_{T^*}}$$

olur. $(3.2.2)$ ve $(5.6.3)$ bağıntıları burada yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{T^*}}T_{T^*} = \frac{\kappa T - \tau B}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|} \tag{5.6.4}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$k_{T^*} = \left\| \ \frac{\kappa T - \tau B}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|}\ \right\|,$$

$$k_{T^*} = \frac{\|W\|}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|},$$

veya

$$k_{T^*} = \frac{1}{\left| \frac{-\kappa}{\|W\|} \cosh\theta + \frac{\tau}{\|W\|} \sinh\theta \right|}$$

elde edilir. Bu ifade;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$, $(5.3.5)$ ve $(5.3.12)$ bağıntılarından

$$k_{T^*} = \frac{1}{\left| -\cosh\varphi.\cosh\theta + \sinh\varphi.\sinh\theta \right|},$$

$$k_{T^*} = \frac{1}{\left| -\frac{1}{k_T} \cosh\theta + \frac{1}{k_B} \sinh\theta \right|},$$

$$k_{T^*} = \left| \frac{k_T .\, k_B}{k_T \sinh\theta - k_B \cosh\theta} \right|$$

şeklinde olur.

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$, $(5.3.6)$ ve $(5.3.13)$ bağıntılarından aynı sonuç elde edilir.

(N^*) eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{N^*} ile gösterilsin. (N^*) nin yay parametresi s_{N^*} ve birim teğet vektörü T_{N^*} olmak üzere,

$$k_{N^*} = \left\| D_{T_{N^*}} T_{N^*} \right\|$$

yazılır. (N^*) eğrisinin denklemi

$$\alpha^*_{N^*}(s^*_{N^*}) = N^*(s)$$

dır. Bu denklemin s_{N^*} parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{N^*} = \frac{d\alpha^*_{N^*}(s_N{}^*)}{ds_N{}^*} = \frac{dN^*(s)}{ds} \frac{ds}{ds_{N^*}}$$

olur. Burada $(3.2.2)$ ve $(5.1.6)$ bağıntıları dikkate alınırsa

$$T_{N^*} = (\kappa T - \tau B)\ \frac{ds}{ds_{N^*}} \qquad (5.6.5)$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{N^*}} = \frac{1}{\sqrt{\left|\tau^2 - \kappa^2\right|}} = \frac{1}{\|W\|} \tag{5.6.6}$$

olur. Bu ifade $(5.6.5)$ de yerine yazılırsa

$$T_{N^*} = \frac{\kappa}{\|W\|}T - \frac{\tau}{\|W\|}B$$

bulunur. Burada;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$ bağıntısından

$$T_{N^*} = \cosh\varphi T - \sinh\varphi B \tag{5.6.7}$$

olur. T_{N^*} ın türevi alınırsa

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{dT_{N^*}}{ds}\frac{ds}{ds_{N^*}}$$

olur. Bu son ifadede $(5.6.6)$ ve $(5.6.7)$ bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \left[\varphi'\left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right) + N\left(\kappa\cosh\varphi - \tau\sinh\varphi\right)\right]\frac{1}{\|W\|},$$

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \left[\ \varphi'\left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right) + N.\|W\|\ \right]\frac{1}{\|W\|},$$

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right) + N \tag{5.6.8}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$k_{N^*} = \frac{1}{\|W\|}\left\|\ \varphi'\left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right) + N.\|W\|\ \right\|,$$

$$k_{N^*} = \frac{1}{\|W\|}\sqrt{\left(\varphi'\right)^2 + \|W\|^2},$$

$$k_{N^*} = \sqrt{\left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 + 1}$$

olur. $(5.3.9)$ bağıntısı dikkate alınırsa

$$k_{N^*} = k_N$$

olduğu görülür.

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$ bağıntısından

$$T_{N^*} = \sinh\varphi T - \cosh\varphi B \tag{5.6.9}$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{dT_{N^*}}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{N^*}}$$

olur. $(5.6.6)$ ve $(5.6.9)$ bağıntıları burada yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \left[\varphi'\left(\cosh\varphi T - \sinh\varphi B\right) + N\left(\kappa\sinh\varphi - \tau\cosh\varphi\right)\right] \frac{1}{\|W\|},$$

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \left[\ \varphi'\left(\cosh\varphi T - \sinh\varphi B\right) - N.\|W\|\ \right] \frac{1}{\|W\|},$$

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\cosh\varphi T - \sinh\varphi B\right) - N \tag{5.6.10}$$

bulunur. Norm alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_{N^*} = \frac{1}{\|W\|}\left\|\ \varphi'\left(\cosh\varphi T - \sinh\varphi B\right) - N.\|W\|\ \right\|,$$

$$k_{N^*} = \frac{1}{\|W\|}\sqrt{\left|\ \|W\|^2 - (\varphi')^2\right|},$$

$$k_{N^*} = \sqrt{\left|1 - \left(\frac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2\right|}$$

olur. $(5.3.10)$ bağıntısı dikkate alınırsa

$$k_{N^*} = k_N$$

olduğu görülür.

(B^*) eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{B^*} ile gösterilsin. (B^*) nin yay parametresi s_{B^*} ve birim teğet vektörü T_{B^*} olmak üzere

$$k_{B^*} = \left\| D_{T_{B^*}} T_{B^*} \right\|$$

yazılır. (B^*) eğrisinin denklemi

$$\alpha^*_{B^*}(s^*_{B^*}) = B^*(s)$$

dir. Bu ifadenin s_{B^*} a göre türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha^*_{B^*}}{ds^*_{B^*}} = \frac{dB^*(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{B^*}},$$

$$T_{B^*} = N\left(-\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta\right) \frac{ds}{ds_{B^*}} \qquad (5.6.11)$$

olur. Burada norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{B^*}} = \frac{1}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta\right|} \qquad (5.6.12)$$

bulunur. Bu değer $(5.6.11)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$T_{B^*} = N$$

olur. Buradan tekrar türev alınır $(3.2.2)$, $(5.6.12)$ bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{dN}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_{B^*}}$$

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \frac{\kappa T - \tau B}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau \cos\theta\right|} \qquad (5.6.13)$$

bulunur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$k_{B^*} = \left\| \frac{\kappa T - \tau B}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta\right|} \right\|,$$

$$k_{B^*} = \frac{\|W\|}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta\right|},$$

veya

$$k_{B^*} = \frac{1}{\left|\frac{-\kappa}{\|W\|}\sinh\theta + \frac{\tau}{\|W\|}\cosh\theta\right|}$$

elde edilir. Bu ifade;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$, $(5.3.5)$ ve $(5.3.12)$ bağıntılarından

$$k_{B^*} = \frac{1}{\left|-\cosh\varphi.\sinh\theta + \sinh\varphi.\cosh\theta\right|},$$

$$k_{B^*} = \frac{1}{\left|-\frac{1}{k_T}\sinh\theta + \frac{1}{k_B}\cosh\theta\right|},$$

$$k_{B^*} = \left|\frac{k_T.\,k_B}{k_T\cosh\theta - k_B\sinh\theta}\right|$$

şeklinde olur.

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$, $(5.3.6)$ ve $(5.3.13)$ bağıntıları dikkate alınırsa aynı sonuç elde edilmektedir.

$\left(C^*\right)$ eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğriliği k_{C^*} ile gösterilsin. $\left(C^*\right)$ eğrisinin yay parametresi s_{C^*} ve birim teğet vektörü T_{C^*} olmak üzere

$$k_{C^*} = \left\|D_{T_{C^*}}T_{C^*}\right\|$$

yazılır.

$$\alpha^*_{C^*}\left(s^*_{C^*}\right) = C^*\left(s^*\right)$$

eğrisinin türevi alınırsa

$$\frac{d\alpha^*_{C^*}}{ds^*_{C^*}} = T_{C^*} = \frac{dC^*}{ds}\frac{ds}{ds_{C^*}} \qquad (5.6.14)$$

olur. Burada;

a) W^* **spacelike** ise $(3.3.6)$ bağıntısından

$$C^* = \sinh\varphi^* T^* - \cosh\varphi^* B^*$$

yazılır. Burada türev alınırsa

$$\frac{dC^*}{ds} = \left(\varphi^*\right)'\left(\cosh\varphi^* T^* - \sinh\varphi^* B^*\right) + \left(\kappa^*\sinh\varphi^* - \tau^*\cosh\varphi^*\right)N^*,$$

$$\frac{dC^*}{ds} = \left(\varphi^*\right)'\left(\cosh\varphi^* T^* - \sinh\varphi^* B^*\right)$$

olur. Bu ifade $(5.6.14)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$T_{C^*} = \left(\varphi^*\right)'\left(\cosh\varphi^* T^* - \sinh\varphi^* B^*\right)\ \frac{ds}{ds_{C^*}} \qquad (5.6.15)$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{C^*}} = \frac{1}{\left(\varphi^*\right)'} \qquad (5.6.16)$$

olur. Bu değer $(5.6.15)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$T_{C^*} = \cosh\varphi^* T^* - \sinh\varphi^* B^* \qquad (5.6.17)$$

elde edilir. Buradan tekrar türev alınırsa

$$D_{T_{C^*}} T_{C^*} = \frac{dT_{C^*}}{ds}\frac{ds}{ds_{C^*}}$$

olur. Burada $(5.6.16)$ ve $(5.6.17)$ bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{C^*}} T_{C^*} = \left[\left(\varphi^*\right)'\left(\sinh\varphi^* T^* - \cosh\varphi^* B^*\right) + N^*\left(\kappa^*\cosh\varphi^* - \tau^*\sinh\varphi^*\right)\right]\ \frac{1}{\left(\varphi^*\right)'},$$

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\left[\ \left(\varphi^*\right)'\left(\sinh\varphi^* T^*-\cosh\varphi^* B^*\right)+N^*.\left\|W^*\right\|\ \right]\frac{1}{\left(\varphi^*\right)'},$$

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\sinh\varphi^* T^*-\cosh\varphi^* B^*+N^*\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'} \tag{5.6.18}$$

bulunur. Norm alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_{C^*}=\left\|\ \sinh\varphi^* T^*-\cosh\varphi^* B^*+N^*\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'}\ \right\|,$$

$$k_{C^*}=\sqrt{\left(\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'}\right)^2+1}$$

olur. Burada $(5.1.14)$ ve $(5.5.5)$ bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_{C^*}=\sqrt{1+\frac{\left(\kappa^2-\tau^2\right)\left[\lambda^2\kappa^2-\left(1+2\lambda\kappa\right)\sinh^2\theta\right]^2}{\left(\lambda^2\tau\kappa'\right)^2\cosh^2\theta}}$$

elde edilir.

b) W^* **timelike** ise $(3.3.8)$ bağıntısından

$$C^*=\cosh\varphi^* T^*-\sinh\varphi^* B^*$$

yazılır. Burada türev alınırsa

$$\frac{dC^*}{ds}=\left(\varphi^*\right)'\left(\sinh\varphi^* T^*-\cosh\varphi^* B^*\right)+N^*\left(\kappa^*\cosh\varphi^*-\tau^*\sinh\varphi^*\right),$$

$$\frac{dC^*}{ds}=\left(\varphi^*\right)'\left(\sinh\varphi^* T^*-\cosh\varphi^* B^*\right)$$

olur. Bu ifade $(5.6.14)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$T_{C^*}=\left(\varphi^*\right)'\left(\sinh\varphi^* T^*-\cosh\varphi^* B^*\right)\frac{ds}{ds_{C^*}} \tag{5.6.19}$$

bulunur. Norm alınırsa

$$\frac{ds}{ds_{C^*}}=\frac{1}{\left(\varphi^*\right)'} \tag{5.6.20}$$

olur. Bu ifade $(5.6.19)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$T_{C^*}=\sinh\varphi^* T^*-\cosh\varphi^* B^* \tag{5.6.21}$$

elde edilir. Burada tekrar türev alınırsa

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\frac{dT_{C^*}}{ds}\frac{ds}{ds_{C^*}}$$

olur. Burada $(5.6.20)$ ve $(5.6.21)$ bağıntıları yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\left[\left(\varphi^*\right)'\left(\cosh\varphi^* T^*-\sinh\varphi^* B^*\right)-N^*\left(\tau^*\cosh\varphi^*-\kappa^*\sinh\varphi^*\right)\right]\frac{1}{\left(\varphi^*\right)'},$$

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\left[\left(\varphi^*\right)'\left(\cosh\varphi^* T^*-\sinh\varphi^* B^*\right)-N^*.\left\|W^*\right\|\right]\frac{1}{\left(\varphi^*\right)'},$$

$$D_{T_{C^*}}T_{C^*}=\cosh\varphi^* T^*-\sinh\varphi^* B^*-N^*\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'} \tag{5.6.22}$$

bulunur. Norm alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_{C^*}=\left\|\cos\mathrm{h}\,\varphi^* T^*-\sinh\varphi^* B^*-N^*\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'}\right\|,$$

$$k_{C^*}=\sqrt{\left|-1+\left(\frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'}\right)^2\right|}$$

olur. Burada $(5.1.14)$ ve $(5.5.5)$ bağıntıları yerine yazılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_{C^*} = \sqrt{\left| -1 + \frac{\left(\tau^2 - \kappa^2\right)\left[\lambda^2\kappa^2 - \left(1 + 2\lambda\kappa\right)\sinh^2\theta\right]^2}{\left(\lambda^2\tau\kappa'\right)^2 \cosh^2\theta} \right|}$$

elde edilir.

Böylece şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.6.1: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ timelike Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin $\left(T^*\right)$, $\left(N^*\right)$ ve $\left(B^*\right)$ küresel gösterge eğrileri ile $\left(C^*\right)$ pol eğrisinin IL^3 e göre geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılar

1) $k_{T^*} = \left| \dfrac{k_T \cdot k_B}{k_T \cdot \sinh\theta - k_B \cdot \cosh\theta} \right|$

2) $$\begin{cases} k_{N^*} = k_N = \sqrt{\left(\dfrac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 + 1}, \; W \; spacelike \; ise \\ \\ k_{N^*} = k_N = \sqrt{\left| 1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\|W\|}\right)^2 \right|}, \; W \; timelike \; ise \end{cases}$$

3) $k_{B^*} = \left| \dfrac{k_T \cdot k_B}{k_T \cdot \cosh\theta - k_B \cdot \sinh\theta} \right|$

4) $$\begin{cases} k_{C^*} = \sqrt{1 + \dfrac{\left(\kappa^2 - \tau^2\right)\left[\lambda^2\kappa^2 - \left(1 + 2\lambda\kappa\right)\sinh^2\theta\right]^2}{\left(\lambda^2\tau\kappa'\right)^2 \cosh^2\theta}}, \; W^* \; spacelike \; ise \\ \\ k_{C^*} = \sqrt{\left| -1 + \dfrac{\left(\tau^2 - \kappa^2\right)\left[\lambda^2\kappa^2 - \left(1 + 2\lambda\kappa\right)\sinh^2\theta\right]^2}{\left(\lambda^2\tau\kappa'\right)^2 \cosh^2\theta} \right|}, \; W^* \; timelike \; ise \end{cases}$$

şeklindedir.

5.7. Timelike α^* Eğrisinin Küresel Göstergelerinin S_1^2 veya H_0^2 ye göre Geodezik Eğrilikleri

S_1^2 veya H_0^2 ye göre $\left(T^*\right),\left(N^*\right),\left(B^*\right)$ ve $\left(C^*\right)$ eğrilerinin geodezik eğriliklerini hesaplayabilmek için S_1^2 ve H_0^2 deki konneksiyonları kullanıp Gauss denkleminden yararlanacağız.

$\left(T^*\right)$ teğetler göstergesinin H_0^2 ye göre geodezik eğriliği γ_{T^*} ile gösterilirse

$$\gamma_{T^*} = \left\| \overline{\overline{D}}_{T_{T^*}} T_{T^*} \right\|$$

yazılır. Burada $\overline{\overline{D}}$, H_0^2 ye göre kovaryant türev operatörüdür. Gauss denkleminden

$$D_{T_{T^*}} T_{T^*} = \overline{\overline{D}}_{T_{T^*}} T_{T^*} + \varepsilon g\left(S\left(T_{T^*}\right), T_{T*}\right) T^*$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g\left(T^*, T^*\right) = -1, \quad S\left(T_{T^*}\right) = -T_{T^*}, \text{ ve } \mathrm{g}\left(S\left(T_{T^*}\right), T_{T^*}\right) = -1$$

dir. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$\overline{\overline{D}}_{T_{T^*}} T_{T^*} = D_{T_{T^*}} T_{T^*} - T^*$$

olur. Burada $(5.1.4)$ ve $(5.6.4)$ bağıntıları burada yerine yazılırsa

$$\overline{\overline{D}}_{T_{T^*}} T_{T^*} = \left(\frac{\kappa}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|} + \cosh\theta \right).T + \left(\frac{-\tau}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|} - \sinh\theta \right)\cdot B \tag{5.7.1}$$

olur. Norm alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left| -\left(\frac{\kappa}{-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta} + \cosh\theta \right)^2 + \left(\frac{-\tau}{-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta} - \sinh\theta \right)^2 \right|},$$

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left| 1 + \frac{\tau^2 - \kappa^2}{\left(-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right)^2} \right|} \tag{5.7.2}$$

elde edilir. Burada;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$, $(5.3.5)$ ve $(5.3.12)$ bağıntıları $(5.7.2)$ de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left|1 - \frac{\|W\|^2}{\left(-\|W\|\cosh\varphi\cosh\theta + \|W\|\sinh\varphi\sinh\theta\right)^2}\right|},$$

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left|1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{k_T}\cosh\theta + \frac{1}{k_B}\sinh\theta\right)^2}\right|},$$

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left|1 - \left(\frac{k_T.k_B}{k_T\sinh\theta - k_B\cosh\theta}\right)^2\right|}$$

bulunur.

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$, $(5.3.6)$ ve $(5.3.13)$ bağıntıları $(5.7.2)$ de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left|1 + \frac{\|W\|^2}{\left(-\|W\|\sinh\varphi\cosh\theta + \|W\|\cosh\varphi\sinh\theta\right)^2}\right|},$$

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left|1 + \frac{1}{\left(-\frac{1}{k_T}\cosh\theta + \frac{1}{k_B}\sinh\theta\right)^2}\right|},$$

$$\gamma_{T^*} = \sqrt{\left|1 + \left(\frac{k_T.k_B}{k_T\sinh\theta - k_B\cosh\theta}\right)^2\right|}$$

bulunur. $\left(\overline{T^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\overline{\overline{D}}_{T_{T^*}} T_{T^*} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $(5.7.1)$ bağıntısından

$$\begin{cases} \dfrac{\kappa}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|} + \cosh\theta = 0 \\ \\ \dfrac{-\tau}{\left|-\kappa\cosh\theta + \tau\sinh\theta\right|} - \sinh\theta = 0 \end{cases}$$

olur. Bu ifade $\kappa > 0$, τ=0 ve $\theta = 0$ için sağlanır. Bu durumda şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.7.1: $\left(\alpha, \alpha^*\right)$ timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisi bir düzlemsel eğri ve çatılar denk ise $\left(T^*\right)$ teğetler göstergesinin $\left(\overline{T^*}\right)$ tabii lifti geodezik sprayın bir integral eğrisidir.

$\left(N^*\right)$ aslinormaller göstergesinin S_1^2 ye göre geodezik eğriliği γ_{N^*} ile gösterilirse

$$\gamma_{N^*} = \left\| \overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} \right\|$$

yazılır. Burada $\overline{D}$, S_1^2 ye göre kovaryant türev operatörüdür. Gauss denkleminden

$$D_{T_{N^*}} T_{N^*} = \overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} + \varepsilon g\left(S\left(T_{N^*}\right), T_{N*}\right) N^*$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g\left(N^*, N^*\right) = +1, \quad S\left(T_{N^*}\right) = -T_{N^*}, \text{ ve } \mathrm{g}\left(S\left(T_{N^*}\right), T_{N^*}\right) = \begin{cases} +1 \ , & W \textit{ spacelike ise} \\ -1 \ , & W \textit{ timelike ise} \end{cases}$$

dir.

a) W **spacelike** ise Gauss denklemi

$$\overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = D_{T_{N^*}} T_{N^*} - N^*$$

olur. Burada $(5.1.6)$ ve $(5.6.8)$ bağıntıları yerine yazılırsa

$$\overline{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right) \tag{5.7.3}$$

bulunur. Norm alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{N^*} = \left\| \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\sinh\varphi T - \cosh\varphi B\right) \right\|,$$

$$\gamma_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|}\sqrt{\left|-\sinh^2\varphi + \cosh^2\varphi\right|},$$

$$\gamma_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|} \tag{5.7.4}$$

elde edilir. $(5.4.5)$ bağıntısından

$$\gamma_{N^*} = \gamma_N$$

olduğu görülür. Diğer yandan $(3.3.5)$ bağıntısından

$$\left.\begin{aligned} \sinh\varphi &= \frac{\tau}{\|W\|} \\ \cosh\varphi &= \frac{\kappa}{\|W\|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \tanh\varphi = \frac{\tau}{\kappa}$$

olur. Burada her iki tarafın türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\varphi' = \frac{\tau'\kappa - \kappa'\tau}{\|W\|^2}$$

bulunur ve bu ifade $(5.7.4)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$\gamma_{N^*} = \gamma_N = \frac{\tau'\kappa - \kappa'\tau}{\|W\|^3}$$

elde edilir.

b) W **timelike** ise Gauss denklemi

$$\bar{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = D_{T_{N^*}} T_{N^*} + N^*$$

olur. Burada $(5.1.6)$ ve $(5.6.10)$ bağıntıları yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\cosh\varphi T - \sinh\varphi B\right) \tag{5.7.5}$$

bulunur. Norm alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{N^*} = \left\| \frac{\varphi'}{\|W\|}\left(\cosh\varphi T - \sinh\varphi B\right) \right\|,$$

$$\gamma_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|}\sqrt{\left|-\cosh^2\varphi + \sinh^2\varphi\right|},$$

$$\gamma_{N^*} = \frac{\varphi'}{\|W\|} \tag{5.7.6}$$

elde edilir. $(5.4.5)$ bağıntısından

$$\gamma_{N^*} = \gamma_N$$

olduğu görülür. Diğer yandan $(3.3.7)$ bağıntısı dikkate alınırsa

$$\left.\begin{array}{l} \cosh\varphi = \dfrac{\tau}{\|W\|} \\ \\ \sinh\varphi = \dfrac{\kappa}{\|W\|} \end{array}\right\} \Rightarrow \tanh\varphi = \frac{\kappa}{\tau}$$

olur. Burada her iki tarafın türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\varphi' = \frac{\kappa'\tau - \tau'\kappa}{\|W\|^2}$$

bulunur ve bu ifade $(5.7.6)$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$\gamma_{N^*} = \gamma_N = \frac{\kappa'\tau - \tau'\kappa}{\|W\|^3}$$

elde edilir. $\left(\overline{N^*}\right)$ eğrisinin geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{T_{N^*}} T_{N^*} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $(5.7.3)$ ve $(5.7.5)$ bağıntıları dikkate alınırsa

$$\varphi' = 0$$

bulunur. $(3.3.5)$ ve $(3.3.7)$ bağıntılarından

$$\frac{\kappa}{\tau} = sb.$$

olduğu görülür. Bu durumda şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.7.2: $\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisi bir helis ise α^{*} eğrisinin $\left(N^{*}\right)$ aslinormaller göstergesinin $\left(\overline{N^{*}}\right)$ tabii lifti geodezik sprayın bir integral eğrisidir.

$\left(B^{*}\right)$ binormaller göstergesi için S_1^2 ye göre geodezik eğrilik γ_{B^*} ile gösterilirse

$$\gamma_{B^*} = \left\| \bar{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} \right\|$$

olur. Burada $\bar{D}$, S_1^2 ye göre kovaryant türev operatörüdür. Gauss denkleminden

$$D_{T_{B^*}} T_{B^*} = \bar{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} + \varepsilon g\left(S\left(T_{B^*}\right), T_{B*}\right) B^{*}$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g\left(B^{*}, B^{*}\right) = +1, \quad S\left(T_{B^*}\right) = -T_{B^*}, \text{ ve } \mathrm{g}\left(S\left(T_{B^*}\right), T_{B^*}\right) = -1$$

dir. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$\bar{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = D_{T_{B^*}} T_{B^*} + B^{*}$$

bulunur. $(5.1.7)$ ve $(5.6.13)$ bağıntılarından

$$\bar{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = \left(\frac{\kappa}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau\cosh\theta\right|} - \sinh\theta\right) T + \left(\frac{-\tau}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau\cosh\theta\right|} + \cosh\theta\right) B \tag{5.7.7}$$

olur. Norm alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -\left(\frac{\kappa}{-\kappa\sinh\theta + \tau\cosh\theta} - \sinh\theta\right)^{2} + \left(\frac{-\tau}{-\kappa\sinh\theta + \tau\cosh\theta} + \cosh\theta\right)^{2} \right|},$$

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -1 + \frac{\tau^2 - \kappa^2}{\left(-\kappa\sinh\theta + \tau\cosh\theta\right)^2} \right|} \tag{5.7.8}$$

şeklinde bulunur. Bu son ifade;

a) W **spacelike** ise $(3.3.5)$, $(5.3.5)$ ve $(5.3.12)$ bağıntıları $(5.7.8)$ de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -1 - \frac{\|W\|^2}{\left(-\|W\|\cosh\varphi\sinh\theta + \|W\|\sinh\varphi\cosh\theta\right)^2} \right|},$$

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{k_T}\sinh\theta + \frac{1}{k_B}\cosh\theta\right)^2} \right|},$$

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -1 - \left(\frac{k_T.k_B}{k_T\cosh\theta - k_B\sinh\theta}\right)^2 \right|}$$

bulunur.

b) W **timelike** ise $(3.3.7)$, $(5.3.6)$ ve $(5.3.13)$ bağıntıları $(5.7.8)$ de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -1 + \frac{\|W\|^2}{\left(-\|W\|\sinh\varphi\sinh\theta + \|W\|\cosh\varphi\cosh\theta\right)^2} \right|},$$

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -1 + \frac{1}{\left(-\frac{1}{k_T}\sinh\theta + \frac{1}{k_B}\cosh\theta\right)^2} \right|},$$

$$\gamma_{B^*} = \sqrt{\left| -1 + \left(\frac{k_T.k_B}{k_T\cosh\theta - k_B\sinh\theta}\right)^2 \right|}$$

şeklinde bulunur. $\left(\overline{B^*}\right)$ eğrisi geodezik sprayın bir integral eğrisi olması için

$$\bar{D}_{T_{B^*}} T_{B^*} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $(5.7.7)$ bağıntısından

$$\begin{cases} \dfrac{\kappa}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau\cosh\theta\right|} - \sinh\theta = 0 \\ \\ \dfrac{-\tau}{\left|-\kappa \sinh\theta + \tau\cosh\theta\right|} + \cosh\theta = 0 \end{cases}$$

olur. Bu ifade ancak $\kappa = 0$, $\tau \neq 0$ ve $\theta = 0$ için sağlanır. Bu durumda şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.7.3: (α, α^*) timelike Bertrand eğri çifti olsun. (B^*) binormaller göstergesinin $\left(\overline{B^*}\right)$ tabii lifti eğrisi yoktur.

(C^*) eğrisinin S_1^2 ye göre geodezik eğriliği γ_{C^*} ile gösterilirse

$$\gamma_{C^*} = \left\| \overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} \right\|$$

olur. Burada $\overline{D}$, S_1^2 ye göre kovaryant türev operatörüdür. Gauss denkleminden

$$D_{T_{C^*}} T_{C^*} = \overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} + \varepsilon g\left(S\left(T_{C^*}\right), T_{C^*}\right) C^*$$

yazılır. Burada

$$\varepsilon = g\left(C^*, C^*\right) = +1, \quad S\left(T_{C^*}\right) = -T_{C^*}, \text{ ve } g\left(S\left(T_{C^*}\right), T_{C^*}\right) = +1$$

dir. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = D_{T_{C^*}} T_{C^*} - C^* \qquad (5.7.9)$$

bulunur. Bu ifade;

a) W^* **spacelike** ise $(3.3.6)$ ve $(5.6.18)$ bağıntıları $(5.7.9)$ da yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = \sin\varphi^* T^* - \cos\varphi^* B^* + \frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'} N^* - \sin\varphi^* T^* + \cos\varphi^* B^*,$$

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = \frac{\left\|W^*\right\|}{\left(\varphi^*\right)'} N^* \qquad (5.7.10)$$

olur. Norm alınırsa

$$\gamma_{C^*} = \left\| \frac{\left\| W^* \right\|}{\left(\varphi^* \right)'} \right\|$$

bulunur. $(5.1.14)$ ve $(5.5.5)$ eşitlikleri burada yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\gamma_{c^*} = \frac{\left\| W \right\| \left[\lambda^2 \kappa^2 - (1 + 2\lambda\kappa) \sinh^2 \theta \right]}{\lambda^2 \tau \kappa' \cosh \theta}$$

elde edilir.

b) W^* **timelike** ise $(3.3.8)$ ve $(5.6.22)$ bağıntılarından W^* ın spacelike olmasıyla aynı sonuç bulunur. $\left(\overline{C^*} \right)$ eğrisi geodezik sprayın integral eğrisi olması için

$$\overline{D}_{T_{C^*}} T_{C^*} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $(5.7.10)$ bağıntısından

$$\left\| W^* \right\| = 0$$

bulunur. Bu ifade

$$\kappa^* = \tau^* = 0 \text{ veya } \kappa^* = \tau^*$$

olması ile mümkündür. $\kappa^* = \tau^*$ ise $(5.1.9)$ ve $(5.1.12)$ bağıntılarından

$$\kappa = \frac{\sinh \theta (\sinh \theta - \cosh \theta)}{\lambda}$$

olur. Bu durumda şu sonuç verilebilir:

Sonuç 5.7.4: (α, α^*) timelike Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisi

$$\kappa = \frac{\sinh \theta (\sinh \theta - \cosh \theta)}{\lambda}$$

şartını sağlayan bir eğri ise $\left(C^* \right)$ eğrisinin $\left(\overline{C^*} \right)$ tabii lifti geodezik sprayın bir integral eğrisidir.

Sonuç 5.7.5: (α,α^*) timelike Bertrand eğri çifti olsun. α^* eğrisinin (T^*), (N^*) ve (B^*)küresel gösterge eğrileri ile (C^*) sabit pol eğrisinin S_1^2 veya H_0^2 ye göre geodezik eğrilikleri ile α eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin IL^3 e göre geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılar

$$1)\quad \begin{cases} \gamma_{T^*} = \sqrt{\left|1-\left(\dfrac{k_T k_B}{k_T \sinh\theta - k_B \cosh\theta}\right)^2\right|}, & W \text{ spacelike ise} \\[2ex] \gamma_{T^*} = \sqrt{1+\left(\dfrac{k_T k_B}{k_T \sinh\theta - k_B \cosh\theta}\right)^2}, & W \text{ timelike ise} \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \gamma_{N^*} = \gamma_N = \dfrac{\tau'\kappa - \kappa'\tau}{\|W\|^3}, & W \text{ spacelike ise} \\[2ex] \gamma_{N^*} = \gamma_N = \dfrac{\kappa'\tau - \tau'\kappa}{\|W\|^3}, & W \text{ timelike ise} \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \gamma_{B^*} = \sqrt{\left|-1-\left(\dfrac{k_T k_B}{k_T \cosh\theta - k_B \sinh\theta}\right)^2\right|}, & W \text{ spacelike ise} \\[2ex] \gamma_{B^*} = \sqrt{\left|-1+\left(\dfrac{k_T k_B}{k_T \cosh\theta - k_B \sinh\theta}\right)^2\right|}, & W \text{ timelike ise} \end{cases}$$

$$4)\quad \gamma_{c^*} = \frac{\|W\|\left[\lambda^2\kappa^2 - (1+2\lambda\kappa)\sinh^2\theta\right]}{\lambda^2\tau\kappa'\cosh\theta}$$

şeklinde verilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak (α,α^{*}) timelike Bertrand eğri çifti alınarak α eğrisinin $\{T,N,B\}$ Frenet vektörleri ile α^{*} eğrisinin $\{T^{*},N^{*},B^{*}\}$ Frenet vektörleri arasındaki bağıntılar bulundu. Bu bağıntılardan yararlanılarak α eğrinin W Darboux vektörü ile α^{*} eğrisinin W^{*} Darboux vektörünün lineer bağımlı olduğu gösterildi.

İkinci olarak α^{*} eğrisinin $\{T^{*},N^{*},B^{*}\}$ Frenet vektörlerinin ve bu vektörlere bağlı olarak oluşan C^{*} birim vektörünün Lorentzian veya Hiperbolik küre üzerinde meydana getirdikleri $(T^{*}),(N^{*}),(B^{*})$ küresel gösterge eğrileri ile (C^{*}) sabit pol eğrisinin IL^{3} e ve S_1^{2} veya H_0^{2} ye göre yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri hesaplandı. Bunlardan faydalanılarak α eğrisi ile α^{*} eğrisinin yay uzunlukları ve geodezik eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulundu.

Son olarak da α^{*} eğrisinin küresel göstergelerinin tabii liftlerinin geodezik spray için integral eğrisi olma şartları α eğrisine bağlı olarak ifade edildi.

Bu çalışma (α,α^{*}) timelike Bertrand eğri çifti alınarak yapılmıştır. Benzer şekilde $\alpha : I \to IL^{3}$ ve $\alpha^{*} : I \to IL^{3}$ Bertrand eğri çiftleri sırasıyla timelike-spacelike ve spacelike-spacelike alınarak yapılabilir. Ayrıca bu çalışmanın Dual ve Dual-Lorentz uzaylarında da karşılıkları bulunabilir.

7. KAYNAKLAR

Akutagawa, K. and Nishikawa, S. 1990. The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-space, Töhoko Math., J. 42, 67-82.

Balgetir, H., Bektaş, M. and Ergut, M. 2004. Bertrand Curves For Nonnull Curves in 3-Dimensional Lorentzian Space, Hadronıc Journal, 27, 229-236.

Bilici, M. 2011. The Natural Lift Curves and the Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Involutes of the Timelike Curve in Minkowski 3-Space, Middle-East Journal of Scientific Research 8 (6): 1029-1033.

Bilici, M. 2009. Timelike veya Spacelike İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri Üzerine, Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Samsun.

Bilici M., Çalışkan M. and Aydemir, İ. 2002. The Natural Lift Curves And The Geodezic Sprays For The Spherical Indicatrices Of The Pair Of Evolute-Involute Curves, International Journal of App. Math. vol.11, 415-420.

Çalışkan, M., Sivridağ, A.İ. and Hacısalihoğlu, H. H. 1984. Some Characterizations For The Natural Lift Curves And The Geodesic Sprays, Ankara Üniv., Fen Fak., Communications, Cilt 33, 235-242.

Demet, S. 2012. Timelike-Spacelike Mannheim Eğri Çiftleri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Ergun, E. and Calışkan, M. 2011. On the $\bar{M}$-Integral Curves and $\bar{M}$-Geodesic Sprays In Minkowski 3-Space, Int.J.Contemp. Math. Sci. Vol.6., no.39, 1935-1939.

Ekmekçi, N. and Ilarslan K. 2001. On Bertrand Curves and Their Characterization, Dıfferential Geometry-Dynamıcal Systems, Vol.3, No.2, 2001, 17-24.

Görgülü, A. and Özdamar, E. 1986. A generalizations of the Bertrand Curves as general inclined curve in E^n, Commun. Fac. Sci. Uni. Ankara, Series A1,Vol.35, 53-60.

Hacısalioğlu, H.H. 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. no.7, Malatya.

Liu, H. and Wang, F. 2008. Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, vol. 88, no. 1-2, 120-126(7).

Millman, R.S. and Parker, G.D. 1977. Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 265 pp.

O'neill, B. 1983. Semi Riemann Geometry, Academic Press, New York, London, 468 pp.

Ratcliffe, J. G. 1994. Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 736 pp.

Sabuncuoğlu, A. 2006. "Diferansiyel Geometri", Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 522 pp.

Sivridağ, A.İ. and Çalışkan, M. 1991. On The M-Integral Curves And M-Geodesic Sprays, Erciyes Üniv., Fen Bilimleri Dergisi, Cilt 7, Sayı 1-2, 1283-1287.

Şenol, A., Zıplar, E. And Yaylı, Y. 2012. General Helices and Bertrand Curves in Riemannian Space Form, Mathematica Aeterna, Vol.2, no.2, 155-161.

Şenyurt, S. 2012. Natural Lifts and The Geodesic Sprays for the Spherical Indicatrices of the Mannheim Partner Curves in E^3, International Journal of the Physical Sciences, vol. (7), no.16, 2414-2421.

Thorpe, J.A. 1979. Elementary Topics in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, Heidelberg-Berlin, 276 pp.

Turgut, A. 1995. 3- Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

Turgut, A. and Esin, E. 1992. Involüte- Evolüte Curve Couples of Higher Order in IR^n and Their Horizontal Lift in TIR^n, Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, Series A1, vol.41, no.3, 125-130.

Uğurlu, H.H. 1997. On the Geometry of Timelike Surfaces, Commun. Fac. Sci. Ank. Series A1 V.46, 211-223.

Wang, F. and Liu, H. 2007. Mannheim Partner Curves in 3-Space, Proceedings of The Eleventh International Workshop on Diff. Geom. 25-31.

Woestijne, V.D.I. 1990. Minimal Surfaces of the 3-diemensional Minkowski space. Proc. Congres "Geometrie differentielle et aplications" Avignon (30 May 1988), Wold Scientific Publishing. Singapore. 344-369 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı- Soyadı	**:** Ömer Faruk ÇALIŞKAN
Doğum Yeri	**:** Ankara
Doğum Tarihi	**:** 10.10.1988
Medeni Hali	**:** Bekâr
Bildiği Yabancı Dil	**:** İngilizce
İletişim Bilgileri	**:** Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi /ORDU omerfaruk_6688@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Dil)

Lise	**:** Mamak Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi - 2006
Lisans	**:** Ordu Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, 2006-2010
Yüksek Lisans	**:** Ordu Üniversitesi, 2011-2013