T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLERİNİ HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

EDA GÜNEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ORDU 2014

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Eda GÜNEY tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Selahattin MADEN danışmanlığında hazırlanan "Matrislerin Genelleştirilmiş Terslerini Hesaplama Yöntemleri" adlı bu tez, jürimiz tarafından 10 / 01 / 2014 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Selahattin MADEN

Başkan	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Selim NUMAN Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 17/01/2014 tarih ve 2014/..18..sayılı kararı ile onaylanmıştır.

17./01./2014

Enstitü Müdürü

Doç. Dr. Mehmet Fikret BALTA

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza
Eda GÜNEY

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLERİNİ HESAPLAMA YÖNTEMLERİ

Eda GÜNEY

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2013
Yüksek Lisans Tezi 106s.

Danışman: Doç. Dr. Selahattin MADEN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Matrislerin genelleştirilmiş inversleri açıklanmış ve bir algoritma verilerek örneklerle pekiştirilmiştir. Daha sonra Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inverslerin özellikleri açıklanmış ve örneklendirilmiştir. Üçüncü bölümde parçalı matrislerin genelleştirilmiş inversleri üzerinde durularak bazı araştırmacılar tarafından yapılan çalışmalar incelenmiştir. Ayrıca $M \epsilon \mathbb{C}^{mxn}$ matrisini $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ biçiminde 2x2 tipinde parçalayarak bu matrisin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversler için bazı formüller verilmiştir. Dördüncü bölümde parçalı matrislerin Moore-Penrose inversleri üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kare Matris, Singüler Matris, Nonsingüler Matris, Bir Matrisin Rankı, Determinant, Genelleştirilmiş İnvers, Parçalı matris, Moore-Penrose İnvers, Hermitian Matris, Banachiewicz- Schur Formu.

ABSTRACT

THE METHODS OF CALCULATING GENERALIZED INVERCES OF MATRICES

Eda GÜNEY
University of Ordu
Institute for Graduate Studies in Natural and Technology
Department of Mathematics, 2013
MSc. Thesis 106p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selahattin MADEN

This thesis is consist of four chapters. In the first chapter, it is mentioned about the object of the thesis. In the second chapter, basic definitions and theorems that were used in the thesis are given. Generalized inverses of Matrices are explained and it's reincforced with the examples with an algorithm. Than, some properties of the Moore-Penrose generelazied inverses are explained and some examles are given. In the third chapter, by considering the generalized inverses of partitioned Matrices, some studies which are given by some researchers are expressesd. Moreover, some formules are given for the Moore-Penrose generelazied inverses by taking any matrix $M\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ that is partitioned in the form of $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Key Words: Square Matrix, Singular Matrix, Nonsingular Matrix, Rank of Matrix, Determinant, Generalized İnverse, Partitioned Matrix, Moore-Penrose Generalized İnverse, Hermitian Matrix, Banachiewicz-Schur Form.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı esnasında her türlü yardımını esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN' e ve tez çalışmalarım esnasında bilgilerini esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT' a teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım süresinde maddi ve manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim annem, babam ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: K kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{K}_n^m$	:$\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
A^{T}	: A matrisinin transpozu
$\overline{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris
$\|A\|$ veya $\det(A)$	: A matrisinin determinantı
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$r(A)$ veya $rank(A)$	: A matrisinin rankı
Ek(A)	: A matrisinin ek matrisi
$\mathcal{N}(A)$	: A marisinin null (sıfır) uzayı
$\mathcal{R}(A)$	: A marisinin ranj (sütun) uzayı
$P_{(\mathcal{R}(A))}$	: A marisinin $\mathcal{R}(A)$ sütun (ranj) uzayının yansıtıcısı (izdüşümü)
A^- veya $A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
A_0 veya $A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımalı genelleştirilmiş inversi
$A^\dagger$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi

1. GİRİŞ

Bir singüler matrisin inversi fikri ilk defa 1920 yılında Moore (1920, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Bu fikrin genel operatörlere genişletilmesi ise Tseng (1949a, 1949b, 1956) tarafından yapılmıştır. Ancak, daha sonra 1955 yılına kadar bu konuda her hangi bir sistematik çalışmaya rastlanamamaktadır. 1955 yılında, önceki çalışmalardan habersiz olarak, Penrose (1955, 1956) biraz farklı bir yoldan Moore tarafından verilen invers kavramını tekrar tanımlamıştır. Penrose ile aynı zamanlarda yaşayan bilim adamlarından birisi olan Rao (1955), bir singüler matrisin Pseudo İnversi olarak adlandırdığı, en küçük kareler teorisinde singüler matrisli normal denklemlerin çözümünde ve tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında kullanılan yeni bir invers kavramı geliştirmiştir. Rao tarafından geliştirilen Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya konulan kısıtlamaların tümünü sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten farklıdır, fakat gözlem denklemlerinin rankları üzerinde herhangi bir kısıtlama konulmaması durumunda en küçük kareler yönteminin genel teorisinin ortaya konulmasında oldukça yararlıdır. Rao (1962), daha sonraki bir çalışmasında, lineer denklemlerle ilgili problemlerinin çözümünde yeterli olabilecek ve Moore ve Penrose' un vermiş olduğu tanımdan çok daha zayıf bir tanım ortaya koymuştur. Böyle bir invers, bir genelleştirilmiş invers (g–invers) olarak adlandırılmış ve bunun uygulamaları Rao(1961, 1965a, 1965b, 1966, 1967)' nun birçok çalışmasında yer almıştır.

Genelleştirilmiş inversler üzerinde 1955' lerden itibaren çalışan başlıca bilim adamları arasında Greville (1959), Bjerhammer (1951a, 1951b, 1958), Ben-Israel ve Charnes (1963), Chipman (1964, 1968), Chipman ve Rao (1964), Scroggs ve Odell (1966) sayılabilir. Bose (1959), "Varyans Analizi" adlı ders notlarında g–inversi kullanmıştır. Bott ve Duffin (1953) bir kare matrisin kısıtlamalı inversini tanımlamıştır ki bu invers bilinen g–inversten farklıdır ve bazı uygulamalarda kullanılır. Chernoff (1953), singüler nonnegatif tanımlı bir matrisin g–inversini göz önüne almıştır ki bu invers, bir g–invers olmamasına rağmen bazı tahmin problemlerinin incelenmesinde yararlıdır. Rao (1962) tarafından verilen daha zayıf tanımı sağlayan g–invers tek olmamakla birlikte matris cebirinde ilginç bir çalışma olarak kabul edilir.1967 yılında bir yayınında Rao (1967), değişik amaçlarla kullanılmak üzere g–inverslerin bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını ortaya atan Mitra (1968a, 1968b), Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer çeşitli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan bir dizi çalışmada ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş inverslerin hesaplanmasındaki sistematik gelişmeler ve onların çeşitli uygulamaları *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: a. $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m,n\in\mathbb{N}$ ve $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$ olmak üzere bütün (i,j) sıralı ikililerinin kümesi $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olsun.

$f: A \longrightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu $(i,j)\longrightarrow f(i,j)=a_{ij}$

olarak tanımlansın. $a_{ij}\in\mathbb{K}$ olacak şekilde seçilen $m.n$ tane elemanın oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

sayı tablosuna $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m\times n$ tipinde bir **matris** denir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

matrisi kısaca $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ şeklinde gösterilir. Her (i,j), $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$ ikilisine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i,j)**–inci bileşeni** denir.

b. $m\times n$ tipinde olan ve bileşenleri bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinden seçilen bütün $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrislerinin kümesi $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterilir.

c. $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ $m\times n$ tipinde her hangi iki matris olmak üzere, her (i,j) için

$a_{ij}=b_{ij},\ 1\le i\le m$ ve $1\le j\le n$ ise bu iki matrise **eşit matrisler** denir.

d. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, her bir a_{ij} elemanı sıfıra eşitse A matrisine **sıfır matris** denir.

e. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere, A ve B **matrislerinin toplamı**, (i,j)–inci bileşeni $a_{ij} + b_{ij}$ olan bir matris olup

$$+: \mathbb{K}_n^m \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(A, B) \longrightarrow A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + + b_{12} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

f. $c \in \mathbb{K}$ bir skaler olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i,j)–inci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$$.: \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n^m \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$$

$$(c, A) \longrightarrow cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

olur. O halde her $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için $0 \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $0A = 0 \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi, $m \times n$ tipinde sıfır matristir.

g. $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ olmak üzere, A ve B **matrislerinin çarpımı** $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matristir ve

$.: \mathbb{K}_p^m \times \mathbb{K}_n^p \longrightarrow \mathbb{K}_n^m$

$(A, B) \longrightarrow A.B = C$

$[a_{ij}].[b_{ij}] = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$

şeklindedir.

Yani

$$A.B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. O halde matris çarpımının tanımlı olabilmesi için birinci çarpanın sütun sayısı, ikinci çarpanın satır sayısına eşit olmalıdır. Herhangi A ve B matrislerinin çarpımı $A.B$ veya AB ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.1.2: a. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, reel sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki A matrisine bir **reel matris** denir.

b. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi olarak alınırsa, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki bir A matrisine bir **kompleks matris** denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.1.3: a. Bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde $m = n$ ise, A matrisine **kare matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

kare matrisinde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına **köşegen (esas köşegen) elemanları** denir.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise yani, $a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ ise bu matrise **köşegen matris** denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

c. Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = k$, $k \in \mathbb{K}$ ise bu matrise **skaler matris** denir.

d. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ tipindeki bir matrise **birim matris** denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Her hangi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ olur.

e. Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinden aynı numaralı satırlar ve sütunlar kendi aralarında yer değiştirilerek elde edilen $A^T = [a_{ij}]_{n\times m}$ matrisine A matrisinin **transpozu (transpoze matrisi)** denir. Buna göre A ve B uygun matrisler olmak üzere

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{ve} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

eşitlikleri sağlanır.

f. A bir reel kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise, A matrisine **simetrik matris** denir.

g. A ve B kare matrisleri arasında $AB = BA$ bağıntısı varsa, bu matrislere **değişmeli (komutatif) matrisler** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.1.4: a. $\{1,2,\dots n\}$ kümesinin kendisi üzerine bir birebir ve örten bağıntısı veya eş değer olarak $1,2,\dots n$ sayılarının yeniden bir sıralanmasına $\{1,2,\dots n\}$ kümesinin bir σ **permütasyonu** denir. Böyle bir permütasyon

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

veya

$$\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n \quad , \quad j_i = \sigma(i)$$

ile gösterilir. Bu permütasyonların tümünün kümesi S_n ile gösterilir. S_n de gelişigüzel bir σ permütasyonu, örneğin $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ düşünüldüğünde σ da çift veya tek sayıda permütasyonlar olmasına göre σ ya **çift** veya **tek permütasyon** denir. O halde bir σ nın işareti

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \text{eğer } \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $sgn\sigma$ ile gösterilir.

b. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı kare matris olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin her satırından ve her sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere n elemanın bir çarpımı düşünülsün. Böyle bir çarpım

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

şeklinde yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir ve bu yüzden alt indisler $1, 2, \dots, n$ doğal sayı sırasındadır. Çarpanlar farklı sütunlardan geldiğinden, ikinci alt indislerin dizisi S_n de bir $\sigma = j_1, j_2, \dots, j_n$ permütasyonunu oluşturur. Tersine, S_n deki her permütasyon yukarıdaki şekilde bir çarpım tanımlar. Böylece A matrisi böyle $n!$ çarpım kapsar.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin **determinantı** det(A) veya $|A|$ şeklinde gösterilir ve yukarıdaki her çarpanı $sgn\sigma$ ile çarpılan veya $n!$ tane çarpımların toplamıdır. Yani

$$|A| = \sum_{\sigma} (sgn\sigma)\, a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$$

veya

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma)\, a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde n . mertebedendir.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır.

c. 1×1 tipinde bir A matrisinin determinantı kendisidir.

$A = [a]$ ise, $\det(A) = |a| = a$

olur.

d. 2×2 tipinde bir A matrisinin determinantı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olur.

n > 2 için bir kare matrisin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanılan bir açılımla hesaplanır.

e. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının $\left|M_{ij}\right|$ şeklinde tanımlanan **minörü**, A matrisinden i–inci satırın ve j–inci sütunun atılması ile oluşan $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki kare matrisin determinantıdır.

f. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü $\left|M_{ij}\right|$ olsun. A matrisinin bir a_{ij} elemanının A_{ij} şeklinde gösterilen **kofaktörü (işaretli minörü veya eş çarpanı)**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\left|M_{ij}\right|$$

şeklinde tanımlanır.

g. Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ matrisinin determinantı her hangi bir satır (sütun) elemanlarının kendi kofaktörleriyle çarpılıp bu çarpanların toplanmasıyla bulunur. Yani herhangi i ve j $(i,j = 1,2,3,\dots,n)$ için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\left|M_{ik}\right| \tag{2.4}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\left|M_{ik}\right| \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Her bir i için, (2.4) ile verilen toplama, A matrisinin determinantının i–inci satır elemanlarına göre açılımı, her bir j için, (2.5) ile verilen toplama ise A matrisinin determinantının j–inci sütun elemanlarına göre açılımı denir.

h. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi için $|A| = 0$ ise A matrisine **singüler (tekil) matris**, $|A| \neq 0$ ise, A matrisine **nonsingüler (tekil olmayan veya regüler) matris** denir. (Branson R., 1999)

Tanım 2.1.5: a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinde bir a_{ij} elemanının kofaktörü A_{ij} olsun.

$$\mathrm{Ek}(A) = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

şeklinde tanımlanan matrise $\boldsymbol{A}$ **matrisinin ek matrisi** denir. Buna göre

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

b. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A.B = B.A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrisi varsa, B matrisine $\boldsymbol{A}$ **matrisinin inversi** denir ve $A^{-1} = B$ ile gösterilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.1: Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler matris olup

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n \qquad (2.6)$$

ile verilir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat:

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olur ki bu matris bir skaler matristir. Benzer şekilde

$$\mathrm{Ek}(A).A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. O halde

$$A.\mathrm{Ek}(A) = \mathrm{Ek}(A).A = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = |A| I_n$$

bulunur.

Teorem 2.1.2: Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matrisinin inversi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A) \tag{2.7}$$

dır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: (2.6) bağıntısından dolayı $A.\mathrm{Ek}(A) = |A| I$ olur. Bu ifadenin her iki yanı A^{-1} ile çarpıldığında

$$(A^{-1}A).\mathrm{Ek}(A) = A^{-1}|A|I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}I \;\Rightarrow\; \mathrm{Ek}(A) = |A|A^{-1}$$

olur. Öte yandan A matrisi nonsingüler olduğundan $|A| \neq 0$ olup

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\mathrm{Ek}(A)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris ve B ve C çarpıma uygun matrisler olmak üzere $AB = AC$ ise $B = C$ olur. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: $AB = AC$ eşitliğinin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılmasıyla

$A^{-1}AB = A^{-1}AC$ yani $B = C$ elde edilir.

Teorem 2.1.4: a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler matris olsun. A^{-1} matrisi tektir.

b. A nonsingüler matris ise A^{-1} matrisi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

c. A ve B çarpmaya uygun nonsingüler matrisler ise AB matrisi de nonsingüler olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dır.

d. A nonsingüler bir matris ise A^T matrisi de nonsingüler olup $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir. (Branson R., 1999)

İspat: a. B ve C matrislerinin A matrisinin herhangi iki inversi olduğu varsayılsın. O zaman $AB = BA = I$ ve $AC = CA = I$ olur. Buradan

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

elde edilir.

b. $(A^{-1})^{-1}$ matrisi A^{-1} matrisinin inversidir. Aynı zamanda A matrisi de A^{-1} matrisinin inversidir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

c. $(AB)^{-1}$ matrisi AB matrisinin inversidir. Ayrıca

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ve

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

yazılabilir. Böylece $B^{-1}A^{-1}$ matrisi de AB matrisinin inversi olur. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden bu inversler birbirine eşittir.

d. $(A^T)^{-1}$ matrisi A^T matrisinin inversidir . Ayrıca $I^T = I$ olduğundan

$$I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T(A)^T$$

olur. Bu durum, $(A^{-1})^T$ matrisinin A^T matrisinin bir inversi olduğunu gösterir. Nonsingüler bir matrisin inversinin tekliğinden $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ elde edilir.

Tanım 2.1.6: a. Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisi için $A^2 = A$ ise, A matrisine **idempotent matris** denir.

b. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisinin elemanlarının yerlerine eşlenikleri yazılarak elde edilen matrise A matrisinin **eşleniği (eş matrisi)** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

c. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı A matrisi için $\left(\overline{A}\right)^T = A$ ise A matrisine **hermitian matris** denir ve $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ ile gösterilir.

d. Bir A matrisi için $AA^* = A^*A$ ise A matrisine **normal matris** denir.

e. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ nonsingüler bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^*$ (veya $AA^* = A^*A = I$) ise A matrisine **birimsel (unitary) matris** denir.

f. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir matris olmak üzere, $A^{-1} = A^T$ ise A matrisine **ortogonal (dik) matris** denir.

g. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ reel simetrik bir matris olmak üzere, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}_1^n$ vektörü için $x^T Ax > 0$ $(x^T Ax \geq 0)$ ise, A matrisine **Pozitif Tanımlı (Pozitif Yarı Tanımlı) Matris** denir.

h. A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olsun. $(A - \lambda I)x = 0$ eşitliğini sağlayan λ skalerine A matrisinin bir **özdeğeri**, sıfır olmayan x vektörüne de A matrisinin bir **özvektörü** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.5: A ve B uygun matrisler olmak üzere

a. $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$.

b. $(A^*)^* = A$.

c. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

d. $(AB)^* = B^*A^*$.

eşitlikleri sağlanır. (Branson R., 1999)

İspat: a. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu takdirde

$$\overline{A} = [\overline{a_{ij}}] \quad \text{ve} \quad (\overline{A})^T = [\overline{a_{ji}}]$$

olur. Diğer taraftan

$$A^T = [a_{ji}] \quad \text{ve} \quad \overline{(A^T)} = [\overline{a_{ji}}]$$

olduğundan

$$\overline{(A^T)} = (\overline{A})^T$$

olduğu görülür.

b. $A^* = (\overline{A})^T$ olduğundan

$$(A^*)^* = \left(\overline{(\overline{A})^T}\right)^T = (A^T)^T = A$$

elde edilir.

c. Hermitian matris tanımına göre

$$(A+B)^* = (\overline{A+B})^T = (\overline{A}+\overline{B})^T = (\overline{A})^T + (\overline{B})^T = A^* + B^*$$

elde edilir.

d. Hermitian matris tanımına göre

$$(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T = (\overline{B})^T(\overline{A})^T = B^*A^*$$

yazılabilir.

Teorem 2.1.6: Reel simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olması için gerek ve yeter şart, tüm özdeğerlerinin (sıfırdan farklı özdeğerlerinin) pozitif olmasıdır. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: A matrisi pozitif tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için $Ax = \lambda x$ ve $\langle Ax, x\rangle > 0$ bağıntıları vardır. O halde $0 < \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$ olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda > 0$ olmalıdır.

A matrisi pozitif yarı tanımlı olmak üzere, λ özdeğerine ve ilgili x özvektörüne sahip olsun. Bu takdirde bu x vektörü için

$$Ax = \lambda x \text{ ve } \langle Ax, x\rangle \geq 0$$

bağıntıları vardır. O halde

$$0 \leq \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$$

olur. x bir özvektör olduğundan, sıfırdan farklıdır ve dolayısıyla $\langle x, x\rangle$ pozitiftir. Bu durumda $\lambda \geq 0$ olmalıdır.

Tüm (sıfırdan farklı) özdeğerleri pozitif olması halinde A matrisinin pozitif tanımlı (pozitif yarı tanımlı) olacağı benzer şekilde gösterilebilir. (Lanchester, P., 1969)

Tanım 2.1.7: a. $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörler kümesi verilmiş olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımsızdır** denir. Aksi halde yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots x_n$ vektörlerine **lineer bağımlıdır** denir.

b. A matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin sütun vektörlerini $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile, ve satır vektörlerini $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterelim.

A_{i*} , $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına A matrisinin **satır rankı**, A_{*j} , $j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en büyük lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına ise A matrisinin **sütun rankı** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.7: Bir matrisin iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesi matrisin satır rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat: A matrisinin herhangi iki satırı yer değiştirdiğinde satır vektörlerinin kümesi değişmeyeceğinden, bu durum matrisin satırları arasındaki lineer bağımsızlığı değiştirmez, Yani satır rankını değiştirmez.

Teorem 2.1.8: $AX = 0$ ve $BX = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynı ise, o zaman A ve B $n \times n$ tipindeki matrislerin sütun rankları aynıdır. (Branson R., 1999)

İspat: $AX = 0$ sistemi

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = 0 \tag{2.8}$$

olarak yazılabilir. Burada A_i, A matrisinin i-yinci sütunu ve $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ olur. Benzer şekilde, $Bx = 0$ sistemi

$$x_1B_1 + x_2B_2 + \cdots + x_nB_n = 0 \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin sütun rankı a, B matrisinin sütun rankı b ile gösterilsin. A matrisinin sütun rankı, B matrisinin sütun rankından büyük kabul edilsin. Böylece $a > b$ olur. Bu durumda A matrisinin a tane lineer bağımsız sütunu olmalıdır. Genellik kaybedilmeden, bunların A matrisinin ilk a sütunu olduğu varsayılabilir.

(Eğer değilse, A matrisinin sütunları bu şekilde yeniden düzenlenebilir. Bu durum ise Teorem 2.1.7' ye benzer şekilde A matrisinin sütun rankını değiştirmez.) Ancak $a > b$ kabul edildiğinden B matrisinin ilk a sütunu lineer bağımlıdır. Böylece, hepsi sıfır olmayan öyle $d_1, d_2, \dots, d_n$ vardır ki

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a = 0$$

olur. Buradan

$$d_1B_1 + d_2B_2 + \cdots + d_aB_a + 0B_{a+1} + \cdots + 0B_n = 0$$

ve (2.9) sisteminin çözümü olarak

$$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \dots \quad x_a = d_a \quad x_{a+1} = x_{a+2} = \cdots = x_n = 0$$

bulunur. Bu aynı değerler (2.8) sisteminin de çözümü olarak verildiğinden

$$d_1A_1 + d_2A_2 + \cdots + d_aA_a = 0$$

dır. Burada, belirtildiği gibi, $d_1, d_2, \dots, d_a$ sabitlerinin tümü sıfır değildir. Ancak bu $A_1, A_2, \dots, A_a$ matrislerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir ki, bu da bir çelişkidir.

A ve B matrislerinin rollerini değiştirerek yapılan benzer bir çalışma, B matrisinin sütun rankının da A matrisinin sütun rankından daha büyük olamayacağını gösterir. Böylece bu iki matrisin sütun rankları eşit olmalıdır.

Teorem 2.1.9: Elemanter satır işlemleri herhangi bir matrisin sütun rankını değiştirmez. (Branson R., 1999)

İspat: A matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde edilen matris B olsun. Bu durumda $Ax = 0$ ve $Bx = 0$ homojen denklem sistemlerinin çözüm kümeleri aynıdır. Teorem 2.1.8 yardımıyla A ve B matrislerinin sütun rankları aynıdır.

Teorem 2.1.10: Herhangi bir A matrisi için satır rankı sütun rankına eşittir. (Branson R., 1999)

İspat: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin satır rankının r ve sütun rankının ise c olduğu kabul edilsin. $r = c$ olduğu gösterilecektir. A matrisinin satırları ilk r satırı lineer bağımsız ve kalan $m - r$ satırı ilk r satırın lineer birleşimi olacak şekilde yeniden düzenlenirse, Teorem 2.1.7 ve Teorem 2.1.8 yardımıyla bu işlemin A matrisinin satır ve sütun ranklarını değiştirmediği görülür. A matrisinin satırları sırasıyla $A_1, A_2, \dots, A_m$ ile gösterilsin ve C ve D matrisleri

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_r \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} A_{r+1} \\ A_{r+2} \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. O zaman A matrisi $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ bloklanmış matrisidir. Ayrıca D matrisinin her bir satırı C matrisinin satırlarının bir lineer birleşimi olduğundan, öyle bir T matrisi vardır ki, $D = TC$ olur. Özel durumda eğer

$$A_{r+1} = d_1 A_1 + d_2 A_2 + \cdots + d_r A_r$$

ise o zaman $[d_1, d_2, \dots, d_r]$ vektörü T matrisinin ilk satırıdır. Buradan, her hangi bir n boyutlu x vektörü için

$$Ax = \begin{bmatrix} Cx \\ Dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ TCx \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda, ancak ve ancak $Cx = 0$ ise $Ax = 0$ olur ve Teorem 2.1.8' den dolayı A ve B matrislerinin sütun rankı c dir. Ancak B matrisinin sütunları r boyutlu vektörlerdir. Böylece B matrisinin sütun rankı r den büyük olamaz. Yani

$$c \leq r \tag{2.10}$$

olur.

Yukarıdaki durum A^T matrisi için tekrarlanırsa, A^T matrisinin sütun rankının A^T matrisinin satır rankından büyük olamayacağı görülür. Ancak, A^T matrisinin sütunları A matrisinin satırları olduğundan bu durum A matrisinin satır rankının A matrisinin sütun rankından büyük olamayacağı anlamına gelir. Yani

$$r \leq c \tag{2.11}$$

olur.

(2.10) ve (2.11) bağıntılarından $r = c$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.8: Herhangi bir A matrisinin rankı, satır ve sütun rankı olarak tanımlanır ve $\text{rank}(A)$ veya $r(A)$ şeklinde gösterilir. (Branson R., 1999)

Teorem 2.1.11: A bir matris olmak üzere $r(A) = r(A^T)$ dir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

İspat: A matrisinin satırları A^T matrisinin sütunları ve A matrisinin sütunları A^T matrisinin satırları olduğundan, Teorem 2.1.10' dan istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.1.9: $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine **Nonsingüler (Tekil Olmayan) Matris** denir. Aksi durumda yani, $r(A) < n$ ise A matrisine **Singüler (Tekil) Matris** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Tanım 2.1.10: a. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{N}(A) = \{x : Ax = 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A marisinin **null (sıfır) uzayı** denir.

b. $A \in \mathbb{K}_n^m$, $m \times n$ tipinde bir matris olsun.

$$\mathcal{R}(A) = \{y : Ax = y\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A matrisinin **ranj (sütun) uzayı** denir. (Hacısalihoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.1.12: Eğer A, r ranklı $m \times n$ tipinde bir matris ise, bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan nonsingüler P ve Q matrisleri vardır. I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere

a. $m = n = r \Rightarrow PAQ = I$.

b. $m = r < n \Rightarrow PAQ = [I , 0]$.

c. $m > r, \; n > r \Rightarrow PAQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (2.12)

İspat: Lancaster, P., (1969)

Teorem 2.1.13: Çarpmaya uygun A ve B matrislerinin çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankını geçemez. Yani

$$r(AB) \leq \min\{r(A) \, , \, r(B)\} \tag{2.13}$$

dir. (Lancaster, P., 1969)

İspat: AB matrisinin her bir sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu olduğundan AB matrisinin sütun uzayı A matrisinin sütun uzayının alt kümesi olur. Böylece $r(AB) \leq r(A)$ eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $r(AB) \leq r(B)$ eşitsizliği de sağlanır. Böylece $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ elde edilir.

2.2 Genelleştirilmiş İnversler

Herhangi bir A matrisi bir inverse sahip olabilmesi için A matrisinin nonsingüler ve kare matris olması gerekir. Bu durumda A matrisi yardımıyla

$$AX = B \tag{2.14}$$

lineer denklem sisteminin var olan tek çözümü $X = A^{-1}B$ şeklindedir. Ayrıca

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

şartını sağlayan ve A matrisinin inversi olarak adlandırılan A^{-1} matrisi vardır. Bununla birlikte A matrisinin kare matris olmadığı durumlarda ya da A matrisinin kare matris fakat singüler olduğu durumlarda inversi yoktur. Bu durumlarda A^{-1} matrisinin özelliklerini de içeren ve genelleştirilmiş invers (g–invers) matris adını alan yeni bir kavram sayesinde (2.14) sisteminin bir çözümü olabilir.

$\mathbb{C}_n^m$, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı (Moore–Penrose şartları) sağlayan bir G matrisine A matrisinin Moore–Penrose inversi denir ve A^{+} veya $A^{\dagger}$ ile gösterilir.

(i) $AGA = A$,

(ii) $GAG = G$,

(iii) $(AG)^{*} = AG$,

(iv) $(GA)^{*} = GA$. (2.15)

Eğer G matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa bu G matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve A^- veya $A^{(1)}$ ile gösterilir. Sadece (ii) şartını sağlayan G matrisine A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan G matrisine ise A matrisinin bir yansımalı genelleştirilmiş inversi denir ve $A^{(1,2)}$ veya A_0 ile gösterilir.

2.2.1 Bir Matrisin Genelleştirilmiş İnversi İçin Bir Algoritma

Moore–Penrose şartlarından sadece (i) şartını sağlayan, yani

$$AGA = A \tag{2.16}$$

olacak şekildeki G matrisine A matrisinin bir g–inversi (genelleştirilmiş inversi) denir.

Bir matrisin g–inversini bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

Algoritma 2.2.1 : $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ r ranklı herhangi bir matris olsun.

1. Adım: r ranklı A matrisinde, $r \times r$ tipinde nonsingüler her hangi bir B alt matrisi seçilir.

2. Adım: Seçilen B alt matrisinin inversi bulunup bu inversin transpozu alınır.

3. Adım: A matrisinde B alt matrisinin her bir elemanına karşılık gelen yere $(B^{-1})^T$ matrisinin elemanları yerleştirilir.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

5. Adım: Elde edilen matrisin transpozu alınır. Bu matrise G denirse, G matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Örnek 2.2.1: Algoritma 2.2.1 3×3 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulansın. A matrisi rankı 2 olan singüler bir matristir.

1. Adım: A matrisinin 2×2 tipinde bir nonsingüler

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

alt matrisi seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - (-3) = 13 \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\mathrm{Ek}(B) = 1/13.\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 \\ 1/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin transpozu alınırsa

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Bulunan $(B^{-1})^T$ matrisi A matrisinde elemanları B alt matrisinin elemanlarının yerlerine karşılık gelecek şekilde yerleştirilir. Diğer tüm elemanları sıfır alınır. Böylece

$$\begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 & 0 \\ -3/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan matrisin transpozu alınarak

$$G = \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan G matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5/13 & -3/13 & 0 \\ 1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Verilen A matrisinin başka bir B alt matrisini seçerek, seçilen bu yeni B alt matrisine Algoritma 2.2.1 uygulansın.

1. Adım: A matrisinin rankı 2 olduğundan B matrisi

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilsin.

2. Adım: $|B| = 10 - 0 = 10 \neq 0$ olduğundan

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \mathrm{Ek}(B) = 1/10 . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

3. ve 4. Adımlar: Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olur.

5. Adım: Bu şekilde bulunan matrisin transpozu alındığında

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bulunan bu G matrisi A matrisinin bir g–inversi olur. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.2.1: Yukarıdaki iki seçim, bir matrisin g–inversinin tek olmadığını gösterir. Bu nedenle bir matrisin tanımlı birden çok g–inversi bulunabilir.

Örnek 2.2.2: 2×3 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. A matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.2.1 A matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda B alt matrisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım: $|B| = 1 + 1 = 2 \neq 0$ olup

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.Ek(B) = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi E matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.3: 5×2 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dikdörtgen matrisi alınsın. A matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Algoritma 2.2.1 A matrisine uygulansın.

1. Adım: Bu durumda B alt matrisi

$$B - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak seçilebilir.

2. Adım: $|B| = 3 - 0 = \ 3 \neq 0$ olup

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}.\mathrm{Ek}(B) = 1/3.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi A matrisinin bir g–inversi olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olduğu görülür.

Algoritma 2.2.1 rankı 1 olan matrislerin g–inversini bulmak için aşağıdaki şekilde uyarlanabilir.

Algoritma 2.2.2:

1. Adım: A matrisinin sıfırdan farklı her hangi bir elemanı B olarak seçilir.

2. Adım: Seçilen bu elemanın inversi bulunur.

3. Adım: Bulunan bu invers A matrisinde karşılık gelen yere yazılır.

4. Adım: A matrisinin diğer tüm elemanlarının yerine sıfır yazılır.

Örnek 2.2.4:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak alınsın. A matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $B = [3]$ alınsın.

2. Adım: $B^{-1} = [1/3]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$ olacaktır.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi A matrisinin bir g–inversidir.

Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = A$$

olur.

Örnek 2.2.5: 3×4 tipindeki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

matrisi alınsın. A dikdörtgen matrisinin rankı 1 dir. Algoritma 2.2.2 A matrisine uygulansın.

1. Adım: $B = [8]$ seçilsin.

2. Adım: $B^{-1} = [1/8]$ olur.

3. ve 4. Adımlar: Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

5. Adım: Bu şekilde elde edilen $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi A matrisinin bir g–inversidir. Gerçekten

$$AG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$AGA = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = A$$

olur. A matrisi 3×4 tipinde olduğu için 3.4 = 12 tane g–inversi bulunabilir.

Sonuç 2.2.2: Genel olarak 1 ranklı ve $m \times n$ tipindeki matrislerin m.n tane g–inversi bulunabilir. Matrisin sıfırdan farklı herhangi bir elemanının inversini alıp, diğer tüm elemanlarını sıfır aldıktan sonra elde edilen matrisin transpozu alınarak g–inversi bulunur. Eğer A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde 1 ranklı bir matris ise, A matrisinin

1–ncisi; $\begin{bmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

2–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

… … … … … … … … … … … …

(m.n)–ncisi; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_{mn})^{-1} \end{bmatrix}$

şeklinde m.n tane g–inversi bulunabilir.

Teorem 2.2.1: Eğer A matrisi $m \times n$ tipinde sıfır matris ise, A^+ matrisi $n \times m$ tipinde sıfır matristir.

İspat: Açık olarak $A^+ = 0$ alındığında Moore–Penrose şartlarının sağlandığı görülür.

Teorem 2.2.2: Her A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir A^+ matrisi vardır.

İspat: Eğer $A = 0$ ise Teorem 2.2.1' den $A^+ = 0$ olduğu açıktır. $A \neq 0$ olsun. A matrisinin r ranklı olduğu kabul edilsin. Bu durumda A matrisi

$$A = BC \tag{2.17}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde $r > 0$ ranklı ve C matrisi $r \times n$ tipinde $r > 0$ ranklı matrisler olup, B^*B ve CC^* çarpımlarının her ikisi de nonsingülerdir. Bu durumda eğer A^+ matrisi

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{2.18}$$

olarak alınırsa, A^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^+A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$

$$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$$

(ii) $A^+AA^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^+,$$

(iv) $(A^+A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$

$$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^+A$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.3: Herhangi bir A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir tek A^+ matrisi vardır. Yani her A matrisinin bir tek Moore–Penrose inversi vardır.

İspat: A matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki Moore–Penrose inversi A_1^+ ve A_2^+ olsun. Bu durumda

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*(AA_2^+A)^*$$

$$= A_1^+(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A^* = A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+AA_1^+AA_2^+ = A_1^+AA_2^+$$

$$= A_1^+A(A_2^+AA_2^+) = (A_1^+A)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+$$

$$= (AA_1^+A)^*(A_2^+)^*A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = A_2^+AA_2^+ = A_2^+$$

olduğundan $A_1^+ = A_2^+$ olur. Yani A^+ matrisi tektir.

Teorem 2.2.4: a. $m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin tüm elemanları 1 ise bu takdirde

$$A^+ = \frac{1}{m.n}A^*$$

dir.

b. a, $n \times 1$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir sütun vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = (a^*a)^{-1}a^*$$

şeklindedir.

c. a, $1 \times n$ tipinde ve $a \neq 0$ olan bir satır vektörü ise bu durumda a^+

$$a^+ = a^*(aa^*)^{-1}$$

şeklindedir.

İspat: a. İspat için teoremde verilen A^+ matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Bu durumda

(i) $AA^+A = A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A = A\frac{1}{m.n}(A^*A) = A.\frac{1}{m.n}.m.n = A,$

(ii) $A^+AA^+ = \left(\frac{1}{m.n}A^*\right)A\left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = \frac{1}{m.n}(A^*A)\left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = \frac{1}{m.n}.m.n.\left(\frac{1}{m.n}A^*\right)$

$$= \left(\frac{1}{m.n}A^*\right) = A^+,$$

(iii) $(AA^+)^* = \left(A\frac{1}{m.n}A^*\right)^* = A\frac{1}{m.n}A^* = AA^+,$

(iv) $(A^+A)^* = \left(\frac{1}{m.n}A^*A\right)^* = \frac{1}{m.n}A^*A = A^+A$

olduğu görülür.

b. a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^+a = a(a^*a)^{-1}a^*a = a(a^*a)^{-1}(a^*a) = a,$

(ii) $a^+aa^+ = (a^*a)^{-1}a^*a(a^*a)^{-1}a^* = (a^*a)^{-1}(a^*a)(a^*a)^{-1}a^*$

$$= (a^*a)^{-1}a^* = a^+,$$

(iii) $(aa^+)^* = [a(a^*a)^{-1}a^*]^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^+,$

(iv) $(a^+a)^* = [(a^*a)^{-1}a^*a]^* = (a^*a)^{-1}a^*a = a^+a$

olduğu görülür.

c. a^+ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^+a = aa^*(aa^*)^{-1}a = (aa^*)(aa^*)^{-1}a = a$,

(ii) $a^+aa^+ = a^*(aa^*)^{-1}aa^*(aa^*)^{-1} = a^*(aa^*)^{-1}(aa^*)(aa^*)^{-1}$

$$= a^*(aa^*)^{-1} = a^+,$$

(iii) $(aa^+)^* = [aa^*(aa^*)^{-1}]^* = aa^*(aa^*)^{-1} = aa^+$,

(iv) $(a^+a)^* = [a^*(aa^*)^{-1}a]^* = a^*(aa^*)^{-1}a = a^+a$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.6: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun.

$m = 3,\ n = 2$ ve $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

olarak alınırsa

$$A^+ = \frac{1}{m.n}A^* = \frac{1}{3.2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $AA^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$AA^{+}A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A,$$

(ii) $A^{+}A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$A^{+}AA^{+} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = A^{+},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = AA^{+},$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A^{+}A$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.7: $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$a^{+} = (a^{*}a)^{-1}a^{*} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= [14]^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = [1/14] . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 3/14 & 3/7 & 9/14 \end{bmatrix}$

$$aa^{+}a = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 3/14 & 3/7 & 9/14 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = a,$$

(ii) $a^{+}a = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$a^{+}aa^{+} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \end{bmatrix} = a^{+}$,

(iii) $(aa^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 3/14 & 3/7 & 9/14 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/7 & 3/14 \\ 1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 3/14 & 3/7 & 9/14 \end{bmatrix} = aa^{+}$,

(iv) $(a^{+}a)^{*} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = a^{+}a$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.8: $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ alınırsa

$$a^{+} = a^{*}(aa^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlar. Gerçekten

(i) $aa^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

$aa^{+}a = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = a$,

(ii) $a^{+}a = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

$a^{+}aa^{+} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = a^{+}$,

(iii) $(aa^{+})^{*} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = aa^{+}$,

(iv) $(a^{+}a)^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} = a^{+}a$ olduğu görülür.

2.3 Moore–Penrose Tipi Genelleştirilmiş İnverslerin Özellikleri

Teorem 2.3.1: A herhangi bir matris olmak üzere

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \tag{2.19}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (2.17) bağıntısındaki gibi $A = BC$ olsun. $A^* = C^*B^*$ olduğundan

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

alınırsa

$$(A^+)^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.20}$$

olur ki bu da A^* matrisinin Moore–Penrose inversidir. Gerçekten

(i) $A^*(A^*)^+A^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^* = C^*B^* = A^*$,

(ii) $(A^*)^+A^*(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}CC^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$

$$= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = (A^*)^+,$$

(iii) $[A^*(A^*)^+]^* = [(C^*B^*)B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C]^* = [C^*(CC^*)^{-1}C]^*$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = A^*(A^*)^+,$$

(iv) $[(A^*)^+A^*]^* = [B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C(C^*B^*)]^* = [B(B^*B)^{-1}B^*]^*$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = (A^*)^+A^*$$

olur.

Böylece

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından ve bir matrisin Moore–Penrose inversi varsa tek olacağından dolayı

$$(A^*)^+ = (A^+)^*$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.2: Bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi matrisin kendisine eşittir. Yani her hangi bir A matrisi için

$$(A^+)^+ = A$$

olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $A^+(A^+)^+A^+ = A^+AA^+ = A^+$,

(ii) $(A^+)^+A^+(A^+)^+ = AA^+A = A = (A^+)^+$,

(iii) $[A^+(A^+)^+]^* = [A^+A]^* = A^+A = A^+(A^+)^+$,

(iv) $[(A^+)^+A^+]^* = [AA^+]^* = AA^+ = (A^+)^+A^+$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.3: A matrisinin Moore–Penrose inversinin rankı A matrisinin rankına eşittir. Yani

$$r(A) = r(A^+) \tag{2.22}$$

dır.

İspat: Teorem 2.1.13 $AA^{+}A = A$ Moore–Penrose şartına uygulandığında

$$r(A) = r(AA^{+}A) \leq \min\{r(A), r(A^{+})\} \leq r(A^{+}) \quad (2.23)$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 2.1.13 $A^{+}AA^{+} = A^{+}$ Moore–Penrose şartına uygulanırsa

$$r(A^{+}) = r(A^{+}AA^{+}) \leq \min\{r(A), r(A^{+})\} \leq r(A) \quad (2.24)$$

elde edilir. (2.23) ve (2.24) bağıntılarından dolayı (2.22) bağıntısı sağlanır.

Sonuç 2.3.1: A matrisinin rankı r ise, A^{+}, AA^{+}, $A^{+}A$, $AA^{+}A$, $A^{+}AA^{+}$ matrislerinin her birinin rankı da r dir.

Teorem 2.3.4: A simetrik ve idempotent matris ise, $A^{+} = A$ olur.

İspat: Moore–Penrose invers tanımından

(i) $AA^{+}A = AAA = A^{2}A = AA = A^{2} = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = AAA = A^{2}A = AA = A^{2} = A = A^{+}$,

(iii) $[AA^{+}]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = AA^{+}$,

(iv) $[A^{+}A]^{*} = [AA]^{*} = [A^{2}]^{*} = A^{*} = A = A^{2} = AA = A^{+}A$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.5: $B = \text{Köş}\{b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}\}$ ise, B matrisinin Moore–Penrose inversi B^{+}, i–yinci satırı ve i–yinci sütununda yer alan köşegen elemanı $b_{ii} \neq 0$ ise b_{ii}^{-1} ve $b_{ii} = 0$ ise “0” olan bir köşegen matristir.

İspat: B^{+} matrisinin Moore–Penrose şartlarını sağladığı açıkça görülür.

Örnek 2.3.1:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen D matrisinin Moore–Penrose inversi

$$D^{+} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Gerçekten

$$DD^{+} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$DD^{+}D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.6: a. A, $m \times n$ tipinde tam satır ranklı bir matris ise, bu durumda

$$A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1} \text{ ve } AA^{+} = I_m$$

olur.

b. A, $m \times n$ tipinde tam sütun ranklı bir matris ise, bu durumda

$$A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} \text{ ve } A^{+}A = I_n$$

olur.

İspat: Teoremde verilen A^{+} matrislerinin Moore–Penrose şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Buna göre

a. (i) $AA^{+}A = AA^{*}(AA^{*})^{-1}A = (AA^{*})(AA^{*})^{-1}A = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1}AA^{*}(AA^{*})^{-1} = A^{*}(AA^{*})^{-1}(AA^{*})(AA^{*})^{-1}$

$$= A^{*}(AA^{*})^{-1} = A^{+\dagger},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = (AA^{*}(AA^{*})^{-1})^{*} = ((AA^{*})(AA^{*})^{-1})^{*} = I^{*} = I$

$$= (AA^{*})(AA^{*})^{-1} = AA^{*}(AA^{*})^{-1} = AA^{+},$$

(iv) $(A^{+}A)^{*} = (A^{*}(AA^{*})^{-1}A)^{*} = A^{*}(AA^{*})^{-1}A = A^{+}A$

olduğu görülür. Benzer şekilde

b. (i) $AA^{+}A = A(A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A(A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = A$,

(ii) $A^{+}AA^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A)(A^{*}A)^{-1}A^{*}$

$$= (A^{*}A)^{-1}A^{*} = A^{+},$$

(iii) $(AA^{+})^{*} = (A(A^{*}A)^{-1}A^{*})^{*} = A(A^{*}A)^{-1}A^{*} = AA^{+}$,

(iv) $(A^{+}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}A^{*}A)^{*} = ((A^{*}A)^{-1}(A^{*}A))^{*} = I^{*} = I$

$$= (A^{*}A)^{-1}(A^{*}A) = (A^{*}A)^{-1}A^{*}A = A^{+}A$$

olduğu görülür.

Örnek2.3.2: 2×3 tipindeki bir $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi alındığında rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani A tam satır ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.3.6a'dan dolayı

$$A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9/50 & -7/50 \\ -7/50 & 11/50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/10 & 3/10 \\ 2/5 & -1/5 \\ -1/10 & 3/10 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$AA^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1/10 & 3/10 \\ 2/5 & -1/5 \\ -1/10 & 3/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.3: 3×2 tipinde bir $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda rank(A) = 2 olduğu açıktır. Yani, A tam sütun ranklı bir matristir. O halde Teorem 2.3.6b'den dolayı

$$A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} . \left[\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 6/35 & -1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4/35 & 13/35 & -1/7 \\ 3/7 & -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$A^+A = \begin{bmatrix} -4/35 & 13/35 & -1/7 \\ 3/7 & -1/7 & 2/7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.7: $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ matrisleri sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde matrisler olmak üzere r ranklı olsun. Bu durumda

$$(BC)^+ = C^+B^+ \tag{2.25}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Teorem 2.3.6'ya göre

$$C^+ = C^*(CC^*)^{-1} \quad \text{ve} \quad B^+ = (BB^*)^{-1}B^*$$

olur ve buradan

$$C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$$

elde edilir. Bu değer zaten (2.18) bağıntısından dolayı $(BC)^+$ matrisidir. O halde

$C^+B^+ = (BC)^+$ olduğu görülür.

3. PARÇALI MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİ

3.1. Giriş

$\mathbb{C}^{mxn}$ Kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanan mxn tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. A^*, $r(A)$, $\mathcal{R}(A)$ sembolleri sırasıyla $A\in\mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin eşlenik transpozunu, rankını ve sütun uzayını göstersin. A ve B uygun tipten matrisler olmak üzere $X=[A\ \ B]$, ile A ve B oluşturduğu bir satır blok matrisi göstersin. Benzer şekilde C ve D uygun tipten matrisler olmak üzere $Y=\begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}$, ile C ve D oluşturduğu bir sütun blok matrisi göstersin.

$A\in\mathbb{C}^{mxn}$, $B\in\mathbb{C}^{mxk}$, $C\in\mathbb{C}^{lxn}$ ve $D\in\mathbb{C}^{lxk}$ olmak üzere 2x2 tipindeki bir M blok matrisini

$$M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

şeklinde ifade edelim.

$A\in\mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin $A^{\dagger}$ ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıda dört matris eşitliğini sağlayan bir tek olarak belirli $X\in\mathbb{C}^{nxm}$ matrisidir.

(1) $AXA=A,$

(2) $XAX=X,$

(3) $(AX)^*=AX,$

(4) $(XA)^*=XA.$

Ayrıca $E_A=I_m-AA^{\dagger}$ ve $F_A=I_n-A^{\dagger}A$ iki ortogonal izdüşüm olsun. Bir X matrisi eğer $i,\dots,j$ –yinci eşitlikleri sağlıyorsa buna A matrisinin $\{i,\dots,j\}$-inversi denir ve $A^{(i,\dots,j)}$ ile gösterilir. A matrisinin A'nın bütün $\{i,\dots,j\}$-inverslerinin ailesi $\{A^{(i,\dots,j)}\}$ ile gösterilir. A matrisinin sık kullanılan bazı genelleştirilmiş inversleri

$A^{(1)}, A^{(1,2)}, A^{(1,3)}$ ve $A^{(1,4)}$ dir. Özel olarak $A^{(1)}$ inversine A matrisinin g-inversi veya genelleştirilmiş inversi de denir ve A^{-} veya A^{g} ile de gösterilir. Ayrıca $\{1,2\}$-inverse A matrisinin yansımalı g-inversi, $\{1,3\}$-inverse A matrisinin en küçük kareler g-inversi $\{1,4\}$-inverse ise A matrisinin minimum norm g-inversi de denir.

Eğer (3.1) ifadesindeki A matrisi kare ve nonsingüler bir matris ise bu takdirde M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A^{-1}B \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde parçalanabilir. Bu parçalanış literatürde Aitken blok - köşegenleştirme formülü olarak adlandırılır. Öte yandan, eğer hem M matrisi hem de A matrisi nonsingüler matrisler ise $S = D - CA^{-1}B$ Schur Komplementi de nonsingüler olup M matrisinin inversi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu fornül literatürde nonsingüler matrislerin inversi için Banachiewicz ters alma formülü olarak da bilinir. (3.1) de verilen A ve M matrislerinin her ikisi de singüler olduğunda (3.2) ve (3.3) te verilen iki formül ve bunların çeşitli sonuçları parçalı matrislerin genelleştirilmiş inverslerinin incelenmesinde ve benzeri uygulamalarda da geniş bir şekilde kullanılmaktadır. $S = D - CA^{(i,\ldots,j)}B$ olmak üzere (3.1) deki alt matrislerin genelleştirilmiş inversleri cinsinden (3.3) ifadesinin bir benzeri

$$N\left(A^{(i,\dots,j)},S^{(i,\dots,j)}\right)=\begin{bmatrix} I_n & -A^{(i,\dots,j)}B \\ 0 & I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{(i,\dots,j)} & 0 \\ 0 & S^{(i,\dots,j)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{(i,\dots,j)} & I_l \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A^{(i,\dots,j)}+A^{(i,\dots,j)}BS^{(i,\dots,j)}CA^{(i,\dots,j)} & -A^{(i,\dots,j)}BS^{(i,\dots,j)} \\ -S^{(i,\dots,j)}CA^{(i,\dots,j)} & S^{(i,\dots,j)} \end{bmatrix} \qquad (3.4)$$

ile verilir. (3.4) denklemine M matrisinden türetilen Banachiewicz-Schur formu denir. (3.4)' ten görüldüğü gibi $N\left(A^{(i,\dots,j)},S^{(i,\dots,j)}\right)$ matrisi, $A^{(i,\dots,j)}$ ve $S^{(i,\dots,j)}$ matrislerinin seçimine bağlı olarak değişşecektir. $\{N\left(A^{(i,\dots,j)},S^{(i,\dots,j)}\right)\}$ kümesi tüm $N\left(A^{(i,\dots,j)},S^{(i,\dots,j)}\right)$' lerin ailesini göstersin. (3.4) ifadesinin sağ tarafı inverslerle genelleştirilmiş inverslerin yer değiştirmesi sonucu elde edilmesine rağmen, bunun M matrisinin bir $\{i,\dots,j\}$-inversi olması gerekmez. Bu durumda (3.1) de verilen M matrisinin genelleştirilmiş inversleri ile (3.4)'teki $N\left(A^{(i,\dots,j)},S^{(i,\dots,j)}\right)$ matrisi arasındaki ilişkileri incelemek ilginçtir. Özellikle $N\left(A^{(i,\dots,j)},S^{(i,\dots,j)}\right)$ matrislerinin (3.1) ile verilen M matrisinin genelleştirilmiş inversleri olması için gerek ve yeter koşulları vermek önemlidir. Bazı çalışmalarda $\{i,\dots,j\}$ nin bazı özel seçimleri için $N\left(A^{(i,\dots,j)},S^{(i,\dots,j)}\right)$ ve $M^{(i,\dots,j)}$ arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. Bu bağlamda iyi bilinen bir sonucun $S=D-CA^{\dagger}B$ olmak üzere

$M^{\dagger}=N(A^{\dagger},S^{\dagger})\Leftrightarrow \mathcal{R}(B)\subseteq\mathcal{R}(A),\mathcal{R}(C^{*})\subseteq\mathcal{R}(A^{*}),\mathcal{R}(C)\subseteq\mathcal{R}(S)$ ve

$\mathcal{R}(B^{*})\subseteq\mathcal{R}(S^{*})$ (3.5)

olduğu gösterilebilir. Bu durum Baksalary, J.K. ve Styan, G.P.H. tarafından ortaya konulmuştur. Benzer çalışmalar A. Ben-Israel, P. Bhimasankaram, F. Burns, G. Marsaglia ve Y. Tian tarafından da yapılmıştır. $M^{(1)}$ ve $N\left(A^{(1)},S^{(1)}\right)$ arasındaki ilişkiler

$$\min_{A^{(1)},M^{(1)}} r\left[M^{(1)}-N\left(A^{(1)},\,S^{(1)}\right)\right]$$

$$-\max\{r(M)-r(A)-r[C,D],\ r(M)-r(A)-r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix},\ 0\} \tag{3.6}$$

$$\max_{A^{(1)}} \min_{M^{(1)}} r[M^{(1)} - N(A^{(1)}, S^{(1)})]$$

$$= r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r[C,D] - 2r(A) \tag{3.7}$$

rank formülleri de dikkate alınarak aşağıdaki şekilde verilebilir. Her iki rank eşitliğinde de sağ tarafları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki durumlar elde edilir:

(a) $N(A^{(1)}, S^{(1)})$, M'nin bir {1}-inversi olacak şekilde $A^{(1)}$ ve $S^{(1)}$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$r(M) \leq \min\{r(A)+r[C,D],\ r(A)+r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}\} \tag{3.8}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(b) $\{N(A^{(1)}, S^{(1)})\} \subseteq \{M^{(1)}\}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = r(A) + r[C,D] \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

veya buna denk olarak

$$\mathcal{R}\begin{bmatrix} 0 \\ (E_A B)^* \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} C^* \\ D^* \end{bmatrix} \text{ ve } \mathcal{R}\begin{bmatrix} 0 \\ CF_A \end{bmatrix} \subseteq \mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

olmasıdır.

Daha önceki çalışmalardan bir genelleştirmesi olarak bu çalışmada

$$M^{(i,\ldots,j)} - N(A^{(i,\ldots,j)}, S^{(i,\ldots,j)}) \tag{3.10}$$

ifadesinin matrislerin {1,2}-, {1,3}-, {1,4}-inversleri ve Moore-Penrose inversleri olması için bazı rank formülleri verilmiş ve

$$\{N(A^{(i,\ldots,j)}, S^{(i,\ldots,j)})\} \cap \{M^{(i,\ldots,j)}\} \neq \emptyset, \tag{3.11}$$

$$\{N(A^{(i,\ldots,j)}, S^{(i,\ldots,j)})\} \subseteq \{M^{(i,\ldots,j)}\} \tag{3.12}$$

bağıntılarını karakterize etmek için rank formülleri kullanılacaktır.

(3.10) ile ilgili rank eşitliklerini oluşturmak için parçalanmış matrisler için rank formüllerinin genişletilmesine ve genelleştirilmiş Schur Komplementlerine ihtiyaç duyulur.

Lemma 3.1.1(Tian,2004) $A \in C^{m \times n}$, $B \in C^{m \times k}$, $C \in C^{l \times n}$ ve $D \in C^{l \times k}$ olsun. Bu takdirde

$$r[A, B] = r(A) + r(B - AA^{(1)}B) = r(B) + r(A - BB^{(1)}A), \tag{3.13}$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(C - CA^{(1)}A) = r(C) + r(A - AC^{(1)}C), \tag{3.14}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r[(I_m - BB^{(1)})A((I_n - C^{(1)}C] \tag{3.15}$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = r(A) + r\begin{bmatrix} 0 & B - AA^{(1)}B \\ C - CA^{(1)}A & D - CA^{(1)}B \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 3.1.2 (Tian, 2004) M matrisi (3.1) de verildiği gibi olsun. Bu durumda

$$r_1 = r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}, \; r_2 = r(D) - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\min_{A^{(1)}} r(D - CA^{(1)}B) = r(A) + r[C, D] + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

$$\max_{A^{(1)}} r\left(D - CA^{(1)}B\right) = \min\left\{r[C,D],\ r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix},\ r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - r(A)\right\}, \tag{3.18}$$

$$\min_{A^{(1,2)}} r\left(D - CA^{(1,2)}B\right) = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r[C,D] + r(A) + \max\{r_1, r_2\} \tag{3.19}$$

$$\max_{A^{(1,2)}} r\left(D - CA^{(1,2)}B\right) = \min\{r(A) + r(D),\ r[C,D],\ r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix},\ r\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} r(A)\} \tag{3.20}$$

$$\min_{A^{(1,3)}} r\left(D - CA^{(1,3)}B\right) = r\begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\max_{A^{(1,3)}} r\left(D - CA^{(1,3)}B\right) = \min\{r\begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix} - r(A),\ r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}\} \tag{3.22}$$

$$\min_{A^{(1,4)}} r\left(D - CA^{(1,4)}B\right) = r[C,D] + r\begin{bmatrix} AA^* & B \\ CA^* & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

$$\max_{A^{(1,4)}} r\left(D - CA^{(1,4)}B\right) = \min\{r[C,D],\ r\begin{bmatrix} AA^* & B \\ CA^* & D \end{bmatrix} - r(A)\} \tag{3.24}$$

$$r(D - CA^{\dagger}B) = r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} - r(A), \tag{3.25}$$

eşitlikleri sağlanır.

Aşağıdaki Lemma, (3.17), (3.19), (3.21) ve (3.23) eşitliklerindeki B ve C matrisleri yerine birim matrisleri koymak suretiyle kolayca elde edilir.

Lemma 3.1.3 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ve $D \in \mathbb{C}^{n \times m}$ olsun. Bu takdirde

$$\min_{A^{(1)}} r\left(A^{(1)} - D\right) = r(A - ADA), \tag{3.26}$$

$$\min_{A^{(1,2)}} r\left(A^{(1,2)} - D\right) = \max\{r(A - ADA),\ r(D) + r(A) - r(DA) - r(AD)\}, \tag{3.27}$$

$$\min_{A^{(1,3)}} r\left(A^{(1,3)} - D\right) = r(A^{*}DA - A^{*}), \tag{3.28}$$

$$\min_{A^{(1,4)}} r\left(A^{(1,4)} - D\right) = r(DAA^{*} - A^{*}). \tag{3.29}$$

eşitlikleri sağlanır.

3.2. Banachiewicz-Schur Formlarıyla Parçalı Matrislerin Genelleştirilmiş İnversleri

Öncelikle $M^{(1,2)} - N(A^{(1,2)}, S^{(1,2)})$ farkı için iki rank formülü verilecektir.

Teorem 3.2.1 $S = D - CA^{(1,2)}B$ olmak üzere M ve $N(A^{(1,2)}, S^{(1,2)})$ matrisleri sırasıyla (3.1) ve (3.4) ifadelerinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$r_1 = r(M) - 2r(A) - r(D),$$

$$r_2 = r(M) - r(A) - r[C, D],$$

$$r_3 = r(M) - r(A) - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

$$s_1 = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r[C, D] - 2r(A)$$

$$s_2 = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} + r(M) - 2r(A) - r(D) - r[C, D] - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\min_{A^{(1,2)}, M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right] = \max\{r_1, r_2, r_3, 0\} \tag{3.30}$$

$$\max_{A^{(1,2)}} \min_{M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right] = \min\{s_1, s_2\} \tag{3.31}$$

eşitlikleri verilir. Bu nedenle de

(a) $N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)$, M 'nin bir {1,2}-inversi olacak şekilde $A^{(1,2)}$ ve $S^{(1,2)}$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$r(M) \leq \min\left\{2r(A) + r(D),\ r(A) - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix},\ r(A) + r[C, D]\right\} \qquad (3.32)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(b) $\left\{N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right\} \subseteq \{M^{(1,2)}\}$ olması için gerek ve yeter koşul (3.9) bağıntısının sağlanmasıdır veya bunun yerine

$$r(M) = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + r[C, D] - r[D] \quad \text{ve} \quad r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = r(A) + r(D)$$

(3.33)

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: [16]'da gösterildiği gibi

$$\min_{A^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N\left(A^{(1,2)}, -S^{(1,2)}\right)\right] = r(M) - r(A) - r\left(D - CA^{(1,2)}B\right), \qquad (3.34)$$

dir. Böylece

$$\min_{A^{(1,2)}, M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right] = r(M) - r(A) - \max_{A^{(1,2)}} r\left(D - CA^{(1,2)}B\right),$$

(3.35)

$$\max_{A^{(1,2)}} \min_{M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right] = r(M) - r(A) - \min_{A^{(1,2)}} r\left(D - CA^{(1,2)}B\right)$$

(3.36)

elde edilir. (3.19) ve (3.20) ifadeleri (3.35) ve (3.36) ifadelerinde yerlerine yazılırsa (3.30) ve (3.31) ifadeleri elde edilir. (3.30) eşitliğinin sağ tarafının sıfıra eşitlenmesi $r_1 \leq 0$, $r_2 \leq 0$ ve $r_3 \leq 0$' olasını verir, yani (3.32) eşitliği elde edilir. (3.31)' nin sağ tarafının sıfıra eşitlenmesi ise $s_1 \leq 0$ veya $s_2 \leq 0$ olduğunu verir. (3.7) ifadesinden $s_1 \leq 0$ işitsizliğinin (3.9) a denk olduğu görülür. Her bir parçanın negatif olmaması halinde (3.31) eşitliğindeki s_2 sayısı üç parçanın toplamı olarak

$$s_2 = \left(r\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} - r(A) - r(D) \right) + \left(r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} - r(A) - r(D) \right) + \left(r(M) + r(D) - r[C, D] - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \right.$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu durumda $s_2 = 0$ alınması (3.33) eşitliğini verir.

Teorem 3.2.2 M ve $N(A^{(1,3)}, S^{(1,3)})$ matrisleri sırasıyla (3.1) ve (3.4) te verildiği gibi olsun. B takdirde

$$r_1 = r[A, B] + r[C, D] - r\begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$r_2 = r[A, B] + r[C, D] - r(A) - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix},$$

$$r_3 = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r(A).$$

olmak üzere

$$\min_{A^{(1,3)}, M^{(1,3)}} = r\left[M^{(1,3)} - N\left(A^{(1,3)},\ S^{(1,3)}\right)\right] = \max\{r_1, r_2\}, \tag{3.37}$$

$$\max_{A^{(1,3)}} \min_{M^{(1,3)}} r\left[M^{(1,3)} - N\left(A^{(1,3)},\ S^{(1,3)}\right)\right] = r_1 + r_3, \tag{3.38}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle

(a) $N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right)$ matrisi M nin bir {1,3}-inversi olacak şekilde $A^{(1,3)}$ ve $S^{(1,3)}$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}\begin{bmatrix} A^* & A \\ B^* & A \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} C^* \\ D^* \end{bmatrix} = \{0\} \text{ ve } r[C, D] \leq r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

olmasıdır.

(b) $\left\{N\left(A^{(1,3)},\ S^{(1,3)}\right)\right\} \subseteq \{M^{(1,3)}\}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A),\ \mathcal{R}\begin{bmatrix} A^* & A \\ B^* & A \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} C^* \\ D^* \end{bmatrix} = \{0\} \text{ ve } \mathcal{R}(CF_A) \subseteq \mathcal{R}(DF_B)$$

olmasıdır.

İspat Aşağıdaki eşitlik [16]'da gösterilmiştir.

$$\min_{A^{(1,3)}} r\left[M^{(1,3)} - N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right)\right] = r[A,B] + r[C,D] - r(A) - r(D - CA^{(1,3)}B) \tag{3.39}$$

(3.21) ve (3.22) ifadeleri (3.39) eşitliğinde yerine yazılırsa ile (3.37) ve (3.38) ifadeleri elde edilir. (3.37) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşitlendiğinde

$N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right) \in \{M^{(1,3)}\}$ olacak şekilde $A^{(1,3)}$ ve $S^{(1,3)}$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşulun

$$r[A,B] + r[C,D] = r\begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad r[A,B] + r[C,D] \leq r(A) + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

eşitliğinin elde edilmesi olduğu görülür. Öte yandan

$$r[A,B] + r[C,D] \geq r(A) + r[C,D] \geq r\begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix}$$

olduğunu belirtelim. Bu durumda (3.40) ifadesindeki birinci eşitlik

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } r\begin{bmatrix} A^*A & A^*B \\ C & D \end{bmatrix} = r[AA^*, A^*B] + r[C,D]$$

olmasına ve ikinci eşitsizlik ise

$$r[C,D] \leq r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$$

olmasına denk olacaktır. (3.37) eşitliğinin sağ tarafını sıfıra eşitlersek ve bu taraftaki iki terinin negatif olmadığını da göz önünde bulundurursak (b)'yi elde ederiz. Aşağıdaki teorem benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.3 M ve $N(A^{(1,4)}, S^{(1,4)})$ matrisleri (3.1) ve (3.4)'te verildiği gibi olsun. Bu durumda

$$r_1 = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} AA^* & B \\ CA^* & D \end{bmatrix},$$

$$r_2 = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r(A) - r[C, D],$$

$$r_3 = r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} - r[C, D] - r(A)$$

olmak üzere

$$\min_{A^{(1,4)}, M^{(1,4)}} r[M^{(1,4)} - N(A^{(1,4)}, \quad S^{(1,4)})] = \max\{r_1, r_2\},$$

$$\max_{A^{(1,4)}} \min_{M^{(1,4)}} r[M^{(1,4)} - N(A^{(1,4)}, \quad S^{(1,4)})] = r_1 + r_3$$

eşitlikleri gerçeklenir. Böylece

(a) $N(A^{(1,4)}, S^{(1,4)})$ matrisi M matrisinin bir {1,4}-inversi olacak şekilde $A^{(1,4)}$ ve $S^{(1,4)}$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*), \ \mathcal{R}\begin{bmatrix} AA^* \\ CA^* \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \{0\} \ \text{ ve } \ r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \leq r[C, D]$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

(b) $\{N(A^{(1,4)}, S^{(1,4)})\} \subseteq \{M^{(1,4)}\}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*),\ \mathcal{R}\begin{bmatrix} AA^* \\ CA^* \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \{0\} \text{ ve } \mathcal{R}(B^*E_A) \subseteq \mathcal{R}(D^*E_C)$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

(3.4) ifadesinin Moore-Penrose inverse denk olan özel bir durumu $S = D - CA^{\dagger}B$ olmak üzere

$$N(A^{\dagger},\ S^{\dagger}) = \begin{bmatrix} A^{\dagger} + A^{\dagger}BS^{\dagger}CA^{\dagger} & -A^{\dagger}BS^{\dagger} \\ -S^{\dagger}CA^{\dagger} & S^{\dagger} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

şeklinde ifade edilir.

$N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ ve M matrisinin $\{i, \dots, j\}$-inversi arasındaki ilişkiler aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.2.4 M ve $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisleri sırasıyla (3.1) ve (3.41)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda

$$\min_{M^{(1)}} r[M^{(1)} - N(A^{\dagger}, S^{\dagger})] = \min_{M^{(1,2)}} r[M^{(1,2)} - N(A^{\dagger}, S^{\dagger})] = r(M) - r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisi M matrisinin bir {1}-inversidir.

(b) $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisi M matrisinin bir {1,2}- inversidir.

(c) $r(M) = r(A) + r(D - CA^{\dagger})$

(d) $r(M) = r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix}$

(e) $\mathcal{R}\begin{bmatrix} AA^* & B \\ CA^* & D \end{bmatrix} = \mathcal{R}(M)$ ve $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} A^*A & C^* \\ B^*A & D^* \end{bmatrix} = \mathcal{R}(M^*)$.

İspat: (3.26) ve (3.27) ifadelerinden

$$\min_{M^{(1)}} r\left[M^{(1)} - N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})\right] - r[M - MN(A^{\dagger},\ S^{\dagger})M], \tag{3.43}$$

$$\min_{M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})\right] = \max\{r[M - MN(A^{\dagger},\ S^{\dagger})M], r[N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})] + r(M) - r[MN(A^{\dagger},\ S^{\dagger})] - r[N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})M]\} \tag{3.44}$$

sonucu elde edilir. Ayrıca $S = D - CA^{\dagger}B$ olmak üzere

$$r[MN(A^{\dagger}, S^{\dagger})] = r[N(A^{\dagger}, S^{\dagger})M] = r(A) + r(S)$$

ve

$$r[M - MN(A^{\dagger}, S^{\dagger})M] = r(M) - r(A) - r(S)$$

olduğu kolayca doğrulanır. Bu iki eşitlik ve (3.25) ifadesi (3.43) ve (3.44) deki yerlerine yazılırsa (3.42) ifadesi elde edilmiş olur. Öte yandan

$$r(PAQ) = r(A) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A^{*}P^{*}) = \mathcal{R}(A^{*}) \text{ ve } \mathcal{R}(AQ) = \mathcal{R}(A)$$

olduğu göz önünde bulundurulursa bu sonucun (d)'ye uygulanması bize (d) ve (e) nin birbirine denk olacağını gösterir.

Teorem 3.2.5 M ve $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisleri sırasıyla (3.1) ve (3.41)'de verildiği gibi olsun. Bu durumda

$$\min_{M^{(1,3)}} r\left[M^{(1,3)} - N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})\right] = r[A, B] + r[C, D] - r\begin{bmatrix} A^{*}AA^{*} & A^{*}B \\ CA^{*} & D \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

eşitliği gerçeklenir. Böylece aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisi M matrisinin bir {1.3}-inversidir.

(b) $r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} = r[A, B] + r[C, D]$.

(c) $r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} = r[A^*AA^*, A^*B] + r[CA^*, D]$, $r[C, D] = r[CA^*, D]$ ve

$r[A, B] = r[A^*AA^*, A^*B]$

(d) $\mathcal{R}\begin{bmatrix} A^*AA^* \\ BA^* \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} A^*C \\ D^* \end{bmatrix} = \{0\}, \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}[C, D] = \mathcal{R}[CA^*, D]\}$.

İspat: (3.28) eşitliğinden

$$\min_{M^{(1,3)}} r[M^{(1,3)} - N(A^\dagger, S^\dagger)] - r[M^*MN(A^\dagger, S^\dagger) - M^*] \tag{3.46}$$

sonucu elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$MN(A^\dagger, S^\dagger) = \begin{bmatrix} AA^\dagger & E_ABS^\dagger \\ CA^\dagger & SS^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^\dagger & I_t \end{bmatrix}$$

$$M^*MN(A^\dagger, S^\dagger) - M^* = -M^*[I_{m+t} - MN(A^\dagger, S^\dagger)]$$

$$= -M^*\begin{bmatrix} E_A + E_ABS^\dagger CA^\dagger & -E_ABS^\dagger \\ -E_SCA^\dagger & E_S \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca doğrulanır.

Hatırlanacağı gibi elementer blok matris işlemleri bir matrisin rankını değiştirmez. Bu nedenle elementer blok matris işlemleri yardımıyla

$$r[M^*MN(A^\dagger, S^\dagger) - M^*] = \mathrm{r}\left(M^*\begin{bmatrix} E_A + E_ABS^\dagger CA^\dagger & -E_ABS^\dagger \\ -E_SCA^\dagger & E_S \end{bmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{r}\left(M^*\begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_S \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} E_AA & E_AB \\ E_SC & E_SD \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} A & 0 & A & B \\ 0 & S & C & D \end{bmatrix} - r(A) - r(S) \quad ((3.13)'\text{ten})$$

$$= r\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & D & C & 0 \end{bmatrix} - r(A) - r(S)$$

$$= r[A, D] + r[C, D] - r(A) - r(D - CA^{\dagger}D)$$

eşitlikleri türetilebilir. Böylece (3.25) yardımıyla (3.45) eşitliği edilebilir. Ayrıca

$$r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} \leq r[A^*AA^*, A^*B] + r[CD^*, D] \leq r[A, B] + r[C, D]$$

olduğunu belirtelim. Bu eşitsizliğinin (b)'ye uygulanması sonucu (b) ve (c)' nin denk olduğu görülür. (c) ve (d)'nin denkliği ise açıktır.

Aşağıdaki sonuç benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.6 M ve $N(A^{\dagger}, S^{\dagger})$ matrisleri sırasıyla (3.1) ve (3.41) ifadelerinde verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$\min_{M^{(1,4)}} r\left[M^{(1,4)} - N(A^{\dagger}, S^{\dagger})\right] = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $N(A^{\dagger}, S^{\dagger})$ matrisi M matrisinin bir {1.4}-inversidir.

(b) $r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$.

(c) $r\begin{bmatrix} A^*AA^* & A^*B \\ CA^* & D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A^*AA^* \\ CA^* \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} A^*B \\ D \end{bmatrix}$, $r\begin{bmatrix} A^*AA^* \\ CA^* \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ ve $r\begin{bmatrix} A^*B \\ D \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$

(d) $\mathcal{R}\begin{bmatrix} A^*AA^* \\ CA^* \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} A^*B \\ D \end{bmatrix} = \{0\}$, $\mathcal{R}[B^*, A, D^*] = \mathcal{R}[B^*, D^*]$ ve $\mathcal{R}(C^*) \subseteq \mathcal{R}(A^*)$.

3.3 Parçalı Hermitian Matrislerinin Genelleştirilmiş İnversleri

M matrisi bir Hermitian matrisi olsun. $A = A^* \epsilon C^{m \times m}$, $B \epsilon C^{m \times n}$ ve $D = D^* \epsilon C^{n \times n}$ olmak üzere M matrisinin bir parçalanışı

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

şeklinde verilsin. $S = D - B^*A^{(i,\dots,j)}B$ olmak üzere halinde M matrisinden türetilen Banachiewicz-Schur formu

$$N\left(A^{(i,\dots,j)}, S^{(i,\dots,j)}\right) = \begin{bmatrix} A^{(i,\dots,j)} + A^{(i,\dots,j)}BS^{(i,\dots,j)}B^*A^{(i,\dots,j)} & -A^{(i,\dots,j)}BS^{(i,\dots,j)} \\ -S^{(i,\dots,j)}B^*A^{(i,\dots,j)} & S^{(i,\dots,j)} \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

şeklindedir. Kısım 3.2 de elde edilen sonuçların (3.47) ve (3.48)'ye uygulanmasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.3.1: M ve $N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)$ matrisleri sırasıyla (3.47) ve (3.48)'de verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$\min_{A^{(1)}, M^{(1)}} r\left[M^{(1)} - N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)\right] = \max\{r(M) - r(A) - r[B^*, D], 0\}$$

$$\max_{A^{(1)}} \min_{M^{(1)}} r\left[M^{(1)} - N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)\right] = 2r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & B^* & D \end{bmatrix} - 2r(A) - 2r[B^*, D]$$

eşitlikleri gerçeklenir. Bundan dolayı

(a) $N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)$ matrisi M matrisinin bir $\{1\}$-inversi olacak şekilde $A^{(1)}$ ve $S^{(1)}$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$r(M) \leq \min\{2r(A) + r(D),\ r(A) + r[B^*, D]\} \tag{3.49}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(b) $\{N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)\} \subseteq \{M^{(1)}\}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & B^* & D \end{bmatrix} = r(A) + r[B^*, D]$$

eşitliğinin doğru olmasıdır.

İspat: $C = B^*$ alınarak (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 3.3.2: $S = D - B^*A^{(1,2)}B$ olmak üzere M ve $N(A^{(1,2)}, S^{(1,2)})$ matrisleri (3.47) ve (3.48)'de verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$r_1 = r(M) - 2r(A) - r(D),$$

$$r_2 = r(M) - r(A) - r[B^*, D],$$

$$s_1 = 2r\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & B^* & D \end{bmatrix} - 2r[B^*, D] - 2r(A),$$

$$s_2 = 2r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} + r(M) - 2r(A) - r(D) - 2r[B^*, D].$$

olmak üzere

$$\min_{A^{(1,2)} M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right] = \max\{r_1, r_2, 0\}$$

$$\max_{A^{(1,2)}} \min_{M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right] = \min\{s_1, s_2\}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Bu nedenle

(a) $N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)$ matrisi M matrisinin bir {1,2}-inversi olacak şekilde $A^{(1,2)}$ ve $S^{(1,2)}$ matrislerinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$r(M) \leq \min\{2r(A) + r(D), r(A) + r[B^*, D]\} \tag{3.50}$$

olmasıdır.

(b) $\left\{N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\right\} \subseteq \{M^{(1,2)}\}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$r(M) = r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r(D) \text{ ve } r\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = r(A) + r(D)$$

olmasıdır.

İspat: $C = B^*$alınarak Teorem 3.2.1 den istenilen sonuca ulaşılabilir.

Teorem 3.3.3: M ve $N(A^{(1,3)}, S^{(1,3)})$ matrisleri (3.47) ve (3.48)'de verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$r_1 = r[A, B] + r[B^*, D] - r\begin{bmatrix} A^2 & AB \\ A^* & D \end{bmatrix}$$

$$r_2 = r[A, B] - r(A),$$

$$r_3 = r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ B^* & D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r(A)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

$$\min_{A^{(1,3)}, M^{(1,3)}} r\left[M^{(1,3)} - N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right)\right] = \max\{r_1, r_2\}$$

$$\max_{A^{(1,3)}} \min_{M^{(1,3)}} r\left[M^{(1,3)} - N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right)\right] = r_1 + r_3$$

Bu nedenle

(a) $N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right)$ matrisi M matrisinin bir {1,3}-inversi olacak şekilde $A^{(1,3)}$ ve $S^{(1,3)}$ matrislerinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } \mathcal{R}\begin{bmatrix} A^2 \\ B^*A \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \{0\}$$

olmasıdır.

(b) $\left\{N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right)\right\} \subseteq \{M^{(1,3)}\}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ ve } \mathcal{R}\begin{bmatrix} A^2 \\ B^*A \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \{0\}$$

olmasıdır.

İspat: $C = B^*$ alınarak Teorem 3.2.2' den istenilen sonuca ulaşılabilir.

(3.48) ifadesinin Moore-Penrose inverse karşılık gelen özel durumu $S = D - B^* A^\dagger B$ olmak üzere

$$N(A^\dagger,\ S^\dagger) = \begin{bmatrix} A^\dagger + A^\dagger B S^\dagger B^* A^\dagger & -A^\dagger B S^\dagger \\ -S^\dagger B^* A^\dagger & S^\dagger \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

dir. Bu durumda $N(A^\dagger,\ S^\dagger)$ matrisi ile M matrisinin {i,…,j}-inversi arsındaki ilişkiler aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.3.4: M ve $N(A^\dagger,\ S^\dagger)$ matrisleri sırasıyla (3.47) ve (3.51)' de verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$\min_{M^{(1)}} r\left[M^{(1)} - N(A^\dagger, S^\dagger)\right] = \min_{M^{(1,2)}} r\left[M^{(1,2)} - N(A^\dagger, S^\dagger)\right] = r(M) - r\begin{bmatrix} A^3 & AB \\ B^* & D \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $N(A^\dagger,\ S^\dagger)$ matrisi M matrisinin bir {1}-inversidir.

(b) $N(A^\dagger,\ S^\dagger)$ matrisi M matrisinin bir{1,2}-inversidir.

(c) $r(M) = r(A) + r(D - B^* A^\dagger B)$ dir.

(d) $r(M) = r\begin{bmatrix} A^3 & AB \\ B^* A & D \end{bmatrix}$ dir.

(e) $\mathcal{R}\begin{bmatrix} A^2 & B \\ B^* A & D \end{bmatrix} = \mathcal{R}(M)$ dir.

İspat: $C = B^*$ alınarak Teorem 3.2.4 ten sonuca ulaşabiliriz.

Teorem 3.3.5: M ve $N(A^\dagger,\ S^\dagger)$ matrisleri sırasıyla (3.47) ve (3.51) de verildiği gibi olsun. Bu takdirde

$$\min_{M^{(1,3)}} r[M^{(1,3)} - N(A^{\dagger}, S^{\dagger})] = \min_{M^{(1,4)}} r[M^{(1,4)} - N(A^{\dagger}, S^{\dagger})]$$

$$= r\begin{bmatrix} A \\ B^* \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} A^3 & AB \\ B^*A & D \end{bmatrix}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu nedenle aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisi M matrisinin bir$\{1,3\}$-inversidir.

(b) $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisi M matrisinin bir$\{1,4\}$-inversidir.

(c) $r\begin{bmatrix} A^3 & AB \\ B^*A & D \end{bmatrix} \cap r\begin{bmatrix} A \\ B^* \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$ dir.

(d) $\mathcal{R}\begin{bmatrix} A^3 \\ B^*A \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} AB \\ D \end{bmatrix} = \{0\},\ \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ ve $\mathcal{R}[B^*, D] = \mathcal{R}[B^*A, D]$ dir.

İspat: $C = B^*$ alınarak Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.2.6 teoremlerinden istenen sonuç elde edilir.

(3.47)'deki Hermitian matrisin nonnegatif definit olduğunu farz edelim. Yani $M = UU^*$ olacak şekilde birr U matrisi mevcut olsun. Bu durumda $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(B^*) \subseteq \mathcal{R}(D)$ olup herhangi bir $A^{(1)}$ inversi için $S = D - B^*A^{(1)}B = D - B^*A^{\dagger}B$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.6: M ve $N(A^{\dagger},\ S^{\dagger})$ matrisleri sırasıyla (3.47) ve (3.48) de verildiği gibi olsun. M nin nonnegatif definit olduğunu farz edelim. Ayrıca $S = D - B^*A^{\dagger}B$ olsun. Bu takdirde

(a) $\{N(A^{(1)},\ S^{(1)})\} \subseteq \{M^{(1)}\}$ kapsaması daima doğrudur.

(b) $\{N(A^{(1,2)},\ S^{(1,2)})\} \subseteq \{M^{(1,2)}\}$ kapsaması daima doğrudur.

(c) Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i)$\{N(A^{(1,3)}, S^{(1,3)})\} \subseteq \{M^{(1,3)}\}$ kapsaması doğrudur.

(ii) $\{N(A^{(1,4)}, S^{(1,4)})\} \subseteq \{M^{(1,4)}\}$ kapsaması doğrudur.

(iii)$M^{\dagger} = N(A^{\dagger}, S^{\dagger})$ dir.

(iv) $\mathcal{R}\begin{bmatrix} A \\ B^* \end{bmatrix} \cap \mathcal{R}\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \{0\}$ dir.

Bir A kare matrisinin herhangi bir {i,…,j}-inversine A'nın Hermitian {i,…,j}-inversi denir ve eğer bu matris Hermitian matris ise $A_h^{(i,\dots,j)}$ ile gösterilir. Herhangi bir A Hermitian matrisinin verilen herhangi bir {i,…,j} kümesi için daima bir Hermitian{i,…,j}-inversi olduğu kolayca gösterilebilir. (3.47)' deki M Hermitian matrisinden türetilen Hermitian Banachiewicz-Schur formu, $S = D - B^* A_h^{(i,\dots,j)} B$ olmak üzere,

$$N\left(A_h^{(i,\dots,j)}, S_h^{(i,\dots,j)}\right) = \begin{bmatrix} A_h^{(i,\dots,j)} + A_h^{(i,\dots,j)} B S_h^{(i,\dots,j)} B^* A_h^{(i,\dots,j)} & -A_h^{(i,\dots,j)} B S_h^{(i,\dots,j)} \\ -S_h^{(i,\dots,j)} B^* A_h^{(i,\dots,j)} & S_h^{(i,\dots,j)} \end{bmatrix}$$

(3.52)

olarak tanımlanır.

3.4 Sınırlı Hermitian Matrisinin Genelleştirilmiş İnversi

(3.47) ifadesinde $D = 0$ alındığında $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ nonnegatif definit ve $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

elde edilir. Bu matris matris teorisinde ve özellikle regresyon analizindeki pek çok problemde geniş bir şekilde ortaya çıkar. $S = -B^{*}A_{n}^{(i,\ldots,j)}B$ olmak üzere M ’den türetilen Banachiewicz-Schur formu

$$N\left(A^{(i,\ldots,j)}, S^{(i,\ldots,j)}\right) = \begin{bmatrix} A^{(i,\ldots,j)} + A^{(i,\ldots,j)}BS^{(i,\ldots,j)}B^{*}A^{(i,\ldots,j)} & -A^{(i,\ldots,j)}BS^{(i,\ldots,j)} \\ -S^{(i,\ldots,j)}B^{*}A^{(i,\ldots,j)} & S^{(i,\ldots,j)} \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

biçiminde olacaktır.

Bu bölümün 2. Kısmında verilen sonuçların (3.53) ve (3.54) matrislerine uygulanması bize aşağıdaki sonuçları verir.

Teorem 3.4.1: M ve $N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)$ matrisleri (3.53) ve (3.54)’de verildiği gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right) \in \{M^{(1)}\}$ olacak şekilde $A^{(1)}$ ve $S^{(1)}$ matrisleri mevcuttur.

(b) $\{N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)\} \subseteq \{M^{(1)}\}$ kapsaması sağlanır.

(c) $N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right) \in \{M^{(1,3)}\}$ olacak şekilde $A^{(1,3)}$ ve $S^{(1,3)}$ matrisleri mevcuttur.

(d) $\{N\left(A^{(1,3)}, S^{(1,3)}\right)\} \subseteq \{M^{(1,3)}\}$ kapsaması sağlanır.

(e) $N\left(A^{(1,4)}, S^{(1,4)}\right) \in \{M^{(1,4)}\}$ olacak şekilde $A^{(1,4)}$ ve $S^{(1,4)}$ matrisleri mevcuttur.

(f) $\{N\left(A^{(1,4)}, S^{(1,4)}\right)\} \subseteq \{M^{(1,4)}\}$ kapsaması sağlanır.

(g) $M^{\dagger} = N(A^{\dagger}, S^{\dagger})$ dir.

(h) $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ dir.

Teorem 3.4.2: M ve $N\left(A^{(1)}, S^{(1)}\right)$ matrisleri (3.53) ve (3.54)’de verildiği şekilde olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right) \in \{M^{(1,2)}\}$ olacak şekilde $A^{(1,2)}$ ve $S^{(1,2)}$ matrisleri mevcuttur.

(b) $\{N\left(A^{(1,2)}, S^{(1,2)}\right)\} \subseteq \{M^{(1,2)}\}$ kapsaması sağlanır.

(c) $r[A, B] \leq 2r(A) - r(B)$ veya $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A)$ dir.

Eğer (3.1)'deki D matrisi kare matris ve nonsingüler ise bu durumda (3.1) de verilen M matrisi

$$M = \begin{bmatrix} I_m & BD^{-1} \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ D^{-1}C & I_k \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

şeklinde de parçalanabilir. Eğer (3.1)'de verilen M ve D matrislerinin ikisi de nonsingüler ise bu takdirde $T = A - BD^{-1}C$ Schur Komplementi de nonsingüler olup bu durumda da M matrisinin inversi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & -T^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CT^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CT^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

olarak yazılabilir. Simetriden dolayı, M matrisinden türetilen başka bir Banachiewicz-Schur formu $T = A - BD^{(i,\ldots,j)}C$ olmak üzere

$$K\left(D^{(i,\ldots,j)}, T^{(i,\ldots,j)}\right) = \begin{bmatrix} T^{(i,\ldots,j)} & -T^{(i,\ldots,j)}BD^{(i,\ldots,j)} \\ -D^{(i,\ldots,j)}CT^{(i,\ldots,j)} & D^{(i,\ldots,j)} + D^{(i,\ldots,j)}CT^{(i,\ldots,j)}BD^{(i,\ldots,j)} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

olarak verilir.

(3.3) ve (3.56) ifadeleri özdeş olmalarına rağmen (3.4) ve (3.57) aynı olmak zorunda değildir. Önceki kısımlardaki sonuçları (3.57) uygulamak suretiyle M ve $K\left(D^{(i,\ldots,j)}, T^{(i,\ldots,j)}\right)$ arasındaki ilişkiler hakkında değişik sonuçlar çıkarılabilir. Ayrıca

$$N\left(A^{(i,\ldots,l)},S^{(i,\ldots,l)}\right)=K\left(D^{(i,\ldots,l)},T^{(i,\ldots,l)}\right) \qquad (3.58)$$

eşitliğinin sağlanması için veya bunların alt matrisleriyle ilgili eğitliklerin sağlanması için gerek ve yeter koşulların verilmesi söz konusu olabilir. Parçalı matrisler ve bunlardan türetilen Banachiewicz-Schur formları hakkında yukarıda verilen tüm sonuçlar blok matrisler ve onların genelleştirilmiş inversleri ile ilgili değişik problemlerin incelenmesinde de kullanılabilir.

4. PARÇALI MATRİSLERİN MOORE–PENROSE İNVERSLERİ İÇİN ÖZEL FORMLAR

4.1. Giriş

Daha önceki kısımlarda belirtildiği gibi $\mathbb{C}^{mxn}$ Kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanan mxn tipindeki tüm matrislerin kümesini göstersin. A^*, $r(A)$, $\mathcal{R}(A)$ sembolleri sırasıyla $A\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin eşlenik transpozunu, rankını ve sütun uzayını göstersin.

$A\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin $A^\dagger$ ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıda dört matris eşitliğini sağlayan $A^\dagger\ \epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ matrisidir.

(1) $AA^\dagger A = A$,

(2) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$,

(3) $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$,

(4) $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$.

$A^\dagger$ matrisinin tek olduğu ve A matrisinin satır (sütun) ranklı olması durumunda $A^\dagger$ matrisinin formu ile $A^\dagger$ inversinin çeşitli özellikleri 2. Bölüm de detaylı bir şekilde tartışılmıştı. Öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1.1: Bir $G\epsilon\mathbb{C}^{nxm}$ matrisinin $A\epsilon\mathbb{C}^{mxn}$ matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş inversi olabilmesi için gerek ve yeter şart GA nın $\mathcal{R}(A^*)$ üzerine bir dik izdüşüm olması ve $\mathcal{R}(G^*) \subseteq \mathcal{R}(A)$ olmasıdır.

İspat: $\mathcal{R}(A^*)$ üzerine bir dik izdüşüm $A^\dagger A$ olarak ifade edilebildiğinden Lemma 4.1.1 in ispatı

$$G = A^{\dagger} \Leftrightarrow GA = A^{\dagger}A \text{ ve bir } L \epsilon \mathbb{C}^{nxn} \text{ için } G = LA^{*} \tag{4.1}$$

olduğunun ispatına indirgenmiş olur. " $\Rightarrow$ " yönündeki ispat $L = A^{\dagger}(A^{\dagger})^{*}$ alınarak kolayca görülür. " $\Leftarrow$ " yönündeki ispat ise (4.1) in sağ tarafındaki iki şartın $LA^{*}A = A^{\dagger}A$ eşitliğine yol açmasına dayanır.

Bu bölümde ise $A \epsilon \mathbb{C}^{mxn}$ biçiminde bir matris alıp, bu matrisi bloklara parçalayarak Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversinin hesaplanmasında kullanılan bazı metotlar verilecektir.

4.2 Satır Blok Matrislerin Moore–Penrose İnversleri

Genelleştirilmiş inversler teorisindeki önemli çalışmaların başında blok parçalı matrislerin genelleştirilmiş inversleri ve bunların özellikleri gelmektedir. En basit blok parçalı matris satır blok parçalı matrislerdir. Bu kısımda $A_1 \epsilon \mathbb{C}^{mxn_1}$ ve $A_2 \epsilon \mathbb{C}^{mxn_2}$, $n = n_2 + n_2$, olmak üzere

$$A = (A_1 \vdots A_2) \epsilon \mathbb{C}^{mxn} \tag{4.2}$$

biçiminde satır blok parçalı matrisini ele alacağız ve bu matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş inversi için çeşitli formlar geliştireceğiz.

Teorem 4.2.1: $A \epsilon \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun ve $P_i \epsilon \mathbb{C}^{mxm}$ ve $Q_i \epsilon \mathbb{C}^{mxm}$ matrisleri $P_i = A_i A_i^{\dagger}$ ve $Q_i = I_m - P_i$, $i = 1,2$ olacak şekilde belirlenmiş dik izdüşümler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$,

(b) $\mathcal{R}(A_1^{*}) = \mathcal{R}(A_1^{*}Q_2)$,

(c) $\mathcal{R}(A_2^{*}) = \mathcal{R}(A_2^{*}Q_1)$,

(d) $\mathcal{R}(A_1^{*}P_2) \subseteq \mathcal{R}(A_1^{*}Q_2)$,

(e) $\mathcal{R}(A_2^*P_1) \subseteq \mathcal{R}(A_2^*Q_1)$.

İspat: $\mathcal{R}(A_1^*Q_2) \subseteq \mathcal{R}(A_1^*)$ ve $\mathcal{R}(A_2^*Q_1) \subseteq \mathcal{R}(A_2^*)$ aşikar olan içerme bağıntılarından (b) ve (c) de verilen koşullar sırasıyla $r(Q_2A_1) = r(A_1)$ ve $r(Q_1A_2) = r(A_2)$ eşitliklerine karşılık gelecektir.

$$r((A_1 \vdots A_2)) = r(A_1) + r(Q_1A_2) = r(A_2) + r(Q_2A_1)$$

eşitliklerini

$$r((A_1 \vdots A_2)) = r(A_1) + r(A_2) - boy[\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2)]$$

ile birleştirirsek $(a) \Leftrightarrow (b)$ ve $(c) \Leftrightarrow (d)$ olduğu görülür. Ayrıca $(b) \Rightarrow (d)$ ve $(c) \Rightarrow (d)$ olduğu açıkça görülür. Öte yandan (d) ve (e) de verilen koşullar sırasıyla

$$\mathcal{R}(A_1^*((P_2 \vdots Q_2)) \subseteq \mathcal{R}(A_1^*Q_2) \text{ ve } \mathcal{R}(A_2^*((P_1 \vdots Q_1)) \subseteq \mathcal{R}(A_2^*Q_1) \qquad (4.3)$$

ifadelerine denktir. Fakat $(P_t \vdots Q_t)(P_t \vdots Q_t)^* = P_t + Q_t = I_m$, $t = 1,2$ olduğundan ve uygun boyutlu matrisler için $\mathcal{R}(KLL^*) = \mathcal{R}(KL)$ olacağından (4.3) deki içermeler (b) ve (c) deki şartlarla çakışacaktır. Sonuç olarak $(b) \Leftrightarrow (d)$ ve $(c) \Leftrightarrow (e)$ olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2: $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun ve $P_t \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $Q_t \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisleri $P_t = A_tA_t^\dagger$ ve $Q_t = I_m - P_t$, $t = 1,2$ olacak şekilde belirlenmiş dik izdüşümler olsun. Ayrıca

$$G = \begin{bmatrix} (Q_2A_1)^\dagger \\ (Q_1A_2)^\dagger \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $G = A^\dagger$,

(b) $G = A^{(1)}$

(c) $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$.

İspat: Genelleştirilmiş invers ve Moore-Penrose invers tanımlarından $(a) \Longrightarrow (b)$ olduğu açıktır. Ayrıca (4.4) te verilen G matrisi için $AGA = A$ eşitliğinden

$$(A_1(Q_2A_1)^{\dagger} + A_2(Q_1A_2)^{\dagger})A_i = A_i \text{ , } i = 1{,}2 \qquad (4.5)$$

elde edilir.

$$(Q_2A_1)^{\dagger} = (Q_2A_1)^{\dagger}Q_2 \text{ ve } (Q_1A_2)^{\dagger} = (Q_1A_2)^{\dagger})Q_1 \qquad (4.6)$$

olduğundan $AGA = A$ eşitliği

$$(A_1(Q_2A_1)^{\dagger}Q_2A_1 = A_1 \text{ ve } A_2(Q_1A_2)^{\dagger})Q_1A_2 = A_2 \qquad (4.7)$$

olduğunu gösterir. Açıkça görülür ki bunlar Teorem 4.1.1 in (b) ve (c) ifadeleriyle aynıdır ve böylece Teoremin $(b) \Longrightarrow (c)$ kısmı sağlanmış olur. (4.6) dan G matrisi için GA çarpımının

$$GA = \begin{bmatrix} (Q_2A_1)^{\dagger}Q_2A_1 & 0 \\ 0 & (Q_1A_2)^{\dagger}Q_1A_2 \end{bmatrix}$$

formunda yazılabileceği görülür. Bu nedenle $(GA)^2 = GA = (GA)^*$ ve $GAA^* = A^*$ elde edilir. Bu da gösterir ki GA matrisi $\mathcal{R}(A^*)$ üzerinde dik izdüşümdür, yani $GA = A^{\dagger}A$ dır. Öte yandan her $K \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrisi için $(K^*K^{\dagger})K^* = K^{\dagger}$ olduğundan,

$$L_{11} = (A_1^*Q_2A_1)^{\dagger}, \qquad L_{12} = -(A_1^*Q_2A_1)^{\dagger}A_1^*(A_2^{\dagger})^*$$

$$L_{21} = -(A_2^*Q_1A_2)^{\dagger}A_2^*(A_1^{\dagger})^*, \; L_{22} = (A_2^*Q_1A_2)^{\dagger}$$

olmak üzere L matrisini

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

şeklinde alalım. Bu durumda P_1 ve P_2 matrisleri daha önce verildiği gibi olmak üzere

$$LA^* = \begin{bmatrix} (A_1^*Q_2A_1)^\dagger A_1^* - (A_1^*Q_2A_1)^\dagger A_1^*P_2 \\ (A_2^*Q_1A_2)^\dagger A_2^*P_1 + (A_2^*Q_1A_2)^\dagger A_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1^*Q_2A_1)^\dagger A_1^*Q_2 \\ (A_2^*Q_1A_2)^\dagger A_2^*Q_1 \end{bmatrix} = G$$

elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{R}(G^*) \subseteq \mathcal{R}(A)$ elde edilir. Buradan da $GA = A^\dagger A$ eşitliği dikkate alınırsa (c) $\Rightarrow$ (a) olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.3: $A \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun ve $P_i \in \mathbb{C}^{mxm}$ ve $Q_i \in \mathbb{C}^{mxm}$ matrisleri $P_i = A_iA_i^\dagger$ ve $Q_i = I_m - P_i$, $i = 1{,}2$ olacak şekilde belirlenmiş dik izdüşümler olsun. Ayrıca

$$H = \begin{bmatrix} A_1^\dagger - A_1^\dagger A_2(Q_1A_2)^\dagger \\ A_2^\dagger - A_2^\dagger A_1(Q_2A_1)^\dagger \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $H = A^\dagger$,

(b) $H = A^{(1)}$,

(c) $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$.

İspat: Genelleştirilmiş invers ve Moore-Penrose invers tanımlarından (a) $\Rightarrow$ (b) olduğu açıktır. Ayrıca (4.9) te verilen H matrisi için $AHA = A$ eşitliğinden P_1 ve P_2 yukarıda tanımlandığı şekilde olmak üzere

$$(P_1 - P_1A_2(Q_1A_2)^\dagger + P_2 - P_2A_1(Q_2A_1)^\dagger)A_i = A_i \, , i = 1{,}2 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.6) eşitlikleri göz önüne alındığında (4.10) eşitliğindeki iki şart

$$P_1A_2(Q_1A_2)^\dagger Q_1A_2 = P_1A_2 \;\; \text{ve} \;\; P_2A_1(Q_2A_1)^\dagger Q_2A_1 = P_2A_1 \tag{4.11}$$

olduğunu gösterir. Açıkça görülür ki bunlar Teorem 4.1.1 in (d) ve (e) ifadelerindeki içerme bağıntıları olarak yeniden ifade edilebilir ve böylece Teoremin (b) $\Rightarrow$ (c) kısmı sağlanmış olur. Sonuç olarak Teorem 4.1.1 deki (a) $\Leftrightarrow$ (d) ve (a) $\Leftrightarrow$ (e) durumları dikkate alınarak $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$ ise

$$A_2^{\dagger}A_1(Q_2A_1)^{\dagger}Q_2A_1 - A_2^{\dagger}A_1 \text{ ve } A_1^{\dagger}A_2(Q_1A_2)^{\dagger}Q_1A_2 - A_1^{\dagger}A_2 \qquad (4.12)$$

olduğu görülür. Buradan (4.6) ve (4.10) ifadeleri birlikte düşünülerek HA matrisi

$$HA = \begin{bmatrix} A_1^{\dagger}A_1 & 0 \\ 0 & A_2^{\dagger}A_2 \end{bmatrix}$$

formunda yazılabileceği görülür. Öte yandan $(HA)^2 = HA = (HA)^*$ ve $HAA^* = A^*$ elde edilir. Bu da gösterir ki HA matrisi $\mathcal{R}(A^*)$ üzerinde dik izdüşümdür, yani $HA = A^{\dagger}A$ dır. Bunun sonucu olarak (4.8) de verilen L matrisi

$$L_{11} = (A_1^*A_1)^{\dagger} + A_1^{\dagger}A_2(A_2^*Q_1A_2)^{\dagger}A_2^*\left(A_1^{\dagger}\right)^*, \quad L_{12} = A_1^{\dagger}A_2(A_2^*Q_1A_2)^{\dagger}$$

$$L_{21} = -A_2^{\dagger}A_1(A_1^*Q_2A_1)^{\dagger}, \quad L_{22} = (A_2^*A_2)^{\dagger} + A_2^{\dagger}A_1(A_1^*Q_2A_1)^{\dagger}A_1^*\left(A_2^{\dagger}\right)^*$$

olmak üzere

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde alalım. Bu durumda Q_1 ve Q_2 matrisleri daha önce tanımlandığı gibi olmak üzere

$$LA^* = \begin{bmatrix} A_1^{\dagger} + A_1^{\dagger}A_2(A_2^*Q_1A_2)^{\dagger}A_2^*P_1 - A_1^{\dagger}A_2(A_2^*Q_1A_2)^{\dagger}A_2^* \\ -A_2^{\dagger}A_1(A_1^*Q_2A_1)^{\dagger}A_1^* + A_2^{\dagger} + A_2^{\dagger}A_1(A_1^*Q_2A_1)^{\dagger}A_1^*P_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^{\dagger} - A_1^{\dagger}A_2(A_2^*Q_1A_2)^{\dagger}A_2^*Q_1 \\ A_2^{\dagger} - A_2^{\dagger}A_1(A_1^*Q_2A_1)^{\dagger}A_1^*Q_2 \end{bmatrix} = H$$

elde edilir. Bu durumda da Lemma 4.1 den $(c) \Rightarrow (a)$ olduğu görülür ki bu da Teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 4.2.1: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun ve $Q_1, Q_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ daha önce tanımlanan dik izdüşümler olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$.

(b) $(Q_2A_1)^\dagger = A_1^\dagger - A_1^\dagger A_2 (Q_1 A_2)^\dagger$

(c) $(Q_1A_2)^\dagger = A_2^\dagger - A_2^\dagger A_1 (Q_2 A_1)^\dagger$

İspat: Moore-Penrose inversin tekliği göz önünde bulundurulursa Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 den kolayca gösterilebilir ki eğer (a) şartı sağlanırsa yukarıda tanımlanan G ve H matrisleri yardımıyla (b) ve (c) şartları da sağlanır. Tersine olarak (4.6) eşitlikleri dikkate alındığında (b) deki eşitlik A_1 ile (c) deki eşitlik ise A_2 ile sağdan çarpıldığında $(Q_2A_1)^\dagger Q_2 A_1 = A_1^\dagger A_1$ ve $(Q_1A_2)^\dagger Q_1 A_2 = A_2^\dagger A_2$ eşitlikleri veya bunlara denk olarak $\mathcal{R}(A_1^* Q_2) = \mathcal{R}(A_1^*)$ ve $\mathcal{R}(A_2^* Q_1) = \mathcal{R}(A_2^*)$ elde edilir. Bu nedenle de Teorem 4.2.1 deki $(a) \Leftrightarrow (b)$ ve $(a) \Leftrightarrow (c)$ olduğu görülür.

Doğal olarak akla aşağıdaki gibi bir soru gelebilir. Eğer G ve H matrisleri yukarıda tanımlandıkları şekilde olmak üzere Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3 yine geçerli midir? Öte yandan G matrisinden $Q_1 = I_m$ ve $Q_2 = I_m$ alınırsa ve Teorem 4.2.3 de ise H matrisinden $A_1^\dagger A_2 (Q_1 A_2)^\dagger = 0$ ve $A_2^\dagger A_1 (Q_2 A_1)^\dagger = 0$ alınırsa M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$U = \begin{pmatrix} A_1^\dagger \\ A_1^\dagger \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

şeklinde olur mu? Bu sorunun cevabı genel olarak hayır olacaktır. Örneğin, (4.2) ile verilen A matrisinde A_1 ve A_2 matrislerini

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak alalım. Bu durumda kolayca görülür ki $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$ dır. Ancak

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

matrisi $A = (A_1 \vdots A_2)$ matrisinin Moore-Penrose inversi değildir. Yani $U \neq A^{\dagger}$ dir. Bununla beraber, hangi şartlar altında $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$ koşulunun $U = A^{\dagger}$ eşitliğini sağladığı sorusu akla gelecektir. Bu surunun cevabı ortogonal komplement notasyonu yardımıyla aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.4: $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun ve U matrisi (4.13) de verildiği gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $U = A^{\dagger}$,

(b) $U = A^{(1)}$,

(c) $\mathcal{R}(A_1) \subseteq \mathcal{R}^{\perp}(A_2)$ veya buna denk olarak $\mathcal{R}(A_2) \subseteq \mathcal{R}^{\perp}(A_1)$,

Burada $\mathcal{R}^{\perp}$ gösterimi $\mathcal{R}(.)$ sütun uzayının ortogonal komplementini gösterir.

İspat: Genelleştirilmiş inver ve Moore-Penrose invers tanımlarından $(a) \Rightarrow (b)$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca (4.13) formundaki U matrisi için (b) de verilen $AUA = A$ eşitliği

$P_i = A_i A_i^{\dagger}, i = 1,2$ ile belirlenmiş dik izdüşümler olmak üzere

$$P_i A_j = 0, i = 1,2; \quad i \neq j \tag{4.14}$$

olduğunu gösterir. (4.14) eşitliğini $A_i^{\dagger}, i = 1,2$ ile soldan çarparsak

$$A_i^\dagger A_j = 0, \quad i = 1,2; \quad i \neq j \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) deki şartlar alternatif olarak $\mathcal{R}(A_j) \subseteq \mathcal{R}^\perp(A_i),\ i = 1,2;\ \ i \neq j$ biçiminde de yazılabilir ki bu da teoremin $(\mathrm{b}) \Rightarrow (\mathrm{c})$ kısmının ispatıdır. Teoremin (c) bendinde verilen her iki içermenin doğruluğunu göstermek için aşağıdaki ilişkilerin sağlandığını göstermek yeterlidir.

$$A_1^\dagger A_2 = 0 \Leftrightarrow \left(A_1A_1^\dagger\right)^*\left(A_2A_2^\dagger\right)^* = 0 \Leftrightarrow A_2A_2^\dagger A_1A_1^\dagger \quad = 0 \Leftrightarrow A_2^\dagger A_1 = 0.$$

Sonuç olarak UA çarpımı

$$UA = \begin{bmatrix} A_1^\dagger A_1 & 0 \\ 0 & A_2^\dagger A_2 \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Öte yandan Moore-Penrose tanımından $(UA)^2 = UA = (UA)^*$ ve $UAA^* = A^*$ olduğu görülür. Bu eşitlikler ise UA nın $\mathcal{R}(A^*)$ üzerine dik izdüşüm olduğunu yani $UA = A^\dagger A$ olduğunu gösterir. Üstelik her $K \in \mathbb{C}^{m\times n}$ için $(K^*K^\dagger)K^* = K^\dagger$ olduğundan L matrisinde $L_{11} = (A_1^*A_1)^\dagger$, $L_{12} = 0$, $L_{21} = 0$ ve $L_{22} = (A_2^*A_2)^\dagger$ alınırsa $LA^* = U$ elde edilir. Böylece Lemma 4.1.1 e göre $(\mathrm{c}) \Rightarrow (\mathrm{a})$ olduğu da gösterilmiş olur. Bu ise Teoremin ispatını tamamlar.

Bu konuda diğer bazı teoremleri ispatsız olarak aşağıdaki şekilde verelim.

Teorem 4.2.5: $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrisinin Moore-Penrose inversi $C = (I - A_1A_1^\dagger)A_2$ ve

$$K = \left(I + (I - C^\dagger C)A_2^*\left(A_1^\dagger\right)^* A_1^\dagger A_2(I - C^\dagger C)\right)^{-1}$$

olmak üzere

$$A^{\dagger} = (A_1 \vdots A_2)^{\dagger} = \begin{pmatrix} A_1^{\dagger} - A_1^{\dagger}A_2C^{\dagger} - A_1^{\dagger}A_2(I - C^{\dagger}C)KA_2^{*}(A_1^{\dagger})^{*}A_1^{\dagger}(I - A_2C^{\dagger}) \\ C^{\dagger} + (I - C^{\dagger}C)KA_2^{*}(A_1^{\dagger})^{*}A_1^{\dagger}(I - A_2C^{\dagger}) \end{pmatrix}$$

(4.16)

biçimindedir.

İspat: Teoremin ispatı için R.E. Cline (1964) e balınız.

Teorem 4.2.6: $A \epsilon \mathbb{C}^{m x n}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde $A \epsilon \mathbb{C}^{m x n}$ matrisinin Moore-Penrose

$$A^{\dagger} = (A_1 \vdots A_2)^{\dagger} = \begin{pmatrix} A_1^{*}(A_1A_1^{*} + A_1A_1^{*})^{\dagger} \\ A_2^{*}(A_1A_1^{*} + A_1A_1^{*})^{\dagger} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

biçimindedir.

İspat: Teoremin ispatı için Yongge Tian (2005) e balınız. (4.17) ifadesi $A^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{\dagger}$ eşitliğinden elde edilir.

Teorem 4.2.7: $A \epsilon \mathbb{C}^{m x n}$ matrisi (4.2) deki gibi parçalanmış olsun. Bu takdirde $A \epsilon \mathbb{C}^{m x n}$ matrisinin Moore-Penrose inversi

$S = E_{A_1}A_2$ ve $T = A_1^{\dagger}A_2F_S$,

$E_A = I_m - AA^{\dagger}$ ve $F_A = I_n - A^{\dagger}A$

olmak üzere

$$A^{\dagger} = (A_1 \vdots A_2)^{\dagger} = \begin{pmatrix} (I_n + TT^{*})^{-1}(A_1^{\dagger} - A_1^{\dagger}A_2S^{\dagger}) \\ T^{*}(I_n + TT^{*})^{-1}(A_1^{\dagger} - A_1^{\dagger}A_2S^{\dagger}) + S^{\dagger} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

biçimindedir.

İspat: Teoremin ispatı için Yongge Tian (2005) e balınız.

Teorem 4.2.8: $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrisi

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$$

şeklinde sütun parçalanmış olsun. Bu takdirde $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrisinin Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversi $\mathcal{N}(A_1)$ ve $\mathcal{N}(A_2)$ sırasıyla A_1 ve A_2 matrislerinin sıfır uzayları ve $P_{\mathcal{N}(A_1)}$, $P_{\mathcal{N}(A_2)}$ ve $P_{\mathcal{N}(A_1)\cap\mathcal{N}(A_2)}$ ilgili altuzaylar üzerlerindeki dik izdüşümler olmak üzere

$$A^{\dagger}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}^{\dagger}=\left(A_1^{\dagger}\vdots\,0\right)+\left(P_{\mathcal{N}(A_1)}-P_{\mathcal{N}(A_1)\cap\mathcal{N}(A_2)}\right)\left(P_{\mathcal{N}(A_1)}+P_{\mathcal{N}(A_2)}\right)^{\dagger}\left(-A_1^{\dagger}\vdots\,A_2^{\dagger}\right)$$

$$=\left(0\,\vdots\,A_2^{\dagger}\right)+\left(P_{\mathcal{N}(A_2)}-P_{\mathcal{N}(A_1)\cap\mathcal{N}(A_2)}\right)\left(P_{\mathcal{N}(A_1)}+P_{\mathcal{N}(A_2)}\right)^{\dagger}\left(-A_1^{\dagger}\vdots\,A_2^{\dagger}\right) \qquad (4.19)$$

biçimindedir.

İspat: Teoremin ispatı için A. Ben-Israel (1967) e balınız.

4.3 Üçgensel Blok Matrislerin Moore–Penrose İnversleri

Çalışmanın bu kısmında $M\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrisini

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\C & D\end{pmatrix} \qquad (4.20)$$

biçiminde 2x2 tipinde parçalayarak Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversler için formüller geliştireceğiz. Öncelikle M matrisinin alt blok üçgensel olması özel durumunu, yani

$$M=\begin{pmatrix}A & 0\\B & C\end{pmatrix} \qquad (4.21)$$

olması durumunu ele alalım.

Lemma 4.3.1: M matrisi (4.21) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu durumda

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} A^{\dagger} & B^{*}L^{\dagger} \\ 0 & C^{*}L^{\dagger} \end{pmatrix}$$

dir. Burada $L = BB^{*} + CC^{*}$ olması için gerek ve yeter koşul $AB^{*} = 0$ olmasıdır.

İspat: Lemma'nın ispatı için

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} A^{\dagger} & B^{*}L^{\dagger} \\ 0 & C^{*}L^{\dagger} \end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. Moore-Penrose şartlarından birincisi göz önüne alınırsa buradan

$$BA^{\dagger}A = LL^{\dagger}B = B \tag{4.22}$$

elde edilir. L nin tanımından $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(B^{*})$ olduğu görülür. Dolayısıyla $LL^{\dagger}B = B$ dır. Çünkü A ve B matrisleri için $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ olması için gerek ve yeter şart $BA^{\dagger}A = B$ idi. Böylece (4.22) den $BA^{\dagger}A = 0$ ve dolayısıyla da $BA^{\dagger} = 0$ olacağı görülür. Fakat $BA^{\dagger} = 0$ olması $AB^{*} = 0$ olmasına denktir. Bu ise gerekliliği tamamlar. Yeterlilik için $A^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{\dagger}=(A^{*}A)^{\dagger}A^{*}$ eşitliğini kullanacağız. Bu durumda yukarıda verilen M matrisi için $M^{\dagger} = M^{*}(MM^{*})^{\dagger}$ yazılabilir. Böylece $AB^{*} = 0$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} A^{*} & B^{*} \\ 0 & C^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AA^{*} & 0 \\ 0 & BB^{*} + CC^{*} \end{pmatrix}^{\dagger}$$

yazılabilir. Buradan da istenildiği gibi

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} A^{*}(AA^{*})^{\dagger} & B^{*}L^{\dagger} \\ 0 & C^{*}L^{\dagger} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Lemma 4.3.2: M matrisi (4.21) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu durumda

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} & K^{\dagger}B^{*} \\ 0 & C^{\dagger} \end{pmatrix}$$

dir. Burada $K = A^{*}A + B^{*}B$ olması için gerek ve yeter koşul $B^{*}C = 0$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik için Moore-Penrose şartlarından birincisi göz önüne alınırsa, bu durumda $BK^{\dagger}K = C^{\dagger}CB = B$ olduğu görülür ki bu da $B^{*}C = 0$ olduğunu gösterir. Yeterlilik ise yine $A^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{\dagger} = (A^{*}A)^{\dagger}A^{*}$ eşitliğinden görülür.

Teorem 4.3.1: M matrisi (4.21) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu durumda M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} - K^{\dagger}B^{*}CF & K^{\dagger}B^{*} - K^{\dagger}B^{*}CH \\ F & H \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$K = A^{*}A + B^{*}B,$

$D = -AK^{\dagger}B^{*}C,$

$E = C - BK^{\dagger}B^{*}C,$

$T = D^{*}D + E^{*}E,$

$S = K^{\dagger}B^{*}C(I - T^{\dagger}T),$

$F = T^{\dagger}D^{*} + (I - T^{\dagger}T)(I + S^{*}S)^{-1}C^{*}BK^{\dagger}(K^{\dagger}A^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}D^{*}),$

$H = T^{\dagger}E^{*} + (I - T^{\dagger}T)(I + S^{*}S)^{-1}C^{*}BK^{\dagger}(K^{\dagger}B^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}E^{*})$

dir.

İspat: Cline (1964), eğer $UV^* = 0$ ise, bu takdirde

$$G = V - UU^{\dagger}V \text{ ve } Q = [I + (I - G^{\dagger}G)V^*(U^{\dagger})^*U^{\dagger}V(I - VG^{\dagger})]^{-1} \tag{4.23}$$

olmak üzere

$$(U + V)^{\dagger} = U^{\dagger} + (I - U^{\dagger}V)[G^{\dagger} + (I - G^{\dagger}G)QV^*(U^{\dagger})^*U^{\dagger}(I - VG^{\dagger})] \tag{4.24}$$

olduğunu göstermiştir. Burada

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alınırsa $M = U + V$ elde edilir. Ayrıca $UV^* = 0$ olduğundan Cline tarafından verilen teorem uygulanabilir. Lemma 4.3.2' ye göre $K = A^*A + B^*B$ olmak üzere

$$U^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^* & K^{\dagger}B^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -AK^{\dagger}B^*C \\ 0 & C - BK^{\dagger}B^*C \end{pmatrix}$$

olur. $D = -AK^{\dagger}B^*C$ ve $E = C - BK^{\dagger}B^*C$ alınırsa

$$G = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 4.2 ve $G^{\dagger} = ((G^*)^{\dagger})^*$ gerçeğinden $T = D^*D + E^*E$ olmak üzere

$$G^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T^{\dagger}D^* & T^{\dagger}E^* \end{pmatrix}$$

olacaktır. Buradan da

$$I - G^{\dagger}G = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - T^{\dagger}T \end{pmatrix}$$

ve dolayısıyla da

$$U^{\dagger}V(I - G^{\dagger}G) = \begin{pmatrix} 0 & K^{\dagger}B^{*}C(I - T^{\dagger}T) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $S = K^{\dagger}B^{*}C(I - T^{\dagger}T)$ olmak üzere

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I - S^{*}S)^{-1} \end{pmatrix}$$

ve

$$I - VG^{\dagger} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CT^{\dagger}D^{*} & I - CT^{\dagger}E^{*} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$U^{\dagger}(I - VG^{\dagger}) = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}D^{*} & K^{\dagger}B^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}E^{*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve dolayısıyla da

$$F = T^{\dagger}D^{*} + (I - T^{\dagger}T)(I + S^{*}S)^{-1}C^{*}BK^{\dagger}(K^{\dagger}A^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}D^{*}),$$

$$H = T^{\dagger}E^{*} + (I - T^{\dagger}T)(I + S^{*}S)^{-1}C^{*}BK^{\dagger}(K^{\dagger}B^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}ED^{*})$$

olmak üzere

$$G^{\dagger} + (I - G^{\dagger}G)QV^{*}(U^{\dagger})^{*}U^{\dagger}(I - VG^{\dagger}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & H \end{pmatrix}$$

ve

$$I - U^{\dagger}V = \begin{pmatrix} I & -K^{\dagger}B^{*}C \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$(I - U^{\dagger}V)[G^{\dagger} + (I - G^{\dagger}G)QV^{*}(U^{\dagger})^{*}U^{\dagger}(I - VG^{\dagger})] = \begin{pmatrix} -K^{\dagger}B^{*}CF & -K^{\dagger}B^{*}CH \\ F & H \end{pmatrix}$$

olur, buradan da

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^{\dagger} = (U + V)^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} - K^{\dagger}B^{*}CF & K^{\dagger}B^{*} - K^{\dagger}B^{*}CH \\ F & H \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Bu noktada aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını belirtelim.

(i) $T = C^{*}E,$

(ii) Eğer $R = I + S^{*}S$ ise $T^{\dagger}TR^{-1} = R^{-1}T^{\dagger}T$

(iii) $D^{*}A + E^{*}B = 0$

(iv) $F = T^{\dagger}D^{*} + R^{-1}S^{*}(K^{\dagger}A^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}D^{*})$

(v) $H = T^{\dagger}E^{*} + R^{-1}S^{*}(K^{\dagger}B^{*} - K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}E^{*})$

Şimdi M matrisi (4.21) deki gibi parçalanmış bir matris olmak üzere $M^{\dagger}$ matrisinin üst blok üçgensel veya alt blok üçgensel olması için gerek ve yeter şartları göz önüne alalım. Bu durumda aşağıdaki iki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.3.1: M matrisi (4.21) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu durumda

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow S^{*}K^{\dagger}A^{*} = 0 \text{ ve } D^{*} = 0$$

olur, burada daha önce tanımlandığı gibi

$K = A^{*}A + B^{*}B,$

$D - -AK^{\dagger}B^{*}C$

$$S = K^{\dagger}B^{*}C(I - T^{\dagger}T)$$

dır.

İspat: Teorem 4.3.1 dan

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow F = 0$$

yazılabilir. Fakat yukarıda verilen (iv) eşitliğinden

$$RF = RT^{\dagger}D^{*} + S^{*}K^{\dagger}A^{*} - S^{*}K^{\dagger}B^{*}CT^{\dagger}D^{*} \tag{4.25}$$

elde edilir. F nin tanımı göz önüne alınırsa $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(D)$ olacağından $TF = TT^{\dagger}D^{*} = D^{*}$ bulunur. Böylece $F = 0$ olması $D^{*} = 0$ olduğunu gösterir. Öte yandan (4.25) ten

$$S^{*}K^{\dagger}A^{*} = 0 \text{ ve } D^{*} = 0 \Leftrightarrow F = 0$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3.2: M matrisi (4.21) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B) \text{ ve } \mathcal{N}(C^{*}) \subseteq \mathcal{N}(B^{*})$$

olur, bu durumda

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} A^{\dagger} & 0 \\ -C^{\dagger}BA^{\dagger} & C^{\dagger} \end{pmatrix}$$

bulunur.

İspat: Teorem 4.3.1 den

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow K^{\dagger}B^{*} = K^{\dagger}B^{*}CH$$

yazılabilir. Eğer $K^{\dagger}B^{*} = K^{\dagger}B^{*}CH$ ise $KK^{\dagger}B^{*} = KK^{\dagger}B^{*}CH$ ve buradan da $B^{*} = B^{*}CH$ elde edilir. Böylece $TH = TT^{\dagger}E^{*} = E^{*}$ olup buradan da $C^{*}EH = E^{*}$ ve dolayısıyla da $C^{*}CH = C^{*}$ yazılabilir. $A^{\dagger} = A^{*}(AA^{*})^{\dagger}=(A^{*}A)^{\dagger}A^{*}$ eşitliği dikkate alınırsa $C^{\dagger}CH = C^{\dagger}$ ve $CH = CC^{\dagger}$ yazılabilir. Bu nedenle $B^{*} = B^{*}CH = B^{*}CC^{\dagger}$ ve $\mathcal{N}(C^{*}) \subseteq \mathcal{N}(B^{*})$ elde edilir. Öte yandan kolayca gösterilebilir ki eğer $K^{\dagger}B^{*} = K^{\dagger}B^{*}CH$ ise $H = T^{\dagger}E^{*}$ ve $F = T^{\dagger}D^{*}$ olacaktır. Böylece (iii) den

$$FH + HB = T^{\dagger}D^{*}A + T^{\dagger}E^{*}B = T^{\dagger}(D^{*}A + E^{*}B) = 0$$

elde edilir. Yani

$$FH = -HB \tag{4.26}$$

olur. Buradan $BK^{\dagger}A^{*}A - BK^{\dagger}B^{*}CFA = BK^{\dagger}A^{*}A - BK^{\dagger}B^{*}C(-HB)$ yazılabilir. Bu son terim $BK^{\dagger}K = B$ ile aynıdır.

Sonuç olarak $(BK^{\dagger}A^{*}A - BK^{\dagger}B^{*}CFA)A^{\dagger}A = BA^{\dagger}A$ dan $B = BA^{\dagger}A$ veya buna denk olarak $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ elde edilir. Öte yandan $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$ ve $\mathcal{N}(C^{*}) \subseteq \mathcal{N}(B^{*})$ ise bu takdirde

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} A^{\dagger} & 0 \\ -C^{\dagger}BA^{\dagger} & C^{\dagger} \end{pmatrix}$$

olduğu kolaylıkla elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

4.4 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ Blok Matrisinin Moore–Penrose İnversleri

Çalışmanın bu kısmında $M \in \mathbb{C}^{mxn}$ matrisini (4.20) de verildiği gibi $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

(4.20) biçiminde 2x2 tipinde parçalayarak Moore-Penrose tipi genelleştirilmiş inversler için formüller geliştireceğiz. Bununla ilgili olarak

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = r(A \quad B) + r(C \quad D) \tag{4.27}$$

rank toplamsallık şartı altında Moore-Penrose invers için çeşitli ifadeler elde edeceğiz. Aşağıdaki önemli teoremi vererek işe başlayalım.

Teorem 4.4.1: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu durumda M matrisinin Moore-Penrose inversi

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^{*} - EF) & K^{\dagger}(C^{*} - EH) \\ F & H \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$K = A^{*}A + C^{*}C,$

$E = A^{*}B + C^{*}D,$

$R = B - AK^{\dagger}E,$

$S = D - CK^{\dagger}E,$

$L = R^{*}R + S^{*}S,$

$T = K^{\dagger}E(I - L^{\dagger}L),$

$F = L^{\dagger}R^{*} + (I - L^{\dagger}L)(I + T^{*}T)^{-1}(K^{\dagger}E)^{*}K^{\dagger}(A^{*} - EL^{\dagger}R^{*}),$

$H = L^{\dagger}S^{*} + (I - L^{\dagger}L)(I + T^{*}T)^{-1}(K^{\dagger}E)^{*}K^{\dagger}(C^{*} - EL^{\dagger}S^{*})$

dir.

İspat: Cline (1964), eğer $UV^{*} = 0$ ise, bu takdirde

$$G = V - UU^{\dagger}V \quad \text{ve} \quad Q = [I + (I - G^{\dagger}G)V^{*}(U^{\dagger})^{*}U^{\dagger}V(I - VG^{\dagger})]^{-1}$$

olmak üzere

$$(U+V)^{\dagger} = U^{\dagger} + (I - U^{\dagger}V)[G^{\dagger} + (I - G^{\dagger}G)QV^{*}(U^{\dagger})^{*}U^{\dagger}(I - VG^{\dagger})]$$

olduğunu göstermiştir. Burada

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } V = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

alınırsa $M = U + V$ elde edilir. Ayrıca $UV^{*} = 0$ olduğundan Cline tarafından verilen teorem uygulanabilir. Lemma 4.3.2' ye göre $K = A^{*}A + C^{*}C$ olmak üzere

$$U^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} & K^{\dagger}C^{*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece $E = A^{*}D + B^{*}C$ olmak üzere

$$G = \begin{pmatrix} 0 & B - AK^{\dagger}E \\ 0 & D - BK^{\dagger}E \end{pmatrix}$$

olur. $R = B - AK^{\dagger}E$ ve $S = D - BK^{\dagger}E$ olduğundan

$$G = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 4.3.1 ve $G^{\dagger} = ((G^{*})^{\dagger})^{*}$ olduğundan $L = R^{*}R + S^{*}S$ olmak üzere

$$G^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L^{\dagger}R^{*} & L^{\dagger}S^{*} \end{pmatrix}$$

olacaktır. Buradan da

$$I - G^{\dagger}G = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - L^{\dagger}L \end{pmatrix}$$

dir ve dolayısıyla da $T = K^{\dagger}E(I - L^{\dagger}L)$ olmak üzere

$$U^{\dagger}V(I - G^{\dagger}G) = \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Öte yandan

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I + T^{*}T)^{-1} \end{pmatrix}$$

ve

$$U^{\dagger}(I - VG^{\dagger}) = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^{*} - EL^{\dagger}R^{*} & K^{\dagger}(C^{*} - EL^{\dagger}S^{*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve dolayısıyla da

$$F = L^{\dagger}R^{*} + (I - L^{\dagger}L)(I + T^{*}T)^{-1}(K^{\dagger}E)^{*}K^{\dagger}(A^{*} - EL^{\dagger}R^{*}),$$

$$H = L^{\dagger}S^{*} + (I - L^{\dagger}L)(I + T^{*}T)^{-1}(K^{\dagger}E)^{*}K^{\dagger}(C^{*} - EL^{\dagger}S^{*})$$

olmak üzere

$$G^{\dagger} + (I - G^{\dagger}G)QV^{*}(U^{\dagger})^{*}U^{\dagger}(I - VG^{\dagger}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & H \end{pmatrix}$$

ve

$$I - U^{\dagger}V = \begin{pmatrix} I & -K^{\dagger}E \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$(I - U^{\dagger}V)[G^{\dagger} + (I - G^{\dagger}G)QV^{*}(U^{\dagger})^{*}U^{\dagger}(I - VG^{\dagger})] = \begin{pmatrix} -K^{\dagger}EF & -K^{\dagger}EH \\ F & H \end{pmatrix}$$

olur, buradan da

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\dagger} = (U + V)^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^{*} - EF) & K^{\dagger}(C^{*} - EH) \\ F & H \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$J = I + T^*T$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını belirtelim.

(vi) $JL^\dagger = L^\dagger = L^\dagger J \;\; J^{-1}L^\dagger L = L^\dagger L = L^\dagger LJ$

(vii) $L = D^*S + B^*R$

(viii) $R^*A + S^*C = 0$

(ix) $RF = RL^\dagger R^*$

(x) $RH = RL^\dagger S^*$

(xi) $SF = SL^\dagger R^*$

(xii) $SH = SL^\dagger S^*$

(xiii) $FA + HC = J^{-1}T^*$

(xiv) $FB + HD = L^\dagger L + I - J^{-1}$

(xv) $(FA + HC)^* = K^\dagger E - K^\dagger E(FB + HD)$

(xvi) $J^{-1}F - L^\dagger R^* - J^{-1}T^*K^\dagger(A^* - EF) = 0$

(xvii) $J^{-1}H - L^\dagger S^* - J^{-1}T^*K^\dagger(C^* - EH) - 0$

Yukarıdaki eşitlikler aşağıda verilen içerme bağıntılarından kolayca görülebilir:

$\mathcal{N}(K) \subseteq \mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(K) \subseteq \mathcal{N}(C)$, $\mathcal{N}(K) \subseteq \mathcal{N}(E^*)$, $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(R)$ ve $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(S)$

Bu nedenle yukarıda verile (i) eşitliğinden F ve H matrislerini

$$F = L^\dagger R^* + J^{-1}T^*K^\dagger(A^* - EL^\dagger R^*), \tag{4.28}$$

$$H = L^\dagger S^* + J^{-1}T^*K^\dagger(C^* - EL^\dagger S^*) \tag{4.29}$$

olarak yeniden yazabiliriz. Ayrıca (i)-(xii) eşitlikleri kullanılarak Cline tarafından verilen teorem kullanılmadan da direkt olarak

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

matrisinin Moore-Penrose inversinin

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EF) & K^{\dagger}(C^* - EH) \\ F & H \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu gösterilebilir.

Bu durumda aşağıdaki iki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.4.1: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu durumda

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow T^*K^{\dagger}A^* = 0 \ \text{ ve } \ R^* = 0$$

dır.

İspat: Teorem 4.3.1 den

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow F = 0$$

yazılabilir. Fakat F nin tanımı göz önüne alınırsa $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(R)$ olacağından $LF = LL^{\dagger}R^* = R^*$ bulunur. Böylece $F = 0$ olması $R^* = 0$ olduğunu gösterir. Öte yandan (4.28) den

$$F = 0 \Leftrightarrow T^*K^{\dagger}A^* = 0 \ \text{ ve } \ R^* = 0$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar. Burada belirtelim ki $F = 0$ olması $L = S^*S$ olduğunu dolayısıyla

$$L^{\dagger}S^* = (S^*S)^{\dagger}S^* = S^{\dagger} \text{ ve } H = S^{\dagger} + J^{-1}T^*K^{\dagger}(C^* - ES^{\dagger})$$

eşitliklerinin sağlandığını belirtelim.

Sonuç 4.4.2: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EL^{\dagger}R^*) & K^{\dagger}(C^* - EL^{\dagger}S^*) \\ L^{\dagger}R^* & L^{\dagger}S^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow T = 0$$

dır.

İspat: $T = 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde yukarıdaki Teorem 4.4.1 ve (4.28) ve (4.29) eşitliklerinden

$$T^*K^{\dagger}(A^* - EL^{\dagger}R^*) = 0, \tag{4.30}$$

$$T^*K^{\dagger}(C^* - EL^{\dagger}S^*) = 0 \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.30) ve (4.31) ifadelerini soldan sırasıyla B ve C ile çarpar ve taraf tarafa toplarsak (ii) yi de dikkate alarak

$$T^*K^{\dagger}E(I - L^{\dagger}L) = 0 \tag{4.32}$$

yazılabilir. Bu nedenle $T^*T = 0$ ve dolayısıyla $T = 0$ olduğu görülür. Böylece de ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.4.1: Aşağıdaki şartlar denktir.

(a) $T = 0$ (4.33)

(b) $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(E)$ (4.34)

(c) $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(D)$ ve $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(B)$ (4.35)

İspat: T matrisinin tanımı dikkate alınırsa $\mathcal{N}(K) \subseteq \mathcal{N}(E^*)$ olduğundan $T = 0$ olması için $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(E)$ olmasının gerek ve yeter şart olduğu kolayca görülür. Şimdi (4.33) ifadesinin sağlanması için (4.35) in sağlanmasının gerek ve yeter şart olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $T = 0$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(R)$ olduğundan

$$B - BL^{\dagger}L = B(I - L^{\dagger}L) - AT = B(I - L^{\dagger}L) - AK^{\dagger}E(I - L^{\dagger}L)$$

$$= (B - AK^{\dagger}E)(I - L^{\dagger}L) = R - RL^{\dagger}L = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(S)$ olduğundan

$$D - DL^{\dagger}L = D(I - L^{\dagger}L) - CT = S - SL^{\dagger}L = 0$$

yazılabilir. Öte yandan $B = BL^{\dagger}L$ ve $D = DL^{\dagger}L$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$T = K^{\dagger}E(I - L^{\dagger}L) = K^{\dagger}(A^{*}B + C^{*}D)(I - L^{\dagger}L) = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.4.3: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} & K^{\dagger}C^{*} \\ L^{\dagger}B^{*} & L^{\dagger}D^{*} \end{pmatrix} \Leftrightarrow E = 0$$

dır.

İspat: $E = 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde yukarıda verilen her bir matris tanımından ve Teorem 4.4.1 dan

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} & K^{\dagger}C^{*} \\ L^{\dagger}B^{*} & L^{\dagger}D^{*} \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca görülür. Tersine olarak

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}A^{*} & K^{\dagger}C^{*} \\ L^{\dagger}B^{*} & L^{\dagger}D^{*} \end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda da yukarıda verilen R ve S matrislerinin tanımından ve Teorem 4.4.1 dan

$$L^{\dagger}E^{*}K^{\dagger}A^{*} - J^{-1}T^{*}K^{\dagger}(A^{*} - EL^{\dagger}R^{*}) = 0, \tag{4.36}$$

$$L^{\dagger}E^{*}K^{\dagger}C^{*} - J^{-1}T^{*}K^{\dagger}(C^{*} - EL^{\dagger}S^{*}) = 0,$$

(4.37) elde edilir. (4.36) ve (4.37) ifadelerini soldan $L^{\dagger}L$ ile çarpar ve Teorem 4.4.1 un sonunda verilen (i) ifadesini de dikkate alarak

$$L^{\dagger}E^{*}K^{\dagger}A^{*}=0 \tag{4.38}$$

$$L^{\dagger}E^{*}K^{\dagger}C^{*}=0 \tag{4.39}$$

yazılabilir. (4.38) ve (4.39) ifadelerini sırasıyla A ve C ile sağdan çarpıp taraf tarafa toplarsak $L^{\dagger}E^{*}K^{\dagger}K$=0 olduğu görülür. Öte yandan $\mathcal{N}(K) \subseteq \mathcal{N}(E^{*})$ olduğundan

$$EL^{\dagger} = 0 \tag{4.40}$$

olur. Bu nedenle $K^{\dagger}EF = 0$ ve $K^{\dagger}EH = 0$ elde edilir. Buradan da

$$K^{\dagger}EJ^{-1}T^{*}K^{\dagger}A^{*} = 0 \tag{4.41}$$

$$K^{\dagger}EJ^{-1}T^{*}K^{\dagger}C^{*} = 0 \tag{4.42}$$

elde edilir. (4.41) ve (4.42) ifadelerini sırasıyla A ve C ile sağdan çarpıp taraf tarafa toplarsak $K^{\dagger}EJ^{-1}T^{*} = 0$ olduğu görülür. (4.40) dan $T = K^{\dagger}E$ yazılabilir. Öte yandan $J^{-1}T^{*}T = I - J^{-1}$ olduğundan $K^{\dagger}E(I - J^{-1}) = 0$ olacaktır. Buradan $K^{\dagger}E = K^{\dagger}EJ^{-1}$ ve dolayısıyla $(K^{\dagger}E)(K^{\dagger}E)^{*} = 0$ elde edilir ki bu da $K^{\dagger}E = 0$ yani $E = 0$ olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.4: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}A^*) & K^{\dagger}(C^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}C^*) \\ J^{-1}T^*K^{\dagger}A^* & J^{-1}T^*K^{\dagger}AC^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow L = 0$$

dır.

İspat: $L = 0$ olsun. Bu takdirde $L^{\dagger} = 0$ olacaktır. Böylece Teorem 4.4.1 den

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}A^*) & K^{\dagger}(C^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}C^*) \\ J^{-1}T^*K^{\dagger}A^* & J^{-1}T^*K^{\dagger}AC^* \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca görülür. Tersine olarak $M^{\dagger}$ Moore-Penrose inversinin

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}A^*) & K^{\dagger}(C^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}C^*) \\ J^{-1}T^*K^{\dagger}A^* & J^{-1}T^*K^{\dagger}AC^* \end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda ise Teorem 4.4.1 den

$$JL^{\dagger}R^* = T^*K^{\dagger}EL^{\dagger}R^*, \tag{4.43}$$

$$JL^{\dagger}S^* = T^*K^{\dagger}EL^{\dagger}S^* \tag{4.44}$$

olduğu görülür. $TL^{\dagger} = 0$ olsun. Buradan L matrisinin tanımı dikkate alınırsa $RT^* = 0$ ve $RS^* = 0$ olacaktır. Böylece (4.43) ve (4.44) ifadelerini sırasıyla R ve S ile sağdan çarpıp Teorem 4.4.1 den sonra verilen (i) eşitlikleri kullanılırsa

$$RL^{\dagger}R^* = 0, \quad SL^{\dagger}R^* = 0 \tag{4.45}$$

$$RL^{\dagger}S^* = 0, \quad SL^{\dagger}S^* = 0 \tag{4.46}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak

$$L = LL^{\dagger}L = (R^*R + S^*S)L^{\dagger}(R^*R + S^*S) = 0$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.5: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}A^*) & K^{\dagger}(C^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}C^*) \\ L^{\dagger}B^* + J^{-1}T^*K^{\dagger}A^* & L^{\dagger}D^* + J^{-1}T^*K^{\dagger}AC^* \end{pmatrix} \Leftrightarrow S = DL^{\dagger}L \qquad \text{ve}$$

$R = BL^{\dagger}L$ dır.

İspat: $S = DL^{\dagger}L$ ve $R = BL^{\dagger}L$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $SL^{\dagger}L = DL^{\dagger}L$ ve $RL^{\dagger}L = BL^{\dagger}L$ olacaktır. Böylece R ve S matrislerinin tanımlarından

$$AK^{\dagger}EL^{\dagger}L = 0 \tag{4.47}$$

$$CK^{\dagger}EL^{\dagger}L = 0 \tag{4.48}$$

olduğu görülür. Böylece (4.47) ve (4.48) ifadelerini sırasıyla A^* ve C^* ile soldan çarpıp taraf tarafa toplarsak $EL^{\dagger}L = 0$ olduğu görülür. Bu durumda $EL^{\dagger} = 0$ elde edilir. Buradan da Teorem 4.4.1 den

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}A^*) & K^{\dagger}(C^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}C^*) \\ L^{\dagger}B^* + J^{-1}T^*K^{\dagger}A^* & L^{\dagger}D^* + J^{-1}T^*K^{\dagger}AC^* \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. Tersine olarak

$$M^{\dagger} = \begin{pmatrix} K^{\dagger}(A^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}A^*) & K^{\dagger}(C^* - EJ^{-1}T^*K^{\dagger}C^*) \\ L^{\dagger}D^* + J^{-1}T^*K^{\dagger}A^* & L^{\dagger}D^* + J^{-1}T^*K^{\dagger}AC^* \end{pmatrix}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 4.4.1 ve Teorem 4.4.1 den sonra verilen (i) eşitlikleri kullanılırsa

$$L^{\dagger}B^* = L^{\dagger}R^* - J^{-1}T^*K^{\dagger}EL^{\dagger}R^* \tag{4.49}$$

$$L^{\dagger}D^* = L^{\dagger}S^* - J^{-1}T^*K^{\dagger}EL^{\dagger}S^* \tag{4.50}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu takdirde $L^{\dagger}T^* = 0$, $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(R)$ ve $\mathcal{N}(L) \subseteq \mathcal{N}(S)$

olduğundan (4.48) ve (4.49) ifadeleri soldan L ile çarpılıra $LL^{\dagger}B^{*}=R^{*}$ ve $LL^{\dagger}D^{*}=S^{*}$ eşitliklerine ulaşılır. Bu nedenle $R=BL^{\dagger}L$ ve $S=DL^{\dagger}L$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.4.6: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^{\dagger}=\begin{pmatrix} A^{\dagger}+A^{\dagger}BHCA^{\dagger} & -A^{\dagger}BH \\ -HCA^{\dagger} & H \end{pmatrix}$$

olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(A)\subseteq\mathcal{N}(C)$, $\mathcal{N}(A^{*})\subseteq\mathcal{N}(B^{*})$ $\mathcal{N}(H)\subseteq\mathcal{N}(C^{*})$ $\mathcal{N}(H^{\dagger})\subseteq\mathcal{N}(B^{*})$ olmasıdır. Burada $H=(D-CA^{\dagger}B)^{\dagger}$ dir.

İspat: $M^{\dagger}$ Sonuç 4.4.6 da verildiği gibi olsun. Bu takdirde Teorem 4.4.1 den

$$K^{\dagger}A^{*}-K^{\dagger}EF=A^{\dagger}+A^{\dagger}BHCA^{\dagger} \tag{4.51}$$

$$K^{\dagger}C^{*}-K^{\dagger}EH=-A^{\dagger}BH \tag{4.52}$$

$$F=-HCA^{\dagger} \tag{4.53}$$

yazılabilir. (4.51) ifadesini K ile soldan çarpıp $\mathcal{N}(K)\subseteq\mathcal{N}(C)$ ve $\mathcal{N}(K)\subseteq\mathcal{N}(E^{*})$ gerçekleri dikkate alınırsa

$$C^{*}=(E-KA^{\dagger}B)H \tag{4.54}$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{N}(H)\subseteq\mathcal{N}(C^{*})$ olur. Öte yandan F nin tanımından $LF=R^{*}$ olur ve böylece

$$B^{*}=E^{*}K^{\dagger}A^{*}-LHCA^{\dagger} \tag{4.55}$$

olduğu görülür. Buradan da $\mathcal{N}(A^{*})\subseteq\mathcal{N}(B^{*})$ elde edilir. Çünkü $A^{*}X=0$ olması $A^{\dagger}X=0$ olmasını sağlar. Şimdi $H=(D-CA^{\dagger}B)^{\dagger}$ olduğunu gösterelim. H ın tanımından $LH = S^*$ olacaktır. Böylece $C^* = LH + E^*K^\dagger C^*$ alınır. Bu nedenle $\mathcal{N}(H) \subseteq \mathcal{N}(C^*)$ olduğundan $\mathcal{N}(H) \subseteq \mathcal{N}(D^*)$ bulunur. Teorem 4.4.1 den sonra verilen (ix) yani $FB + HD = L^\dagger L + I - J^{-1}$ eşitliğinden

$$[H(D - CA^\dagger B)]^* = H(D - CA^\dagger B) \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.50) bağıntısı ve $SH = SL^\dagger S^*$ eşitliğinden

$$(D - CA^\dagger B)H = SL^\dagger S^* + CL^\dagger C^* \tag{4.57}$$

ve buradan da

$$[(D - CA^\dagger B)H]^* = (D - CA^\dagger B)H$$

olduğu görülür. Bunun sonucunda

$$H(D - CA^\dagger B)H = (L^\dagger L + I - J^{-1})H = H + J^{-1}T^*A^\dagger BH$$

$$= H + H(C - CA^\dagger A)A^\dagger BH = H \tag{4.58}$$

elde edilir. Öte yandan $(D - CA^\dagger B)H(D - CA^\dagger B) = (SL^\dagger S^* + CL^\dagger C^*)(D - CA^\dagger B)$, (ii), (iii) ve $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(C^*)$ ifadeleri göz önüne alındığında

$$(D - CA^\dagger B)H(D - CA^\dagger B) = SL^\dagger(L - R^*C) - SL^\dagger(-R^*A)A^\dagger B + CK^\dagger C^*D - CK^\dagger(K - A^*A)A^\dagger B$$

$$= S + CK^\dagger E \quad CA^\dagger B = D \quad CA^\dagger B \tag{4.59}$$

olduğu görülür. (4.55)-(4.58) den $H^\dagger = (D - CA^\dagger B)$ ve dolayısıyla da $H = (D - CA^\dagger B)^\dagger$ elde edilmiş olur. Ayrıca $(FA + HC)^* = K^\dagger E - K^\dagger E(FB + HD)$ eşitliğinden $FA + HC = [K^\dagger E - K^\dagger E(FB + HD)]^*$ ve buradan da $[K^\dagger E - K^\dagger EHH^\dagger]^* = H(C - CA^\dagger A)$ olduğu görülür. Bu eşitliğin her iki yanı H^* ile soldan çarpılırsa $H^*H(C - CA^\dagger A) = 0$ bulunur. Bu ise $H^\dagger H(C - CA^\dagger A) = 0$

olması demektir. Bu nedenle $\mathcal{N}((H^*)^\dagger) = \mathcal{N}(H) \subseteq \mathcal{N}(C^*)$ olduğundan $C - CA^\dagger A = 0$ olacaktır. Böylece $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(C)$ elde edilir. Buradan da

$$FA + HC = 0 \tag{4.60}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik ve $(FA + HC)^* = K^\dagger E - K^\dagger E(FB + HD)$ eşitliği dikkate alındığında $K^\dagger E - K^\dagger EFB + K^\dagger EHD = 0$ olacaktır. Yani (4.51) ve (4.42) ye göre $A^\dagger B + A^\dagger BHCA^\dagger B - A^\dagger BHD = 0$ ve buradan da $A^\dagger B = A^\dagger BHH^\dagger$ elde edilir. Ayrıca $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(C^*)$ olduğundan bu son eşitliğin her iki yanı A ile soldan çarpılırsa $B = BHH^\dagger$ elde edilir ki buda $\mathcal{N}(H^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(B)$ olması demektir.

Sonuç 4.4.7: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^\dagger = \begin{pmatrix} -C^\dagger DF & C^\dagger + C^\dagger DFAC^\dagger \\ F & -FAC^\dagger \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(C) \subseteq \mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(C^*) \subseteq \mathcal{N}(D^*)$ $\mathcal{N}(F) \subseteq \mathcal{N}(A^*)$ $\mathcal{N}(F^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(D)$ olmasıdır. Burada $F = (C - AC^\dagger D)^\dagger$ dir.

Sonuç 4.4.8: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^\dagger = \begin{pmatrix} F & -FBD^\dagger \\ -D^\dagger CF & D^\dagger + D^\dagger CFBD^\dagger \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(D) \subseteq \mathcal{N}(B)$, $\mathcal{N}(D^*) \subseteq \mathcal{N}(C^*)$ $\mathcal{N}(F) \subseteq \mathcal{N}(B^*)$ $\mathcal{N}(F^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(C)$ olmasıdır. Burada $F = (A - BD^\dagger C)^\dagger$ dir.

Sonuç 4.4.9: M matrisi (4.20) deki gibi parçalanmış bir matris olsun. Bu takdirde

$$M^\dagger = \begin{pmatrix} -HDB^\dagger & H \\ B^\dagger + B^\dagger AHDB^\dagger & B^\dagger AH \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(D)$, $\mathcal{N}(B^*) \subseteq \mathcal{N}(A^*)$ $\mathcal{N}(H) \subseteq \mathcal{N}(D^*)$ $\mathcal{N}(H^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A)$ olmasıdır. Burada $H = (C - DB^\dagger A)^\dagger$ dir.

4.4.7- 4.4.9 sonuçlarının ispatları Sonuç 4.4.6 nın ispatından elde edilebilir. Çünkü U ve V uygun mertebeden üniter matrisler olmak üzere eğer $P = UMV$ şeklinde ise, bu takdirde $P^\dagger = V^* M^\dagger U^*$ olacaktır. Örneğin Sonuç 4.4.8 i düşünerek $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ile uygun şekilde parçalayarak $U = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ ve $V = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ seçersek $P = UMV = \begin{pmatrix} C & B \\ D & A \end{pmatrix}$ olacaktır. Bu takdirde Sonuç 4.4.6 kullanılarak $P^\dagger$ inversi kolayca elde edilir. Bu durumda blokların uygun bir özdeşleştirmesi yapılarak $M^\dagger = VP^\dagger U$ den Sonuç 4.4.8 elde edilir.

Örnek 4.4.1: M matrisi aşağıdaki şekilde verilsin. Yukarıda verilen metotları kullanalım.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. M matrisini $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ şeklinde parçalayalım. Bu durumda Teorem 4.4.1 u uygulayarak

$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = 0_{2x2}$, $S = 0_{1x2}$ ve $L = 0_{2x2}$ alalım. Bu durumda $L = 0_{2x2}$ olduğundan Sonuç 4.4.4 yi uygulayabiliriz. Sonuç 4.4.4 de verilen notasyonlar altında

$T = K^\dagger E = D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

olacağı kolayca görülebilir. Sonuç olarak basit bir hesaplamayla

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{3} & \frac{4}{16} \\ \frac{4}{16} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kare olmayan ya da kare olduğu halde bilinen anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve lineer denklem sistemlerinin genel durumda çözümünde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de sağlayan genelleştirilmiş invers adı verilen bir kavram ele alınmıştır. Bu amaçla bir matrisin genelleştirilmiş inversi, yansımalı genelleştirilmiş inversi ve Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca her hangi bir matrisi 2x2 lik blok matrise parçalayarak çeşitli durumlarda bu matrislerin ayrı ayrı genelleştirilmiş inversleri ve bu inversleri hesaplama yöntemleri verilmiştir.

Yapılan bu çalışmalara ilaveten daha değişik parçalanmış matrislerin genelleştirilmiş inversleri için hesaplama yöntemleri geliştirilebilir. Ayrıca bu inverslerin hesaplanmasında kullanılmak üzere bilgisayar programları türetilerek bu programlardan veya algoritmalardan faydalanılabilir. Elde edilen bu genelleştirilmiş inversler lineer denklem sistemlerinin çözümlerine uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

Adetunde I.A. ve ark., 2010. On the Generalized Inverse of a Matrix. American Journalof Scientific Research, Issue 7, 77-89 s.

Akdeniz, F., Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No: 38.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 1993. Around a Formula for The Rank for a Matrix Product with Some Statistical Applications, in: R.S. Rees (Ed.), Graphs, Matrices, and Designs: Festschrift in Honor of Norman J. Pullman on His Sixtieth Birthday, Marcel Dekker, New York, 1-18 s.

Baksalary, J. K., Styan, G.P.H., 2002. Generalized inverses of partitioned matrices in Banachiewicz-Schur form, Linear Algebra and its Appl. 354,41-47.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2007. Particular formulae for the moore-Penrose inverse of a coloumnwise partitioned matrix, Linear Algebra and its Appl. 421, 16-23.

Baksalary K.J., Baksalary, O. M. 2004. Relationships between generalized inverses of a matrix and generalized inverses of its rank-one-modifications. Linear Algebra and its Appl. 388, 31-44.

Ben-Israel, A., Charnes, A., 1963, Contributions to the theory of generalized inverses. SIAM J. Appl. Math., Vol. 11, 667-699 s.

Bhimasankaram, P., Mitra, S. K., 1969, On a theorem of Rao on g-inverses of matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 31, 365-368 s.

Chipman, J. S., Rao, M. M., 1964, Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Anal. Appl., Vol. 9, 1-11 s.

Chipman, J. S., 1968, Specification problems in regression analysis, Theory and Application of Generalized Inverses and Matrices, Symposium Proceedings, Texas Technological College. Mathematics Series No. 4, 114-176 s.

Doymuş, N., 2006. Matrislerin Genelleştirilmiş Tersleri ve Kronecker Çarpımlarının Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sivas, 63 s.

Greville, T. N. E., 1959, The pseudo-inverse of a rectangular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIA M Rev., Vol. 1, 38-43 s.

Hacısalihoğlu H.H., 1977. *Lineer Cebir*. Matbaa Teknisyenleri Koll. Şti., İstanbul, 716 s.

Hung, C.H., Markham, T.L. 1975. The Moore-penrose inverces of a partitioned matrix $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$. Czechoslavak Math. Journal, 25, 3, 354-361.

Hung, C.H., Markham, T.L. 1975. The Moore-penrose inverces of a partitioned matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Linear Algebra and its Applications, 11,73-86.

Lancaster, P., 1969. *Theory of Matrices*, Academic Pres, New York, 570 s.

Marsaglia, G., Styan, G.P.H., 1974. Rank Conditions for Generalized Inverses of Partitioned Matrices. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A Vol. 36, No. 4 , 437-442 s.

Mihalyffy, L. 1971. An Alternative representation of the generalized inverces of partitioned matrices, Linear Algebra and its Appl. 4, 95-100.

Mitra, S. K., 1968, On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 107-114 s.

Mitra, S. K., 1968, A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya Ser. A, Vol. 30, 323-330 s.

Penrose, R., 1955, A generalized inverse for matrices, Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 51, 406-413 s.

Radhakrishna Rao, C., 1962, A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. Vol. 24, 152-158 s.

Radhakrishna Rao, C., 1965, Linear Statistical Inference and its Applications, New York, Wiley.

Radhakrishna Rao, C., 1966, *Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics*, Research papers in Statistics, Festschrift for J. Neyman, New York, Wiley,

Radhakrishna Rao, C., 1967, Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, Sankhya Ser. A, Vol. 29, 317-342 s.

Rao, C.R., Mitra, S.K. 1971. Generalized inverse if matrices and its Applications, Wiley, New York.

Tian, Y., 1999. Rank Equalities Related to Generalized Inverses of Matrices and Their Applications. Yüksek Lisans Tezi, Concordia University, Montréal, Quebec, Canada, 156 s.

Tian, Y., Styan, G.P.H., 2001. Rank Equalities for Idempotent and Involutory Matrices. Linear Algebra Appl. 335, 101-117 s.

Tian, Y. 2004. Using rank formulas to characterize equalities for Moore-Penrose inverses of matrix products. Applied Mathematics and Computation, 147, 581-600 s.

Tian, Y., Takane, Y. 2004. More on generalized invercés of partitioned matrices with Banachiewicz-Schur forms, Applied Mathematics and Computation, 148, 1-13 s.

Tian, Y. 2004. Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverses, Linear Algebra and its Appl. 355, 187-214.

Tian, Y. 2004. More on maximal and minimal ranks of Schur complements wih applications, Appl. Math. Comp.152, 675-692.

Tseng, Y. Y., 1949, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol. 67, 431-434 s.

Tseng, Y. Y., 1949, Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 67, 607-610 s.

Yongge T., Jürgen G. 2006. Invariance properties of a triple matrix product involving generalized inverses, Linear Algebra and its Appl. 417, 94-107

Yongge Tian, George P.H. Styan. 2009. On some matrix equalities for generalized inverses with applications, Linear Algebra and its Appl. 430, 2716-2733.

Zekraoui, H., Guedjiba, S., 2008. On Algebric Properties of Generalized Inverses of Matrices, Internal Journal of Algebra. Vol. 2, no. 13, 633-643 s.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eda GÜNEY

Doğum Yeri : Ordu

Doğum Tarihi : 08.07.1983

Yabancı Dili : İngilizce

E-mail : eda_gunerr@hotmail.com

İletişim Bilgileri : Özel Altaş Koleji, Matematik Öğretmeni, Ordu/Merkez

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/ Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2005
Y.Lisans(tezsiz)	Matematik Öğretmenliği	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2008
Y. Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2013