T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORDEN MANİFOLDLARI ÜZERİNE

Yasemin ATEŞOĞLU

Bu tez,

Matematik Anabilim Dalında

Yükesek Lisans

derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2014

TEZ ONAYI

Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Yasemin ATEŞOĞLU'ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**NORDEN MANİFOLDLARI ÜZERİNE**" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Başkan:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Melek ARAS Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza:
Üye:	Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun .../.../2014 tarih ve 2014/... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet Fikret BALTA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza:

Yasemin ATEŞOĞLU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

NORDEN MANİFOLDLARI ÜZERİNE
Yasemin ATEŞOĞLU
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2014
Yüksek Lisans Tezi, 89 sayfa

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI

Bu tez Norden manifoldlarının geometrisi hakkında olup 7 bölüm halinde hazırlanmıştır. Birinci bölümde çalışmanın amacından bahsedilerek bir giriş verilmiştir. 2. bölümde geometride uygulanan iki boyutlu cebirler teorisi, holomorf fonksiyonlar ve cebirsel yapılardan bahsedilmiştir. 3. bölümde pür tensörlere uygulanan Tachibana ve Vishnevskii operatörlerinden bahsedilmiştir. 4. bölümde Norden manifoldları hakkında bilgi verilmiş ve Tachibana operatörü kullanılarak Kahler Norden manifoldlarının Riemannian eğriliği ve skaler eğriliği hakkında bazı özelliklerden bahsedilmiştir. 5. bölümde Norden-Walker metriklerinden bahsedilmiş ve dört boyutlu Walker manifoldları üzerinde hemen hemen Norden yapının integrallenebilirliği ve holomorf (Kähler) şartlarına bakılmıştır. 6. bölümde ise Norden-Walker 4- manifoldları üzerindeki zıt hemen hemen kompleks yapılardan bahsedilmiş ve Goldberg varsayımları hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Norden Metriği, Norden Manifoldu, Walker Manifoldu, Kähler Norden Manifoldu, Tachibana Operatör, Holomorf Tensör, Pür Tensör

ABSTRACT

ON NORDEN MONIFOLDS
Yasemin ATEŞOĞLU
Ordu University
Institute for Graduate Stadies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2014
MSc. Thesis Thesis, 89 page

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI

The introduction part and the aim of the thesis are covered in the first chapter. In the second chapter, the theory of the two-dimensional algebra applied to Geometry holomorphic functions and algebraic structures are given. The third chapter is included with the operators of Tachibana and Vishnevskii which are applied to pure tensor fields. The information about Norden manifolds is given and by considering the theory of Tachibana operators, some properties about Riemannian curvature tensors and curvature scalars of Kähler-Norden manifolds are presented in the fourth chapter. In the fifth chapter, Norden-Walker metric are discussed and, the integrability and holomorphic(Kähler) conditions of almost Norden structures on 4-dimensional Walker manifolds are given. Lastly in the sixth chapter opposite almost complex structures on 4-dimensional Walker manifolds are discussed and the information about Goldberg conjecture is given.

Keywords: Norden Metric, Norden Manifold, Walker manifold, Kähler-Norden Manifold, Tachibana Operator, Holomorpic Tensor, Pure Tensor.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI'ya en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Hem bu zorlu ve uzun süreçte hemde hayatım boyunca yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca başta Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan Karataş olmak üzere, lisansüstü eğitimim sırasında ders aldığım ve tecrübelerinden yararlandığım Matematik bölümündeki tüm öğretim üyelerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$C^{\gamma}_{\alpha\beta}$	:	Cebirin Yapı Sabitleri
m	:	m Boyutlu Hiperkompleks Cebir
D	:	Türev Operatörü
G	:	Twin Norden Metriği
L_X	:	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
R^{h}_{ijk}	:	Eğrilik Tensörü
S^{h}_{ij}	:	Burulma Tensörü
Γ^{k}_{ij}	:	Crisstoffel Sembolü
$T^*(M_n)$	:	M_n Manifoldunun Kotanjant Demeti
$T^*_x(M_n)$	:	$x \in M_n$ Noktasındaki Kotanjant Uzay
$T^p_q(M_n)$	:	M_n manifoldu Üzerinde (p,q) Tipli Tensör Demet
$\Im^p_q(M_n)$	:	(p,q)-tipli Tensör Modülü
$\omega \in \overset{*}{\Im}{}^p_q(M_n)$	:	(p,q)-tipli Pür Tensör Modülü
$X_r(\mathfrak{A})$	:	Holomorfik $\mathfrak{A}$ Manifoldunun Reel Modeli
∇_x	:	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
π	:	Tabii İzdüşüm
Φ	:	Tachibana Operatörü
$\overset{C}{\otimes}$	:	Pür Çarpım
V	:	Dikey Lift

1. GİRİŞ

XIX. yüzyılın sonundan başlayarak iki boyutlu cebirler geniş biçimde geometride uygulanmaya başlamıştır. (Vishnevskii ve ark., 1985), (Norden, 1960) sonlu boyutlu değişmeli birleşmeli cebirler hakkında bazı çalışmalar yapmışlardır.

Diferensiyel Geometride 1960'lı yıllardan başlayarak hızlı gelişen alanlardan biride Norden manifoldların teorisidir. Rusya'nın Kazan Üniversitesisinin profesörü A.P. Norden yazdığı makalesinde (Norden, 1960) 4-boyutlu pseudo-Riemannian neutral uzaylarda hemen hemen kompleks yapıya göre B-metrik denilen metriklerin varlığı hakkında konuşmuştur.

XX. yüzyılın 70. yıllırından sonra Norden metrikleri karşımıza pür ismi ile çıkmaya başlamıştır (Kruchkovich, 1972), (Salimov, 1983), (Vishnevskii, 1985). Norden metrikleri kendi ve anti hermitian ismi ile XX. yüzyılın 80. yıllarından sonra literatürlerde görünmeye başlamıştır (Dragomir ve Francaviglia, 2000), (Ganchev ve Borisov, 1986).

(Matsushita, 2004), (Walker, 1950) çalışmasından faydalanarak simplektik yapıya sahip olan 4-boyutlu Walker manifoldlarını tanımlıyor. Simplektik geometride ve fizikte, özelliklede genel izafiyet teorisinde geniş uygulamalar bulan Walker manifoldları günümüzde aktif biçimde öğrenilmektedir (Matsushita, 2005), (Davidov ve ark., 2008).

Manifoldlar üzerindeki cebirsel yapıların öğrenilmesinde ϕ-operatör denilen operatörlerin öğrenilmesi büyük önem taşır. Bu operatörler ilk olarak hemen hemen kompleks ve kompleks yapılar ile bağlantılı olarak ortaya çıkmış ve bu tür yapılara göre pür diferansiyel geometri objelerinin uygun olarak hemen hemen analitiklik ve analitiklik konularının araştırılmasında vazgeçilmez bir operatör olduğu kanıtlanmıştır. İlk olarak bu operatör (Tachibana, 1960) çalışmasında hemen hemen kompleks yapı için verilmiştir. Sonra ise bu operatör (Tachibana ve Koto, 1962), (Yano ve Ako, 1968), (Sato, 1966), (Shirokov, 1966), (Kruchkovic, 1972) tarafından kullanılmıştır. (Salimov, 1994) çalışmalarında ise ϕ-operatör yapılarının liflerin modellenmesinde önemli yeri olabileceği konusunda yol gösterimi vermiş ve bu operatörü kullanarak bir sürü çalışmalar yapmıştır. Ve "Tensör operatörleri ve onların uygulamaları" adlı bir kitap yazmıştır (2013).

Diferensiyellenebilir manifold üzerinde verilmiş sonlu sayıda $(1,1)$- tipli tensör(afinör) alanlarıyla tanımlanan π-yapılar modern diferensiyel geometrinin önemli konularındandır. π-yapılar özel durumlarda cebirsel olabilmektedir. Cebirsel π-yapı integrallenebilir olduğunda ise, bu cebir üzerinde inşaa edilmiş uzayların, cebrin temsilini taşıyan manifoldlar ile modelllerini vermeye imkan sağlar. Cebirsel π-yapının integrallenebilir olması, reel manifolda cebirsel holomorf manifoldların dahil edilmesine imkan sağlamaktadır.

g metriği, φ-hemen hemen kompleks yapıyı, X ve Y ise manifold üzerinde keyfi vektör alanlarını göstermek üzere, eğer g, φ'ye göre pür ise yani $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y)$ ise bu durumda bu tür manifoldlara Norden manifoldları denir.

Bu tez çalışması Norden manifoldları üzerine derleme bir tezdir. Ve bu tez, öncelikli olarak (Salimov, Iscan, 2009), (Iscan, Salimov, 2010) ve (Salimov, Iscan, 2010) çalışmalarından ve "Tensor operators and their applications" adlı Salimov'un kitabından faydalanılarak yazılmıştır.

Bu kaynaklar ışığında Norden Walker metrikleri, Norden Walker manifoldları ve Kähler Norden manifoldlarının bazı özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Cebirsel Teori

2.1.1 Birleşimli Cebirler

$\mathbb{R}$ üzerinde birleşimli m-boyutlu $\mathfrak{A}_m$ cebrini ele alalım (hiperkompleks cebir [?]). Cebirin bazı $\{e_\alpha\}, \alpha = 1, \ldots, m$ ve yapı sabitleri $C^\gamma_{\alpha\beta}$ olsun:

$$e_\alpha \bullet e_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

$C^\gamma_{\alpha\beta}$ yapı sabitleri, $\bullet : \mathfrak{A}_m \times \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{A}_m$ şeklinde (1,2)-tipli tensörün bileşenleridir. Bu çalışmada $\mathfrak{A}_m$ nin birimli cebir olduğunu, yani $e_1 = 1$ olduğunu kabul edeceğiz.

Matrisleri

$$C_\alpha = (C^\gamma_{\alpha\beta}), \quad \tilde{C}_\alpha = (C^\gamma_{\beta\alpha}), \tag{2.1.1}$$

şeklinde gösterelim. Burada γ ve β sırasıyla satır ve sütun numaralarını göstersinler. O zaman birleşimli olma şartı aşağıdaki birbirine denk olan üç şarttan biri ile verilir:

$$C_\alpha C_\beta = C^\sigma_{\alpha\beta} C_\sigma, \tag{2.1.2}$$

$$\tilde{C}'_\alpha \tilde{C}'_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} \tilde{C}'_\gamma, \tag{2.1.3}$$

$$C_\alpha \tilde{C}_\beta = \tilde{C}_\beta C_\alpha. \tag{2.1.4}$$

Burada $\tilde{C}'_\alpha$, $\tilde{C}_\alpha$nin transpozudur. $e_1 = 1 = \varepsilon^\sigma \tilde{e}_\sigma$ den

$$\varepsilon^\sigma C_\sigma = \varepsilon^\sigma \tilde{C}_\sigma = I = (\delta^\beta_\alpha) \tag{2.1.5}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada δ^β_α Kronecker deltasıdır.

$C(\mathfrak{A})$ ve $\tilde{C}'(\mathfrak{A})$, sırasıyla C_α ve $\tilde{C}'_\alpha$ tipindeki matrislerin cebirleri olsunlar (bakınız (2.1.2) ve (2.1.3)).

$$\mathfrak{A}_m \ni a = a^\sigma e_\sigma \to a^\sigma C_\sigma = C(a) \in C(\mathfrak{A}), a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{R}$$

şeklinde $\rho_1 : \mathfrak{A}_m \to C(\mathfrak{A})$ dönüşümüne I tip regüler tasvir denir. ρ_1 tasvirinin izomorfizm olduğu açıktır. Benzer şekilde II tip $\rho_2 : \mathfrak{A}_m \to \tilde{C}'(\mathfrak{A})$ regüler tasvirini

$$\mathfrak{A}_m \ni a = a^\sigma e_\sigma \to a^\sigma \tilde{C}'_\sigma = \tilde{C}'(a) \in \tilde{C}'(\mathfrak{A}), \quad a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu tasvir de izomorfizmdir. Bu çalışmada ele alınan tasvirleri I tip tasvirler olarak kabul edeceğiz. Burada hatırlatalım ki, sadelik açısından I tip regüler tasvir yerine genelde regüler tasvir ifadesini kullanacağız.

(2.1.4)'den, her $A = a^\sigma \tilde{C}_\sigma,\ \ a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{R}$'nin $C(\mathfrak{A})$ cebrinin komütatörüne ait olduğunu söyleyebiliriz. Tersine, (2.1.5)'i kullanarak her $C \in C(\mathfrak{A})$ için $AC = CA$ ise $A = a^\alpha \tilde{C}_\alpha$ olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Gerçekte, $C = C_\alpha, \alpha = 1, \ldots, m$ yazarsak, $A^\sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} = C^\sigma_{\alpha\gamma} A^\gamma_\beta$ yazabiliriz. ε^β ile bu eşitliğin kontraksiyonundan

$$\begin{aligned} A^\sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta}\varepsilon^\beta &= C^\sigma_{\alpha\gamma} A^\gamma_\beta \varepsilon^\beta, \\ A^\sigma_\gamma \delta^\gamma_\alpha &= C^\sigma_{\alpha\gamma} a^\gamma, \\ A &= (A^\sigma_\gamma) = a^\gamma (C^\sigma_{\alpha\gamma}) = a^\gamma \tilde{C}_\gamma, \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $a^\gamma = A^\gamma_\beta \varepsilon^\beta$ yani $A = \tilde{C}$'dir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi yazabiliriz [?]:

Teorem 2.1.1 *A $(m \times m)$-tipinde bir matris olsun. $AC_\alpha = C_\alpha A$ olması için gerek ve yeter şart $A = a^\alpha \tilde{C}_\alpha$ olmasıdır.*

Benzer şekilde aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 2.1.2 *A $(m \times m)$-tipinde bir matris olsun. $A\tilde{C}'_\alpha = \tilde{C}'_\alpha A$ olması için gerek ve yeter şart $A = a^\alpha C'_\alpha$ olmasıdır.*

2.1.2 Değişimli Cebirler

Değişimli hiperkompleks cebirleri ele alarak sınırlama yapacağız. Bu ve bundan sonraki bölümlerde $\mathfrak{A}_m$ cebrimizin değişimli hiperkompleks cebir olduğunu kabul edeceğiz. Değişimli olma şartı olarak, $e_\alpha \bullet e_\beta = e_\beta \bullet e_\alpha$ şartına denk olan

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = C^\gamma_{\beta\alpha} (C_\alpha = \tilde{C}_\alpha), \tag{2.1.6}$$

$$C^\gamma_{\alpha\sigma} C^\sigma_{\beta\delta} = C^\gamma_{\beta\sigma} C^\sigma_{\alpha\delta} (C_\alpha C_\beta = C_\beta C_\alpha) \tag{2.1.7}$$

formlardan birini yazabiliriz.

$C_\alpha = \tilde{C}_\alpha$ için (bakınız (2.1.1)), $\tilde{C}'(\mathfrak{A})$=$C'(\mathfrak{A})$ eşitliğini yazabiliriz. Bu yüzden, $C'(\mathfrak{A})$'ya değişimli cebirlerin tronspoz regüler tasvirleri denir. Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.2'den aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.1.3 *$\mathfrak{A}_m$ değişimli hiperkompleks cebir olsun. O zaman $C(\mathfrak{A})$ ve $C'(\mathfrak{A})$ $(m\times m)$-tipindeki matrisler cebrinin maksimal değişimli alt cebirleridir.*

Değişimli cebirler arasında önemli rolü Frobenius cebirleri oynar. Eğer öyle λ_γ sabitleri varsa ki,

$$\varphi_{\alpha\beta} = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\lambda_\gamma \tag{2.1.8}$$

matrisi regüler olsun, onda $\varphi_{\alpha\beta}$ metriğine Frobenius metriği denir. Burada $\{e_\alpha\}$ bazı için $e^\alpha = \varphi^{\alpha\beta}e_\beta$ olacak şekilde $\{e^\alpha\}$ dual bazını tanımlayabiliriz. Frobenius metriği için

$$\varphi_{\alpha\sigma}C^{\sigma}_{\gamma\beta} = \varphi_{\beta\sigma}C^{\sigma}_{\gamma\alpha}, \qquad \varphi^{\alpha\sigma}C^{\beta}_{\gamma\sigma} = \varphi^{\beta\sigma}C^{\alpha}_{\gamma\sigma}, \tag{2.1.9}$$

$$e^\alpha \bullet e_\beta = C^{\alpha}_{\beta\gamma}e^\gamma, \quad e^\alpha \bullet e^\beta = \varphi^{\alpha\sigma}C^{\beta}_{\gamma\sigma}e^\gamma, \; \varphi_{\alpha\beta}\varepsilon^\beta{=}\lambda_\alpha, \tag{2.1.10}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Burada ε^β'lar, $e_1 = 1$'in bileşenleridir.

ψ: $\mathfrak{A}_m \to \mathfrak{A}_m$ otomorfizmi için ψ involüsyon ise yani $\psi^2 = id$ ise ψ otomorfizmine $\mathfrak{A}_m$ cebrinde eşlenik işlemi denir. ψ:$x \to \bar{x}$, $\bar{x} \in \mathfrak{A}_m$ eşlenik işlemi tanımından

$$\bar{e}_\alpha = \psi(e_\alpha) = \psi^{\beta}_{\alpha}e_\beta, \;\; \psi^{\alpha}_{\gamma}\psi^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{2.1.11}$$

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta}\psi^{\alpha}_{\sigma}\psi^{\beta}_{\varepsilon} = C^{\tau}_{\sigma\varepsilon}\psi^{\gamma}_{\tau}, \tag{2.1.12}$$

$$\psi^{\beta}_{\alpha}\varepsilon^\alpha = \varepsilon^\beta, \tag{2.1.13}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Burada $e_1 = 1 = \varepsilon^\beta e_\beta$ şeklindedir. $a \in \mathfrak{A}_m$ için eşlenik eleman

$$a = a^\alpha e_\alpha \to \bar{a} = a^\alpha \bar{e}_\alpha = a^\alpha \psi^{\sigma}_{\alpha} e_\sigma$$

ile verilir. (2.1.11)'den, $\mathfrak{A}_m$'nin $\psi^{\alpha}_{\beta} = \pm\delta^{\alpha}_{\beta}$ olacak şekilde uygun bazı vardır.

$$\psi^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} \psi^{\alpha_1}_{\beta_1}, & \psi^{\beta}_{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta} \text{ ise,} \\ \psi^{\alpha_2}_{\beta_2}, & \psi^{\beta}_{\alpha} = -\delta^{\alpha}_{\beta} \text{ ise} \end{cases}$$

yazalım. Burada $1 \leq \alpha_i < \alpha$, $1 \leq \beta_i < \beta$, $i = 1, 2$ şeklindedir. Bu durumda (2.1.11)'den,

$$\bar{e}_{\alpha_1} = e_{\alpha_1}, \bar{e}_{\alpha_2} = -e_{\alpha_2}$$

yazabiliriz. $\psi(e_1) = e_1$ olduğu için (bakınız (2.1.13)), $e_1 \in \{e_{\alpha_1}\}$ olur. Burada $\{e_{\alpha_1}\}$, $e_{\alpha_1}, 1 \leq \alpha_1 < \alpha$ ile gerilen düzlemi tanımlar. Örneğin, $\mathfrak{A}_2 = \mathbb{C}(m = 2)$ kompleks bir cebir ise

$$(\psi^{\alpha}_{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\bar{e}_1 = e_1 = 1, \;\; \bar{e}_2 = -e_1 = -i, \;\; i^2 = -1$$

olur. (2.1.14)'ü gözönünde bulundurarak, farklı indisler için (2.1.12) ifadesini yazarak adapte olmuş baza göre

$$C^{\gamma_2}_{\alpha_1\beta_1} = 0, C^{\gamma_2}_{\alpha_2\beta_2} = 0, C^{\gamma_1}_{\alpha_1\beta_2} = C^{\gamma_1}_{\beta_2\alpha_1} = 0$$

eşitliklerini bulabiliriz.

2.1.3 Holomorfik fonksiyonlar

$\mathfrak{A}_m$ cebrinde $z = x^\alpha e_\alpha$ değişkenini alalım. Burada $x^\alpha (\alpha = 1, \ldots, m)$ reel değişkenler olsunlar. Reel değerli $y^\beta(x) = y^\beta(x^1, \ldots, x^m$, $\beta = 1, \ldots, m$ C^∞-fonksiyonlarını kullanarak $z \in \mathfrak{A}_m$ değişkeninin

$$w = y^\beta(x)e_\beta$$

hiperkompleks fonksiyonunu tanımlayabiliriz. $dz = dx^\alpha e_\alpha$ ve $dw = dy^\alpha e_\alpha$ sırasıyla z ve $w(z)$'nin diferensiyelleri olsunlar.

$$dw = w'(z)dz \tag{2.1.14}$$

olacak şekilde $w'(z)$ fonksiyonları varsa $w = w(z)$ fonksiyonuna holomorfik fonksiyon $w'(z)$'ye de $w(z)$'nin türevi denir.

Teorem 2.1.4 [**?**], [68], [71], [81] $w = w(z)$ hiperkompleks fonksiyonunun holomorfik olması için gerek ve yeter şart

$$C_\alpha D = DC_\alpha \tag{2.1.15}$$

Scheffers şartlarını sağlamasıdır. Burada $D = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$, $y^\alpha(x)$'nın Jacobian matrisidir.

İspat. $w = w(z)$ holomorfik fonksiyon olsun. $w'(z) = \tilde{w}^\alpha e_\alpha$ yazalım. Bu durumda (2.1.14)'ten

$$dw = dy^\alpha e_\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta e_\alpha = \tilde{w}^\alpha e_\alpha dx^\beta e_\beta = \tilde{w}^\alpha dx^\beta C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan,

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = \tilde{w}^\alpha C^\gamma_{\alpha\beta} \tag{2.1.16}$$

elde ederiz. Böylece, $w = w(z)$ hiperkompleks fonksiyonunun holomorfik fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ Jacobian matrisinin (2.1.16) formunda olmasıdır. (2.1.16)'yı $\varepsilon^\sigma (1 = \varepsilon^\sigma e_\sigma)$ ile kontraksiyon yaparak ve (2.1.5)'i kullanarak

$$\tilde{w}^\gamma = \varepsilon^\beta \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\beta}$$

eşitliğini, yani

$$w'(z) = \varepsilon^{\beta}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}e_{\gamma} \tag{2.1.17}$$

eşitliğini buluruz.

(2.1.16)'yı Teorem 2.1.1'e uygularsak (2.1.16) şartının Scheffers şartına denk olduğunu görürüz. Böylece ispat tamamlanır.

(2.1.17)'den, $\varepsilon^{\beta}\dfrac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}$ nun Jacobian matrisi

$$D' = \left(\varepsilon^{\beta}\frac{\partial^2 y^{\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}}\right) = \varepsilon^{\beta}\partial_{\beta}D$$

bileşenlerine sahiptir. Burada $D = \left(\dfrac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)$ şeklindedir ve ayrıca $D' = \varepsilon^{\beta}\partial_{\beta}D$ Jacobian matrisi Scheffers şartını sağlar. Buradan anlarız ki, $w(z)$ nin $w''(z)$, $w'''(z), \ldots$ türevleri de vardır.

Örneğin, $\mathfrak{A}_2 = \mathbb{C}$ ise, (2.1.15) Scheffers şartı Cauchy-Riemann şartına indirgenmiş olur. Gerçekten,

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 \\ C_{11}^2 & C_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} C_{21}^1 & C_{22}^1 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliklerine dayanarak, (2.1.15) den $z = x^1 + ix^2, w = y^1(x^1, x^2) + iy^2(x^1, x^2), i^2 = -1$ olmak üzere

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}, \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = -\frac{\partial y^1}{\partial x^2}$$

yazabiliriz.

Not 2.1.1 Holomorfik ve analitik kompleks fonksiyonlar kavramlarının birbirine denk oldukları bilinir. Eğer $w(z)$ yakınsak kuvvet serileri şeklinde yazılabilirse, $w = w(z)$ holomorfik fonksiyonunun analitik olduğu söylenir. Genelde, hiperkompleks fonksiyonlar için holomorfik ve analitik fonksiyonlar kavramları denk değillerdir (bakınız [101, s.88],[7]).

Holomorfik hiperkompleks fonksyonlar kavramı çok cebirsel değişkenler için genelleştirilebilir.

$$z^u = x^{(u-1)m+\alpha}e_{\alpha}, (u = 1, \ldots, r)$$

$\mathfrak{A}_m$ cebrinin değişkenleri olsun. $w(z^1, \ldots, z^r) = y^{\beta}(x^1, \ldots, x^{rm})e_{\beta}$ fonksiyonunun $z^1, \ldots, z^r$ değişkenlerinin holomorfik fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart keyfi u için $D_u = \left(\dfrac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{(u-1)m+\beta}}\right), u = 1, \ldots, r$ olmak üzere $C_{\alpha}D_u = D_uC_{\alpha}$ şartının sağlanmasıdır.

Holomorfik hiperkompleks fonksyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. w_1 ve w_2 holomorfik fonksiyonlar ise o zaman $w_1 + w_2$ holomorfik fonksiyonudur ve $(w_1 + w_2)' = w_1' + w_2'$ dir,

ii. w_1 ve w_2 holomorfik fonksiyonlar ise o zaman $w_1 w_2$ holomorfik fonksiyonudur ve $(w_1 w_2)' = w_1' w_2 + w_2' w_1$ dir,

iii. F ve w sırasıyla w ve z'nin holomorfik fonksiyonları ise o zaman $F = F(w(z))$, z'nin holomorfik fonksiyonudur ve $F_z' = \dfrac{dF}{dz}, w' = \dfrac{dw}{dz}$ olmak üzere $F_z' = \dfrac{dF}{dw} w'$ şeklindedir.

İspat. (*i.*) $w_1 w_2 = w_1^\alpha w_2^\gamma e_\alpha e_\gamma = w_1^\alpha w_2^\gamma C_{\alpha\gamma}^\beta e_\beta = w = w^\beta e_\beta$ dersek, (2.1.17)'den

$$\begin{aligned}(w_1 w_2)' &= \varepsilon^\sigma(\partial_\sigma w^\beta)e_\beta = \varepsilon^\sigma C_{\alpha\gamma}^\beta(\partial_\sigma(w_1^\alpha w_2^\gamma))e_\beta \\ &= \varepsilon^\sigma C_{\alpha\gamma}^\beta((\partial_\sigma w_1^\alpha)w_2^\gamma + w_1^\alpha(\partial_\sigma w_2^\gamma))e_\beta \\ &= ((\varepsilon^\sigma \partial_\sigma w_1^\alpha)w_2^\gamma + w_1^\alpha(\varepsilon^\sigma \partial_\sigma w_2^\gamma))e_\alpha e_\gamma \\ &= w_1' w_2 + w_2' w_1\end{aligned}$$

yazılır ve (*ii.*)'ye benzer şekilde (*i.*)'de ispatlanır.

(*iii.*) $F = F_\alpha e_\alpha$, $w = y^\beta(x)e_\beta$, $z = x^\gamma e_\gamma$ diyelim. $\frac{dF}{dw} = \tilde{F}^\alpha e_\alpha, w' = \tilde{w}^\alpha e_\alpha$ ise (2.1.17)'den,

$$\begin{aligned}F_z' = \frac{dF}{dz} &= \varepsilon^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^\alpha} e_\beta \\ &= \varepsilon^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial y^\gamma}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\alpha} e_\beta \\ &= \varepsilon^\alpha \tilde{F}^\sigma C_{\sigma\gamma}^\beta \tilde{w}^\theta C_{\theta\alpha}^\gamma e_\beta \\ &= \tilde{F}^\sigma C_{\sigma\gamma}^\beta \tilde{w}^\theta \delta_\theta^\gamma e_\beta \\ &= \tilde{F}^\sigma \tilde{w}^\gamma e_\sigma e_\gamma \\ &= \frac{dF}{dw}\frac{dw}{dz} = \frac{dF}{dw} w'\end{aligned}$$

yazarız. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.1.1 $\mathfrak{A}_2 = \mathbb{R}(\varepsilon)$, $\{1, \varepsilon\}$, $\varepsilon^2 = 0$ kanonik bazına sahip dual cebir olsun. $C_2 = \begin{pmatrix} C_{21}^1 & C_{22}^1 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eşitliğini kullanarak (2.1.15) şartını $z = x^1 + \varepsilon x^2$, $w(z) = y^1(x^1, x^2) + \varepsilon y^2(x^1, x^2), \varepsilon^2 = 0$ olmak üzere aşağıdaki denk şarta indirgemiş oluruz:

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}.$$

Bu son denklemden

$$w(z) = f(x^1) + \varepsilon(x^2 f'(x^1) + g(x^1))$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu formdaki $w = w(z)$, synectic fonksiyon formundadır denir [93], [101, s.165]. $g(x^1) = 0$ ise, $w(z) = f(x^1) + \varepsilon x^2 f'(x^1)$ fonksiyonuna $f(x^1)$ C^∞-fonksiyonlarının $\mathbb{R}(\varepsilon)$ cebrine doğal genişlemesi denir.

Örnek 2.1.2 $\mathfrak{A}_2 = A(e),\ e^2 = 1$ parakompleks sayılar cebiri olsun. $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden Scheffers şartını $z = x^1 + ex^2$, $w(z) = y^1(x^1, x^2) + ey^2(x^1, x^2)$, $e^2 = 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2},\ \ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2}$$

para-Cauchy-Riemann şartlarına indirgemiş oluruz [7], [16], [16].

2.2 Manifoldlar üzerinde cebirsel $\Pi-$yapılar

Eğer M manifoldu üzerinde $\underset{1}{\varphi}, \underset{2}{\varphi}, \ldots$ (1,1)-tipli tensör (afinor) alanlarının kümesi verilmiş ise bu yapıya M üzerinde poliafinor yapı (veya $\Pi-$yapı) denir ve $\Pi = \{\varphi\}$ ile gösterilir. Eğer her $\varphi \in \Pi$, manifoldun herhangi bir x noktasının U_x komşuluğunda belli bir $\{X_i\}, i = 1, \ldots, n$ çatısında (genelde holonomik değil) sabit forma indirgenebilirse yapıya sert yapı denir [?]. Bu durumda, $\{X_i\}, i = 1, \ldots, n$ çatısına $\Pi-$yapısına göre adapte olmuş çatı denir. Eğer her $\varphi \in \Pi$, diferensiyellenebilir bir atlasın $\{X_i\} = \{\partial_i\}, i = 1, \ldots, n$ holonomik (doğal) adapte olmuş çatıları üzerinde sabit ise, o zaman $\Pi-$yapı integrallenebilirdir denir. Açıkça, integrallenebilir $\Pi-$yapı her zaman serttir. Tersi durum ise $\Pi-$yapı üzerinde sadece belli ilave koşullar altında alınır. Örneğin, $\Pi = \varphi$ ise yani $\Pi-$yapı bir afinordan oluşuyorsa ve sert $\varphi-$yapıyı koruyan M üzerindeki ∇ φ-konneksiyonu burulmasız ise yani $\nabla\varphi = 0$ ise, $\varphi-$yapı integrallenebilirdir [69], [?]. Sade sert yapılar (hemen hemen kompleks, hemen hemen parakompleks yapılar v.b.) için integrallenebilirliğin Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olmasına denk olduğu iyi (bakınız Bölüm II) bilinir.

Tanım 2.2.1 ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Her $\varphi \in \Pi$ için $\nabla\varphi = 0$ ise ∇ ya $\Pi-$yapıya göre $\Pi-$konneksiyon denir.

Tanım 2.2.2 M üzerinde burulmasız $\Pi-$konneksiyon varsa, M üzerindeki $\Pi-$yapıya hemen hemen integrallenebilirdir denir.

Burada hatırlatalım ki, bazı sade $\Pi-$yapılar için ($\varphi-$yapılar, regüler $\Pi-$yapılar v.s.) integrallenebilirlik ve hemen hemen integrallenebilirlik kavramları denktir.

$\mathfrak{A}_m$ hiperkompleks cebir olsun. Eğer $\mathfrak{A}_m \leftrightarrow \Pi$ izomorfizmi varsa, yani M üzerindeki hemen hemen hiperkompleks yapı

$$\underset{\alpha}{\varphi} \bullet \underset{\beta}{\varphi} = C^{\gamma}_{\alpha\beta} \underset{\gamma}{\varphi} \tag{2.2.1}$$

şeklinde ise o zaman poliafinor $\Pi-$yapıya M üzerindeki hemen hemen hiperkompleks yapı denir. Burada $\underset{\alpha}{\varphi}$'lar, $e_\alpha \in \mathfrak{A}_m, \alpha = 1, \ldots, m$ baz elemanlarına karşılık gelen yapısal afinörlerdir.

Tanım 2.2.3 $\underset{\alpha}{\varphi}$ matrisleri $\alpha = 1, \ldots, m$, $\{X_i\}$ adapte olmuş çatısına göre aynı anda

$$\left(\underset{\alpha}{\varphi_j^i}\right) = \begin{pmatrix} C_\alpha 0 \ldots 0 \\ 0 C_\alpha \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots C_\alpha \end{pmatrix}, \ \alpha = 1, \ldots, m; \, i, j = 1, \ldots, n \tag{2.2.2}$$

formuna indirgenebilirse, M üzerindeki hemen hemen hiperkompleks yapıya regüler (veya r-regüler) $\Pi-$yapı denir. Burada $C_\alpha = \left(C_{\alpha\beta}^\gamma\right)$, $\mathfrak{A}_r$ nin regüler tasviri, r ise $C_\alpha-$bloklarının sayısıdır.

Not 2.2.1 (2.2.2)'de C'_α yazarsak, M üzerinde transpoz regüler $\Pi-$yapıya sahip olmuş oluruz. Tanımdan direkt alırız ki, regüler $\Pi-$yapılar sert yapılardır.

Örneğin, hemen hemen kompleks ve parakompleks yapılar için (2.2.2) şartı (2.2.1) şartından direkt çıkar, yani M üzerindeki ($boyM = 2r$) hemen hemen kompleks ve parakompleks yapılar otomatik olarak regüler yapılardır. M üzerindeki $\Pi = \{I, \varphi\}, I = id_M, \varphi^2 = 0$ şeklindeki $\Pi-$yapı, $\mathbb{R}(\varepsilon)$, $\varepsilon^2 = 0$ dual cebrinin izomorfik tasviridir. Fakat genelde, yapı M üzerindeki regüler olmayan $\Pi-$yapıdır (bakınız [79], [80]).

$\Pi = \left\{\underset{\alpha}{\varphi}\right\}, \alpha = 1, \ldots, m$, M üzerinde regüler $\Pi-$yapı olsun. O zaman (2.2.2)'den,

$$n = mr \qquad (n = boyM, m = boy\mathfrak{A}_m), \tag{2.2.3}$$

yazabiliriz. Burada r, $C_\alpha-$bloklarının sayısıdır. Böylece, (2.2.3) şartı M üzerindeki regüler $\Pi-$yapıların varlığı için gerek şarttır. Bu durumda

$$i = (u-1)m + \alpha \qquad (i = 1, \ldots, n; u = 1, \ldots r; \alpha = 1, \ldots, m)$$

veya

$$i = u\alpha, j = v\beta, k = w\gamma, \ldots$$

yazabiliriz. Başka bir ifadeyle, $\underset{\alpha}{\varphi}$ yapısal afinorları

$$\underset{\sigma}{\varphi_j^i} = \underset{\sigma}{\varphi_{v\beta}^{u\alpha}} = \delta_v^u C_{\sigma\beta}^\gamma \tag{2.2.4}$$

(δ_v^u-Kronecker deltası) koordinatlarına sahiptir.

$X_{i'} = S^i_{i'} X_i \ \ (Det(S^i_{i'}) \neq 0)$, regüler $\Pi-$yapısına göre $\{X_i\}$ adapte olmuş çatısının dönüşümleri olsun. O zaman $(S^{i'}_i) = (S^i_{i'})^{-1}$ olmak üzere

$$(\underset{\alpha}{\varphi}{}^{i'}_{j'}) = (S^{i'}_i)(\underset{\alpha}{\varphi}{}^i_j)(S^j_{j'}) \tag{2.2.5}$$

eşitliğini yazabiliriz. Eğer $\{X_{i'}\}$ adapte olmuş çatı ise $X_i \to X_{i'}$ dönüşümüne uygun(makul) dönüşüm denir. Bu durumda $\{X_{i'}\}$ adapte olmuş çatı olduğu için $(\underset{\alpha}{\varphi}{}^{i'}_{j'}) = (\underset{\alpha}{\varphi}{}^i_j)$ olur ve (2.2.5)'den

$$S \underset{\alpha}{\varphi} = \underset{\alpha}{\varphi} S \tag{2.2.6}$$

yazabiliriz. Burada $S = (S^j_{j'})$ ve $\underset{\alpha}{\varphi} = (\underset{\alpha}{\varphi}{}^i_j)$ şeklindedir. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.2.1 $\Pi = \left\{\underset{\alpha}{\varphi}\right\}$, M üzerinde regüler $\Pi-$yapı olsun. Adapte olmuş çatıların $S : X_i \to X_{i'}$ dönüşümünün uygun dönüşüm olması için gerek ve yeter şart (2.2.6) şartının sağlanmasıdır.

Teorem 2.1.1'i ve Teorem 2.2.1'i kullanarak S matrisinin

$$S^i_{i'} = \Delta^{u\sigma}_{u'} C^{\alpha}_{\sigma\alpha'} \qquad (i = u\alpha, i' = u'\alpha') \tag{2.2.7}$$

özel yapısına sahip olduğunu görürüz. Benzer yöntemler ile ters matris için

$$S^{i'}_i = \Delta^{u'\sigma}_{u} C^{\alpha'}_{\sigma\alpha} \qquad (i = u\alpha, i' = u'\alpha') \tag{2.2.8}$$

eşitliğini yazabiliriz. $\mathfrak{A}_m$ cebrinden

$$\overset{*}{S} = (\overset{*}{S}{}^u_{u'}) = (\Delta^{u\sigma}_{u'} e_\sigma) \overset{*}{S}{}^{-1} = (\overset{*}{S}{}^{u'}_u) = (\Delta^{u'\sigma}_u e_\sigma) \tag{2.2.9}$$

matrislerini elde edebiliriz. Buradan kolayca

$$\overset{*}{S} \overset{*}{S}{}^{-1} = \overset{*}{I}$$

olduğunu görebiliriz. Burada

$$(\overset{*}{I}) = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & e_1 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots & e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix} = (\delta^i_j)$$

şeklindedir. Gerçekten (2.2.7) ve (2.2.8)'den

$$\delta^i_j = S^i_{i'} S^{i'}_j = \Delta^{u\sigma}_{u'} C^{\alpha}_{\sigma\alpha'} \Delta^{u'\varepsilon}_{v} C^{\alpha'}_{\varepsilon\beta}$$

$$= \Delta_{u'}^{u\sigma}\Delta_{v}^{u'\varepsilon}C_{\sigma\varepsilon}^{\gamma}e_{\gamma} = \Delta_{u'}^{u\sigma}e_{\sigma}\Delta_{v}^{u'\varepsilon}e_{\varepsilon}$$
$$= \overset{*}{S}{}_{u'}^{u}\,\overset{*}{S}{}_{v}^{u'}$$

eşitliğini elde ederiz. $\{X_i\}$, M üzerinde adapte olmuş çatı olmak üzere, herbir $\xi = \xi^i X_i = \xi^{u\alpha}X_{u\alpha}$ vektör alanına karşılık getirilen $\mathfrak{A}_m$ cebirinden $\overset{*}{\xi}{}^{u}(u = 1, \ldots, r)$ r koordinatlarını

$$\overset{*}{\xi}{}^{u} = \xi^{u\alpha}e_{\alpha}$$

şeklinde verebiliriz. $\xi^{i'} = S_{i}^{i'}\xi^{i}$ ise, o zaman $\overset{*}{\xi}{}^{u'} = \overset{*}{S}{}_{u}^{u'}\,\overset{*}{\xi}{}^{u}$ şeklinde olduğu kolayca görülür. Gerçekten, (2.2.7)'den

$$\xi^{u'\alpha'} = S_{u\alpha}^{u'\alpha'}\,\xi^{u\alpha} = \Delta_{u}^{u'\sigma}C_{\sigma\alpha}^{\alpha'}\xi^{u\alpha}$$

veya

$$\overset{*}{\xi}{}^{u'} = \xi^{u'\alpha'}e_{\alpha'} = \Delta_{u}^{u'\sigma}C_{\sigma\alpha}^{\alpha'}\xi^{u\alpha}e_{\alpha'}$$
$$= \Delta_{u}^{u'\sigma}e_{\sigma}\xi^{u\alpha}e_{\alpha} = \overset{*}{S}{}_{u}^{u'}\,\overset{*}{\xi}{}^{u}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

$\varphi \in \Pi$ alırsak $\varphi = a^{\alpha}\underset{\alpha}{\varphi}$ olur. $\xi = \xi^i X_i$ vektör alanı üzerindeki φ'nin etkisi, yani $\eta^i = \varphi_j^i\xi^j$ denklemi

$$\overset{*}{\eta}{}^{u} = \eta^{u\alpha}e_{\alpha} = a^{\sigma}\,\underset{\sigma}{\varphi}{}_{j}^{i}\,\xi^{j}e_{\alpha} = a^{\sigma}\delta_{v}^{u}C_{\sigma\beta}^{\alpha}\xi^{v\beta}e_{\alpha}$$
$$= a^{\sigma}\delta_{v}^{u}\xi^{v\beta}e_{\sigma}e_{\beta} = a^{\sigma}e_{\sigma}\xi^{u\beta}e_{\beta} = a\,\overset{*}{\xi}{}^{u},$$

şekline indirgenmiş olur. Burada $i = u\alpha$, $j = v\beta$, $a \in \mathfrak{A}_m$ şeklindedir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.2.2 Eğer Π, M üzerinde regüler yapı ise, $x \in M$ için herbir $T_x(M)$ tanjant uzayı $\mathfrak{A}_m$ cebiri üzerindeki $T_r(\mathfrak{A}_m)$ modülünün reel modeli olarak görev yapar.

Özel durumda, $\overset{*}{\eta}{}^{u} = a\,\overset{*}{\xi}{}^{u}$ den $\varphi = \underset{\alpha}{\varphi}$ olması durumunda

$$\overset{*}{\eta}{}^{u} = e_{\alpha}\,\overset{*}{\xi}{}^{u}$$

eşitliğini yazabiliriz.

2.3 İntegrallenebilir regüler Π- yapı

$\Pi = \left\{ \underset{\alpha}{\varphi} \right\}$, M_{mr} üzerinde integrallenebilir regüler $\Pi-$yapı olsun. $x^i = x^{u\alpha}$ ve $x^{i'} = x^{u'\alpha'}$, $U_x(x \in M_{mr})$'de adapte olmuş lokal koordinatlar olsun. $\underset{\alpha}{\varphi}$ yapısal afinorların, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ ve $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \right\}$ adapte olmuş koordinatlarına göre (2.2.2) şeklindeki sabit forma sahip oldukları iyi bilinir. Bu durumda uygun dönüşüm $\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = S^i_{i'} \frac{\partial}{\partial x^i}$ formuna sahiptir. Burada $S^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, $S^i_{i'} = \Delta^{u\sigma}_{u'} C^{\alpha}_{\sigma\alpha'}$, $S^{i'}_i = \Delta^{u'\sigma}_u C^{\alpha'}_{\sigma\alpha}$, $i = u\alpha, i' = u'\alpha'$ şeklindedir (bakınız (2.2.7) ve (2.2.8)). O zaman Teorem 2.2.1'den sabit tutulmuş u ve u' için $\left(\frac{\partial x^{u\alpha}}{\partial x^{u'\alpha'}} \right) C_\sigma = C_\sigma \left(\frac{\partial x^{u\alpha}}{\partial x^{u'\alpha'}} \right)$ yazabiliriz. Yani $z^{u'} = x^{u'\alpha'} e_{\alpha'}$, $z^u = x^{u\alpha} e_\alpha$'nin holomorfik fonksiyonudur. (2.1.17) ve (2.2.9)'yı kullanarak

$$\frac{\partial z^{u'}}{\partial z^u} = \varepsilon^\alpha \frac{\partial x^{u'\alpha'}}{\partial x^{u\alpha}} e_{\alpha'} = \varepsilon^\alpha \Delta^{u'\sigma}_u C^{\alpha'}_{\alpha\sigma} e_{\alpha'} = \Delta^{u'\sigma}_u \delta^{\alpha'}_\sigma e_{\alpha'} = \Delta^{u'\sigma}_u e_\sigma = \overset{*}{S}{}^{u'}_u$$

yazabiliriz. Benzer yöntemlerle,

$$\frac{\partial z^u}{\partial z^{u'}} = \overset{*}{S}{}^u_{u'}$$

yazabiliriz. Böylece, $x^{u\alpha}$ ve $x^{u'\alpha'}$ lokal adapte olmuş koordinatlarına sahip iki koordinat komşuluklarının kesişimi üzerinde $z^{u'} = z^{u'}(z^u), (z^u = x^{u\alpha} e_\alpha, z^{u'} = x^{u'\alpha'} e_{\alpha'})$ geçiş fonksiyonları holomorfik olur. Yani M_{mr}, holomorfik r boyutlu $\mathfrak{A}-$manifolddur: $X_r(\mathfrak{A})$.

Tersine, $X_r(\mathfrak{A})$, holomorfik $\mathfrak{A}-$manifold olsun. O zaman iki $\mathfrak{A}-$koordinat komşuluklarının arakesiti üzerinde $z^{u'} = z^{u'}(z^u)$ geçiş fonksiyonları holomorfiktir. O halde Teorem 2.1.4'den dolayı sabit tutlmuş u ve u' için

$$\left(\frac{\partial x^{u\alpha}}{\partial x^{u'\alpha'}} \right) C_\sigma = C_\sigma \left(\frac{\partial x^{u\alpha}}{\partial x^{u'\alpha'}} \right)$$

yazabiliriz. Buradan, keyfi u ve u' için

$$\left(\frac{\partial x^{u\alpha}}{\partial x^{u'\alpha'}} \right) \underset{\sigma}{\varphi} = \underset{\sigma}{\varphi} \left(\frac{\partial x^{u\alpha}}{\partial x^{u'\alpha'}} \right)$$

yazabiliriz. Burada $\underset{\sigma}{\varphi}{}^i_j = \underset{\sigma}{\varphi}{}^{u\alpha}_{v\beta} = \delta^u_v C^\gamma_{\sigma\beta}$ şeklinde olur, bundan dolayı $\Pi = \left\{ \underset{\alpha}{\varphi} \right\}$ yapısına integrallenebilirdir ve regüler $\Pi-$yapıdır diyebiliriz. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.3.1 $X_r(\mathfrak{A})$, holomorfik $\mathfrak{A}-$manifoldunun reel modeli, $\Pi = \left\{ \underset{\alpha}{\varphi} \right\}$ integrallenebilir regüler $\Pi-$yapıya sahip M_{mr} reel manifoldudur.

Not 2.3.1 M_{mr}, regüler $\Pi-$yapıya sahip reel manifold olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir [31]:

i. Regüler $\Pi-$yapı integrallenebilirdir,

ii. Regüler $\Pi-$yapı hemen hemen integrallenebilirdir,

iii. $N_\Pi = 0$ dır ve burada N_Π, regüler $\Pi-$yapı ile tanmlanan Nijenhuis-Shirokov tensörünü tanımlar.

Örnek 2.3.1 $X_r(\mathbb{C})$, kompleks analitik ($\mathbb{C}$-holomorfik) manifold olsun. Göstereceğiz ki, her kompleks analitik manifold $X_r(\mathbb{C})$, M_{2r} reel modeli üzerinde doğal bir hemen hemen kompleks yapı taşır. $(x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r)$ koordinat sistemine göre $\mathbb{R}^{2r}$ ($\mathbb{C}^r$'nin reel modeli) üzerindeki bir φ hemen hemen kompleks yapısı

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, r \tag{2.3.1}$$

ile tanımlanır.

$X_r(\mathbb{C})$'nin iki haritasının geçiş fonksiyonlar $\mathbb{C}$-holomorfik olduğundan dolay M_{2r} üzerinde hemen hemen kompleks yapı tanımlamak için, böyle haritalar vasıtasıyla M_{2r}'ye (2.3.1) formunda $\mathbb{R}^{2r}$'nin hemen hemen kompleks yapısını transfer edeceğiz. (2.3.1) ile verilen φ hemen hemen kompleks yapısının inşasından, $x^1, \ldots, x^r, y^1, \ldots, y^r$ lokal (holonomik) koordinat sistemine göre φ'nin bileşenlerinin sabit olduğu ve bundan dolay φ'nin integrallenebilir olduğu açıktır. Diğer taraftan, hemen hemen kompleks yapılar regülerdir. Gerçekten, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^r}, \ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \ldots, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^r}\right)\right\}$'nun $\mathbb{R}^{2r}$ ($\mathbb{C}^r$'nin reel modeli) için bir baz olacak şekilde, φ için $\mathbb{C}^r$'nin $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^r}$ elemanları vardır (bakınız [23], s. 141).

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \frac{\partial}{\partial x^2}, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^r}, \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^r}\right)\right\}$$

yazarsak, o zaman φ'nin

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots & 0 \\ 0 \ldots & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

matrisi ile verildiğini görebiliriz. Yani φ regüler yapıdır. Böylece $X_r(\mathbb{C})$ kompleks analitik manifoldunun reel modeli (2.3.1) ile verilen φ integrallenebilir regüler doğal hemen hemen kompleks yapıya sahip M_{2r} reel manifoldudur.

Örnek 2.3.2 Benzer yöntemlerle, $X_r(A(e))$ parakompleks (paraholomorfik) manifoldunun reel modeli (bakınız [7], [16]),

$$\psi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \psi\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, r$$

ile verilen ψ integrallenebilir regüler doğal hemen hemen parakompleks yapıya sahip M_{2r} reel manifoldudur. Burada $A(e) = \{z^i : z^i = x^i + ey^i, e^2 = 1\}$ şeklindedir.

Örnek 2.3.3 $T(M_n)$, M_n'nin tanjant demeti olsun (detaylar için bakınız [85]). M_n'nin tanjant demeti (x, y) çiftini içerir, burada $x \in M_n$ ve $y \in T_x(M_n)$'dir. $\pi(x, y) = x$ ile tanımlanan $\pi : T(M_n) \to M_n$, $T(M_n)$'den M_n üzerine doğal izdüşüm olsun. $(U, x = (x^1, \ldots, x^n))$, M_n üzerinde koordinat haritası ise, o zaman $\pi^{-1}(U)$ üzerinde

$$(x^1, \ldots, x^n, x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{n}})$$

lokal koordinatları oluşur. Burada $x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{n}}$, $\{\partial_i\} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ lokal çatısına göre M_n üzerinde vektör alanlarının bileşenlerini temsil eder. Bundan sonra $i = 1, \ldots, n$ için $\bar{i} = i + n$ notasyonunu kullanacağız.

Eğer $(U', x' = (x^{1'}, \ldots, x^{n'}))$ M_n üzerinde diğer bir koordinat haritası ise, o zaman $\pi^{-1}(U')$'ne göre $(x^{1'}, \ldots, x^{n'}, x^{\bar{1}'}, \ldots, x^{\bar{n}'})$ indirgenmiş (induced) koordinatlar olur. Buda

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^i), & i = 1, \ldots, n, \\ x^{\bar{i}'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} x^{\bar{i}}, & \bar{i} = n+1, \ldots, 2n. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

ile verilir.

(2.3.2)'in Jacobian

$$S = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & 0 \\ x^{\bar{s}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^s} & \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \end{pmatrix}, \alpha = 1, \ldots, 2n$$

matrisi ile verilir.

$S\varphi = \varphi S$ olacak şekilde

$$\varphi = \left(\varphi^{\alpha}_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (I \text{ , } n\text{-yinci dereceden birim matristir})$$

doğal afinor alan vardır. Yani, $S : \{\partial_\alpha\} \to \{\partial_{\alpha'}\}$ dönüşümü, φ yapısına göre uygun (makul) bir dönüşümdür. φ'nin integrallenebilir olduğu ve $\varphi^2 = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca φ, $R(\varepsilon)$, $\varepsilon^2 = 0$ dual sayılar cebrinin regüler temsilidir. Gerçekten,

$$\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n, \partial_{\bar{1}}, \partial_{\bar{2}}, \ldots, \partial_{\bar{n}}\}$$

nin yerine $\{\partial_1, \partial_{\bar{1}}, \partial_2, \partial_{\bar{2}}, \ldots, \partial_n, \partial_{\bar{n}}\}$ yazarsak, φ afinor alanı $\{\partial_1, \partial_{\bar{1}}, \partial_2, \partial_{\bar{2}}, \ldots, \partial_n, \partial_{\bar{n}}\}$ çatısına göre

$$\varphi = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots & 0 \\ 0 \ldots & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

matrisine sahip olur. Yani, φ regülerdir. Böylece, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerinde $\mathbb{R}(\varepsilon)$ (Burada genelde, $\mathbb{R}(\varepsilon)$'nin izomorfik temsilinin regüler olmadığını not edelim (bakınız [80]) dual sayılar cebrinin regüler temsili olan doğal integrallenebilir afinor φ-yapısı vardır. Bu yüzden, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$'deki her bir $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$ indirgenmiş koordinatlar ile $X^i = x^i + \varepsilon x^{\bar{i}}$, $\varepsilon^2 = 0$ lokal dual koordinatları eşleştireceğiz. (2.3.2) ifadesini kullanırsak, $X^i = x^i + \varepsilon x^{\bar{i}}$ lokal dual koordinatlarının

$$X^{i'} = x^{i'}(x^i) + \varepsilon x^{\bar{s}} \partial_s (x^{i'}(x^i)) \tag{2.3.3}$$

şekline dönüştüğünü görürüz. (2.3.3) denkleminden $X^{i'}$ değerlerinin, $X^i = x^i + \varepsilon x^{\bar{i}}$'nin $\mathbb{R}(\varepsilon)$-holomorfik fonksiyonları olduğunu görürüz (bakınız, Örnek 2.1.1 ve [14]). Böylece, doğal integrallenebilir regüler φ-yapısına sahip $T(M_n)$ tanjant demeti, $\mathbb{R}(\varepsilon)$-holomorfik $X_n(\mathbb{R}(\varepsilon))$-manifoldunun reel modelidir.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

3.1 Afinor Alanlarına Göre Pür Tensör Alanları

M, sonlu n-boyotlu C^∞-manifold olsun. M üzere $F(M)$ üzerinde (r,s)-tipli tüm C^∞-tensör alanlarının modülü $\Im_s^r(M)$ ile işaretlensin. Burada $F(M)$, M üzerinde $C^\infty-$fonksiyonların cebiridir.

Tanım 3.1.1 φ, M üzerinde afinor alanı yani $\varphi \in \Im_1^1(M)$ olsun. (r,s) tipli t tensör alanı her $X_1, X_2, \ldots, X_s \in \Im_0^1(M)$ ve $\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi} \in \Im_1^0(M)$ için

$$\begin{aligned}
t(\varphi X_1, X_2, \ldots, X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}) &= t(X_1, \varphi X_2, \ldots, X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \ldots, \varphi X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}) \qquad (3.1.1)\\
&= t(X_1, X_2, \ldots, X_s; {}'\varphi \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}) \\
&= t(X_1, X_2, \ldots, X_s; \overset{1}{\xi}, {}'\varphi \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \ldots, X_s; \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \varphi \overset{r}{\xi})
\end{aligned}$$

şartını sağlarsa t tensör alanına φ'ye göre pür tensör alanı denir. Burada φ' operatörü φ'nin adjoint operatörüdür:

$$(\varphi' \xi)(X) = \xi(\varphi X).$$

$x^1, x^2, \ldots, x^n$, M'de lokal koordinat sistemi olsun. (3.1.1)'de $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x^{i_1}}$, ..., $X_s = \dfrac{\partial}{\partial x^{i_s}}$ ve $\overset{1}{\xi} = dx^{j_1}, \ldots, \overset{r}{\xi} = dx^{j_r}$ yazarak, pür tensör alanlarını, φ_j^i ve $t_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ bileşenlerine göre

$$\begin{aligned}
& t_{m i_2 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r} \varphi_{i_1}^m = t_{i_1 m \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r} \varphi_{i_2}^m = \ldots = t_{i_1 i_2 \ldots m}^{j_1 \ldots j_r} \varphi_{i_s}^m = \qquad (3.1.2)\\
& t_{i_1 \ldots i_s}^{m j_2 \ldots j_r} \varphi_m^{j_1} = t_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 m \ldots j_r} \varphi_m^{j_2} = \ldots = t_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 j_2 \ldots m} \varphi_m^{j_r}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebileceğini görebiliriz. Vektör, kovektör ve skaler alanlarını pür tensör alanları olarak düşüneceğiz.

Pür tensör alanları [1], [**?**], [11], [17], [19], [**?**], [26–28], [38], [40], [43–45, 47, 48, 58–60, 63–65], [67], [70], [74], [75], [78] çalışmalarında farklı açılardan çalışılmıştır.

Örnek 3.1.1 $t \in \Im_1^1(M)$, $(1,1)$-tipli pür tensör alanı olsun. O halde (2.1.11) ifadesini

$$\varphi(tX) = t(\varphi X)$$

olarak yazabiliriz.

Böylece, $(\varphi \circ t)X = \left(\varphi \overset{C}{\otimes} t\right) X = \varphi(tX)$ ($\overset{C}{\otimes}$, C kontraksiyonu ile tensör çarpımıdır) olmak üzere, $t \in \Im_1^1(M)$ ve $\varphi \in \Im_1^1(M)$

$$\varphi \circ t = t \circ \varphi \tag{3.1.3}$$

değişimli olma şartını sağlarsa, t'ye, φ'ye göre pürdür ve tersine φ'ye, t'ye göre pürdür denir.

(3.1.3)'den kolayca görebiliriz ki, φ'nin kendisi ve I birim afinor alanı pür tensör alanlarına örnekdir. Ayrıca (3.1.3)'den, φ regüler afinor alanı ise yani $det(\varphi_j^i) \neq 0$ ise, bileşenleri φ'nin ters matrisinin elemanları olan φ^{-1} afinor alanı da pürdür.

Örnek 3.1.2 $g = (g_{ij})$, $\varphi = (\varphi_j^i)$, φ^T transpoz matrisler olmak üzere

$$\varphi^T g = g\varphi, \tag{3.1.4}$$

matris eşitliğini alalım. (3.1.4)'den ve (3.1.2)'den dolayı $g \in \Im_2^0(M)$ tensör alanının pürlük şartını

$$g_{im}\varphi_j^m = g_{mj}\varphi_i^m$$

şeklinde elde ederiz.

Not 3.1.1 g, Riemannian metriği olduğunda $g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$ şartını sağlayan φ lineer operatörüne self adjoint dendiğini hatırlatalım.

(3.1.1)'den, K ve L'nin her ikisi (r, s) tipli pür tensör alanı ise, $K + L$ ve fK ($f \in F(M)$)'nın da pür tensör alanı olduğunu söyleyebiliriz.

φ afinor alanına göre M üzerindeki (r, s) tipli bütün pür tensör alanlarının modülü $\overset{*}{\Im}{}_s^r(M)$ ile işaretlensin. λ pozitif tamsayısını sabitleyelim. K ve L sırasıyla (p_1, q_1) ve (p_2, q_2) tipli pür tensör alanları ise,

$$K \overset{C}{\otimes} L = (K_{j_1 \ldots j_{q_1}}^{i_1 \ldots m_\lambda \ldots i_{p_1}} L_{s_1 \ldots m_\lambda \ldots s_{q_2}}^{r_1 \ldots r_{p_2}})$$

kontraksiyonuna sahip K ve L tensörel çarpımı da yine pür tensör alanıdır. Sadelik açısından, $K \in \overset{*}{\Im}{}_1^1(M)$ ve $L \in \overset{*}{\Im}{}_2^0(M)$ olduğu durumun ispatını yapacağız. Gerçekten, $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$(K \overset{C}{\otimes} L)(\varphi X, Y) = K(L(\varphi X, Y)) = K(L(X, \varphi Y)) = (K \overset{C}{\otimes} L)(X, \varphi Y)$$

olduğu görülür.

$K \in \overset{*}{\Im}{}^{p_1}_{q_1}(M)$ ve $L \in \overset{*}{\Im}{}^{p_2}_{q_2}(M)$'nin pür çarpımını ($\overset{C}{\otimes}$ veya "$\circ$" ile işaretlenir) tanımlayarak, $\overset{*}{\Im}(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \overset{*}{\Im}{}^r_s(M)$ direkt toplamını $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerindeki cebire dönüştürelim:

$$\overset{C}{\otimes} : (K, L) \to (K \overset{C}{\otimes} L) = \begin{cases} K^{i_1 \ldots m_\lambda \ldots i_{p1}}_{j_1 \ldots j_{q_1}} L^{r_1 \ldots r_{p_2}}_{s_1 \ldots m_\lambda \ldots s_{q_2}} \; for \; \lambda \leq p_1, q_2 \; (\lambda, spt), \\ K^{i_1 \ldots i_{p1}}_{j_1 \ldots m_\mu \ldots j_{q_1}} L^{r_1 \ldots m_\mu \ldots r_{p_2}}_{s_1 \ldots s_{q_2}} \; for \; \mu \leq p_2, q_1 \; (\mu, \; spt), \\ 0 \qquad for \; p_1 = 0, \; p_2 = 0, \\ 0 \qquad for \; q_1 = 0, \; q_2 = 0. \end{cases}$$

(Burada *spt*; sabitlenmiş pozitif tamsayı demektir.) Örneğin, $K = X \in \Im^1_0(M)$ ve $L \in \Lambda_q(M)$ $q-$form olsun. O zaman $\iota_X L$ iç çarpımı ile $X \overset{C}{\otimes} L$ pür çarpımı çakışır.

3.2 Tachibana Operatörleri

Tanım 3.2.1 [63] $\varphi \in \Im^1_1(M)$ ve $\Im(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im^r_s(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde tensör cebiri olsunlar. $\phi_\varphi : \overset{*}{\Im}(M) \to \Im(M)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa M üzerindeki $\phi_\varphi-$operatörüne Tachibana operatörü denir:

i. ϕ_φ, sabit katsayılara göre lineerdir,

ii. Her r, s için $\phi_\varphi : \overset{*}{\Im}{}^r_s(M) \to \Im^r_{s+1}(M)$ şeklindedir,

iii. Her $K, L \in \overset{*}{\Im}(M)$ için $\phi_\varphi(K \overset{C}{\otimes} L) = (\phi_\varphi K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} \phi_\varphi L$ şeklindedir,

iv. L_Y, Y'ye göre Lie türevini göstermek üzere, her $X, Y \in \Im^1_0(M)$ için $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi)X$ şeklindedir,

v. $\iota_Y \omega = \omega\,(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ olmak üzere, her $\omega \in \Im^0_1(M)$ and $X, Y \in \Im^1_0(M)$ için

$$\phi_{\varphi X}(\iota_Y \omega) = (d(\imath_Y \omega))(\varphi X) - (d(\imath_Y(\omega \circ \varphi)))(X) = (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_{\varphi Y} \omega)$$

şeklindedir.

Not 3.2.1 Tanım 2.2.1'in (*iv.*) şıkkından

$$\phi_{\varphi X} Y = [\varphi X, Y] - \varphi\,[X, Y]$$

yazabiliriz. Herhangi $f, g \in F(M)$ için

$$[fX, gY] = fg\,[X, Y] + f\,(Xg)\,Y - g\,(Yf)\,X$$

olduğundan dolayı, $\phi_{\varphi X}Y$, X'e göre lineerdir fakat Y'ye göre lineer değildir. Yani

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi(fX)}Y &= [f\varphi X, Y] - \varphi[fX, Y] \\ &= f[\varphi X, Y] - (Yf)\varphi X - \varphi(f[X, Y]) + \varphi(Yf)X \\ &= f([\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]) \\ &= f\phi_{\varphi X}Y,\end{aligned}$$

$$\phi_{\varphi X}(gY) = g(\phi_{\varphi X}Y) + ((\varphi X)g)Y - (Xg)\varphi Y$$

eşitliklerini yazabiliriz. Daha sonra, $\phi_{\varphi X}Y$ için $(\phi_\varphi Y)X$ ifadesini yazacağız.

3.2.1 $(1,1)$ Tipli Tensör Alanlarına Uygulanan $\phi_\varphi-$Operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}^1_1(M)$, yani $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ olsun (bakınız Örnek 3.1.1). Herhangi $Y \in \Im^1_0(M)$ için $tY \in \Im^1_0(M)$ ve Tanım 3.2.1'in $(iii.)$ şıkkı ile

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi tY)X &= ((\phi_\varphi t)X)\overset{C}{\otimes}Y + t\overset{C}{\otimes}(\phi_\varphi Y)X \\ &= (\phi_\varphi t)(X, Y) + t((\phi_\varphi Y)X)\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.2.1)'i kullanarak, Tanım 2.2.1'in (d) şıkkından

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi t)(X, Y) &= (\phi_\varphi tY)X - t((\phi_\varphi Y)X) \\ &= (-L_{tY}\varphi + t(L_Y\varphi))X \\ &= [\varphi X, tY] - \varphi[X, tY] - t[\varphi X, Y] + \varphi t[X, Y] \\ &= Q_{\varphi,t}(X, Y)\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

eşitliğini yazabiliriz. $Q_{\varphi,t} \in \Im^1_2(M)$ tensör alanına Nijenhuis-Shirokov tensör alanı denir [70]. Dolaysıyla aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.2.1 $t \in \overset{*}{\Im}{}^1_1(M)$ olsun. O zaman $\phi_\varphi t$ Nijenhuis- Shirokov tensör alanıdır. $t\circ\varphi = \varphi \circ t$ eşitliği, $t = \varphi$ olması durumunda direkt sağlandığından, (3.2.2)'den

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi\varphi)(X, Y) &= (-L_{\varphi Y}\varphi + \varphi(L_Y\varphi))X \\ &= [\varphi X, \varphi X] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] + \varphi^2[X, Y] \\ &= N_\varphi(X, Y)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada N_φ , φ den oluşturulan Nijenhuis tensör alanıdır [39].

O halde aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.2.2 N_φ , φ'nin Nijenhuis tensör alanı ise, o zaman

$$N_\varphi = \phi_\varphi\varphi$$

olur.

$t \circ \varphi \neq \varphi \circ t$, yani $t \notin \overset{*}{\Im}{}_1^1(M)$ olsun. Bu durumda $\phi_\varphi t$ tensör alanı değildir. Bu durumda, φ ve t nin aşağıdaki şekilde $S_{\varphi,t}$ burulma tensöründen konuşabiliriz [39], [70]:

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi t + \phi_t \varphi)(X,Y) &= [\varphi X, tY] + [tX, \varphi Y] + \varphi t [X,Y] + \\ &\quad + t\varphi [X,Y] - \varphi [X, tY] - \varphi [tX, Y] - t [X, \varphi Y] - t [\varphi X, Y].\end{aligned}$$

Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.2.3 $\varphi, t \in \Im_1^1(M)$ olsun. $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ pürlük şartını sağlamayan $\phi_\varphi t + \phi_t \varphi$ ifadesi $(1,2)$- tipli $S_{\varphi,t}$ tensör alanını tanımlar. Burada $S_{\varphi,t}$, φ ve t nin burulma tensör alanıdır.

(3.2.2)'nin ifadesinden ve Teorem 2.2.3'den aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.2.1 t, pürlük şartın sağlamayan (1,1)-tipli tensör alanı olsun. O zaman

$$S_{\varphi,t}(X,Y) = Q_{\varphi,t}(X,Y) - Q_{\varphi,t}(Y,X) + (\varphi t - t\varphi)[X,Y]$$

olur.

Basit bir hesaplamayla, her $t, t_1, t_2 \in \overset{*}{\Im}{}_1^1(M)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için, I birim afinor ve

$$\begin{aligned}(Q_{\varphi,t})_Y X &= \left(Q_{\varphi,t} \overset{C}{\otimes} Y\right) X = Q_{\varphi,t}(X,Y), \\ (t_1 \circ Q_{\varphi,t_2})_{(X,Y)} &= \left(t_1 \overset{C}{\otimes} Q_{\varphi,t_2}\right)_{(X,Y)} = Q_{\varphi,t_2}(X, t_1 Y), \\ (Q_{\varphi,t_1} \circ t_2)_{(X,Y)} &= t_2(Q_{\varphi,t_1}(X,Y))\end{aligned}$$

olmak üzere

i. $\phi_\varphi I = 0$,

ii. $\phi_\varphi(tY) = (Q_{\varphi,t})_Y + t \circ (\phi_\varphi Y)$,

iii. $(\phi_\varphi t)(X,Y) = Q_{\varphi,t}(X,Y) = -Q_{t,\varphi}(Y,X) = -(\phi_t \varphi)(Y,X)$,

iv. $Q_{\varphi, t_1 \circ t_2} = Q_{\varphi,t_1} \circ t_2 + t_1 \circ Q_{\varphi,t_2}$,

v. $Q_{\varphi, \varphi \circ t_2} = N_\varphi \circ t_2 + \varphi \circ Q_{\varphi,t_2}$

eşitliklerini yazabiliriz.

3.2.2 $s \geq 2$ İçin $(1, s)$ Tipli Tensör Alanına Uygulanan $\phi_\varphi-$Operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}^1_s(M)$, yani

$$\begin{aligned} \varphi(t(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s)) &= t(\varphi Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \\ &\vdots \\ &= t(Y_1, Y_2, \ldots, \varphi Y_s) \end{aligned}$$

olsun. Tanım 3.2.1'in *(iii.)* ve *(iv.)* şıklarını kullanarak

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi t)(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) &= (\phi_\varphi(t(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s)))X \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, Y_2, \ldots, (\phi_\varphi Y_\lambda)X, \ldots, Y_s) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.2.3) ifadesi M'deki doğal koordinat sistemine göre

$$(\phi_\varphi t)^h_{kj_1\ldots j_s} = \varphi^m_k \partial_m t^h_{j_1\ldots j_s} - \varphi^h_m \partial_k t^m_{j_1\ldots j_s} - t^m_{j_1\ldots j_s}\partial_m \varphi^h_k + \sum_{\lambda=1}^{s} t^h_{j_1\ldots m\ldots j_s}\partial_{j_\lambda}\varphi^m_k \tag{3.2.4}$$

bileşenlerine sahiptir.

Not 3.2.2 Özel durumda, $t \in \Im^1_2(M)$ olsun. $(\phi_\varphi t)_{kj_1j_2}$'nin, k, j_1 ve j_2'ye göre alternasyonunu kullanarak $(\phi_\varphi t)^h_{[kj_1j_2]}$'nin, t'nin pürlük şartı olmadan $(1,3)$-tipli bir tensör alanının bileşenleri olduğunu temel tensör hesaplamasıyla kontrol edebiliriz [85].

T.J. Willmore [84] göstermiştir ki, $(\phi_\varphi t)^h_{[kj_1j_2]}$ bileşenlerine sahip tensör alanı Slebodzinski [72] tarafından verilen tensör alanı ile çakışır ve $t = N_\varphi$, $\varphi^2 = -id$ olduğunda Slebodzinski tensör alanı sıfıra eşittir .

3.2.3 1-Forma Uygulanan $\phi_\varphi-$Operatörü

$\omega \in \Im^0_1(M)$ olsun. Tanım 3.2.1'i kullanarak, $\omega \circ \varphi$ 1-formu

$$(\omega \circ \varphi)\, Y = ({}'\varphi\omega)Y = (\omega \overset{C}{\otimes} \varphi)Y = \omega\,(\varphi Y)$$

ile tanımlanmak üzere, herhangi bir $X, Y \in \Im^1_0 \in (M)$ için

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi\omega)\,(X,Y) &= (\phi_{\varphi X}\omega)Y \\ &= \phi_{\varphi X}\,(\iota_Y\omega) - \omega\,(\phi_{\varphi X}Y) \\ &= (\varphi X)\,(\iota_Y\omega) - X\,(\iota_{\varphi Y}\omega) + \omega\,((L_Y\varphi)\,X) \\ &= (L_{\varphi X}\omega - L_X\,(\omega\circ\varphi))\,Y \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.2.5)'den, $\phi_\varphi\omega \in \Im^0_2(M)$ tensör alanının, doğal çatıya göre

$$(\phi_\varphi\omega)_{ij} = \varphi^m_i\partial_m\omega_j - \partial_i\left(\omega_m\varphi^m_j\right) + \omega_m\partial_j\varphi^m_i$$

bileşenlerine sahip olduğunu görebiliriz. $(\phi_\varphi\omega)_{ij}$, genelde i ve j'ye göre anti-simetrik değildir. $(\phi_\varphi\omega)_{[ij]}$ tensör alanı, Frolicher ve Nijenhuis tarafından tanımlanan tensör alanı ile çakışır [14], [39].

Teorem 3.2.4 ω tam (exact) 1-form olsun. $\omega \in Ker\phi_\varphi\omega$ olması için gerek ve yeter şart $\omega \circ \varphi$ birleşimli 1-formunun kapalı omasıdır.

İspat. $\omega \in \Im_1^0(M)$ olsun. Her $X, Y \in \Im_0^1 \in (M)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M)$ için

$$(d\omega)(X,Y) = \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])\}$$

ifadesini kullanarak [22],

$$\begin{aligned}(d\omega)(Y,\varphi X) &= \frac{1}{2}\Big\{Y(\omega(\varphi X)) - (\varphi X)(\omega(Y)) - \omega([Y,\varphi X])\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{Y(\omega(\varphi X)) - (\varphi X)(\omega(Y)) + \omega([\varphi X,Y])\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{Y(\omega(\varphi X)) - (\varphi X)(\omega(Y)) + \omega([\varphi X,Y] \\ &\quad -\varphi[X,Y]) + \omega(\varphi[X,Y])\Big\}\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.2.5)'den

$$(\phi_\varphi\omega)(X,Y) = (\varphi X)(\omega(Y)) - X(\omega(\varphi Y)) - \omega([\varphi X,Y] - \varphi[X,Y]) \tag{3.2.7}$$

eşitliğini yazarız. (3.2.7)'i (3.2.6)'da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}(d\omega)(Y,\varphi X) &= \frac{1}{2}\Big\{-(\phi_\varphi\omega)(X,Y) + Y(\omega(\varphi X)) - X(\omega(\varphi Y)) + \omega(\varphi[X,Y])\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{-(\phi_\varphi\omega)(X,Y) + Y((\omega\circ\varphi)(X)) - X((\omega\circ\varphi)(Y)) \\ &\quad -(\omega\circ\varphi)([Y,X])\Big\} \\ &= -\frac{1}{2}(\phi_\varphi\omega)(X,Y) + (d(\omega\circ\varphi))(Y,X)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da $\phi_\varphi\omega = 0$ eşitliğinin,

$$(d(\omega\circ\varphi))(Y,X) = (d\omega)(Y,\varphi X)$$

eşitliğine denk olduğunu görürüz. Burada $\omega = df$ için

$$(d(df\circ\varphi))(Y,X) = \left(d^2 f\right)(Y,\varphi X) = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Yani $df \circ \varphi$, kapalı 1-formdur.

Teorem 3.2.5 $\omega \in \Im_1^0(M)$ ve $\varphi^2 = -id$ olsun. $\omega \circ \varphi \in Ker\ \phi_\varphi$ olması için gerek ve yeter şart $\omega \in Ker\ \phi_\varphi$ olmasıdır.

İspat. ω yerine $\omega \circ \varphi$ ve X yerine φX yazarsak, (3.2.5) denklemi

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi (\omega \circ \varphi))(\varphi X, Y) &= (L_{\varphi^2 X}(\omega \circ \varphi) - L_{\varphi X}(\omega \circ \varphi^2))\, Y \\ &= -(L_X(\omega \circ \varphi) + L_{\varphi X}\omega)\, Y \\ &= -(\phi_\varphi \omega)(X, Y)\end{aligned}$$

veya

$$((\phi_\varphi (\omega \circ \varphi)) \circ \varphi)(X, Y) = -(\phi_\varphi \omega)(X, Y)$$

şeklini alır. Buradan da $\det \varphi \neq 0$ olduğundan dolayı $\phi_\varphi(\omega \circ \varphi) = 0$ olması için gerek ve yeter şartın $\phi_\varphi \omega = 0$ olduğunu görürüz.

Sonuç 3.2.2 $\omega \in \Im_1^0(M)$ ve $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olsun. $\varphi^2 = -id$ ise $\omega \circ N_\varphi = 0$ olur. Burada $(\omega \circ N_\varphi)(X, Y) = \omega(N_\varphi(X, Y))$ şeklindedir.

İspat. Teorem 3.2.5 ve

$$\phi_\varphi(\omega \circ \varphi) = (\phi_\varphi \omega) \circ \varphi + \omega \circ N_\varphi$$

formülünden istenen elde edilir.

3.2.4 $s \geq 2$ İçin $(0, s)$ Tipli Tensör Alanına Uygulanan $\phi_\varphi-$Operatörü

Teorem 3.2.6 $\omega \in \overset{*}{\Im}{}_s^0(M)$ olsun. O zaman

$$\phi_{\varphi X}(\omega(Y_1, \ldots, Y_s)) = (\varphi X)(\omega(Y_1, \ldots, Y_s)) - X(\omega(\varphi Y_1, \ldots, Y_s))$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $\omega_{Y_2,\ldots,Y_s}$, $\omega_{Y_2,\ldots,Y_s}(Y_1) = \omega(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s)$ olacak şekilde 1-form olsun. Tanım (3.2.1)'in (e) şıkkından

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi X}(\omega(Y_1, \ldots, Y_s)) &= \phi_{\varphi X}(\omega_{Y_2,\ldots,Y_s}(Y_1)) \\ &= (\varphi X)(\iota_{Y_1}\omega_{Y_2,\ldots,Y_s}) - X(\iota_{\varphi Y_1}\omega_{Y_2,\ldots,Y_s}) \\ &= (\varphi X)(\omega(Y_1, \ldots, Y_s)) - X(\omega(\varphi Y_1, Y_2, \ldots, Y_s))\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Şimdi $\omega \in \overset{*}{\Im}{}_2^0(M)$, yani

$$\omega(\varphi X, Y) = \omega(X, \varphi Y) \tag{3.2.8}$$

alalım. (3.2.8)'i gözönünde bulundurarak, Teorem 3.2.6 ve $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi) X$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi \omega)(X,Y,Z) &= \phi_{\varphi X}(\omega(Y,Z)) - \omega(\phi_{\varphi X} Y, Z) - \omega(Y, \phi_{\varphi X} Z) \\ &= (\varphi X)(\omega(Y,Z)) - X(\omega(\varphi Y, Z)) + \omega((L_Y\varphi) X, Z) + \omega(Y, (L_Z \varphi) X) \\ &= (L_{\varphi X}\omega - L_X(\omega \circ \varphi))(Y,Z) \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\omega \circ \varphi$ tensör alanı

$$(\omega \circ \varphi)(X,Y) = \omega(\varphi X, Y)$$

ile tanımlanır.

Not 3.2.3 Burada not edelim ki, $\omega \in \overset{*}{\Im}{}^0_2(M)$, simetrik (antisimetrik) pür tensör alanı ise o zaman $\omega \circ \varphi \in \overset{*}{\Im}{}^0_2(M)$'da simetrik (antisimetrik) pür tensör alanıdır.

(3.2.9)'dan, $\phi_\varphi \omega \in \Im^0_3(M)$ tensör alanı doğal çatıya göre

$$(\phi_\varphi \omega)_{kij} = \varphi_i^m \partial_m g_{ij} - \partial_k (\omega \circ \varphi)_{ij} + \omega_{mj} \partial_i \varphi_k^m + \omega_{im} \partial_j \varphi_k^m$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$(\omega \circ \varphi)_{ij} = \omega_{mj} \varphi_i^m = \omega_{im} \varphi_j^m \tag{3.2.10}$$

şeklindedir.

$(\phi_\varphi \omega)_{[kij]}$ ifadesi (3.2.10) pürlük şartı olmadan $(0,3)$ tipli tensör alanının bileşenleridir. ω, 2-form ise, o zaman $(\phi_\varphi \omega)_{[kij]}$, Frolicher ve Nijenhuis tarafından tanımlanan tensör alanı ile çakışır [14], [39].

$\omega \in \overset{*}{\Im}{}^0_s(M)$, $s > 2$ ise Teorem 3.2.6'yı göz önünde bulundurarak

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, \ldots, Y_s) = \phi_{\varphi X}(\omega(Y_1, \ldots, Y_s)) - \textstyle\sum_{\lambda=1}^{s} (Y_1, \ldots, \phi_{\varphi X} Y_\lambda, \ldots, Y_s) \tag{3.2.11}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\omega \circ \varphi$

$$\begin{aligned} (\omega \circ \varphi)(Y_1, \ldots, Y_s) &= \omega(\varphi Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \\ &\vdots \\ &= \omega(Y_1, Y_2, \ldots, \varphi Y_s) \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

(3.2.11)'i kullanarak Teorem 3.2.5'in ispatını benzer şekilde yapabiliriz.

Teorem 3.2.7 $\omega \in \overset{*}{\Im}{}^0_s(M),\ s \geq 2$ ve $\varphi^2 = -id$ olsun. $\omega \circ \varphi \in Ker\phi_\varphi$ olması için gerek ve yeter şart $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olmasıdır.

Sonuç 3.2.3 $\omega \in \overset{*}{\Im}{}^0_s(M),\ s \geq 2$ ve $\omega \in Ker\phi_\varphi$ olsun. $\varphi^2 = -id$ ise $\omega \circ N_\varphi = 0$ olur. Burada $(\omega \circ N_\varphi)(X, Y_1, \ldots, Y_s) = \omega(N_\varphi(X, Y_1) Y_2, \ldots, Y_s)$ şeklindedir.

3.2.5 (r, s) Tipli Tensör Alanına Uygulanan ϕ_φ−Operatör

$t \in \overset{*}{\Im}{}^r_s(M),\ r > 1,\ s \geq 1$ olsun. $(0, s)$ tipli $t_{\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^r} \in \overset{*}{\Im}{}^0_s(M)$ tensör alanının bileşenleri

$$(t_{\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^r})_{j_1 j_2 \ldots j_s} = t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \xi^1_{i_1} \xi^2_{i_2} \ldots \xi^r_{i_r}$$

olmak üzere pür tensör alanı $t_{\xi^1,\xi^2,\ldots,\xi^r}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) = t(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r)$ ile tanımlanır.

Teorem 3.2.6'ya göre

$$\begin{aligned}
\phi_{\varphi X} t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r) &= \phi_{\varphi X} t_{\xi^1,\ldots,\xi^r}(Y_1, \ldots, Y_s) \\
&= (\varphi X) t_{\xi^1,\ldots,\xi^r}(Y_1, \ldots, Y_s) - X t_{\xi^1,\ldots,\xi^r}(\varphi Y_1, \ldots, Y_s) \\
&= (\varphi X) t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) \\
&\quad - X t(\varphi Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r)
\end{aligned}$$

eşitliğini buluruz. O halde $\phi_{\varphi X} \xi^\mu = L_{\varphi X} \xi^\mu - L_X(\xi^\mu \circ \varphi)$ (bakınız (3.2.5)) eşitliğini kullanarak, $t \in \overset{*}{\Im}{}^r_s(M),\ r > 1,\ s \geq 1$ için $\phi_\varphi t$ tensör alanı ile $(r, s+1)$ tipli tensör alanı

$$\begin{aligned}
(\phi_\varphi t)(X, Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) &= (\phi_{\varphi X} t)(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) \\
&= \phi_{\varphi X} t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) \qquad (3.2.12) \\
&\quad - \sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, \ldots, \phi_{\varphi X} Y_\lambda, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r)
\end{aligned}$$

ile verilir.

(3.2.12) eşitliğinde $X = \partial_k,\ Y_\lambda = \partial_{j_\lambda},\ \xi^\mu = dx^{i_\mu},\ \lambda = 1, \ldots, s;\ \mu = 1, \ldots, r$ alınarak, $x^1, \ldots, x^n$ lokal koordinat sistemine göre $\phi_\varphi t$ nun $(\phi_\varphi t)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ bileşenleri

$$(\phi_\varphi t)^{i_1 \ldots i_r}_{k j_1 \ldots j_s} = \varphi^m_k \partial_m t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} - \partial_k (t \circ \varphi)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} + \sum_{\lambda=1}^{s} (\partial_{j_\lambda} \varphi^m_k) t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots m \ldots j_s} \qquad (3.2.13)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada

$$(t \circ \varphi)^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = t^{i_1 \ldots i_r}_{m \ldots j_s} \varphi^m_{j_1} = \ldots = t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots m} \varphi^m_{j_s} = t^{m \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \varphi^{i_1}_m = \ldots = t^{i_1 \ldots m}_{j_1 \ldots j_s} \varphi^{i_r}_m$$

şeklindedir.

(3.2.13) operatörünü ilk olarak Tachibana tanımlamıştır [74]. Bu tür operatörler ve cebirsel yapılar kullanılarak onların genelleştirmeleri [20] [?], [43], [44], [67], [70], [75] çalışmalarında çalışılmıştır.

3.3 Vishnevskii operatörleri

∇'nın M üzerinde lineer konneksiyon olduğunu kabul edelim ve $\varphi \in \Im_1^1(M)$ olsun. Tanım 2.2.1 (d) şıkkını her $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$(d')\psi_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X} Y - \varphi\left(\nabla_X Y\right)$$

ile değiştirebiliriz. O zaman aşağıdaki gibi yeni bir operatör alırız.

Tanım 3.3.1 M üzerinde Vishnevskii operatörü veya $\psi_\varphi-$operatörü, Tanım 2.2.1'in (a), (b), (c), (e) şartlarını ve (d') şartını sağlayan $\psi_\varphi : \overset{*}{\Im}(M) \to \Im(M)$ dönüşümüdür.

Not 3.3.1 ∇ konneksiyonunun tanımına göre, $\psi_{\varphi X} Y$'nin X'e göre lineer fakat Y'ye göre lineer olmadığını kolayca görebiliriz. Bundan sonra $\psi_{\varphi X} Y$ yerine $(\psi_\varphi Y)\, X$ yazacağız.

3.3.1 $s \geq 0$ İçin $(1, s)$ Tipli Tensör Alanına Uygulanan $\psi_\varphi-$Operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}_s^1(M)$ olsun. $t\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s\right) \in \Im_0^1(M)$ olduğu için, Tanım 3.3.1'i kullanarak

$$\begin{aligned}
(\psi_{\varphi X} t)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) &= (\psi_\varphi t)(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \\
&= \psi_{\varphi X} t(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \\
&\quad - \sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, \ldots, (\psi_\varphi Y_\lambda)X, \ldots, Y_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\psi_{\varphi X} t)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) &= (\nabla_{\varphi X} t)(Y_1, \ldots, Y_s) \\
&\quad + \sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, \ldots, \nabla_{\varphi X} Y_\lambda, \ldots, Y_s) \\
&\quad - \varphi(\nabla_X t)(Y_1, \ldots, Y_s) \\
&\quad - \varphi(\sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_\lambda, \ldots, Y_s)) \\
&\quad - \sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, \ldots, (\psi_\varphi Y_\lambda)X, \ldots, Y_s)
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

yazabiliriz. t pür tensör alanı olduğu için

$$\varphi(\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_\lambda, \ldots, Y_s\right)) = \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1, \ldots, \varphi\left(\nabla_X Y_\lambda\right), \ldots, Y_s\right) \tag{3.3.2}$$

eşitliği yazılır. (3.3.2)'u (3.3.1)'de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}(\psi_\varphi t)(X, Y_1, \ldots, Y_s) &= (\nabla_{\varphi X} t - \varphi(\nabla_X t))(Y_1, \ldots, Y_s) \\ &\quad + \sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, \ldots, \nabla_{\varphi X} Y_\lambda - \varphi(\nabla_X Y_\lambda), \ldots, Y_s)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece

$$\left(\psi_\varphi t\right)\left(X, Y_1, \ldots, Y_s\right) = \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi\left(\nabla_X t\right)\right)\left(Y_1, \ldots, Y_s\right) \tag{3.3.3}$$

olur. (3.3.3)'den aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.3.1 $t \in \overset{*}{\Im}{}_s^1(M)$ olsun. $\nabla t = 0$ olması durumunda $t \in Ker\psi_\varphi$ olacak.

3.3.2 $(0, s)$ Tipli Tensör Alanına Uygulanan ψ_φ−Operatörü

$\omega \in \Im_1^0(M)$ olsun. Tanım 3.3.1'i kullanarak, $(\omega \circ \varphi) Y = \omega(\varphi Y)$ olmak üzere her $X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$\begin{aligned}\left(\psi_\varphi \omega\right)(X, Y) &= (\psi_{\varphi X} \omega) Y \\ &= \psi_{\varphi X}(\iota_Y \omega) - \omega(\psi_{\varphi X} Y) \\ &= (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_{\varphi Y} \omega) - \omega\left(\nabla_{\varphi X} Y - \varphi\left(\nabla_X Y\right)\right) \\ &= \left(\nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X\left(\omega \circ \varphi\right)\right) Y\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

yazabiliriz. (3.3.4)'den, $\psi_{\varphi X} \omega = \nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X(\omega \circ \varphi)$'nun 1-form olduğu görülür.

$\omega \in \Im_s^0(M)$, $s > 1$ olsun. Teorem 3.2.6'yı kullanarak benzer yöntemlerle

$$\begin{aligned}\left(\psi_\varphi \omega\right)\left(X, Y_1, \ldots, Y_s\right) &= \left(\psi_{\varphi X} \omega\right)\left(Y_1, \ldots, Y_s\right) \\ &= \psi_{\varphi X} \omega\left(Y_1, \ldots, Y_s\right) - \textstyle\sum_{\lambda=1}^{s} \omega\left(Y_1, \ldots, \psi_{\varphi X} Y_\lambda, \ldots, Y_s\right)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\left(\psi_\varphi \omega\right)\left(X, Y_1, \ldots, Y_s\right) = \left(\nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X (\omega \circ \varphi\right)\left(Y_1, \ldots, Y_s\right) \tag{3.3.5}$$

olur. (3.3.5)'den aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.3.2 $\omega \in \overset{*}{\Im}{}_s^0(M)$ olsun. $\nabla \omega = 0$ olsa bile $\omega \notin Ker\psi_\varphi$.

3.3.3 $r > 1$ İçin (r, s) Tipli Tensör Alanına Uygulanan ψ_φ−Operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}^r_s(M)$ olsun. Benzer yöntemlerle (bakınız bölüm 2.2.4)

$$\begin{aligned}(\psi_\varphi t)(X, Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) &= \psi_{\varphi X} t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) \\ &\quad -\sum_{\lambda=1}^{s} t(Y_1, \ldots, \psi_{\varphi X} Y_\lambda, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r)\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

yazabiliriz. (3.3.6)'da

$$\begin{aligned}& t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \nabla_{\varphi X}\xi^\mu - \nabla_X(\xi^\mu \circ \varphi), \ldots, \xi^r) \\ = \ & t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \nabla_{\varphi X}\xi^\mu - (\nabla_X \xi^\mu) \circ \varphi - \xi^\mu \circ \nabla_X \varphi, \ldots, \xi^r) \\ = \ & t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \nabla_{\varphi X}\xi^\mu -' \varphi \nabla_X \xi^\mu, \ldots, \xi^r) \\ & -t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^\mu \circ \nabla_X \varphi, \ldots, \xi^r)\end{aligned}$$

ifadesini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}(\psi_\varphi t)(X, Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) &= (\nabla_{\varphi X} t - \nabla_X(t \circ \varphi))(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^r) \\ &\quad +\sum_{\mu=1}^{r} t(Y_1, \ldots, Y_s, \xi^1, \ldots, \xi^\mu \circ \nabla_X \varphi, \ldots, \xi^r)\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

elde edilir. $\nabla\varphi = 0$ olsun. O halde (3.3.7)'den

$$\psi_{\varphi X} t = \nabla_{\varphi X} t - (\nabla_X t) \circ \varphi \tag{3.3.8}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.3.8)'den, $\psi_\varphi t$'nin $\{\partial_i\}$ doğal çatısına göre

$$(\psi_\varphi t)^{i_1 \ldots i_r}_{k j_1 \ldots j_s} = \varphi^m_k \nabla_m t^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} - \varphi^{j_1}_m \nabla_k t^{m i_2 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$$

bileşenlerine sahip olduğunu görürüz.

(3.3.8) operatörü, integrallenebilir $\varphi-$yapılar için ilk olarak V.V. Vishnevskii [76] tarafından tanımlanmıştır.

φ afinor alanına sahip manifoldda $\nabla\varphi = 0$ ise ∇ konneksiyonuna $\varphi-$konneksiyon denir.

Teorem 3.3.3 ∇ $\varphi-$konnesiyonunun burulma tensörü pür ise, her $t \in \overset{*}{\Im}{}^r_s(M)$ için $\phi_{\varphi X} t = \psi_{\varphi X} t$ olur.

İspat. $\nabla\varphi = 0$ ve $\varphi T(X,Y) = T(\varphi X, Y) = T(X, \varphi Y)$ olsun. Burada $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ dir. Tanım 3.2.1'in (d) şıkkından ve (d') den

$$\begin{aligned}
\phi_{\varphi X} Y &= -(L_Y \varphi) X \\
&= [\varphi X, Y] - \varphi [X,Y] \\
&= \nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y \varphi X - T(\varphi X, Y) - \varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - T(X,Y)) \\
&= \nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_X Y) - (\nabla\varphi)(Y,X) + \varphi T(X,Y) - T(\varphi X, Y) \\
&= \nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_X Y) \\
&= \psi_{\varphi X} Y
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Sıfır burulma tensörü pür olduğundan herhangi bir burulmasız $\varphi-$konneksiyonu için $\phi_{\varphi X} Y = \psi_{\varphi X} Y$ olur.

3.3.4 Pür Konneksiyona Uygulanan $\psi_\varphi-$Operatörü

$\varphi \in \Im_1^1(M)$ ve ∇ burulmasız $\varphi-$konneksiyon, yani $\nabla\varphi = 0$ olsun. Bu durumda φ'nin integrallenebildiği yani, $\varphi = \left(\varphi_j^i\right)$ matrisinin her $x \in M$ nin U_x koordinat komşuluğundaki belli holonomik doğal çatıda sabit forma indirgenebileceği bilinir.

∇ burulmasız $\varphi-$konneksiyon ise ∇'nın bileşenleri Γ_{ij}^k olmak üzere adapte olmuş lokal koordinatlara göre $\nabla\varphi = 0$'dan

$$\Gamma_{mj}^k \varphi_i^m = \Gamma_{im}^k \varphi_j^m = \Gamma_{ij}^m \varphi_m^k \tag{3.3.9}$$

yazabiliriz. Bu konneksiyon φ'ye göre pür konneksiyondur [**?**], [98].

R ile $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için $\Im_3^1(M)$'e ait olan

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde ifade edilen ∇ pür konneksiyonunun eğrilik tensörünü tanımlayalım.

φ'yi Ricci özdeşliğine uygulayarak

$$\begin{aligned}
\nabla_X((\nabla_Y\varphi) Z) - \nabla_Y((\nabla_X\varphi) Z) &= R(X,Y)\varphi Z - \varphi(R(X,Y)Z) + \left(\nabla_{[X,Y]}\varphi\right) Z \\
&\quad + (\nabla_Y\varphi)(\nabla_X Z) - (\nabla_X\varphi)(\nabla_Y Z)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\nabla\varphi = 0$'dan

$$\varphi R(X,Y) Z = R(X,Y)\varphi Z$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.3.4 $\varphi \in \Im_1^1(M)$ olsun. ∇, φ'ye göre pür konneksiyon ise her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$\varphi R(X, Y) Z = R(X, Y) \varphi Z \tag{3.3.10}$$

yazılır.

Teorem 3.3.5 $\varphi \in \Im_1^1(M)$ ve ∇, φ'ye göre pür konneksiyon olsun. ∇'ın R eğrilik tensör alanının φ'ye göre pür tensör alanı olması için gerek ve yeter şart her $X, Y, Z \in Ker\psi_\varphi$ için

$$\psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi X}\nabla_Y Z - \varphi(\nabla_X \nabla_Y Z) = 0$$

olmasıdır.

İspat. $X, Y, Z \in Ker\psi_\varphi$ (bakınız (d')) ve

$$\psi_{\varphi Y} X = \phi_{\varphi Y} X = -(L_X \varphi) Y = 0 \, (\nabla\varphi = 0,\ T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} R(X,\varphi Y)Z &= \nabla_X \nabla_{\varphi Y} Z - \nabla_{\varphi Y}\nabla_X Z - \nabla_{[X,\varphi Y]} Z \\ &= \nabla_X \varphi(\nabla_Y Z) - \nabla_{\varphi Y}\nabla_X Z - \nabla_{(L_X\varphi)Y + \varphi L_X Y} Z \\ &= \varphi\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right) + \varphi(\nabla_Y \nabla_X Z) - \nabla_{\varphi Y}\nabla_X Z \\ &= \varphi R(X,Y) Z - \psi_{\varphi Y}(\nabla_X Z) \end{aligned}$$

yazarız. Böylece

$$R(X,\varphi Y)Z = \varphi R(X,Y)Z - \psi_{\varphi Y}(\nabla_X Z) \tag{3.3.11}$$

olur. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ olduğundan dolayı, (3.3.11)'den

$$\begin{aligned} R(\varphi X, Y)Z &= -R(Y,\varphi X)Z \\ &= -\varphi R(Y,X)Z + \psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

yazarız. (3.3.10) - (3.3.12)'den, ∇ pür konneksiyonunun R eğrilik tensörünün pür olması için gerek ve yeter şart her $X, Y, Z \in Ker\psi_\varphi$ için

$$\psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) = 0$$

olmasıdır. Böylece Teorem 2.3.5 ispatlanmış olur.

(3.3.12)'den

$$\psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z) \in \Im_3^1(M)$$

olduğunu görürüz. Bu yüzden, bundan sonra $\psi_{\varphi X}(\nabla_Y Z)$ için $(\psi_\varphi \nabla)(X, Y, Z)$ yazarız. Burada

$$(\psi_\varphi \nabla)(X, Y, Z) = \nabla_{\varphi X}\nabla_Y Z - \varphi(\nabla_X \nabla_Y Z)$$

şeklindedir. Böylece $\psi_\varphi\nabla$, ∇ pür konneksiyonuna uygulanan $\psi_\varphi-$operatörüdür (veya $\phi_\varphi-$operatörüdür).

∇ pür konneksiyonu Kähler-Norden manifoldlarının konneksiyonu ise, otomatik olarak $\psi_\varphi\nabla = 0$ şartının sağlandığını göreceğiz (bakınız Bölüm III).

3.4 Regüler $\Pi-$Yapıya Göre Pür Tensörler

$(1,1)-$tipli t tensör alanının regüler $\Pi-$yapısına göre pürlük şartı, her $\varphi \in \Pi$ için lokal koordinatlarda

$$t_j^m \varphi_m^i = t_m^i \varphi_j^m \tag{3.4.1}$$

şartının sağlaması anlamındadır. $i = u\alpha$, $j = v\beta$, $m = w\sigma$ ve $\underset{\gamma}{\varphi} = \left(\delta_v^u C_{\gamma\beta}^\alpha\right)$ yazarsak, (3.4.1)'den

$$\begin{array}{l} t_{v\beta}^{w\sigma}\delta_w^u C_{\gamma\sigma}^\alpha = t_{w\sigma}^{u\alpha}\delta_v^w C_{\gamma\beta}^\sigma, \\ t_{v\beta}^{u\sigma} C_{\gamma\sigma}^\alpha = t_{v\sigma}^{u\alpha} C_{\gamma\beta}^\sigma \end{array} \tag{3.4.2}$$

buluruz. $\varepsilon^\beta \left(1 = \varepsilon^\beta e_\beta\right)$ ile kontraksiyonu ve (3.2.1)'i kullanarak, (3.4.2)'den $\overset{\sigma}{\Im}{}_v^u = t_{v\beta}^{u\sigma}\varepsilon^\beta$ olmak üzere

$$t_{v\beta}^{u\sigma}\varepsilon^\beta C_{\gamma\sigma}^\alpha = t_{v\sigma}^{u\alpha} C_{\gamma\beta}^\sigma \varepsilon^\beta = t_{v\sigma}^{u\alpha}\delta_\gamma^\sigma = t_{v\gamma}^{u\alpha}$$

veya

$$t_j^i = t_{v\gamma}^{u\alpha} = \overset{\sigma}{\Im}{}_v^u C_{\sigma\gamma}^\alpha \tag{3.4.3}$$

yazarız. Böylece, $t \in \overset{*}{\Im}{}_1^1(M)$ pür tensör alanı (3.4.3) formuna sahip olur.

Tersine (3.4.3)'den, $\overset{\sigma}{\Im}$'lar keyfi fonksiyonlar ise (1,1)-tipli t tensör alanı pür olur. Gerçekten, (3.4.3)'yi (3.4.1)'de yerine yazarsak

$$\begin{array}{l} \overset{\sigma}{\Im}{}_v^w C_{\varepsilon\beta}^\sigma \delta_w^u C_{\gamma\sigma}^\alpha = \overset{\sigma}{\Im}{}_w^u C_{\varepsilon\sigma}^\alpha \delta_v^w C_{\gamma\beta}^\sigma \\ \overset{\varepsilon}{\Im}{}_v^u \left(C_{\varepsilon\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\alpha - C_{\varepsilon\sigma}^\alpha C_{\gamma\beta}^\sigma\right) = 0 \end{array} \tag{3.4.4}$$

buluruz. $\mathfrak{A}_m$ değişimli $\left(C_{\varepsilon\beta}^\sigma C_{\gamma\sigma}^\alpha = C_{\varepsilon\sigma}^\alpha C_{\gamma\beta}^\sigma\right)$ olduğundan (3.4.1) denklemi $\overset{\varepsilon}{\Im}$ keyfi fonksiyonları için sağlar.

Böylece, $(1,1)$-tipli t tensör alanının regüler $\Pi-$yapısına göre pür olması için gerek ve yeter şart t'nin $\overset{\sigma}{\Im}$ keyfi fonksiyonları için (3.4.3) formuna sahip olmasıdır.

$g \in \overset{*}{\Im}{}_2^0(M)$ olduğu durumda, benzer yömtemlerle, $(0,2)$-tipli g tensör alanının pür olması için gerek ve yeter şart g nin $\Im_{..\sigma}$ keyfi fonksiyonları için

$$g_{ij} = g_{uvv\beta} = \Im_{uv\sigma} C^{\sigma}_{\alpha\beta}$$

formuna sahip olmasıdır.

$G \in \overset{*}{\Im}{}_0^2(M)$ olduğunda durum çok daha zordur. G'nin pürlük şartı her $\varphi \in \Pi$ için

$$G^{mj}\varphi^i_m = G^{im}\varphi^j_m$$

ile verilir. Benzer şekilde

$$G^{u\sigma v\beta} C^{\alpha}_{\gamma\sigma} = G^{u\alpha v\sigma} C^{\beta}_{\gamma\sigma} \tag{3.4.5}$$

yazılır. λ_α ile (3.4.5)'in kontraksiyonundan sonra $\varphi_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ olmak üzere

$$\varphi_{\gamma\sigma} G^{u\sigma v\beta} = \overset{\sigma}{\Im}{}^{uv} C^{\beta}_{\gamma\sigma}\ (\overset{\sigma}{\Im}{}^{uv} = G^{u\alpha v\sigma}\lambda_\alpha) \tag{3.4.6}$$

yazılır.

$Det\,(\varphi_{\alpha\beta}) \neq 0$ ise, yani $\mathfrak{A}_m$ Frobenius cebir ise, (3.4.6)'dan

$$t^{ij} = t^{u\alpha v\beta} = \overset{\sigma}{\Im}{}^{uv} C^{\alpha}_{\sigma\mu}\varphi^{\mu\beta} \tag{3.4.7}$$

çözümü elde edilir. Tersine, (3.2.3)'e dayanarak (3.4.7)'den $\overset{\sigma}{\Im}$ keyfi fonksiyonlar ise $G \in \overset{*}{\Im}{}_0^2(M)$ tensör alanı pür olur. Böylece $G \in \overset{*}{\Im}{}_0^2(M)$ olduğu durumda $\mathfrak{A}_m$ cebiri Frobenius cebir olmak zorundadır.

Genelde, $t \in \Im^r_s(M)$ olduğu durum için $\mathfrak{A}_m$ uzayında

$$\begin{aligned} B^{\alpha}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s} &= C^{\alpha}_{\beta_1\sigma_1} C^{\alpha_1}_{\beta_2\sigma_2}\ldots C^{\alpha_{s-2}}_{\beta_{s-1}\sigma_s} (s>2), \\ B^{\alpha}_{\beta_1\beta_2} &= C^{\alpha}_{\beta_1\beta_2}, B^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \end{aligned}$$

Kruchkovich tensörleri dahil edilir[?]. $\mathfrak{A}_m$, $\varphi_{\alpha\beta}$ metriğine sahip Frobenius cebiri ise, o zaman

$$\begin{aligned} B^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s} &= B^{\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}\varphi^{\lambda_1\alpha_1}\ldots\varphi^{\lambda_{r-1}\alpha_{r-1}}, \\ B^{\alpha_1\ldots\alpha_r} &= B^{\alpha_r}_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}\varphi^{\lambda_1\alpha_1}\ldots\varphi^{\lambda_{r-1}\alpha_{r-1}}, \\ B_{\beta_1\ldots\beta_s} &= B^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_{s-1}}\varphi_{\alpha\beta_s} \end{aligned}$$

yazılır.

$B^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}$ Kruchkovich tensörleri için bazı özellikleri ifade edelim:

$B_1)$ $B^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}$, $\alpha_1\ldots\alpha_r$ ve $\beta_1\ldots\beta_s$ indislerine göre simetrik tensördür,

$$B_2)\ C^{\lambda}_{\sigma\mu} B^{\sigma\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s} = B^{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\mu\beta_1\ldots\beta_s}, C^{\sigma}_{\lambda\mu} B^{r_1\ldots r_s}_{\sigma\beta_1\ldots\beta_s} = B^{r_1\ldots r_s}_{\lambda\mu\beta_1\ldots\beta_s},$$

$$B_3)\; B^{\sigma\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}\lambda_\sigma = B^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\sigma\beta_1\ldots\beta_s}\varepsilon^\sigma = B^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}.$$

B_1, B_2, B_3'ün ispatları (3.2.1), (3.2.3) ve (3.2.5)'den kolayca yapılabilir.

Benzer şekilde, $\overset{\sigma}{\Im}$ adapte olmuş U koordinat haritasında keyfi fonksiyonlar olmak üzere regüler $\Pi-$yapılarına göre (r,s) tipli $t \in \overset{*}{\Im}{}^r_s(M)$ pür tensör alanı

$$\begin{array}{l} t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \overset{\sigma}{\Im}{}^{u_1\ldots u_r}_{v_1\ldots v_s} B^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}, \\ (i_a = u_a\alpha_a,\;\; j_b = v_b\beta_b,\;\; a=1,\ldots,r,\;\; b=1,\ldots,s) \end{array} \tag{3.4.8}$$

formundaki bileşenlerine sahiptir.

$\mathfrak{A}_m$ cebiri Frobenius cebiri değilse, $r=0$ ve $r=1$ olduğu durumda (3.4.8) formülü doğrudur.

(3.4.8)'deki her bir pür tensör alanı ile $\mathfrak{A}_m$'den

$$\overset{*}{t}{}^{u_1\ldots u_r}_{v_1\ldots v_s} = t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\varepsilon^{\beta_1}\ldots\varepsilon^{\beta_s}\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda_{\alpha_{r-1}}e_{\alpha_r} = \overset{\sigma}{\Im}{}^{u_1\ldots u_r}_{v_1\ldots v_s}e_\sigma \tag{3.4.9}$$

hiperkompleks değerlerini dahil edelim. $\overset{*}{t}{}^{u_1\ldots u_r}_{v_1\ldots v_s}$, (r,s)-tipli hiperkompleks tensör alanının bileşenleridir. Yani

$$\overset{*}{t}{}^{u_1'\ldots u_r'}_{v_1'\ldots v_s'} = \overset{*}{S}{}^{u_1'}_{u_1}\ldots\overset{*}{S}{}^{u_r'}_{u_r}\overset{*}{S}{}^{v_1}_{v_1'}\ldots\overset{*}{S}{}^{v_s}_{v_s'}\overset{*}{t}{}^{u_1\ldots u_r}_{v_1\ldots v_s}$$

şeklindedir. Gerçekten, kolaylık açısından $r=s=1$ alırsak, (2.2.7) ve (2.2.8)'den

$$t^{i'}_{j'} = t^{u'\alpha'}_{v'\beta'} = S^{\;u'\alpha'}_{\;u\alpha}\,S^{\;v\beta}_{\;v'\beta'}t^{u\alpha}_{v\beta} = \Delta^{u'\sigma}_{u}C^{\alpha'}_{\sigma\alpha}\Delta^{v\varepsilon}_{v'}C^{\beta}_{\varepsilon\beta'}t^{u\alpha}_{v\beta},$$

yazabiliriz. Burada (2.2.9)'dan dolayı

$$\begin{aligned} \overset{*}{t}{}^{u'}_{v'} &= t^{i'}_{j'}\varepsilon^{\beta'}e_{\alpha'} \\ &= t_{v'}{\beta'}^{u'}\alpha'\varepsilon^{\beta'}e_{\alpha'} \\ &= \Delta^{u'\sigma}_{u}C^{\alpha'}_{\sigma\alpha}\Delta^{v\varepsilon}_{v'}C^{\beta}_{\varepsilon\beta'}t^{u\alpha}_{v\beta}\varepsilon^{\beta'}e_{\alpha'} \\ &= \Delta^{u'\sigma}_{u}\Delta^{v\beta}_{v'}e_\sigma e_\alpha t^{u\alpha}_{v\beta} \\ &= \Delta^{u'\sigma}_{u}\Delta^{v\beta}_{v'}e_\sigma e_\alpha \overset{\varepsilon}{I}{}^{u}_{v}B^{\alpha}_{\varepsilon\beta} \\ &= \Delta^{u'\sigma}_{u}\Delta^{v\beta}_{v'}\overset{\varepsilon}{I}{}^{u}_{v}e_\sigma e_\beta e_\varepsilon \\ &= \overset{*}{S}{}^{u'}_{u}\overset{*}{S}{}^{v}_{v'}\overset{*}{t}{}^{u}_{v} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.4.1 Π, M_{mr} üzerinde regüler integrallenebilir $\Pi-$yapı olsun. M_{mr} üzerindeki (r,s) tipli t pür tensör alanları $X_r(\mathfrak{A}_m)$ $\mathfrak{A}-$holomorfik manifoldunda $\overset{*}{t}$ hiperkompleks tensörlerinin reel modelidirler.

Not 3.4.1 $\overset{*}{t}$ hiperkompleks tensör alanları genelde $\mathfrak{A}-$holomorfik değildirler.

Sonraki bölümlerde, $\overset{*}{t}$'ın $\mathfrak{A}-$holomorfik şartlarının reel modelini çalışacağız.

3.5 Reel Koordinat Sisteminde $\mathfrak{A}-$Holomorfik Tensörler

$\mathfrak{A}_m$, Frobenius hiperkompleks cebir ve $\overset{*}{t} \in \Im_s^r(X_r(\mathfrak{A}_m))$, $X_r(\mathfrak{A}_m)$ üzerinde hiperkompleks tensör alanı olsun. Böyle bir tensör alanının reel modeli M_{mr} üzerindeki (r,s)-tipli t pür tensör alanıdır. Genelde $\overset{*}{t}$, $\mathfrak{A}-$holomorfik değildir. Tachibana operatörünü kullanarak reel koordinat sistemlerinde $\mathfrak{A}-$holomorfik tensörlerinin şartlarını verelim. Yani aşağıdaki teorem doğrudur [?], [63]:

Teorem 3.5.1 M_{mr} üzerinde integrallenebilen regüler $\Pi-$yapısı verilsin. $\overset{*}{t} \in \Im_s^r(X_r(\mathfrak{A}_m))$ hiperkompleks tensör alanının $\mathfrak{A}-$holomorfik tensör alanı olması için gerek ve yeter şart $t \in \Im_s^r(M_{mr})$ ($\overset{*}{t}$'ın reel modeli) pür tensör alanının $\Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} t$ Tachibana operatörü olmak üzere

$$\Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} t = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat. $x^1, \ldots, x^{mr}$ lokal koordinat sistemine göre $\Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} t$'nin $\left(\Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} t\right)_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r}$ bileşenleri (3.2.3)'deki gibi ifade edilebilir. Adapte olmuş haritalarda$\left(\partial_k \varphi_j^i = 0\right)$ (3.4.8)'e dayanarak (3.2.3)'den $(i_a = u_a\alpha_a,\ j_b = v_b\beta_b,\ k = w\gamma,\ a = 1, \ldots, r,\ b = 1, \ldots, s)$

$$(\Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} t)_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} = \underset{\alpha}{\varphi}{}_k^m \partial_m t_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} - \partial_k (t \circ \underset{\alpha}{\varphi})_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} = (C_{\alpha\gamma}^{\mu} \partial_{w\mu} \overset{\lambda}{\Im}{}_{v_1 \ldots v_s}^{u_1 \ldots u_r} - C_{\alpha\sigma}^{\lambda} \partial_{w\gamma} \overset{\sigma}{\Im}{}_{v_1 \ldots v_s}^{u_1 \ldots u_r}) B_{\lambda\beta_1 \ldots \beta_s}^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = 0$$

yazabiliriz. Buradan ve B_3 özelliğinden (bakınız Bölüm 2.4), $\Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} t = 0$ şartı

$$C_{\alpha\gamma}^{\mu} \partial_{w\mu} \overset{\lambda}{\Im}{}_{v_1 \ldots v_s}^{u_1 \ldots u_r} = C_{\alpha\sigma}^{\lambda} \partial_{w\gamma} \overset{\sigma}{\Im}{}_{v_1 \ldots v_s}^{u_1 \ldots u_r}$$

şartına denktir. Bu şart $X_r(\mathfrak{A}_m)$'den $z^u = x^{u\alpha} e_\alpha$ lokal koordinatlarına göre $\overset{*}{t}{}_{v_1 \ldots v_s}^{u_1 \ldots u_r} = \overset{\sigma}{\Im}{}_{v_1 \ldots v_s}^{u_1 \ldots u_r} e_\sigma$'nun $\mathfrak{A}-$ holomorfikliğinin Scheffers şartıdır (bakınız (2.1.15)). Böylece ispat tamamlanır.

M_{mr} üzerindeki regüler $\Pi-$yapısının infinitesimal otomorfizmi $L_X \underset{\alpha}{\varphi} = 0,\ \alpha = 1, \ldots, m,$ olacak şekilde X vektör alanıdır. Burada L_X, $X \in \Im_0^1(M_{mr})$'a göre Lie diferensiyellenmesini tanımlar. Teorem 3.5.1 ve Tanım 3.2.1'in (d) şıkkından aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Sonuç 3.5.1 M_{rm} üzerinde integrallenebilir regüler $\Pi-$yapı verilsin. $X \in \Im_0^1(M_{mr})$ vektör alanının $\Pi-$yapının infinitesimal otomorfizmi olması için gerek ve yeter şart X'in $\mathfrak{A}-$holomorfik olmasıdır.

Not 3.5.1 M_{rm} üzerinde integrallenemeyen regüler $\Pi-$yapı verilsin. $t \in Ker\, \Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}}$ ise, t'ye hemen hemen $\mathfrak{A}-$holomorfik tensör alanı denir.

3.6 Pür Konneksiyonlar

Bu bölümde, regüler $\Pi-$yapının her zaman integrallenebilir olduğunu kabul edeceğiz. Lokal koordinatlar ile, $\Pi-$yapıya göre adapte olmuş koordinatlar anlaşılacaktır.

∇, M_{mr} üzerinde $\Pi-$konneksiyon olsun. Yani her $\varphi \in \Pi$ için $\nabla\varphi = 0$ olsun. $x^1, \ldots, x^{mr}$ lokal adapte olmuş koordinatlara göre φ bileşenleri sabit olduğundan dolayı

$$\nabla\varphi = 0 \Leftrightarrow \Gamma^i_{km}\varphi^m_j = \Gamma^m_{kj}\varphi^i_m. \tag{3.6.1}$$

yazabiliriz. Bölüm 2.4'te geliştirilen aynı argümanlar ile, adapte olmuş U haritasında $\overset{\sigma}{\tau}-$keyfi fonksiyonlar olmak üzere $\Pi-$konneksiyonu

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^{u\alpha}_{w\gamma v\beta} = \overset{\sigma}{\tau}{}^u_{w\gamma v} C^\alpha_{\sigma\beta} (i = u\alpha, j = v\beta, k = w\gamma) \tag{3.6.2}$$

formundaki bileşenlerine sahiptir. Gerçekten, $\varphi = \underset{\sigma}{\varphi}$ (3.4.1)'dan, ε^β ile kontraksiyonu kullanarak, $\overset{\varepsilon}{\tau}{}^u_{w\gamma v} = \Gamma^{u\varepsilon}_{w\gamma v\beta}\varepsilon^\beta, m = t\varepsilon$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Gamma^{u\alpha}_{w\gamma t\varepsilon}\underset{\sigma}{\varphi}{}^{t\varepsilon}_{v\beta} &= \Gamma^{t\varepsilon}_{w\gamma v\beta}\underset{\sigma}{\varphi}{}^{u\alpha}_{t\varepsilon}, \\
\Gamma^{u\alpha}_{w\gamma t\varepsilon}\delta^t_v C^\varepsilon_{\sigma\beta} &= \Gamma^{t\varepsilon}_{w\gamma v\beta}\delta^u_t C^\alpha_{\sigma\varepsilon}, \\
\Gamma^{u\alpha}_{w\gamma v\sigma} &= \Gamma^{u\varepsilon}_{w\gamma v\beta}\varepsilon^\beta C^\alpha_{\sigma\varepsilon} \\
&= \overset{\varepsilon}{\tau}{}^u_{w\gamma v} C^\alpha_{\varepsilon\sigma}
\end{aligned}$$

elde edeziz. (3.6.2)'daki her bir $\Pi-$konneksiyon ile $\mathfrak{A}_m$'den

$$\overset{*}{\Gamma}{}^u_{wv} = \Gamma^{u\alpha}_{w\gamma v\beta}\varepsilon^\gamma\varepsilon^\beta e_\alpha = \overset{\sigma}{\tau}{}^u_{w\gamma v}\varepsilon^\gamma e_\sigma. \tag{3.6.3}$$

hiperkompleks değerlerini dahil edebileriz.

Tanım 3.6.1 (3.6.3) hiperkompleks değerleri

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{u'}_{w'v'} = \frac{\partial z^{u'}}{\partial z^{u}} \frac{\partial z^{w}}{\partial z^{w'}} \frac{\partial z^{v}}{\partial z^{v'}} \overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{wv} + \frac{\partial^2 z^{u}}{\partial z^{v'} \partial z^{w'}} \frac{\partial z^{u'}}{\partial z^{u}},$$

konneksiyon şartlarını sağlarsa, yani $\overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{wv}$, $X_r(\mathfrak{A}_m)$ de $\overset{*}{\nabla}$ hiperkomplek konneksiyonlarının bileşenleri ise, $\Pi-$konneksiyon olan ∇ pürdür denir.

Teorem 3.6.1 Π, M_{mr} üzerinde regüler integrallenebilir $\Pi-$yapı olsun. M_{mr} üzerindeki $\Pi-$konneksiyonunun pür olması için gerek ve yeter şart (3.6.2)'deki $\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{w\gamma\nu}$'ların

$$\overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{w\gamma v} = \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wv} C^{\alpha}_{\sigma\gamma} \tag{3.6.4}$$

şartını sağlamasıdır.

İspat. $\Gamma^{i}_{kj} = \Gamma^{u\alpha}_{w\gamma v\beta}$, ∇ $\Pi-$ konneksiyonunun bileşenleri olsun. O zaman $\left(S^{i'}_{i}\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right) = \left(\frac{\partial x^{u'\alpha'}}{\partial x^{u\alpha}}\right)$ matrisine sahip adapte olmuş çatıların uygun $\{\partial_i\} \to \{\partial_{i'}\}$ dönüşümüne göre

$$\Gamma^{u'\alpha'}_{w'\gamma'v'\beta'} = \frac{\partial x^{u'\alpha'}}{\partial x^{u\alpha}} \frac{\partial x^{w\gamma}}{\partial x^{w'\gamma'}} \frac{\partial x^{v\beta}}{\partial x^{v'\beta'}} \Gamma^{u\alpha}_{w\gamma v\beta} + \frac{\partial^2 x^{u\alpha}}{\partial x^{w'\gamma'} \partial x^{v'\beta'}} \frac{\partial x^{u'\alpha'}}{\partial x^{u\alpha}}$$

yazabiliriz. $\varepsilon^{\gamma'}\varepsilon^{\beta'}e_{\alpha'}$ ile kontraksiyonundan sonra, (2.2.7) , (2.2.8) ve (2.2.9)'dan dolayı

$$\begin{aligned}
\overset{*}{\Gamma}{}^{u'}_{w'v'} &= \Gamma^{u'\alpha'}_{w'\gamma'v'\beta'}\varepsilon^{\gamma'}\varepsilon^{\beta'}e_{\alpha'} \\
&= \overset{\sigma}{\Delta}{}^{u'}_{u} C^{\alpha'}_{\sigma\alpha} \overset{\varepsilon}{\Delta}{}^{w}_{w'} C^{\gamma}_{\varepsilon\gamma'} \overset{\theta}{\Delta}{}^{v}_{v'} C^{\beta}_{\theta\beta'} \Gamma^{u\alpha}_{w\gamma v\beta}\varepsilon^{\gamma'}\varepsilon^{\beta'}e_{\alpha'} + \overset{\sigma}{\Delta}{}^{u'}_{u} C^{\alpha'}_{\sigma\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{w'\gamma'}}(\overset{\varepsilon}{\Delta}{}^{u}_{v'} C^{\alpha}_{\varepsilon\beta'})\right)\varepsilon^{\gamma'}\varepsilon^{\beta'}e_{\alpha'}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\overset{*}{\Gamma}{}^{u'}_{w'v'} &= \overset{\sigma}{\Delta}{}^{u'}_{u} \overset{\varepsilon}{\Delta}{}^{w}_{w'} \overset{\theta}{\Delta}{}^{v}_{v'} e_{\sigma} e_{\alpha} \delta^{\gamma}_{\varepsilon} \delta^{\beta}_{v} \overset{\omega}{\tau}{}^{u}_{w\gamma v} C^{\alpha}_{\omega\beta} + \overset{\sigma}{\Delta}{}^{u'}_{u} e_{\sigma}\varepsilon^{\gamma'}\left(\frac{\partial}{\partial x^{w'\gamma'}}(\overset{\alpha}{\Delta}{}^{u}_{v'})\right)e_{\alpha} \\
&= \overset{*}{S}{}^{u'}_{u} \overset{*}{S}{}^{v}_{v'} \overset{\gamma}{\Delta}{}^{w}_{w'} \overset{\theta}{\tau}{}^{u}_{w\gamma v} e_{\theta} + \overset{*}{S}{}^{u'}_{u} \varepsilon^{\gamma'}\left(\frac{\partial}{\partial x^{w'\gamma'}}(\overset{\alpha}{\Delta}{}^{u}_{v'})\right)e_{\alpha}
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\overset{*}{S}{}^{u'}_{u} = \frac{\partial z^{u'}}{\partial z^{u}}$, $S^{u}_{u'} = \frac{\partial z^{u}}{\partial z^{u'}}$, $z^{u} = x^{u\alpha}e_{\alpha}$ (bakınız Bölüm 1.3) şeklindedir. (2.1.17)'yi kullanarak,

$$\varepsilon^{\gamma'}\left(\frac{\partial}{\partial x^{w'\gamma'}}(\overset{\alpha}{\Delta}{}^{u}_{v'})\right)e_{\alpha} = \frac{\partial^2 z^{u}}{\partial z^{w'} \partial z^{v'}}$$

olduğunu görürüz. Böylece

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{u'}_{w'v'} = \frac{\partial z^{u'}}{\partial z^{u}} \overset{\gamma}{\Delta}{}^{w}_{w'} \frac{\partial z^{v}}{\partial z^{v'}} \overset{\theta}{\tau}{}^{u}_{w\gamma v} e_{\theta} + \frac{\partial^2 z^{u}}{\partial z^{v'} \partial z^{w'}} \frac{\partial z^{u'}}{\partial z^{u}} \tag{3.6.5}$$

yazabiliriz. (3.6.5)'den, $\overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{wv}$ bileşenlerine sahip $\overset{*}{\nabla}$'ın $X_r(\mathfrak{A}_m)$ üzerinde hiperkompleks konneksiyon olması için gerek ve yeter şartın $\overset{\theta}{\tau}{}^{u}_{w\gamma v}$'nun (3.6.4) şartını sağlaması gerektiğini kolayca görebiliriz. Böylece ispat tamamlanır.

(3.6.4)'ü (3.6.2) ve (3.6.3)'de yerine koyarsak, $B^{\alpha}_{\sigma\gamma\beta}$ Kruchkovich tensörü olmak üzere, sırasıyla

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^{u\alpha}_{w\gamma v\beta} = \overset{\sigma}{\tau}\,{}^{u}_{wv} C^{\mu}_{\sigma\gamma} C^{\alpha}_{\mu\beta} = \overset{\sigma}{\tau}\,{}^{u}_{wv} B^{\alpha}_{\sigma\gamma\beta} \tag{3.6.6}$$

ve

$$\overset{*}{\Gamma}\,{}^{u}_{wv} = \overset{\sigma}{\tau}\,{}^{u}_{wv} e_{\sigma} \tag{3.6.7}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 3.6.1 Pür ∇ $\Pi-$konneksiyonu adapte olmuş koordinatlara göre (3.6.6) bileşenlerine sahiptir.

Sonuç 3.6.2 Pür ∇ $\Pi-$konneksiyonu (3.6.7) bileşenlerine sahip $\overset{*}{\nabla}$ hiperkompleks konneksiyonunun reel modelidir.

Sonuç 3.6.1 ve (3.4.8)'den, $(1,2)$-tipli pür tensör alanlarında olduğu gibi pür $\Pi-$konneksiyon adapte olmuş haritalara (pür burulmasız konneksiyon için, bakınız (3.3.9)) göre

$$\Gamma^i_{km} \underset{\alpha}{\varphi}{}^{m}_{j} = \Gamma^m_{kj} \underset{\alpha}{\varphi}{}^{i}_{m} = \Gamma^i_{mj} \underset{\alpha}{\varphi}{}^{m}_{k}, \quad \alpha = 1, \ldots, m,$$

ile tanımlanır. Fakat $(1,2)$-tipli pür tensör alanları (bakınız Bölüm 2.4) ise keyfi haritalara göre benzer bir denklem ile tanımlanır.

3.7 Pür $\Pi-$Konneksiyonlarının Burulma Tensörleri

S, ∇ pür $\Pi-$konneksiyonunun burulma tensörü olsun. $B^{\alpha}_{\sigma\gamma\beta} = B^{\alpha}_{\sigma\beta\gamma}$ olduğundan (bakınız Bölüm 2.4), (3.6.6)'dan

$$S^i_{kj} \;=\; \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} \tag{3.7.1}$$

eşitliğini yazabiliriz. Yani S pür tensördür (bakınız (3.4.8)).

Tersine, S'nin $\Pi-$konneksiyonunun pür tensörü olduğunu kabul edelim. O halde (3.4.8) den dolayı

$$S^i_{kj} = S^{u\alpha}_{w\gamma v\beta} = \overset{\lambda}{\sigma}\,{}^{u}_{wv} B^{\alpha}_{\lambda\gamma\beta} \tag{3.7.2}$$

eşitliğini yazarız. Diğer taraftan, (3.6.2)'den

$$S^i_{kj} \;=\; \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} \tag{3.7.3}$$

olur. (3.7.2) ve (3.7.3)'den, ε^{γ} ile konrraksiyon yaparak

$$\tau^{u\alpha}_{v\beta w} = \left(\overset{\lambda}{\tau} {}^{u}_{\omega\gamma v} \varepsilon^{\gamma} - \overset{\lambda}{\sigma} {}^{u}_{wv} \right) C^{\alpha}_{\lambda\beta}$$

olup (3.6.4) şartının doğruluğunu göstermiş oluruz. Yani $\Pi-$konneksiyonu pürdür.

Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.7.1 ∇ $\Pi-$konneksiyonunun pür olması için gerek ve yeter şart ∇'nın burulma tensörünün pür olmasıdır.

(3.4.9), (3.6.7) ve (3.7.1)'den dolayı pür $\Pi-$konneksiyonu için

$$\overset{*}{S}{}^{u}_{wv} = (\overset{\sigma u}{\tau}{}_{wv} - \overset{\sigma u}{\tau}{}_{vw}) e_{\sigma} = \overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{wv} - \overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{vw}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.7.1 ∇ $\Pi-$konneksiyonunun pür burulma tensör alanı $\overset{*}{\nabla}$ hiperkompleks konneksiyonunun hiperkompleks burulma tensörünün reel modelidir.

Tabii ki sıfır tensör alanı pürdür. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu yazabiliriz (bakınız Bölüm 2.4)

Sonuç 3.7.2 Burulmasız ∇ $\Pi-$konneksiyonu her zaman pürdür.

Ayrıca Sonuç 3.7.1 ve Sonuç 3.7.2'den aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.7.3 ∇ burulmasız $\Pi-$konneksiyon ise o zaman (3.6.7) bileşenlerine sahip olan $\overset{*}{\nabla}$'da burulmasız konneksiyondur.

3.8 $\mathfrak{A}-$Holomorfik Hiperkompleks Konneksiyon ve Onun Reel Modeli

Burada ve bundan sonraki bölümde, pür burulmasız koneksiyona uygulanan $\psi_{\varphi}-$operatörünü kullanarak $\mathfrak{A}-$holomorfik hiperkompleks konneksiyonların reel modelini vereceğiz (bakınız Bölüm 2.3.4).

R, integrallenebilir regüler $\Pi-$yapıya göre ∇ pür burulmasız konneksiyonunun eğrilik tensörü olsun.

(3.6.6)'yı kullanarak ve Kruchkovich tensörlerinin özelliğinden

$$\begin{aligned} R^{i}_{jkl} &= R^{u\alpha}_{v\beta w\gamma t\delta} \\ &= \partial_{v\beta}\Gamma^{u\alpha}_{w\gamma t\delta} - \partial_{w\gamma}\Gamma^{u\alpha}_{v\beta t\delta} + \Gamma^{u\alpha}_{v\beta x\varepsilon}\Gamma^{x\varepsilon}_{w\gamma t\delta} - \Gamma^{u\alpha}_{w\gamma x\varepsilon}\Gamma^{x\varepsilon}_{v\beta t\delta} \qquad (3.8.1) \\ &= \partial_{v\beta}\,(\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wt}\, B^{\alpha}_{\sigma\gamma\delta}) - \partial_{w\gamma}(\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vt}\, B^{\alpha}_{\sigma\beta\delta}) + \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, B^{\alpha}_{\sigma\beta\varepsilon}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt}\, B^{\varepsilon}_{\theta\gamma\delta} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, B^{\alpha}_{\sigma\gamma\varepsilon}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt}\, B^{\varepsilon}_{\theta\beta\delta} \\ &= (\partial_{v\beta}\, \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wt})B^{\alpha}_{\sigma\gamma\delta} - (\partial_{w\gamma}\, \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vt})B^{\alpha}_{\sigma\beta\delta} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt})B^{\alpha}_{\sigma\gamma\theta\beta\delta} \end{aligned}$$

yazabiliriz. R'nin pür tensör olduğunu kabul edelim. O halde (3.4.8)'den

$$R^{i}_{jkl} = R^{u\alpha}_{v\beta w\gamma t\delta} = \overset{\lambda}{\rho}{}^{\ u}_{vwt} B^{\alpha}_{\lambda\beta\gamma\delta} \qquad (3.8.2)$$

yazarız. (3.8.1) ve (3.8.2)'den

$$\overset{\lambda}{\rho}{}^{\ u}_{vwt} B^{\alpha}_{\lambda\beta\gamma\delta} = (\partial_{v\beta}\, \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wt})B^{\alpha}_{\sigma\gamma\delta} - (\partial_{w\gamma}\, \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vt})B^{\alpha}_{\sigma\beta\delta} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt})B^{\alpha}_{\sigma\gamma\theta\beta\delta} \qquad (3.8.3)$$

elde ederiz. (3.8.3)'in $\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\delta}$ ile kontraksiyonundan sonra Kruchkovich tensörlerinin özelliğinden dolayı

$$\partial_{w\gamma}\, \overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{vt} = \overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{vwt} C^{\alpha}_{\lambda\gamma} \qquad (3.8.4)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \overset{\lambda}{\rho}{}^{\ u}_{vwt} C^{\alpha}_{\lambda\gamma} &= \varepsilon^{\beta}(\partial_{v\beta}\, \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wt})C^{\alpha}_{\sigma\gamma} - \partial_{w\gamma}\, \overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{vt} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt})C^{\lambda}_{\sigma\theta}C^{\alpha}_{\lambda\gamma} \\ &= -\partial_{w\gamma}\, \overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{vt} + (\varepsilon^{\beta}\partial_{v\beta}\, \overset{\lambda}{\tau}{}^{u}_{wt} + \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt}\, C^{\lambda}_{\sigma\theta} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt}\, C^{\lambda}_{\sigma\theta})C^{\alpha}_{\lambda\gamma} \end{aligned}$$

yazarız. Burada

$$\overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{vwt} = \varepsilon^{\beta}\partial_{v\beta}\, \overset{\lambda}{\tau}{}^{u}_{wt} + \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt}\, C^{\lambda}_{\sigma\theta} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt}\, C^{\lambda}_{\sigma\theta} - \overset{\lambda}{\rho}{}^{\ u}_{vwt}$$

şeklindedir. (2.1.15)'den dolayı, sabit tutulmuş u, v, w ve t için (3.8.4) ifadesi, $X_r(\mathfrak{A}_m)$'den $z^u = x^{u\alpha}e_{\alpha}$ lokal koordinatlarına göre $\overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{vt} = \overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{vt}\, e_{\alpha}$'nun $\mathfrak{A}-$holomorfikliğinin Scheffers şartıdır.

Tersine, $\overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{vt} = \overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{vt}\, e_{\alpha}$, $\mathfrak{A}-$holomorfik konneksiyon ise o zaman Teorem 1.1.1 ($\tilde{C}_{\alpha} = C_{\alpha}$) ve (2.1.15)'den (3.8.4) şartını elde ederiz. (3.8.4)'ü kullanarak (3.8.1)'den

$$\overset{\lambda}{\rho}{}^{\ u}_{vwt} = \overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{wvt} - \overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{vwt} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt})C^{\lambda}_{\sigma\theta}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} R^{i}_{jkl} &= R^{u\alpha}_{v\beta w\gamma t\delta} \\ &= (\overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{wvt} C^{\sigma}_{\lambda\beta})B^{\alpha}_{\sigma\gamma\delta} - (\overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{vwt} C^{\sigma}_{\lambda\gamma})B^{\alpha}_{\sigma\beta\delta} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt})B^{\alpha}_{\sigma\gamma\theta\beta\delta} \qquad (3.8.5) \\ &= \overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{wvt} B^{\alpha}_{\lambda\beta\gamma\delta} - \overset{\lambda}{P}{}^{\ u}_{vwt} B^{\alpha}_{\lambda\gamma\beta\delta} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\, \overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt})C^{\lambda}_{\sigma\theta}B^{\alpha}_{\lambda\gamma\beta\delta} \\ &= \overset{\lambda}{\rho}{}^{\ u}_{vwt} B^{\alpha}_{\lambda\beta\gamma\delta}, \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece (3.4.8) ve (3.8.5)'den, R'nin pür eğrilik tensörü olduğunu görürüz.

Özetle aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.8.1 $\overset{*}{\nabla}$, $X_r(\mathfrak{A}_m)$ üzerinde hiperkompleks konneksiyon ve ∇'da onun M_{mr} üzerindeki reel modeli (pür konneksiyon) olsun. ∇'nın R eğrilik tensörünün pür olması için gerek ve yeter şart $\overset{*}{\nabla}$ nın $\mathfrak{A}-$holomorfik konneksiyon olmasıdır. [**?**], [78].

Diğer taraftan, Teorem 3.3.5 ve Teorem 3.8.1'den aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.8.2 ∇, her $\mathfrak{A}-$holomorfik X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha = 1, \ldots, m.$ için

$$(\psi_{\underset{\alpha}{\varphi}}\nabla)(X,Y,Z) = \nabla_{\underset{\alpha}{\varphi}X}\nabla_Y Z - \underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_X\nabla_Y Z) = 0$$

şartını sağlayan pür konneksiyon olsun. Bu durumda böyle bir konneksiyon $\overset{*}{\nabla}$ $\mathfrak{A}-$holomorfik konneksiyonunun reel modelidir.

3.9 Pür Eğrilik Tensörlerinin Bazı Özellikleri

R, $\nabla \in Ker\psi_{\underset{\alpha}{\varphi}}$ şartını sağlayan ∇ pür konneksiyonunun pür tensör alanı olsun. (3.4.9)'i kullanarak (3.8.1)'den

$$\begin{aligned}
\overset{*}{R}{}^{u}_{vwt} &= R^{u\alpha}_{v\beta w\gamma t\delta}\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\gamma}\varepsilon^{\delta}e_{\alpha} \\
&= \varepsilon^{\beta}(\partial_{v\beta}\overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{wt})e_{\alpha} - \varepsilon^{\gamma}(\partial_{w\gamma}\overset{\alpha}{\tau}{}^{u}_{vt})e_{\alpha} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{vx}\overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{wt} - \overset{\sigma}{\tau}{}^{u}_{wx}\overset{\theta}{\tau}{}^{x}_{vt})C^{\alpha}_{\sigma\theta}e_{\alpha}
\end{aligned}$$

yazarız. $C^{\alpha}_{\sigma\theta}e_{\alpha} = e_{\sigma}e_{\theta}$ olduğundan (2.1.17) ve (3.6.7)'den dolayı

$$\overset{*}{R}{}^{u}_{vwt} = \partial_v\overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{wt} - \partial_w\overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{vt} + \overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{vx}\overset{*}{\Gamma}{}^{x}_{wt} - \overset{*}{\Gamma}{}^{u}_{wx}\overset{*}{\Gamma}{}^{x}_{vt}$$

yazarız. Yani $\overset{*}{R}$, $\overset{*}{\Gamma}$'nın eğrilik tensörüdür.

Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.9.1 ∇, $\overset{*}{\nabla}$ $\mathfrak{A}-$holomorfik konneksiyonunun reel modeli olsun. R pür eğrilik tensörünün $\overset{*}{R}{}^{u}_{vwt}$ hiperkompleks bileşenleri $\overset{*}{\nabla}$'nın eğrilik tensörünün bileşenleridir.

$\overset{*}{\nabla}$, $X_r(\mathfrak{A}_m)$ üzerinde $\mathfrak{A}-$holomorfik hiperkompleks konneksiyon ve burulmasız ∇'da M_{mr} üzerinde onun reel modeli olsun. Teorem 3.8.1'den ∇'nın R eğrilik tensörünün pür olduğunu görürüz.

R eğrilik tensörü pür olduğu için, R'ye Tachibana ϕ_{φ} $-$operatörünü uygulayabiliriz. $\nabla \underset{\alpha}{\varphi} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m$, (3.3.3) ve Teorem 3.3.3'ü kullanarak

$$\begin{aligned}(\phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} R)(X, Y_1, Y_2, Y_3) &= (\nabla_{\underset{\alpha}{\varphi} X} R)(Y_1, Y_2, Y_3) \\ &\quad - \underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3), X, Y_1, Y_2, Y_3 \in \Im_0^1(M_{mr}).\end{aligned} \tag{3.9.1}$$

yazabiliriz. R'nin pürlüğünü kullanarak ve (3.9.1)'de Bianchi'nin 2. özdeşliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}(\phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} R)(X, Y_1, Y_2, Y_3) &= (\nabla_{\underset{\alpha}{\varphi} X} R)(Y_1, Y_2, Y_3) - \underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3) \\ &= -(\nabla_{Y_1} R)(Y_2, \underset{\alpha}{\varphi} X, Y_3) - (\nabla_{Y_2} R)(\underset{\alpha}{\varphi} X, Y_1, Y_3) \\ &\quad - \underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3)\end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, $\nabla \underset{\alpha}{\varphi} = 0$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}(\nabla_{Y_2} R)(\underset{\alpha}{\varphi} X, Y_1, Y_3) &= \nabla_{Y_2}(R(\underset{\alpha}{\varphi} X, Y_1, Y_3)) - R(\nabla_{Y_2}(\underset{\alpha}{\varphi} X), Y_1, Y_3) \\ &\quad - R(\underset{\alpha}{\varphi} X, \nabla_{Y_2} Y_1, Y_3) - R(\underset{\alpha}{\varphi} X, Y_1, \nabla_{Y_2} Y_3) \\ &= (\nabla_{Y_2} \underset{\alpha}{\varphi})(R(X, Y_1, Y_3)) + \underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_{Y_2} R(X, Y_1, Y_3)) \\ &\quad - R((\nabla_{Y_2} \underset{\alpha}{\varphi}) X + \varphi(\nabla_{Y_2} X), Y_1, Y_3) \\ &\quad - R(\underset{\alpha}{\varphi} X, \nabla_{Y_2} Y_1, Y_3) - R(\underset{\alpha}{\varphi} X, Y_1, \nabla_{Y_2} Y_3) \\ &= \underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_{Y_2} R(X, Y_1, Y_3)) - \underset{\alpha}{\varphi}(R(\nabla_{Y_2} X, Y_1, Y_3)) \\ &\quad - \underset{\alpha}{\varphi}(R(X, \nabla_{Y_2} Y_1, Y_3)) - \underset{\alpha}{\varphi}(R(X, Y_1, \nabla_{Y_2} Y_3)) \\ &= \underset{\alpha}{\varphi}((\nabla_{Y_2} R)(X, Y_1, Y_3))\end{aligned} \tag{3.9.2}$$

buluruz. Benzer şekilde

$$(\nabla_{Y_1} R)(Y_2, \underset{\alpha}{\varphi} X, Y_3) = \underset{\alpha}{\varphi}((\nabla_{Y_1} R)(Y_2, X, Y_3)) \tag{3.9.3}$$

bulunur. (3.9.2) ve (3.9.3)'ü (3.9.1)'de yerine yazarsak ve Bianchi'nin 2. özdeşliğini tekrar kullanırsak

$$\begin{aligned}(\phi_{\underset{\alpha}{\varphi}} R)(X, Y_1, Y_2, Y_3) &= -\underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_{Y_1} R)(Y_2, X, Y_3) - \underset{\alpha}{\varphi}((\nabla_{Y_2} R)(X, Y_1, Y_3) \\ &\quad - \underset{\alpha}{\varphi}((\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3)) \\ &= -\underset{\alpha}{\varphi}(\sigma\{(\nabla_X R)(Y_1, Y_2)\}, Y_3) \\ &= 0\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada σ, X, Y_1 ve Y_2'ye göre döngüsel toplamı tanımlar. Bu yüzden, Teorem 3.5.1 ve Teorem 3.8.1'den dolayı aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.9.2 $\overset{*}{\nabla}$ $\mathfrak{A}-$holomorfik konneksiyonunun $\overset{*}{R}$ eğrilik tensörü $\mathfrak{A}-$holomorfik tensördür.

Örnek 3.9.1 $r = 1$ alalım. Yani 1-boyutlu hiperkompleksin $X_1(\mathfrak{A}_m)$ $\mathfrak{A}-$holomorfik mani- foldunu düşünelim. $u = v = w = t = 1$ olduğundan, (3.8.1)'den $\overset{\sigma}{\tau} = \overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
R^i_{jkl} &= R^{1\alpha}_{1\beta 1\gamma 1\delta} \\
&= (\partial_{1\beta}\overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11})B^\alpha_{\sigma\gamma\delta} - (\partial_{1\gamma}\overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11})B^\alpha_{\sigma\beta\delta} + (\overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11}\overset{\theta}{\tau}{}^1_{11} - \overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11}\overset{\theta}{\tau}{}^1_{11})B^\alpha_{\sigma\gamma\theta\beta\delta} \\
&= (\partial_{1\beta}\overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11})B^\alpha_{\sigma\gamma\delta} - (\partial_{1\gamma}\overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11})B^\alpha_{\sigma\beta\delta} \\
&= (\partial_\beta\overset{\sigma}{\tau})C^\alpha_{\delta\varepsilon}C^\varepsilon_{\sigma\gamma} - (\partial_\gamma\overset{\sigma}{\tau})C^\varepsilon_{\sigma\beta}C^\alpha_{\varepsilon\delta} \\
&= (C^\varepsilon_{\sigma\gamma}\partial_\beta\overset{\sigma}{\tau} - C^\varepsilon_{\sigma\beta}\partial_\gamma\overset{\sigma}{\tau})C^\alpha_{\delta\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{3.9.4}
$$

yazarız.

$$C^\varepsilon_{\sigma\gamma}\partial_\beta\overset{\sigma}{\tau} = C^\varepsilon_{\sigma\beta}\partial_\gamma\overset{\sigma}{\tau} \tag{3.9.5}$$

olduğunu kabul edelim. ε^γ ile kontraksiyondan sonra (3.9.5)'den

$$\partial_\beta\overset{\varepsilon}{\tau} = \varepsilon^\gamma(\partial_\gamma\overset{\varepsilon}{\tau})C^\varepsilon_{\sigma\beta} \tag{3.9.6}$$

eşitliğini yazarız. Yani (2.1.17)'den dolayı, τ, $x = x^\alpha e_\alpha \in \mathfrak{A}_m$'nun $\mathfrak{A}-$holomorfik fonksiyonudur.

Tersine, $\tau = \tau(x)$ $\mathfrak{A}-$holomorfik fonksiyon olsun. O zaman (3.9.6)'dan

$$C^\theta_{\varepsilon\tau}\partial_\beta\overset{\varepsilon}{\tau} \;=\; \varepsilon^\gamma(\partial_\gamma\overset{\sigma}{\tau})C^\varepsilon_{\sigma\beta}C^\theta_{\varepsilon\tau}$$

eşitliğini yazabiliriz. Yani (3.9.5) şartı doğrudur ve (3.9.5) şartı (2.1.15) Scheffers şartına denktir. Böylece, $\tau = \tau(x)$ $\mathfrak{A}-$holomorphic ise $R^i_{jkl} = 0$'dır. Tersine, $R = 0$ ise, o zaman (3.9.4)'den

$$0 \;=\; R^{1\alpha}_{1\beta 1\gamma 1\delta}\varepsilon^\delta$$

eşitliğini yazabiliriz. Yani $\tau = \tau(x)$ fonksiyonu $\mathfrak{A}-$holomorfiktir.

O halde aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.9.3 M_m, $X_1(\mathfrak{A}_m)$'nin reel modeli olsun. $X_1(\mathfrak{A}_m)$ üzerindeki $\overset{*}{\tau} = \overset{\sigma}{\tau}\, e_\sigma$ bileşenlerine sahip $\overset{*}{\nabla}$ konneksiyonunun $\mathfrak{A}-$holomorfik olması için gerek ve yeter şart M_m reel modelinin lokal düzlemsel olmasıdır.

Not 3.9.1 Özellikle, $\overset{\sigma}{\tau} = \overset{\sigma}{\tau}{}^1_{11} = \varepsilon^\sigma \;\; (1 = \varepsilon^\sigma e_\sigma \in \mathfrak{A}_m)$ ise o zaman (3.6.6)'dan $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = C^\alpha_{\gamma\beta}$ yazabiliriz. Yani M_m, Vranceanu uzayıdır [82], [42].

4. KÄHLER-NORDEN MANİFOLDLARI

4.1 Kähler Manifoldlarında Temel Bazı Kavramlar

M_{2n} bir neutral metriğe sahip Riemannian manifoldu olsun. $\varphi \in \Im_1^1(M_{2n})$, $\varphi^2 = -I$ şartını sağlayan afinör alanıyla birlikte M_{2n} manifoldu (M_{2n}, φ) şeklinde bir hemen hemen kompleks manifolddur. Eğer M_{2n} manifoldu C^{ω} sınıfından manifold olur ve $N_{\varphi} \in \Im_2^1 M_{2n}$ sıfıra eşit olursa φ bir kompleks yapıdır ve dahası M_{2n}, C holomorfik manifolddur. $X_n(C)$ ile gösterilen ve bu manifoldun dönüşüm fonksiyonuda holomorfiktir. $N_{\varphi} = 0$ şartı $\nabla \varphi = 0$ şartına eşittir. Burada ∇ burulmasız afin konneksiyondur. (M_{2n}, φ) hemen hemen kompleks bir manifold olsun. g metriğinin Norden metrik olabilmesi için her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_{2n})$ için[40]

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) \tag{4.1.1}$$

şartını yada buna eşit olan

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

şartını sağlamalıdır.

Bu tarz metrikler anti-Hermityen, B metrik ve pür metrik olarak aşağıdaki makalelerde çalışılmıştır. [76], [?], [43], [17], [3], [?], [5], [10], [11], [29], [73], [41]

Eğer (M_{2n}, φ), g Norden metriği ile birlikte hemen hemen kompleks manifold ise (M_{2n}, φ, g)'ye biz hemen hemen Norden manifold deriz. Eğer φ integrallenebilir ise (M_{2n}, φ, g) hemen hemen Norden manifold, Norden manifold olur. $X_n(C)$ üzerinde t^* bir kompleks tensör alanı olsun. Bu tensör alanının reel modelide M_{2n} üzerinde bir tensör alanıdır.

Bu tensör alanları φ'ye göre pürdür ve çoğu yazar tarafından çalışılmıştır. (bakınız: [?], [81], [47] [48], [59], [80])

Özellikle ω'ya uygulanan $(0-q)-$ tipli tensör alanlarının pürlüğü her $X_1, X_2, \ldots, X_q \in \Im_0^1(M_{2n})$ için aşağıdaki şartta verilir.

$$\omega(\varphi X_1, X_2, \ldots, X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2, \ldots, X_q) = \ldots = \omega(X_1, X_2, \ldots, \varphi X_q)$$

$\phi_{\varphi} : \Im_q^0(M_{2n}) \to \Im_{q+1}^0(M_{2n})$ şeklinde ω pür tensör alanına uygulanan yeni bir tensör alanı tanımlayalım. Bu ϕ_φ operatörü ω pür tensörüne uygulanışı[74], [75], [76], [81], [80], [85]

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi\omega) = (X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_q) &= (\varphi X)(\omega(Y_1, Y_2, \ldots, Y_q)) \\ &\quad -X(\omega(\varphi Y_1, Y_2, \ldots, Y_q)) \\ &\quad +\omega((L_{y1}\varphi)X, Y_2, \ldots, Y_q) \\ &\quad +\ldots+\omega(Y_1, Y_2, \ldots, (L_{Y_q}\varphi)X)\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

ile verilir. Burada L_y, L'ye göre Lie türevi gösterir.

M_{2n} üzerinde φ bir kompleks yapı olduğundan ve onun ω tensör alanı $\phi_\varphi\omega$'yı sıfırladığında $X_n(C)$ üzerindeki $\omega*$ tensör alanına holomorfiktir denir. [?] Böylece $X_n(C)$ üzerindeki ω^* holomorfik tensör alanı her $X, Y_1, \ldots, Y_q \in \Im_0^1(M_{2n})$

$$(\phi_\varphi\omega) = (X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_q) = 0 \tag{4.1.3}$$

denklemi ile M_{2n} üzerinde ω pür tensör alanı şeklinde realize olur. Bu yüzden M_{2n} üzerindeki ω^* tensör alanı holomorfik tensör alanı olarak adlandırılır.

Tezimizin bu bölümünde g hemen hemen holomorfik Riemannian metriği ile birlikte hemen hemen kompleks manifoldun Kähler-Norden manifold olduğu Teorem 4.2.2 ile; Levi-Civita konneksiyonun $G(X, Y) = g(\varphi X, Y)$ şartını sağlayan G twin metriğinin Levi-Civita konneksiyonu olduğu Teorem 4.3.3 ile; dahası Kähler-Norden manifoldun Riemannian eğrilik tensörünün pür ve holomorfik olduğu Teorem 4.4.1, Teorem 4.4.2 ile, hatta skaler eğriliğinde yerel holomorfik fonksiyon olduğu Teorem 4.5.1 ile gösterildi.

4.2 Kähler-Norden Manifoldları

g Norden metriği ile birlikte bir Norden (hemen hemen Norden) manifold eğer

$$(\phi_\varphi g)(X, Y, Z) = 0$$

şartını sağlarsa holomorfik (hemen hemen holomorfik) manifold olarak adlandırılır.

Eğer (M_{2n}, φ, g), g holomorfik Norden metriği ile birlikte bir Norden manifold ise biz (M_{2n}, φ, g)'ye holomorfik Norden manifold deriz.

Hemen hemen Norden manifolddaki Norden metriği için yeni bir formül verelim. $\nabla g = 0$'ın eşitliği ve (4.1.1) denkleminin sonucundan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.1 Hemen hemen Norden manifoldu üzerindeki g Norden metriği verilsin. Bu metrik

$$g(Z,(\nabla_Y\varphi)(X)) = g((\nabla_Y)(Z),X)$$

eşitliğini sağlar. Burada ∇, g'ye uygulanan Riemmannian kovaryant türev operatörüdür.

Bazı yönlerden holomorfik Norden manifoldları Kähler manifoldlarına benzer. Takip eden teorem bir hemen hemen Hermityen manifoldunun Kähler olabilmesi için gerek ve yeter şart hemen hemen kompleks yapının Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır şartına benzerdir.

Teorem 4.2.2 C^ω sınıfında hemen hemen Norden manifoldun holomorfik Norden manifold olması için gerek ve yeter şart hemen hemen kompleks yapının ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.

İspat. (4.1.1) denkleminde $(g\circ\varphi)(X,Y) = g(\varphi X,Y)$ yerine yazarsak

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(X,Z_1,Z_2) &= (L_{\varphi X}g - L_X(g\circ\varphi)(Z_1,Z_2)\\ &\quad +g(Z_1,\varphi L_x Z_2) - g(\varphi Z_1, L_X Z_2))\\ &= (\varphi X)g(Z_1,Z_2) - Xg(\varphi Z_1,Z_2)\\ &\quad -g(\nabla_{\varphi X}Z_1,Z_2) + g(\nabla_{Z_1}\varphi X,Z_2)\\ &\quad -g(Z_1,\nabla_{\varphi X}Z_2) + g(Z_1,\nabla_{Z_2}\varphi X)\\ &\quad +(\varphi(\nabla_X Z_1),Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1}X),Z_2)\\ &\quad +g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2) - g(Z_1,\varphi(\nabla_{Z_2}X))\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}&g(\nabla_{Z_1}\varphi X,Z_2) - g(\varphi(\nabla_{Z_1}X),Z_2)\\ &+g(Z_1,\nabla_{Z_2}\varphi X) - g(Z_1,\varphi(\nabla_{Z_2}X))\\ &= g((\nabla\varphi)(X,Z_1),Z_2) + g(Z_1,(\nabla\varphi)(X,Z_2))\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

denklemi bulunur. (4.2.2) eşitliği (4.2.1)'de kullanılırsak, (4.2.1) eşitliği

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(X,Z_1,Z_2) &= (\varphi X)g(Z_1,Z_2) - Xg(\varphi Z_1,Z_2)\\ &\quad +g((\nabla\varphi)(X,Z_1),Z_2) + g(Z_1,(\nabla\varphi)(X,Z_2))\\ &\quad -g(\nabla_{\varphi X}Z_1,Z_2) - g(Z_1,\nabla_{\varphi X}Z_2)\\ &\quad +g(\varphi(\nabla_X)Z_1,Z_2) + g(\varphi Z_1,\nabla_X Z_2).\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

şeklini alır. Diğer taraftan ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre

$$(\varphi X)g(Z_1, Z_2) - g(\nabla_{\varphi X} Z_1, Z_2) - g(Z_1, \nabla_{\varphi X} Z_2) = (\nabla_{\varphi X} g)(Z_1, Z_2) = 0 \tag{4.2.4}$$

ve

$$-Xg(\varphi Z_1, Z_2) + g(\varphi(\nabla_X Z_1), Z_2) + g(\varphi Z_1, (\nabla_{X\varphi} Z_1), Z_2) \tag{4.2.5}$$

denklemini elde ederiz. (4.2.4) ve (4.2.5) denklemi sayesinde (4.2.3) denklemini

$$(\phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) = -g(\nabla_{X\varphi} Z_1, Z_2) + g(\nabla_{Z_1\varphi} X, Z_2) + g(Z_1, (\nabla_{Z_2\varphi})X) \tag{4.2.6}$$

şeklinde kısaltırız. Benzer olarak

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi g)(Z_2, Z_1, X) &= -g((\nabla_{Z_2\varphi})Z_1, X) + g((\nabla_{Z_1\varphi})Z_2, X) \\ &\quad + g(Z_1, (\nabla_{X\varphi})Z_2)\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

denklemi elde edilir. Teorem 4.2.1'den

$$(\phi_\varphi g)(X, Z_1, Z_2) + (\phi_\varphi g)(Z_2, Z_1, X) = 2g(X, (\nabla_{Z_2\varphi})Z_2) \tag{4.2.8}$$

yazılır. (4.2.8)'de $\phi_\varphi g = 0$ yazarsak $\nabla_\varphi = 0$ buluruz. Böylece Teorem 4.2.1 ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.1 C^ω sınıfının hemen hemen Norden manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks φ yapısı eğer $\phi_\varphi g = 0$ şartını sağlarsa integrallenebilirdir.

(M_{2n}, φ, g) üçlüsü ile bir Kähler-Norden manifoldu tanımlanabilir. Burada M_{2n}, C^ω sınıfından bir manifold; φ, $\nabla_\varphi = 0$ şartını sağlayan hemen hemen kompleks yapı g, $g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$ şartını sağlayan bir Norden metriktir (bakınız [81], [43], [**?**], [5]). Bu yüzden Kähler-Norden manifoldu ile [?]'de tanımlanan holomorfik metrik ile birlikte kompleks Riemannian manifoldu arasında bire bir benzerlik vardır. (M_{2n}, φ, g) bir Kähler-Norden manifold olsun. [81] çalışmasının 113. sayfasındaki 2-boyutlu manifoldların düzgün $\dim M \geq 4$ olduğunu varsayalım yani $n \geq 2$'dir.

Uyarı 4.2.1 Kähler-Norden metriği ile birlikte C^∞ sınıfından bir hemen hemen Norden manifold pseudo Kähler-Norden manifold olarak adlandırılır. Pseudo Kähler-Norden manifoldun g metriği hemen hemen holomorfiktir (bakınız [43]).

4.3 Twin Norden Metriği

(M_{2n}, φ, g) bir hemen hemen Norden manifold olsun. Hemen hemen Norden manifoldun Norden metriği ile ilişkisi M_{2n}'de tüm X ve Y vektör alanları için

$$G(X,Y) = (g \circ \varphi)(X,Y) \tag{4.3.1}$$

denklemi ile tanımlanır. Kolayca ispat edilebilirki G bir metriktir. (Hatta G'nin dual metriği denir ve G Hermitian geometride Kähler formlara benzer bir rol oynar.) Tachibana operatörünü pür Riemannian metriğine uygularsak

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi G)(X,Y,Z) &= (L_{\varphi X} G - L_X(G \circ \varphi))(Y,Z) \\ &\quad + G(Y, \varphi L_X Z) - G(\varphi Y, L_X Z) \\ &= (\phi_\varphi g)(X, \varphi Y, Z) + g(N_\varphi(X,Y), Z)\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

denklemini elde ederiz. (4.3.2) denkleminden Teorem 4.3.1 yazılır.

Teorem 4.3.1 Hemen hemen Norden manifoldda

$$\phi_\varphi G = (\phi_\varphi g) \circ \varphi + g \circ (N_\varphi)$$

eşitliği geçerlidir.

Sonuç 4.3.1 Norden manifoldda aşağıdaki eşitlikler birbirine eşittir. Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.3.1'den aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

i. $\phi_\varphi g = 0$

ii. $\phi_\varphi G = 0$

Teorem 4.3.2 $\phi_\varphi G = 0$ ve $N_\varphi \neq 0$ şartını sağlayan C^w sınıfından hemen hemen Norden manifoldu bulunmaz (Yani kapalı form ile birlikte hemen hemen Kähler manifolduna benzer olan manifold yoktur). ∇_g ile g Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun kovaryant türevini gösterelim. $\nabla_g = 0$ şartı Teorem 4.2.2'de yazılarak

$$\nabla_g G = (\nabla_g g) \circ \varphi + g \circ (\nabla_g \varphi) = g \circ (\nabla_g \varphi)$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığında Teorem 4.3.3 yazılır.

Teorem 4.3.3 (M_{2n}, φ, g) bir Kähler-Norden metriği olsun. Bu durumda g Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile G twin Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu çakışır.

4.4 Kähler-Norden Manifoldun Eğrilik Tensörleri

Sırasıyla g ve G'ye uygulanan eğrilik tensörleri R ve S olsun. Kähler-Norden manifoldu için Teorem 4.3.3'ün $R = S$ olduğunu gördük. φ'ye Ricci özdeşliğini uygularsak $\varphi = 0$ sayesinde

$$\varphi(R(X,Y)Z) = R(X,Y)\varphi Z \tag{4.4.1}$$

denklemini elde ederiz. Bu yüzden $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_1, X_2)X_3, X_4)$ eşitliği X_3 ve X_4'e göre pürdür ve hatta X_1 ve X_2'ye göre pürdür.

$$\begin{aligned}
R(X_1, X_2, \varphi X_3, X_4) &= g(R(X_1, X_2)\varphi X_3, X_4) \\
&= g(\varphi(R(X_1, X_2)X_3), X_4) \\
&= g(R(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\
&= R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4).
\end{aligned}$$

Diğer taraftan S, G tarafından form edilen eğrilik tensörü olsun.

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = G(S(X_1, X_2)X_3, X_4)$$

eşitliği göz önüne alınarak

$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = S(X_3, X_4, X_1, X_2) \tag{4.4.2}$$

denklemi elde edilir. (4.1.2), (4.3.1), (4.4.1) denkleminden $R = S$ olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki

$$\begin{aligned}
S(X_1, X_2, X_3, X_4) &= G(S(X_1, X_2)X_3, X_4) \\
&= g(\varphi(S(X_1, X_2)X_3), X_4) \\
&= g(S(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\
&= g(R(X_1, X_2)X_3, \varphi X_4) \\
&= R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S(X_3, X_4, X_1, X_2) &= G(S(X_3, X_4)X_1, X_2) \\
&= g(\varphi(S(X_3, X_4)X_1), X_2) \\
&= g(S(X_3, X_4)X_1, \varphi X_2) \\
&= g(R(X_3, X_4)X_1, \varphi X_2) \\
&= R(X_3, X_4, X_1, \varphi X_2) \\
&= R(X_1, \varphi X_2, X_3, X_4)
\end{aligned}$$

denklemleri yazılır. Böylece (4.4.2) denklemi

$$R(X_1, X_2, X_3, \varphi X_4) = R(X_1, \varphi X_2, X_3, X_4)$$

denklemine dönüşür. Burada $R(X_1, X_2, X_3, X_4)$, X_2 ve X_4'e göre pürlüğü gösterir. Bu yüzden $R(X_1, X_2, X_3, X_4)$ pürdür. Böylece aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.4.1 Bir Kähler-Norden manifoldu üzerinde Norden metriğin Riemannian eğrilik tensörü pürdür.

Eğer ∇ bir burulmasız afin konneksiyonu ise $\nabla\varphi = 0$, $\nabla_{\varphi X} Y = \varphi(\nabla_X Y)$ şartını sağlarsa ∇'ya holomorfik konneksiyon denir [81], [**?**], [3], [**?**], [5]. ∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanının pür olabilmesi için gerek ve yeter şart onun holomorfik konneksiyon olmasıdır [**?**], [81], [43]. Bu yüzden Teorem 4.4.1'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.4.1 Bir Kähler-Norden manifoldda Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu holomorfiktir [47].

R Riemannian eğrilik tensörü pür olduğu için R'ye $\phi-$operatörünü uygulayabiliriz. $\nabla_\varphi = 0$'ı kullanarak

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi R)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= (\nabla_{\varphi X} R)(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \\ &\quad -(\nabla_X R)(\varphi Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

denklemini yazılır. (4.4.1)'i kullanarak ve (4.4.3)'de 2. Bianchi özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi R)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= g((\nabla_{\varphi X} R)(Y_1, Y_2, Y_3) \\ &\quad -(\nabla_X R)(\varphi Y_1, Y_2, Y_3), Y_4) \\ &= g((\nabla_{\varphi X} R)(Y_1, Y_2, Y_3) \\ &\quad -\varphi(\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3), Y_4) \\ &= g(-(\nabla_{Y_1} R)(Y_2, \varphi X, Y_3) \\ &\quad -(\nabla_{Y_2} R)(\varphi X, Y_1, Y_3) \\ &\quad -\varphi((\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3)), Y_4) \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\nabla_\varphi = 0$ kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_{Y_2}R)(\varphi X, Y_1, Y_3) &= \nabla_{Y_2}(R(\varphi X, Y_1, Y_3)) - R(\nabla_{Y_2}(\varphi X), Y_1, Y_3) \\ &\quad -R(\varphi X, \nabla_{Y_2}Y_1, Y_3) - R(\varphi X, Y_1, \nabla_{Y_2}Y_3) \\ &= (\nabla_{Y_2}\varphi)(R(X, Y_1, Y_3)) + \varphi(\nabla_{Y_2}R(X, Y_1, Y_3)) \\ &\quad -R((\nabla_{Y_2}\varphi)X + \varphi(\nabla_{Y_2}X), Y_1, Y_3) \\ &\quad -R(\varphi X, \nabla_{Y_2}Y_1, Y_3) - R(\varphi X, Y_1, \nabla_{Y_2}Y_3) \\ &= \varphi(\nabla_{Y_2}R(X, Y_1, Y_3)) - \varphi(R(\nabla_{Y_2}X, Y_1, Y_3)) \\ &\quad -\varphi(R(X, \nabla_{Y_2}Y_1, Y_3) - \varphi(R(X, Y_1, \nabla_{Y_2}Y_3) \\ &= \varphi((\nabla_{Y_2}R)(X, Y_1, Y_3))\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

yazılır. Benzer olarak

$$(\nabla_{Y_1}R)(Y_2, \varphi X, Y_3) = \varphi((\nabla_{Y_1}R)(Y_2, X, Y_3)) \tag{4.4.6}$$

yazılır. (4.4.4) denkleminde (4.4.5) ve (4.4.6)'yı gözönüne alırsak ve tekrar 2. Bianchi özdeşliğini uygularsak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi R)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= g(-\varphi(\nabla_{Y_1}R)(Y_2, X, Y_3)) \\ &\quad -\varphi((\nabla_{Y_2}R)(X, Y_1, Y_3)) \\ &\quad -\varphi((\nabla_X R)(Y_1, Y_2, Y_3), Y_4) \\ &= -g(\varphi(\sigma(\nabla_X R)(Y_1, Y_2), Y_3), Y_4) \\ &= 0\end{aligned}$$

Burada σ, X, Y_1 ve Y_2'ye uygulanan döngüsel(dairesel) toplamdır. Bu yüzden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4.2 Bir Kähler-Norden manifoldunda Riemannian eğrilik tensör alanı bir holomorfik tensör alanıdır.

4.5 Kähler-Norden Manifoldlarının Skaler Eğrilikleri

(M_{2n}, φ) bir kompleks manifold olsun.

Lemma 4.5.1 Bir exact $1-$formun holomorfik olabilmesi için gerek ve yeter şart $\phi_\varphi(df) = 0$'ın kapalı olmasıdır. Yani $d(df \circ \varphi) = 0$ olmasıdır.

İspat.

$$(d\omega)(X,Y)=\frac{1}{2}\Big\{X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,Y])\Big\},$$

$X,Y\in\Im_0^1(M_{2n})$, $\omega\in\Im_1^0(M_{2n})$ denklemini $(\omega\circ\varphi)(Y,\varphi X)=\omega(\varphi(X))$ için kullanırsak

$$\begin{aligned}(d\omega)(Y,\varphi X) &= \frac{1}{2}\Big\{Y(\omega(\varphi X))-(\varphi X)(\omega(Y))-\omega([Y,\varphi X])\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\Big\{Y(\omega(\varphi X))-(\varphi X)(\omega(Y))+\omega([\varphi X,Y])\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\Big\{Y(\omega(\varphi X))-(\varphi X)(\omega(Y))+\omega([\varphi X,Y])\\ &\quad -\varphi[X,Y]+\omega(\varphi[X,Y])\Big\}\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

denklemindeni elde ederiz. (4.1.2)'den

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi w)(X,Y) &= (\varphi X)(w(Y))-X(w(\varphi Y))+w((L_{Y\varphi})(X))\\ &= (\varphi X)(w(Y))-X(w(\varphi Y))-w([\varphi X,Y]-\varphi[X,Y])\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

denklemini elde ederiz. (4.5.1) denkleminde (4.5.2)'yi yazarsak

$$\begin{aligned}(d\omega)(Y,\varphi X) &= \frac{1}{2}\Big\{-(\phi_\varphi\omega)(X,Y)+Y(\omega(\varphi X))\\ &\quad -X(\omega(\varphi Y))+\omega(\varphi[X,Y])\Big\}\\ &= -\frac{1}{2}\Big\{(\phi_\varphi\omega)(X,Y)+Y((\omega\circ\varphi)(X))\\ &\quad -X((\omega\circ\varpi)(Y))-(\omega\circ\varphi)([Y,X])\Big\}\\ &= -\frac{1}{2}(\phi_\varphi\omega)(X,Y)+(d(\omega\circ\varphi)(Y,X))\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\phi_\varphi w=0$ eşitliğinin (4.5.3)'e eşit olduğu görülür.

$$(d(w\circ\varphi))(Y,X)=(dw)(Y,\varphi X) \tag{4.5.3}$$

(4.5.3) denkleminde w yerine $w=df$ alırsak (4.5.3) denklemi

$$(d(df\circ\varphi))(Y,X)=(d^2f)(Y,\varphi X)=0$$

ifadesine dönüşür. Yani

$$d(df\circ\varphi)=0 \tag{4.5.4}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer bir Kähler-Norden manifoldunda f fonksiyonu için $df \circ \varphi = dg$ şartını sağlayan bir g fonksiyonu varsa biz f fonksiyonuna holomorfik (analitik) fonksiyon deriz ve g [17] fonksiyonu ile bağlantılıdır. Eğer f fonksiyonu yerel olarak tanımlanırsa biz f fonksiyonuna yerel holomorfik fonksiyon deriz.

Sadece yerel olarak (4.5.4) denkleminin $df \circ \varphi = dg$ denklemine denk olduğuna dikkat edelim. Bu yüzden f'nin yerel holomorfik olma şartı ($\varphi_i^m \delta_m f = \delta_i g$) aşağıdaki gibi verilir.

$$(\phi_\varphi df)_{ij} = \varphi_i^m \delta_m \delta_j f - \delta_i(\varphi_j^m \delta_m f) + (\delta_j \varphi_i^m)\delta_m f = 0$$

g Norden metriği ile birlikte (M_{2n}, φ, g) bir Kähler-Norden manifold olsun. Teorem 4.4.1, Teorem 4.4.2 ve (4.4.3) denkleminden ∇R tensör alanının kovaryant türevi Kähler-Norden manifoldda pürdür. Şimdi $R_{ji} = R_{sji}^s = g^{is} R_{tjis}$ Ricci tensörünün kovaryant türevi onun bütün indislerine göre pürdür ve bu yüzden

$$\varphi_t^s \nabla_s R_{ji} = \varphi_j^s \nabla_t R_{si}$$

yazılır. g^{ji} kovaryant Norden metriğine göre yukarıdaki eşitlik

$$\varphi_t^s \nabla_s R = g^{ji} \varphi_j^s \nabla_t R_{si} = \nabla_t (G^{si} R_{si}) = \nabla_t R^*$$

şeklinde yazılır. Burada $R = g^{ij} R_{ij}$ ve $R^* = G^{ij} R_{ij}$ sırasıyla Norden ve twin Norden metriklerinin eğrilik tensörleridir.

$$(d(df \circ \varphi))(Y, X) = (d^2 f)(Y, \varphi X) = 0 d(df \circ \varphi) = 0 \tag{4.5.5}$$

(4.5.5) denkleminde aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.5.1 Bir Kähler-Norden manifoldunda R skaler eğriliği yerel holomorfik fonksiyondur.

5. NORDEN WALKER METRİKLERİ

5.1 Norden Walker Metriklerinin Bazı Özellikleri

(n,n) ile işaretnen g pseudo-Riemannian metriği ile (neutral metrik) birlikte M_{2n} Riemannian manifoldu verilsin. M_{2n} üzerindeki (p,q) tipli bütün tensör alanlarının kümesini $\Im_p^q(M_{2n})$ ile gösterelim. Manifoldlar, tensör alanları ve konneksiyonların daima diferensiyellenebilir ve C^∞ sınıfından olduğu kabul edilecektir.

φ hemen hemen kompleks yapı ile birlikte (M_{2n},φ) hemen hemen kompleks manifold olsun. M_{2n}'nin her x noktasının bu U_x koordinat komşuluğunda holonomik doğal çatıda eğer $\varphi=(\varphi_j^i)$ sabit ise bu yapı integrallenebilirdir. Diğer bir deyişle φ hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart φ tensör yapıya uygulanan ∇ burulmasız afin konneksiyonunun sabit bırakılmasıdır. Yani $\nabla\varphi=0$ olmasıdır. φ'nin integrallenebilirliğini N_y Nijenhuis tensörünün sıfıra eşit olması ile de söylenebilir. Eğer φ integrallenebilir ise φ bir kompleks yapıdır. Bununla birlikte M_{2n}, $X_n(C)$ manifoldu üzerinde C-holomorfiktir [23].

5.1.1 Norden Metrikleri

g metriği her $X,Y\in\Im_0^1(M_{2n})$ için aşağıdaki denklem sağlanırsa bir Norden metrik tanımlar.

$$g(\varphi X,\varphi Y)=-g(X,Y)$$

$$g(\varphi X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

Norden metriği; pür metrikler, anti-Hermityen ve B-metriği olarak aşağıdaki çalışmalarda incelenmiştir. Eğer (M_{2n},φ), g Norden metriği ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifold ise (M_{2n},φ,g)'ye hemen hemen Norden manifold denir. φ integrallenebilir ise (M_{2n},φ,g) Norden manifold olarak adlandırılır [11], [17], [?], [43], [74], [80].

5.1.2 Holomorfik(Hemen Hemen Holomorfik) Tensör Alanları

$X_n(C)$, C-holomorfik manifoldu üzerinde t^* bir kompleks tensör alanı olsun. Bu tensör alanının reel modelide M_{2n} üzerinde bir tensör alanıdır. Bu tensör alanlarını yazarlar pür olarak almıştır(bakınız [22], [36], [30], [43], [47],[48], [74]). $(0,q)$ tipli ω tensör alanının pür olabilmesi için aşağıdaki şartı sağlamalıdır. Her $X_1, X_2 \ldots, X_q \varepsilon \Im_0^1(M_{2n})$ için

$$\omega(\varphi X_1, X_2 \ldots, X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2 \ldots, X_q) = \ldots = \omega(X_1, X_2 \ldots \varphi, X_q)$$

ω pür tensör alanına uygulanan [85]

$$\Phi_\varphi : \Im_q^0(M_{2n}) \to \Im_{q+1}^0(M_{2n})$$

$$\begin{aligned}(\Phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_q) &= (\varphi X)(\omega(Y_1, Y_2, \ldots, Y_q)) \\ &\quad -X(\omega(\varphi Y_1, Y_2, \ldots, Y_q)) \\ &\quad +\omega((L_{Y_1 \varphi})X, Y_2, \ldots, Y_q) + \ldots \\ &\quad +\omega(Y_1, Y_2, \ldots, (L_{Y_4 \varphi})X)\end{aligned}$$

eşitliği ile verilen bir operatör tanımlayalım. (Burada L_y ile L'ye göre Lie türevi gösterilmektedir.)

M_{2n} üzerinde φ bir kompleks yapı ve $\Phi_\varphi \omega$ tensör alanı sıfıra eşitse $X_n(C)$ üzerindeki w^* kompleks tensör alanına holomorfiktir denir ([22], [43], [74]).

$$(\Phi_\varphi w)(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_q) = 0$$

$X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_q \varepsilon \Im_0^1(M_{2n})$ ve ω pür tensör alanı olmak üzere $X_n(C)$ üzerindeki w^* tensör alanının holomorfik olması $\Phi_\varphi \omega = 0$ ile ifade edilir. Bu yüzden M_{2n} üzerindeki ω tensör alanı holomorfik tensör alanı olarak adlandırılır. M_{2n} üzerinde φ hemen hemen kompleks yapı olduğunda $\Phi_\varphi \omega = 0$ şartını sağlayan tensör alanı hemen hemen holomorfiktir denir.

5.1.3 Holomorfik Norden (Kähler-Norden) Metrik

g Norden metriği ile birlikte bir Norden manifoldun holomorfik olarak ifade edilebilmesi için $X, Y, Z \varepsilon \Im_0^1(M_{2n})$ için

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = 0 \tag{5.1.1}$$

(5.1.1) eşitliğinde $X = \partial_k, Y = \partial_i, Z = \partial_j$ yazılırsa $x^1, x^2, \ldots, x^n$ lokal koordinat sistemine göre $\Phi_\varphi g$'nin $(\Phi_\varphi g)_{kij}$ bileşenleri aşağıdaki gibi olur.

$$(\Phi_\varphi g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{ij} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj}(\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m) + g_{im} \partial_j \varphi_k^m$$

Eğer (M_{2n}, φ, g) holomorfik Norden g metriği ile birlikte bir Norden manifold ise (M_{2n}, φ, g)'ye biz holomorfik Norden manifold deriz.

Diğer yönden holomorfik Norden manifoldları Kähler Norden manifoldlarına benzerdir. "Bir hemen hemen hermityen manifoldun Kähler olabilmesi için gerek ve yeter şart hemen hemen kompleks yapının Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olmasıdır." Bilinen sonuç aşağıdaki takip eden teorem ile eştir.

Teorem 5.1.1 [17] (Parakompleks versiyon için bakınız [40]) g Norden metriği ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifold verilsin. $\Phi_\varphi g = 0$ şartı $\nabla\varphi = 0$ şartına denktir. (Burada ∇, g'nin Levi-Civita konneksiyonudur.)

Kähler Norden manifold (M_{2n}, φ, g) üçlüsü ile gösterilsin. Burada φ hemen hemen kompleks yapıdır. g pseudo-Riemannian metriğidir. Bu yüzden Kähler-Norden manifoldları ve holomorfik metriğe sahip Norden metriği arasında bir uygunluk vardır. Bu manifoldların Riemannian eğrilik tensörleri pür ve holomorfiktir ve hatta skaler eğrilikleri de yerel holomorfik fonksiyondur ([17],[34]).

Uyarı 5.1.1 $\nabla\varphi = 0$ ise hemen hemen kompleks yapı integrallenebilirdir. Bu yüzden g'nin ∇ Levi-Civita konneksiyonu burulmasız afin konneksiyondur. Bu bilgiler ışığında eğer $\Phi_\varphi g = 0$ ise φ integrallenebilirdir. Böylece hemen hemen Norden manifoldu üzerinde $\Phi_\varphi g = 0$ ve $N_\varphi = 0$ şartı sağlanır (Yani kapalı Kähler manifoldu ile birlikte hemen hemen Käler manifolduna eş olan holomorfik Norden manifoldlar var olmaz). [34]

Tezimizin bu bölümünde 4-boyutlu Norden manifoldları üzerinde Walker metriği kullanarak yani bir Norden-Walker metriği tanımlanacaktır.

5.2 Norden-Walker metrikleri

5.2.1 g Walker Metriği

g bir M_4 4$-$manifoldu üzerinde neutral metrik olsun. Bu metriğin Walker metrik olarak ifade edilebilmesi için g'ye göre paralel olan M_4 üzerinde 2$-$boyutlu D null dağılımının var olması gerekmektedir. Walker'ın teoreminden [59] (x, y, z, t) koordinat sistemine göre

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \tag{5.2.1}$$

lokal kanonik forma sahiptir. Burada a, b, c fonksiyonları (x, y, z, t) koordinatlarının diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. D paralel null $2-$düzleme ∂_x, ∂_y ile lokal olarak gerilir. Burada

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial_x} \text{ ve } \partial_y = \frac{\partial}{\partial_y}$$

şeklindedir.

g'ye göre uygun hemen hemen kompleks yapısı $g-$ortogonal J hemen hemen kompleks yapısı olarak tanımlanır ve burada J, D üzerinde pozitif $\frac{\pi}{2}$ dönmenin standart üretkenidir [11]. Yani $J\partial_x = \partial_y$ve $J\partial_y = -\partial_x$ şeklindedir. O halde g Walker metriği (5.2.2) denklemi ile tek olarak tanımlanır.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.2}$$

[2]'de M Walker 4-manifoldu üzerindeki böyle bir uygun J hemen hemen kompleks yapısı için (g^{N+}, J) hemen hemen Norden yapısı inşa edilir. Burada g^{N+}, M üzerinde

$$g^{N+}(JX, Jy) = -g^{N+}(X, Y)$$

özelliğine sahip bir metriktir. Gerçekten buna benzer bazı örnekler [2]'in 6. önermesinden görülür.

$$g^{N+} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & -a & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) \\ -b & -2c & \frac{1}{2}(1-ab) & -2c \end{pmatrix}$$

Bu metriğe biz hemen hemen Norden metrik deriz. [2]'de böyle bir yapının inşası Walker metriğinden farklı olarak verilen hemen hemen kompleks yapı için Norden metriğinin bulunması şeklindedir.

Bu bölümdeki amacımız g Walker metriğinin olmadığı uygun φ hemen hemen kompleks yapısına sahip (g, F) hemen hemen Norden-Walker yapısı bulmaktır. Yani metriği sabit tutarak

$$g(FX, FY) = -g(X, Y)$$

şartını sağlayan F hemen hemen yapısını bulmaya çalışacağız.

[2]'de verilen hemen hemen kompleks yapısı için metrik inşa edilmiştir. Buradaki metotda ise verilen metrik için bir hemen hemen kompleks yapı inşa edilmiştir.

5.2.2 Hemen Hemen Norden-Walker Manifold

F, M_4 Walker manifoldu üzerinde

i. $F^2 = -I$

ii. $g(FX, Y) = g(X, FY)$ (Nordenlik özelliği)

iii. $F\partial_x = \partial_y, F\partial_y = -\partial_x$ (F, D üzerindeki pozitif $\dfrac{\pi}{2}$−dönmeye neden oluyor.)

şartlarını sağlayan hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu üç şart ile tanımlanan F tek olmadığını görebiliriz. Yani

$$\begin{cases} F\partial_x = \partial_y, \\ F\partial_y = -\partial_x, \\ F\partial_z = \alpha\partial_x + \frac{1}{2}(a+b)\partial_y - \partial_t, \\ F\partial_t = -\frac{1}{2}(a+b)\partial_x + \alpha\partial_y + \partial_z \end{cases}$$

ve $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$ doğal koordinatlarına göre

$$F = (F_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Burada $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ keyfi fonksiyonlarıdır. (5.2.2)'deki gibi uygun J hemen hemen kompleks yapısı tek olarak tanımlandığını hatırlayalım. Bizim durumumuzdan hemen hemen Norden-Walker yapısı, F hemen hemen kompleks yapısı $\alpha(x, y, z, t)$ keyfi fonksiyonlarını içermesiyle elde edilir.

Bizim amacımız açık bir şekilde, g Walker metriğine sahip, basit olmayan hemen hemen Norden-Walker yapısı bulmaktır. Bu yüzden, $\alpha = c$ alacağız. O zaman g tek bir

$$\varphi = (\varphi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & c & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.3}$$

hemen hemen kompleks yapısını tanımlar. (M_4, φ, g) üçlüsüne hemen hemen Norden-Walker manifold denir. [4], [9], [25], [31], [37]'deki terminolojiye uyarak φ'ye uygun (proper) hemen hemen kompleks yapı diyeceğiz.

Uyarı 5.2.1 (5.2.3)'den, $a = -b$ ve $c = 0$ olduğu durumda φ'nin integrallenebildiğini söyleyebiliriz.

5.2.3 Uygun Hemen Hemen Kompleks Yapıların İntegrallenebilirliği

Hemen hemen Norden-Walker manifoldlar üzerindeki φ hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$(N_\varphi)^i_{jk} = \varphi^m_j \partial_m \varphi^i_k - \varphi^m_k \partial_m \varphi^i_j - \varphi^i_m \partial_j \varphi^m_k + \varphi^i_m \partial_k \varphi^m_j = 0 \tag{5.2.4}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. (5.2.3) ve (5.2.4)'den aşağıdaki integrallenebilme şartını buluruz:

Teorem 5.2.1 Hemen hemen Norden-Walker manifoldlar üzerindeki uygun φ hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} a_x + b_x + 2c_y = 0 \\ a_y + b_y - 2c_x = 0 \end{cases} \tag{5.2.5}$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanmasıdır. Bu teoremden, $a = -b$ ve $c = 0$ ise, φ integrallenebilirdir diyebiliriz(bakınız Sonuç 5.2.1).

(M_4, φ, g), Norden-Walker manifold ($N_\varphi = 0$) ve $a = b$ olsun. Bu durumda (5.2.5) denklemini

$$\begin{cases} a_x = -c_y \\ a_y = c_x \end{cases} \tag{5.2.6}$$

formuna indirgeyebiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} a_{xx} + a_{yy} &= 0 \\ c_{xx} + c_{yy} &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

yazabiliriz. Bu ise a ve c fonksiyonlarının x ve y argümanlarına göre harmonik olduğunu gösterir. Böylece aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 5.2.2 (M_4, φ, g) üçlüsü Norden-Walker ve $a = b$ ise, o zaman a ve c fonksiyonları x ve y argümanlarına göre harmoniktirler.

Örnek 5.2.1 Norden-Walker metriklerinin özel tiplerinin varlığını belirlemek için Teorem 5.2.2'nin uygulamasını yapacağız. $a = b$ ve $h(x, y)$ ise x ve y değişkenlerinin harmonik fonksiyonları olsunlar. Mesela, $h(x, y) = e^x \cos y$ olsun. a, z ve t'nin keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonu olmak üzere

$$a = a(x, y, z, t) = h(x, y) + \alpha(z, t) = e^x \cos y + \alpha(z, t)$$

yazalım. Bu durumda α'da x ve y'ye göre harmonik fonksiyon olup,

$$\begin{aligned} a_x &= e^x \cos y \\ a_y &= -e^x \sin y \end{aligned}$$

yazabiliriz. (5.2.6)'den, c için

$$\begin{aligned} c_x &= a_y = -e^x \sin x \\ c_y &= -a_x = -e^x \cos y \end{aligned}$$

yazarız. Bu kısmi diferensiyel denklemler için, β, z ve t'nin keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonu olmak üzere

$$c = -e^x \sin y + \beta(z,t)$$

çözümünü elde etmiş oluruz. Böylece Norden-Walker metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & e^x \cos y + \alpha(z,t) & -e^x \sin y + \beta(z,t) \\ 0 & 1 & -e^x \sin y + \beta(z,t) & e^x \cos y + \alpha(z,t) \end{pmatrix}$$

formundaki bileşenlere sahip olmuş olur.

5.3 Holomorfik Norden-Walker (Kähler-Norden-Walker) Metrikler

(M_4, φ, g) hemen hemen Norden-Walker manifold olsun. Eğer

$$(\Phi_\varphi g)_{kij} = \varphi_k^m \delta_m g_{ij} - \varphi_i^m \delta_k g_{mj} + g_{mj}(\delta_i \varphi_k^m - \delta_k \varphi_i^m) + g_{im} \delta_j \varphi_k^m = 0 \tag{5.3.1}$$

sağlanırsa Teorem 5.1.1, φ'nin etksiyle integrallenebilir ve (M_4, φ, g) üçlüsü Kähler-Norden-Walker manifold yada bir holomorfik Norden-Walker olarak adlandırılır. Uyarı 5.1.1 dikkate alınarak $\Phi_\varphi g = 0$ ve $N_\varphi \neq 0$ olması şartıyla hemen hemen Kähler-Norden-Walker manifold olduğu görüldü.

(5.2.1) ve (5.2.3)'ü (5.3.1)'da yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
(\Phi_\varphi g)_{xzz} &= a_y, \ \ (\Phi_\varphi g)_{xzt} = (\Phi_\varphi g)_{xtz} = \frac{1}{2}(b_x - a_x) + c_y, \\
(\Phi_\varphi g)_{xtt} &= b_y - 2c_x, \ \ (\Phi_\varphi g)_{yzz} = -a_x, \\
(\Phi_\varphi g)_{yzt} &= (\Phi_\varphi g)_{ytz} = \frac{1}{2}(b_y - a_y) - c_x, \\
(\Phi_\varphi g)_{ytt} &= -b_x - 2c_y, \\
(\Phi_\varphi g)_{zxz} &= (\Phi_\varphi g)_{zzx} = (\Phi_\varphi g)_{txt} = (\Phi_\varphi g)_{ttx} = c_x, \\
(\Phi_\varphi g)_{zxt} &= (\Phi_\varphi g)_{ztx} = -(\Phi_\varphi g)_{txz} = -(\Phi_\varphi g)_{tzx} = \frac{1}{2}(a_x + b_x), \\
(\Phi_\varphi g)_{zyz} &= (\Phi_\varphi g)_{zzy} = (\Phi_\varphi g)_{tyt} = (\Phi_\varphi g)_{tty} = c_y, \\
(\Phi_\varphi g)_{zyt} &= (\Phi_\varphi g)_{zty} = -(\Phi_\varphi g)_{tyz} = -(\Phi_\varphi g)_{tzy} = \frac{1}{2}(a_x + b_y), \\
(\Phi_\varphi g)_{zzz} &= ca_x - a_t + 2c_z + \frac{1}{2}(a+b)a_y, \\
(\Phi_\varphi g)_{zzt} &= (\Phi_\varphi g)_{ztz} = cc_x + b_z + \frac{1}{2}(a+b)c_y, \\
(\Phi_\varphi g)_{ztt} &= cb_x + a_t - 2c_z + \frac{1}{2}(a+b)b_y, \\
(\Phi_\varphi g)_{tzz} &= ca_y - b_z - \frac{1}{2}(a+b)a_x, \\
(\Phi_\varphi g)_{tzt} &= (\Phi_\varphi g)_{ttz} = cc_y - a_t + 2c_z - \frac{1}{2}(a+b)c_x, \\
(\Phi_\varphi g)_{ttt} &= cb_y + b_z - \frac{1}{2}(a+b)b_x.
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 5.3.1 (M_4, φ, g) üçlüsünin Kähler-Norden-Walker manifold olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır.

$$a_x = a_y = c_x = c_y = b_x = b_y = b_z = 0, \ \ a_t - 2c_z = 0. \tag{5.3.2}$$

Sonuç 5.3.1 Metrik

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b(t) \end{pmatrix}$$

şartıyla (M_4, φ, g) üçlüsü daima Kähler- Norden-Walker'dır.

5.4 Norden-Walker Manifoldların Eğrilik Özellikleri

Eğer R ve r Walker metriğinin sırasıyla eğrilik ve skaler eğriliği ise R ve r'nin sahip olduğu komponentler şöyle ifade edilir [34].

$$
\begin{aligned}
R_{xzxz} &= -\frac{1}{2}a_{xx},\ R_{xzxt} = -\frac{1}{2}c_{xx},\ R_{xzyz} = -\frac{1}{2}a_{xy},\ R_{xzyt} = -\frac{1}{2}c_{xy},\\
R_{xzzt} &= \frac{1}{2}a_{xt} - \frac{1}{2}c_{xz} - \frac{1}{4}a_y b_x + \frac{1}{4}c_x c_y,\ R_{xtxt} = -\frac{1}{2}b_{xx},\ R_{xtyz} = -\frac{1}{2}c_{xy},\\
R_{xtyt} &= -\frac{1}{2}b_{xy},\ R_{xtzt} = \frac{1}{2}c_{xt} - \frac{1}{2}b_{xz} - \frac{1}{4}(c_x)^2 + \frac{1}{4}a_x b_x - \frac{1}{4}b_x c_y + \frac{1}{4}b_y c_x,\\
R_{yzyz} &= -\frac{1}{2}a_{yy},\ R_{yzyt} = -\frac{1}{2}c_{yy},\\
R_{yzzt} &= \frac{1}{2}a_{yt} - \frac{1}{2}c_{yz} - \frac{1}{4}a_x c_y + \frac{1}{4}a_y c_x - \frac{1}{4}a_y b_y + \frac{1}{4}(c_y)^2,\ R_{ytyt} = -\frac{1}{2}b_{yy},\\
R_{ytzt} &= \frac{1}{2}c_{yt} - \frac{1}{2}b_{yz} - \frac{1}{4}c_x c_y + \frac{1}{4}a_y b_x,\\
R_{ztzt} &= c_{zt} - \frac{1}{2}a_{tt} - \frac{1}{2}b_{zz} - \frac{1}{4}a(c_x)^2 + \frac{1}{4}aa_x b_x + \frac{1}{4}ca_x b_y - \frac{1}{2}cc_x c_y - \frac{1}{2}a_t c_x + \frac{1}{2}a_x c_t\\
&\quad -\frac{1}{4}a_x b_z + \frac{1}{4}ca_y b_x + \frac{1}{4}ba_y b_y - \frac{1}{4}b(c_y)^2 - \frac{1}{2}b_z c_y + \frac{1}{4}a_y b_t + \frac{1}{4}a_z b_x + \frac{1}{2}b_y c_z - \frac{1}{4}a_t b_y
\end{aligned}
$$

ve

$$r = a_{xx} + 2c_{xy} + b_{yy}.$$

Farz edelim ki (M_4, φ, g) üçlüsü Kähler-Norden-Walker'dır. Son denklem (5.3.2) ve (5.4.1)'de gözönüne alınırsa

$$R_{ztzt} = c_{zt} - \frac{1}{2}a_{tt} = -\frac{1}{2}(a_t - 2c_z)_t = 0.$$

(5.3.2)'dan kolayca görülürki (5.4.1)'de R'nin diğer komponentleri direk olarak sıfırlanır. Böylece;

Teorem 5.4.1 Eğer (M_4, φ, g) bir Norden-Walker manifold ise Kähler-Norden-Walker manifold, M_4'de düzgündür.

Uyarı 5.4.1 Holomorfik ve pür tensör manifold eğriliği gibi bir Kähler-Norden manifoldun düzgün olmadığı bulunmuştur [60].

(M_4, φ, g) özel φ integrallenebilir yapısı yani $N_\varphi = 0$ şartıyla bir Norden-Walker manifold olsun. $a = b$ ise (5.2.6) denkleminden Teorem 5.2.2'nin ispatlandığını görürüz. Eğer $c = c(y, z, t)$ ve $c = c(x, z, t)$ ise, $c_{xy} = (c_x)_y = (c_y)_x = 0$'dır. Bu durumlarda (5.2.6)'nin sıfırlanmasıyla sırasıyla $a = a(x, z, t)$ ve $a = a(y, z, t)$ olur. $c_{xy} = 0$ ve $a_{xx} + b_{yy} = 0$'ın kullanılmasıyla (bakınız (5.2.7)), (5.4)'den $r = 0$ elde edilir.

Böylece:

Teorem 5.4.2 Eğer (M_4, φ, g)'de g ve $\tilde{g}$ metrikleri

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x,z,t) & c(y,z,t) \\ 0 & 1 & c(y,z,t) & a(x,z,t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(y,z,t) & c(x,z,t) \\ 0 & 1 & c(x,z,t) & a(y,z,t) \end{pmatrix}$$

bir Norden-Walker non-Kähler manifold ise M_4'de skaler düzgündür.

5.5 Hemen Hemen Norden-Walker ve Kähler-Norden-Walker Manifoldlarının Golberg Varsayımları Arasındaki İlişki

(M_{2n}, φ, g) hemen hemen Norden manifold olsun. M_{2n} üzerinde φ-uyumlu $\Omega_\varphi(X,Y) = h(\varphi X, Y)$ 2-form seçelim. Burada, $h(X,Y) = \tilde{g}(X,Y) + \tilde{g}(\varphi X, \varphi Y)$ herhangi g Riemannian metriği için Hermitian metriktir. Elde edilen M_{2n} paracompakttır [22]. Aşağıda ki gibi Goldbers varsayımlarının hemen hemen Norden versiyonu ileri sürülebilir [36].

G1. M_{2n}'den dolayı kompaktır

G2. g, Einstein'dır.

G3. Eğer φ-uyumlu 2-form ise kapalıdır. O zaman φ integrallenmelidir.

Tüm kompakt Norden-Walker 4-manifoldlarında iki alt birim tanımlandı.

$$KNW = \{(M_4, \varphi, g) : \Phi_\varphi g = 0\},$$

$$GNW = \{(M_4, \varphi, g) : M_4 \text{ manifoldu } (G_2) \text{ ve } (G_3) \text{ şartlarını sağlar}\}.$$

Teorem 5.5.1 $M_4 \in KNW$ olsun. O zaman φ integrallenebilmeli ve M_4, GNW'nin (G_2) şartını sağlayan bir manifold olmalı.

İspat. Farz edelimki $M_4 \in KNW$ olsun. O zaman Teorem 5.4.1'de gördükki M_4 düzdür ve g Einstein'dır. Uyarı 5.1.1'den dolayı eğer $\Phi_\varphi g = 0$ ise φ integrallenebilir, böylece ispat tamamlanır.

6. NORDEN-WALKER 4-MANİFOLDLARI

6.1 Norden-Walker 4-Manifoldları

6.1.1 Quasi-Kähler Manifoldları

Norden metriği ile birlikte integrallenemeyen hemen hemen kompleks manifoldun temel sınıfı quasi-Kähler manifoldun sınıfıdır [29]. (M_{2n}, φ, g) hemen hemen Norden manifoldu

$$\underset{X,Y,Z}{\sigma} g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = 0$$

denklemini sağlarsa quasi-Kähler olur. Burada σ bir döngüsel (dairesel) toplamdır. Son denklemden

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) + 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = \underset{X,Y,Z}{\sigma} g((\nabla_X \varphi)Y, Z)$$

elde edilir. Burada g quasi-Kähler manifoldunda Norden metriktir.

6.1.2 Twin Norden Metrikleri

(M_{2n}, φ, g) hemen hemen Norden manifold olsun. Hemen hemen Norden manifoldla bağlantılı Norden metriği, M_{2n} üzerindeki tüm X ve Y vektör alanları için

$$G(X, Y) = (g \circ \varphi)(X, Y)$$

şeklindedir.

Burada G yeni bir Norden metriğidir. Bu metrik g'nin twin(dual) Norden metriği olarak adlandırılır. g, Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun türevini ∇_g ile gösterelim. Daha sonra $\nabla_g = 0$ eşitliğini Teorem 5.1.1'de kullanırsak

$$\nabla_g G = (\nabla_g g) \circ \varphi + g \circ (\nabla_g \varphi) = g \circ (\nabla_g \varphi)$$

denklemini elde ederiz.

Bu yüzden; g, Kähler-Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonu; G twin metriğinin Levi-Civita konneksiyonuna denk gelir. (Yani Kähler-Norden manifoldun Levi-Civita konneksiyonu için metrik tek değildir.)

6.1.3 İzotropik Kähler-Norden-Walker Yapılar

Uygun bir φ hemen hemen kompleks yapısı (M_{2n}, φ, g)'nin Norden-Walker manifoldu üzerinde eğer $\|\nabla\varphi\|^2 = 0$, $\nabla\varphi \neq 0$ şartını sağlarsa izotropik Kählerdir denir. İzotropik Kähler yapıyla ilgili ilk örnek 4. boyutta [18] çalışmasında, daha sonra 6. boyutta [2] çalışmasında 4. boyutta [9] çalışmasında verilmiştir. Bu bölümde bizim amacımız (M_4, φ, g) Norden-Walker manifoldu üzerinde uygun bir hemen hemen kompleks yapının izotropik Kähler olduğunu göstermektir. (5.2.1) denklemindeki metrik tensörün tersi $g^{-1} = (g^{ij})$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -a & -c & 1 & 0 \\ -c & -b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.1}$$

ile verilir.

Hemen hemen kompleks yapının $\nabla\varphi$ kovaryant türevi $(\nabla\varphi)_{ij}^k = \nabla_{i\varphi j}^k$ şeklindedir. Bazı hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
\nabla_x\varphi_x^x &= \nabla_x\varphi_t^y = c_x, \nabla_y\varphi_z^x = \nabla_y\varphi_t^y = c_y, \qquad (6.1.2)\\
\nabla_x\varphi_x^x &= -\nabla_z\varphi_y^y = \nabla_z\varphi_z^z = -\nabla_z\varphi_t^t = \frac{1}{2}a_y + \frac{1}{2}c_x,\\
\nabla_x\varphi_x^y &= \nabla_z\varphi_y^x = \nabla_z\varphi_z^t = \nabla_z\varphi_t^z = -\frac{1}{2}a_x + \frac{1}{2}c_y,\\
\nabla_z\varphi_z^x &= 2c_z + ca_x - a_t - \frac{1}{2}cc_y - \frac{1}{2}ac_x + \frac{1}{2}ba_y,\\
\nabla_z\varphi_z^y &= a_z + \frac{1}{4}ac_y - \frac{1}{4}bc_y + ca_y + \frac{3}{4}aa_x + \frac{1}{4}ba_x,\\
\nabla_z\varphi_t^x &= \frac{1}{4}aa_x - \frac{1}{4}ba_x + ca_y + \frac{3}{4}bc_y + cc_x + \frac{1}{4}ac_y,\\
\nabla_z\varphi_z^y &= a_z + \frac{1}{4}ac_y - \frac{1}{4}bc_y + ca_y + \frac{3}{4}aa_x + \frac{1}{4}ba_x,\\
\nabla_z\varphi_t^x &= \frac{1}{4}aa_x - \frac{1}{4}ba_x + ca_y + \frac{3}{4}bc_y + cc_x + \frac{1}{4}ac_y,\\
\nabla_z\varphi_t^y &= 2c_x + \frac{1}{2}cc_y - a_t + \frac{1}{2}ba_y + \frac{1}{2}ca_x - \frac{1}{2}ac_x,\\
\nabla_t\varphi_x^x &= -\nabla_t\varphi_y^y = \nabla_t\varphi_z^z = -\nabla_t\varphi_t^t = \frac{1}{2}c_y + \frac{1}{2}b_x,\\
\nabla_t\varphi_x^y &= \nabla_t\varphi_y^x = \nabla_t\varphi_z^t = \nabla_t\varphi_t^z = -\frac{1}{2}c_x + \frac{1}{2}b_y,\\
\nabla_t\varphi_z^x &= \frac{3}{2}cc_x + b_z - \frac{1}{2}cb_y - \frac{1}{2}ab_x + \frac{1}{2}bc_y,\\
\nabla_t\varphi_z^y &= \frac{1}{4}ab_y - \frac{1}{4}bb_y - \frac{1}{4}ac_x + \frac{1}{4}bc_x,\\
\nabla_t\varphi_t^x &= \frac{1}{4}ac_x - \frac{1}{4}bc_x + cc_y + \frac{1}{4}bb_y + cb_x - \frac{1}{4}ab_y,\\
\nabla_t\varphi_t^y &= \frac{1}{2}cb_y + b_z + \frac{1}{2}bc_y + \frac{1}{2}cc_x - \frac{1}{2}ab_x.
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. (6.1.2) denkleminin uzun ama kolay hesaplamaları gösterir ki

$$\|\nabla\varphi\|^2 = g^{ij}g^{kl}g_{ms}(\nabla\varphi)^m_{ik}(\nabla\varphi)^s_{jl} = 0$$

olur.

Teorem 6.1.1 (M_4,φ,g) hemen hemen Norden-Walker manifoldu üzerinde uygun bir hemen hemen Norden yapı izotropik Kählerdir.

6.2 (M_4,φ,g) Holomorfik Norden-Walker(Kähler-Norden-Walker) ve quasi-Kähler-Norden-Walker Metrikleri

(M_4,φ,g) bir hemen hemen Norden-Walker manifoldu olsun. Eğer (M_4,φ,g) üçlüsü eğer

$$(\Phi_\phi g)_{kij} = \phi^m_k\delta_m g_{ij} - \phi^m_i\delta_k g_{mj} + g_{mj}(\delta_i\phi^m_k - \delta_k\phi^m_i) + g_{im}\delta_j\phi^m_k = 0 \qquad (6.2.1)$$

eşitliğini sağlarsa bir holomorfik Norden-Walker veya bir Kähler-Norden-Walker manifolddur denir. (Burada φ integrallenebilirdir.) Sonuç 5.1.1'den görülür ki $\Phi_\phi g = 0$ ve $N_\varphi = 0$ şartını sağlayan bir hemen hemen Kähler-Norden-Walker manifoldu yoktur. (6.2.1) denkleminde (5.2.1) ve (5.2.3) denklemi gözönüne alınırsa $(\Phi_\phi g)_{kij}$'nin sıfır olmayan bileşenlerinin

$$\begin{aligned}
(\Phi_\varphi g)_{xzz} &= a_y \ \ (\Phi_\varphi g)_{xzt} = \frac{1}{2}(b_x - a_x) + c_y, \qquad (6.2.2)\\
(\Phi_\varphi g)_{xtt} &= b_y - 2c_x, \ \ (\Phi_\varphi g)_{yzz} = -a_x,\\
(\Phi_\varphi g)_{yzt} &= (\Phi_\varphi g)_{ytz} = \frac{1}{2}(b_y - a_y) - c_x \ \ (\Phi_\varphi g)_{ytt} = -b_x - 2c_y,\\
(\Phi_\varphi g)_{zxz} &= (\Phi_\varphi g)_{zzx} = (\Phi_\varphi g)_{txt} = (\Phi_\varphi g)_{ttx} = c_x,\\
(\Phi_\varphi g)_{zxz} &= (\Phi_\varphi g)_{ztx} = -(\Phi_\varphi g)_{txz} = -(\Phi_\varphi g)_{tzx} = \frac{1}{2}(a_x + b_x),\\
(\Phi_\varphi g)_{zxz} &= (\Phi_\varphi g)_{zzy} = (\Phi_\varphi g)_{tyt} = (\Phi_\varphi g)_{tty} = c_y,\\
(\Phi_\varphi g)_{zyt} &= (\Phi_\varphi g)_{zty} = -(\Phi_\varphi g)_{tyz} = -(\Phi_\varphi g)_{tzy} = \frac{1}{2}(a_y + b_y),\\
(\Phi_\varphi g)_{zzz} &= ca_x - a_t + 2c_z + \frac{1}{2}(a+b)a_y,\\
(\Phi_\varphi g)_{zzt} &= (\Phi_\varphi g)_{ztz} = cc_x + b_z + \frac{1}{2}(a+b)c_y,\\
(\Phi_\varphi g)_{ztt} &= cb_x + a_t - 2c_x + \frac{1}{2}(a+b)b_y, \ \ (\Phi_\varphi g)_{tzz} = ca_y - b_z - \frac{1}{2}(a+b)a_x,\\
(\Phi_\varphi g)_{tzt} &= (\Phi_\varphi g)_{ttz} = cc_y - a_t + 2c_x - \frac{1}{2}(a+b)c_x,\\
(\Phi_\varphi g)_{ttt} &= cb_y + b_z - \frac{1}{2}(a+b)b_x.
\end{aligned}$$

denklemi şeklinde olduğu görülür. Yukarıdaki eşitlikten aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 6.2.1 (M_4, φ, g) üçlüsünün bir Kähler-Norden-Walker manifoldu olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$a_x = a_y = b_x = b_y = c_x = c_y = 0, \;\; a_t - 2c_z = 0 \tag{6.2.3}$$

eşitliğini sağlamasıdır. (M_4, φ, g) Norden-Walker manifoldu $\Phi_k g_{ij} + 2\nabla_k G_{ij}$ şartını sıfırlarsa quasi-Kähler manifold olur. (Burada G, $G_{ij} = \varphi_i^m g_{mj}$ ile tanımlanır.)

Sonuç 6.2.1 (5.2.1) ve (5.2.3)'ten kolayca görülür ki G twin Norden metriği Walker değildir. G metriğine uygulanan ∇G kovaryant türevi $(\nabla G)_{ijk} = \nabla_i G_{jk}$ şeklindedir. Norden-Walker 4-manifoldda

$$\begin{aligned}
\nabla_x G_{zz} &= \nabla_x G_{tt} = c_x, \nabla_y G_{zz} = \nabla_y G_{tt} = c_y, \\
\nabla_z G_{xz} &= \nabla_z G_{zx} = -\nabla_z G_{yt} = -\nabla_z G_{ty} = \frac{1}{2}(a_y + c_x), \\
\nabla_z G_{xt} &= \nabla_z G_{tx} = \nabla_z G_{yz} = \nabla_z G_{zy} = \frac{1}{2}(c_y - a_x), \\
\nabla_z G_{zz} &= 2c_z - a_t + \frac{1}{2}a_y(a+b) + ca_x, \\
\nabla_z G_{zt} &= \nabla_z G_{tz} = \frac{1}{2}(ca_y + cc_x) - \frac{1}{4}((a+b)(a_x - c_y)), \\
\nabla_z G_{tt} &= 2c_z - a_t - \frac{1}{2}c_x(a+b) + cc_y, \\
\nabla_t G_{xz} &= \nabla_t G_z = -\nabla_t G_{yt} = -\nabla_t G_{ty} = \frac{1}{2}(b_x + c_y), \\
\nabla_t G_{xt} &= \nabla_t G_{tx} = \nabla_t G_{yz} = \nabla_t G_{zy} = \frac{1}{2}(b_y - c_x), \\
\nabla_t G_{zz} &= b_z + cc_x + \frac{1}{2}c_y(a+b), \\
\nabla_t G_{zt} &= \nabla_t G_{tz} = \frac{1}{2}c(b_x + c_y) - \frac{1}{4}((c_x - b_y)(a+b)), \\
\nabla_t G_{tt} &= b_z + cb_y - \frac{1}{2}b_x(a+b).
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

dir. $\nabla_i G_{jk}$'nın sıfır olmayan bileşenleri (6.2.4) ile verilir. (6.2.2) ve (6.2.4)'ten Teorem 6.2.2 elde edilir.

Teorem 6.2.2 (M_4, φ, g) üçlüsünün quasi-Kähler Norden-Walker manifoldu olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki denklemlerin sağlamasıdır.

$$b_x = b_y = b_z = 0, a_y - 2c_x = 0, a_x - 2c_y = 0, ca_x - a_t + 2c_z - (a+b)c_x = 0$$

6.3 Norden Manifoldlarının Eğrilik Özellikleri

Eğer R ve r sırasıyla Walker metriğin eğriliği ve skaler eğriliği olsun. R ve r'nin bileşenleri sırasıyla [34]

$$\begin{aligned}
R_{xzxz} &= -\frac{1}{2}a_{xx}, R_{xzxt} = -\frac{1}{2}c_{xx}, R_{xzyz} = -\frac{1}{2}a_{xy}, R_{xzyt} = -\frac{1}{2}c_{xy}, \\
R_{xzzt} &= \frac{1}{2}a_{xt} - \frac{1}{2}c_{xz} - \frac{1}{4}a_y b_x + \frac{1}{4}c_x c_y, R_{xtxt} = -\frac{1}{2}b_{xx}, R_{xtyz} = -\frac{1}{2}c_{xy}, \\
R_{xtyt} &= -\frac{1}{2}b_{xy}, R_{xtzt} = \frac{1}{2}c_{xt} - \frac{1}{2}b_{xz} - \frac{1}{4}(c_x)^2 + \frac{1}{4}a_x b_x - \frac{1}{4}b_x c_y + \frac{1}{4}b_y c_x, \\
R_{yzyz} &= -\frac{1}{2}a_{yy}, R_{yzyt} = -\frac{1}{2}c_{yy}, \\
R_{yzzt} &= \frac{1}{2}a_{yt} - \frac{1}{2}c_{yz} - \frac{1}{4}a_x c_y + \frac{1}{4}a_y c_x - \frac{1}{4}a_y b_y + \frac{1}{4}(c_y)^2, R_{ytyt} = -\frac{1}{2}b_{yy} \\
R_{ytzt} &= \frac{1}{2}c_{yt} - \frac{1}{2}b_{yz} - \frac{1}{4}c_x c_y + \frac{1}{4}a_y b_x, \\
R_{ztzt} &= c_{zt} - \frac{1}{2}a_{tt} - \frac{1}{2}b_{zz} - \frac{1}{4}a(c_x)^2 + \frac{1}{4}a a_x b_x + \frac{1}{4}c a_x b_y - \frac{1}{2}c c_x c_y \\
&\quad -\frac{1}{2}a_t c_x + \frac{1}{2}a_x c_t - \frac{1}{4}a_x b_z + \frac{1}{4}c a_y b_x + \frac{1}{4}b a_y b_y - \frac{1}{4}b(c_y)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}b_z c_y + \frac{1}{4}a_y b_t + \frac{1}{4}a_z b_x + \frac{1}{2}b_y c_z - \frac{1}{4}a_t b_y.
\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

ve

$$r = a_{xx} + 2c_{xy} + b_{yy} \tag{6.3.2}$$

şeklindedir. (M_4, φ, g) üçlüsünün Kähler-Norden-Walker olduğunu varsayalım. (6.2.3) ve (6.3.1)'deki son eşitliklerinden

$$R_{ztzt} = c_{zt} - \frac{1}{2}a_{tt} = -\frac{1}{2}(a_t - 2c_z)_t = 0$$

olduğunu görürüz. (6.2.3)'den kolayca görürüz ki R'nin (6.3.1) denklemindeki bileşenlerinin hepsi sıfırdır. Böylece Teorem 6.3.1 elde edilir.

Teorem 6.3.1 (M_4, φ, g) Norden-Walker manifoldu, M_4 düz olduğunda Kähler-Norden-Walker'dır.

Sonuç 6.3.1 Kähler-Norden manifoldu düz değildir ve bu manifoldun eğrilik tensörü pür ve holomorfiktir [60].

(M_4, φ, g) uygun bir φ integrallenebilir $(N_\varphi = 0)$ yapı ile birlikte bir Norden-Walker manifold olsun. Eğer $a = b$ olursa Teorem 5.2.2'nin ispatından (5.2.6) eşitliğini görürüz. Eğer $c = c(y, z, t)$ ve $c = c(x, z, t)$ ise $c_{xy} = (c_x)_y = (c_y)_x = 0$'dır. Bu durumda (5.2.6) denkleminden sırasıyla $a = a(x,z,t)$ ve $a = (y,z,t)$'dir. $c_{xy} = 0$ ve $a_{xx} + b_{yy} = 0$ kullanılarak, (6.3.2) denkleminden $r = 0$ elde edilir. Böylece Teorem 6.5.1'i elde ederiz (bakınız (5.2.7)).

Teorem 6.3.2 g, $\tilde{g}$ metrikleri ile birlikte (M_4, φ, g) üçlüsü bir manifolddur. (Burada M_4 skaler düzgündür.)

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x,z,t) & c(y,z,t) \\ 0 & 1 & c(y,z,t) & a(x,z,t) \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(y,z,t) & c(x,z,t) \\ 0 & 1 & c(x,z,t) & a(y,z,t) \end{pmatrix}$$

6.4 Goldberg Varsayımları

(M_{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermitian manifold olsun. Goldberg varsayımlarına göre eğer aşağıdaki üç şart sağlanırsa hemen hemen Hermitian manifold Kählerdir.

G1. (M_{2n}) manifoldu kompakt

G2. g, Riemannian metriği Einsteindir.

G3'. $\Omega(X,Y) = g(JX,Y)$ eşitliğini sağlayan Ω fundamental 2-formu kapalıdır. (Yani $d\Omega = 0$)

Not etmek gerekir ki Goldberg varsayımları hiçbir ilerleme kaydedememiştir ve orjinal varsayımlar hala açık bir problemdir.

(M_{2n}, φ, g) bir hemen hemen Norden manifold olsun. M_{2n} üzerinde φ hemen hemen kompleks yapısı verilmiş olsun. Herhangi bir $\tilde{g}$, Riemannian metriği alındığında M_{2n} kompaktır (parakompactır). [22] $\forall X, Y \in \Im_0^1(M_{2n})$ için

$$h(X,Y) = \tilde{g}(X,Y) + \tilde{g}(\varphi X, \varphi Y)$$

ile h Hermitian metriği elde edilir. $(\varphi, \tilde{g})$

$$\Omega_\varphi(X,Y) = h(\varphi X, Y)$$

şartı ile birlikte bir fundamental 2-form tanımlar. Biz bunu bir $\varphi-$compatible $2-$form olarak tanımlarız. (M_{2n}, φ, g) hemen hemen Norden manifold olsun. M_{2n} üzerinde bir Ω_φ

$\varphi-$compatible $2-$form seçilsin. (6.5.1)'de verilen Goldberg varsayımlarının hemen hemen Norden versiyonunu ileri sürebiliriz. Eğer

G1. M_{2n} kompakt

G2. g, Einstein ve eğer

G3'. bir Ω_φ, $\varphi-$ compatible $2-$formu kapalı

ise φ integrallenebilir olmak zorundadır.

(M_4, φ, g) bir hemen hemen Norden-Walker $4-$maifold olsun. (φ, g) çifti G simetrik ve $G(X,Y) = g(\varphi X, Y)$ Hermitian g metriği de Ω fundamental $2-$formuna benzer rol oynayan twin Norden metriği olarak tanımlarız. G pür twin metriğine uygulanan Φ_φ operatörünü

$$(\Phi_\phi G)(X,Y,Z) = (\Phi_\phi g)(\varphi X, Y, Z) + g(N_\varphi(X,Y), Z)$$

ile tanımlarız.

Eğer $G \in Ker\Phi_\varphi$ ise Teorem 5.1.1'den $\nabla_G \varphi = 0$ elde edilir. Burada ∇G twin Norden metriğinin Levi-Civita konneksiyonudur. ∇G bir burulmasız konneksiyon olduğunda φ integrallenebilirdir. Bu yüzden biz Goldberg varsayımlarının Norden versiyonuna yeni bir sonuç ileri sürebiliriz. Bu sonuç (NG) Eğer $G \in Ker\Phi_\varphi$ ise φ integrallenebilirdir.

6.5 Zıt Hemen Hemen Kompleks Yapının Tersi φ'

Nötral belirsiz metrikle donatılmış, yönlendirilmiş 4-manifold, hemen hemen kompleks yapısını ve aşağıdaki şartları sağlayan zıt hemen hemen kompleks yapısını içerir. [31], [32], [37], [34]

i. $\varphi^2 = \varphi'^2 = -1$

ii. $g(\varphi X, \varphi Y) = g(\varphi' X, \varphi' Y)$

iii. $\varphi\varphi' = \varphi'\varphi$

iv. φ'nin istenen yönü M_4 manifoldunki ile çakışır.

v. φ''nün istenen yönü M_4 manifoldunki ile zıt yönlüdür.

(M_4, φ, g) hemen hemen Norden manifold olsun. Uygun φ hemen hemen kompleks yapısına sahip M_4 Walker manifoldu için, g-ortogonal φ' zıt hemen hemen kompleks yapısı

$$\begin{aligned}
\varphi'\partial_1 &= -(\theta_1 c + \frac{\theta_2}{2}a)\partial_1 - \frac{\theta_1}{2}b\partial_2 + \theta_2\partial_3 + \theta_1\partial_4, \\
\varphi'\partial_2 &= \Big(\frac{\theta_1}{2}a + \frac{\theta_2}{2}\partial_1\Big) + \frac{\theta_2}{2}b\partial_2 + \theta_1\partial_3 - \theta_2 - \partial_4, \\
\varphi'\partial_3 &= -\Big(\frac{\theta_1}{2}ac + \frac{\theta_2}{4}a^2 + \frac{\theta_2}{\theta_1^2+\theta_2^2}\Big)\partial_1 - \Big(\frac{\theta_1}{4}ab + \frac{\theta_1}{\theta_1^2+\theta_2}\Big)\partial_2 \\
&\quad + \frac{\theta_2}{2}a\partial_3 + \frac{\theta_1}{2}a\partial_4, \\
\varphi'\partial_4 &= -\Big(\theta_1 c^2 + \frac{\theta_1}{4}ab + \frac{\theta_1}{\theta_1^2+\theta_2^2} + \frac{\theta_2}{2}(ac-bc)\Big)\partial_1 \\
&\quad + \Big(-\frac{\theta_1}{2}bc + \frac{\theta_2}{4}b^2 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2+\theta_2^2}\Big) + \Big(\frac{\theta_1}{2}b + \theta_2 c\Big)\partial_3 \\
&\quad + \Big(\theta_1 c - \frac{\theta_2}{2}b\Big)\partial_4
\end{aligned}$$

formunu alır. Burada $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = 0$ parametrelerdir.

Parametreleri $\theta_1 = 1$ ve $\theta_2 = 0$ şeklinde sabitleyerek elde edilden φ' açık formlarından bir tanesi hakkında konuşulacaktır.

$$\begin{aligned}
\varphi'\partial_1 &= -c\partial_1 - \frac{1}{2}b\partial_2 + \partial_4, \;\; \varphi'\partial_2 = -\frac{1}{2}a\partial_1 + \partial_3, \\
\varphi'\partial_3 &= -\frac{1}{2}ac\partial_1 - \Big(\frac{1}{2}ab + 1\Big)\partial_2 + \frac{1}{2}a\partial_4, \\
\varphi'\partial_4 &= -\Big(c^2 + \frac{1}{2}ab + 1\Big)\partial_1 - \frac{1}{2}bc\partial_2 + c\partial_4
\end{aligned} \tag{6.5.1}$$

φ''nün bu formu

$$\varphi' = (\varphi_j^i) = \begin{pmatrix} -c & \frac{-1}{2}a & \frac{-1}{2}ac & -(c^2 + \frac{1}{4}ab + 1) \\ \frac{-1}{2}b & 0 & -(\frac{1}{4}ab + 1) & -\frac{1}{2}bc \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}b \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}a & c \end{pmatrix} \tag{6.5.2}$$

şeklindedir. $\nabla\varphi'$ opposite hemen hemen kompleks yapının $\nabla\varphi'$ kovaryant türevlerinin sıfır olmayan bileşenleri

$$
\begin{aligned}
\nabla_x \varphi'^x_x &= -\nabla_x \varphi'^y_y = \nabla_x \varphi'^z_z = -\nabla_x \varphi'^t_t = \frac{1}{2}\nabla_z \varphi'^z_x = -\frac{1}{2}c_x, \\
\nabla_y \varphi'^x_x &= -\nabla_y \varphi'^y_y = \nabla_y \varphi'^z_z = -\nabla_y \varphi'^t_t = \frac{1}{2}\nabla_t \varphi'^t_y = -\frac{1}{2}c_y, \\
\nabla_x \varphi'^x_t &= -cc_x, \ \nabla_y \varphi'^x_t = -cc_y, \ \nabla_z \varphi'^x_x = -c_z - \frac{1}{4}ba_y + \frac{1}{2}a_t + \frac{1}{2}cc_y + \frac{3}{4}ac_x, \\
\nabla_z \varphi'^y_x &= \frac{1}{4}bc_y + \frac{1}{4}ba_x, \ \nabla_z \varphi'^t_x = \nabla_z \varphi'^z_y = -\frac{1}{2}c_y - \frac{1}{2}a_x, \\
\nabla_z \varphi'^x_y &= \frac{1}{4}aa_x + ca_y + \frac{1}{4}ac_y, \ \nabla_z \varphi'^y_y = c_z - \frac{1}{4}ac_x - \frac{1}{2}a_t + \frac{1}{2}ca_x + \frac{3}{4}ba_y, \\
\nabla_z \varphi'^t_y &= -a_y, \ \nabla_z \varphi'^x_z = \frac{1}{4}aca_x - a_y + \frac{1}{4}acc_y + \frac{1}{4}a^2c_x, \\
\nabla_z \varphi'^y_z &= \frac{1}{8}abc_y + \frac{1}{8}aba_x - \frac{1}{2}c_y - \frac{1}{2}a_x, \\
\nabla_z \varphi'^z_z &= -c_z - \frac{1}{4}ac_x + \frac{1}{2}a_t - \frac{1}{2}ca_x - \frac{1}{4}ba_y, \ \nabla_z \varphi'^t_z = -\frac{1}{4}ac_y - \frac{1}{4}aa_x, \\
\nabla_z \varphi'^x_t &= -2cc_z + (\frac{1}{8}ab - \frac{1}{2}c^2 + ac - \frac{1}{2})a_x + ca_t + (\frac{1}{8}ab + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2})c_y, \\
\nabla_z \varphi'^y_t &= -c_x + \frac{1}{4}b^2a_y + \frac{1}{4}bcc_y + \frac{1}{4}bca_x, \ \nabla_z \varphi'^z_t = -cc_x - \frac{1}{4}ba_x - \frac{1}{4}bc_y, \\
\nabla_z \varphi'^t_t &= c_z - \frac{1}{4}ba_y - \frac{1}{2}a_t - \frac{1}{2}cc_y - \frac{1}{4}ac_x, \ \nabla_t \varphi'^x_x = -\frac{1}{2}b_z - \frac{1}{4}bc_y + \frac{1}{2}cb_y + \frac{3}{4}ab_x, \\
\nabla_t \varphi'^y_x &= \frac{1}{4}bb_y + \frac{1}{4}bc_x, \ \nabla_t \varphi'^z_x = -b_x, \ \nabla_t \varphi'^t_x = \nabla_t \varphi'^z_y = -\frac{1}{2}b_y - \frac{1}{2}c_x, \\
\nabla_t \varphi'^x_y &= \frac{1}{4}ac_x + cc_y + \frac{1}{4}ab_y, \ \nabla_t \varphi'^y_y = -\frac{1}{4}ab_x + \frac{1}{2}b_z + \frac{1}{2}cc_x + \frac{3}{4}bc_y, \\
\nabla_t \varphi'^x_z &= \frac{1}{4}acb_y - c_y + \frac{1}{4}acc_x + \frac{1}{4}a^2b_x, \ \nabla_t \varphi'^y_z = \frac{1}{8}abb_y + \frac{1}{8}abc_x - \frac{1}{2}b_y - \frac{1}{2}c_x, \\
\nabla_t \varphi'^z_z &= -\frac{1}{4}ab_x - \frac{1}{2}b_z - \frac{1}{4}bc_y - \frac{1}{2}cc_x, \ \nabla_t \varphi'^t_z = -\frac{1}{4}ab_y - \frac{1}{4}ac_x, \\
\nabla_t \varphi'^x_t &= -cb_z + (\frac{1}{8}ab - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2})c_x + acb_x + (\frac{1}{8}ab + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2})b_y, \\
\nabla_t \varphi'^y_t &= -b_x + \frac{1}{4}b^2c_y + \frac{1}{4}bcc_x + \frac{1}{4}bcb_y, \ \nabla_z \varphi'^z_t = -cb_x - \frac{1}{4}bc_x - \frac{1}{4}bb_y, \\
\nabla_t \varphi'^t_t &= -\frac{1}{4}bc_y - \frac{1}{2}cb_y + \frac{1}{2}b_z - \frac{1}{4}ab_x.
\end{aligned}
$$

ile verilir. (5.2.1) ve (5.2.3)'den Teorem 6.5.1 elde edilir.

Teorem 6.5.1 (M_4, φ', g) hemen hemen Norden manifoldunun opposite hemen hemen kompleks yapısının izometrik Kähler olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$
c_x(2ba_y - 2ac_x + 4c_z - 2a_t + 2ca_x) + c_y(2b_z - 2ab_x) = 0 \tag{6.5.3}
$$

sağlamasıdır. (6.5.3)'den aşağıdaki denklem elde edilir.

Sonuç 6.5.1

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x,y,z,t) & c(z,t) \\ 0 & 1 & c(z,t) & b(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

ile birlikte (M_4, φ', g) daima izotropik Kählerdir.

6.5.1 φ''nün İntegrallenebilirliği

φ' opposite hemen hemen kompleks yapının imtegrallenebilir olması için $\varphi_j^{\prime i}$ için yazılan (5.2.4) denklemini φ' için yazarsak (6.5.2) denkleminin bileşenleri sıfırlanır. Bazı hesaplamalarla aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 6.5.2 Hemen hemen Norden manifoldunun φ' opposite kompleks yapısının inregrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$b_y = 0, a_x - 2c_y = 0, \;\; ab_x - 2b_z = 0 \tag{6.5.4}$$
$$ba_y - 2a_t - 2ac_x + 4cc_y + 4c_z = 0$$

denkleminin sağlanmasıdır. (M_4, φ', g)'de φ' integrallenebilir hemen hemen kompleks yapısı $(N_{\varphi'} = 0)$ ile birlikte bir Norden-Walker manifold olsun. Eğer $a = 0$ ise (6.5.4)'den $b_y = b_z = c_y = c_z = 0$'dır. Böylece Teorem 6.5.3'i elde ederiz.

Teorem 6.5.3 $a = 0$ olsun.

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & c(z,t) \\ 0 & 1 & c(z,t) & b(x,t) \end{pmatrix}$$

metriği ile birlikte (M_4, φ', g) üçlüsü daima Norden-Walker manifoldudur.

6.6 Norden-Walker-Einstein Metrikleri

(5.2.1) ile birlikte verilen Norden-Walker metriği için dikkatimizi Einstein şartına çevirelim.

(5.2.1) ile verilen G metriğinin Ricci eşitliğini ve skaler eğriliği R_{ij} ve S ile gösterilir. Einstain tensör alanı $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4}Sg_{ij}$ denklemi ile tanımlanır ve bu tensör alanının sıfır olmayan bileşenleri [34]

$$\begin{aligned}
G_{xz} &= \frac{1}{4}a_{xx} - \frac{1}{4}b_{yy}, \quad G_{xt} = \frac{1}{2}c_{xx} + \frac{1}{2}b_{xy} \\
G_{yz} &= \frac{1}{2}a_{xy} + \frac{1}{2}c_{yy}, \quad G_{yt} = \frac{1}{4}b_{yy} - \frac{1}{4}a_{xx} \\
G_{zz} &= \frac{1}{4}aa_{xx} + ca_{xy} + \frac{1}{2}ba_{yy} - a_{yt} + c_{yz} \\
&\quad -\frac{1}{2}a_yc_x\frac{1}{2}a_xc_y\frac{1}{2}a_yb_y - \frac{1}{2}(c_y)^2 - \frac{1}{2}ac_{xy} - \frac{1}{4}ab_{yy}, \\
G_{zt} &= \frac{1}{2}ac_{xx} + \frac{1}{2}cc_{xy} + \frac{1}{2}a_{xt} - \frac{1}{2}c_{xz} - \frac{1}{2}a_yb_x + \frac{1}{2}c_xc_y \\
&\quad +\frac{1}{2}bc_{yy} - \frac{1}{2}c_{yt} + \frac{1}{2}b_{yz} - \frac{1}{4}ca_{xx} - \frac{1}{4}cb_{yy}, \\
G_{tt} &= \frac{1}{2}ab_{xx} + cb_{xy} + c_{xt} - b_{xz} - \frac{1}{2}(c_x)^2 + \frac{1}{2}a_xb_x - \frac{1}{2}b_xc_y + \frac{1}{2}b_yc_x
\end{aligned} \tag{6.6.1}$$

şeklindedir. (5.2.1) denkleminde verilen g metriği bütün G_{ij} kompenentleri sıfıra eşit olursa hemen hemen Norden-Walker-Einstein'dır ($G_{ij} = 0$).

Teorem 6.6.1 (M_4, φ', g) bir Norden-Walker manifold olsun. Eğer

$$a_x = b_x = c_x = c_z = 0 \text{ (ya da } a_x = a_y = c_x = c_z = 0) \tag{6.6.2}$$

denklemi varsa g bir Norden-Walker-Einstein'dır.

İspat. (M_4, φ', g) üçlüsünün bir Norden-Walker manifold olduğunu varsayalım. (6.5.4)'den ve (6.6.2)'den teoremin ispatı açıktır. Yani $G_{ij} = 0$'dır.

Sonuç 6.6.1

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(y,z,t) & c(t) \\ 0 & 1 & c(t) & b(t) \end{pmatrix}$$

metriği ile birlikte (M_4, φ', g) üçlüsü daima Norden-Walker-Einstein'dır.

6.7 Goldberg Varsayımlarına Aykırı Örnekler

1. (M_4, φ, g) bir hemen hemen Norden-Walker manifold olsun. Bunun g metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x,y,z,t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a(x,y,z,t) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

(5.2.1) generik kanonik formunda $a = b$, $c = 0$ yazılarak elde edilir. Bu bağlamda (6.6.1)'den görürüz ki Einstein'ın şartları aşağıdaki gibidir.

$$a_{xx} - a_{yy} = 0, a_{xy} = 0, aa_{xx} - 2a_{yt} + (a_y)^2 = 0$$

$$a_{xt} - a_x a_y + a_{yz} = 0, aa_{xx} - 2a_{xx} + (a_x)^2 = 0$$

Eğer a, y ve t'den bağımsız ise ve a lineer olarak x'i içerirse yukarıdaki ilk dört eşitlik elde edilir ve sonuncu eşitlik $2a_{xx} - (a_x)^2 = 0$ şeklinde kısaltılır. $a = -\dfrac{2x}{z}$ yukarıdaki denklemin bir çözümüdür. Bu yüzden

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-2x}{z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2x}{z} \end{pmatrix} \tag{6.7.1}$$

(6.7.1) metriği $z > 0$ şartı ile birlikte Einstein'dır. Böylece Goldberg varsayımlarının (G_2) şartı sağlanır. Biliyoruz ki metrik uygun hemen hemen kompleks yapısına göre

$$\varphi\delta_x = \delta_y, \varphi\delta_y = -\delta_x,\ \varphi\delta_z = a\delta_y - \delta_t,\ \varphi\delta_t = -a\delta_x + \delta_z \tag{6.7.2}$$

(6.7.1) şartını sağlar. (6.7.1)'deki Einstein metriği uygun hemen hemen kompleks yapısı (6.7.2) denklemini aşağıdaki şekle dönüştürür.

$$\varphi\delta_x = \delta_y, \varphi\delta_y = -\delta_x, \varphi\delta_z = -\frac{2x}{z}\delta_y - \delta_t, \varphi\delta_t = -\frac{2x}{z}\delta_x + \delta_z$$

φ'nin integrallenebilirliği verilen Teorem 5.2.1 kullanılarak

$$a_x + b_x + 2c_y = 2a_x = -\frac{4}{z} \neq 0, a_y + b_y - 2c_x = 2a_y = 0$$

elde eilir. Benzer olarak φ' opposite kompleks yapısı (6.5.1)'de kullanılırsa

$$\varphi'\delta_x = -\frac{x}{z}\delta_y + \delta_t, \varphi'\delta_y = \frac{x}{z}\delta_x + \delta_z,$$

$$\varphi'\delta_z = -((\frac{x}{z})^2 + 1)\delta_y - \frac{x}{z}\delta_t, \varphi'\delta_t = -((\frac{x}{z})^2 + 1)\delta_x - \frac{x}{z}\delta_z.$$

(6.5.4)'deki $\varphi'-$integrallenebilme şartı Teorem 6.5.2'de kullanılırsa

$$b_y = 0, a_x - 2c_y = a_x = -\frac{2}{z} \neq 0, ab_x - 2b_z = aa_x = \frac{4x}{z^2} \neq 0,$$

$$ba_y - 2a_t - 2ac_x + 4cc_y + 4c_z = 0$$

elde edilir. Böylece φ' integrallenebilir değildir.

2. (M_4, φ', g) bir hemen hemen Norden-Walker manifold olsun. a, b, c'nin x, y, z'ye bağlı olmadığını varsayalım. Yani $a = a(z,t)$, $b = b(z,t)$, $c = c(z,t)$ şeklinde olsun. Bu yüzden (5.2.1) ile verilen g metriği

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(z,t) & c(z,t) \\ 0 & 1 & c(z,t) & b(z,t) \end{pmatrix}$$

şekline dönüşür. Bu durumda (6.6.1)'den görülür ki g metriği Norden-Walker-Einstein'dır. Yani $G_{ij} = 0$'dır. Böylece (G_2) ikinci şartı sağlanır.

Eğer a, b, c; x ve y'den bağımsız ise (6.5.4) denklemindeki φ''nün integrallenebilirlik şartı Teorem 6.5.2'de yazılarak

$$b_z = 0, \ \ a_t - 2c_z = 0$$

elde edilir.

Diğer taraftan $b = b(z,t)$ olduğu için $b_z \neq 0$'dır. Böylece φ' integrallenebilir değildir.

6.8 (M_4, φ', g) Üzerinde Holomorfik Norden-Walker (Kähler-Norden-Walker) Metrikleri

(M_4, φ', g) hemen hemen Norden-Walker manifold olsun. (6.2.1) denklemini (5.2.1) ve (6.5.2) denkleminde gözönüne alırsak (M_4, φ', g)'nin Kähler-Norden-Walker şartları aşağıdaki gibi bulunur. Takip eden teorem Teorem 6.2.1 ile aynıdır.

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{\varphi'}g)_{xxz} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{xzx} = -c_x, (\Phi_{\varphi'}g)_{xxt} = (\Phi_{\varphi'}g)_{xtx} = -(\Phi_{\varphi'}g)_{txx} = -b_x \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{xyz} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{xzy} = -c_y - \frac{1}{2}a_x, (\Phi_{\varphi'}g)_{xzz} = -ca_x - 2c_z - \frac{1}{2}ba_y + a_t, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{xyt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{xty} = -(\Phi_{\varphi'}g)_{txy} = -(\Phi_{\varphi'}g)_{tyx} = -c_x - \frac{1}{2}b_y, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{xzt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{xtz} = -cc_x - \frac{1}{2}bc_y - \frac{1}{2}b_z - \frac{1}{4}ab_x - \frac{1}{4}ba_x, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{xtt} &= -2cb_x - bc_x - \frac{1}{2}bb_y, (\Phi_{\varphi'}g)_{yxt} = (\Phi_{\varphi'}g)_{ytx} = -\frac{1}{2}b_y, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{yxz} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{yzx} = -(\Phi_{\varphi'}g)_{zxy} = -(\Phi_{\varphi'}g)_{yzx} = -\frac{1}{2}a_x, \qquad (6.8.1) \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{yyt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{yty} = -\frac{1}{2}(\Phi_{\varphi'}g)_{tyy} - c_y, (\Phi_{\varphi'}g)_{yzz} = -\frac{1}{2}aa_x, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{yzt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{ytz} = -\frac{1}{2}ac_x - \frac{1}{2}a_t - \frac{1}{4}ab_y - \frac{1}{4}ba_y + c_z, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{ytt} &= -\frac{1}{2}ab_x + b_z - cb_y - bc_y, (\Phi_{\varphi'}g)_{zxz} = (\Phi_{\varphi'}g)_{zzx} = -\frac{1}{2}ac_x, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{zxt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{ztx} = \frac{1}{4}ba_x - \frac{1}{4}ab_x - \frac{1}{2}b_z, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{zyz} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{zzy} = -\frac{1}{2}ac_y, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{zyt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{zty} = \frac{1}{4}ba_y - \frac{1}{4}ab_y - c_z + \frac{1}{2}a_t, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{zzz} &= -\frac{1}{2}aca_x - ac_z - \frac{1}{4}aba_y - a_y + \frac{1}{2}aa_t, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{zzt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{ztz} = -\frac{1}{2}acc_x - \frac{1}{4}abc_y - c_y - \frac{1}{2}ab_z, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{ztt} &= -\frac{1}{2}acb_x - \frac{1}{4}abb_y - b_y - cb_z + \frac{1}{2}ba_t - bc_z, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{txz} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{tzx} = -cc_x + \frac{1}{4}ab_x - \frac{1}{4}ba_x + \frac{1}{2}b_z, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{txt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{ttx} = -\frac{1}{2}bc_x, (\Phi_{\varphi'}g)_{tyt} = (\Phi_{\varphi'}g)_{tty} = \frac{1}{2}bc_y, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{tyz} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{tzy} = -cc_y + \frac{1}{4}ab_y - \frac{1}{4}ba_y - \frac{1}{2}a_t + c_z, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{tzz} &= -c^2a_x - \frac{1}{4}aba_x - a_x - 2cc_z - \frac{1}{2}bca_y + \frac{1}{2}ab_z + ca_t, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{tzt} &= (\Phi_{\varphi'}g)_{ttz} = -c^2c_x - \frac{1}{4}abc_x - c_x + bc_z - \frac{1}{2}bcc_y - \frac{1}{2}ba_t, \\
(\Phi_{\varphi'}g)_{ttt} &= -c^2b_x - \frac{1}{4}abb_x - b_x - \frac{1}{2}bcb_y + \frac{1}{2}bb_z
\end{aligned}
$$

Teorem 6.8.1 (M_4, φ', g) üçlüsünün Kähler-Norden-Walker manifold olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$a_x = a_y = b_x = b_y = b_z = c_x = c_y = 0, \;\; a_t - 2c_z = 0$$

Sonuç 6.8.1

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a(z) & 0 \\ 1 & 1 & 0 & b(t) \end{pmatrix}$$

ile birlikte (M_4, φ', g) üçlüsü daima Kähler-Norden-Walker'dır. (M_4, φ', g) bir hemen hemen Norden-Walker manifold olsun. G' twin metriğinin ∇G kovaryant türevi $(\nabla G')_{ijk} = \nabla_i G'_{jk}$ şeklindedir. Burada G', $\nabla'_{ij} = \varphi_i^m g_{mj}$ ile tanımlanır. Bazı hesaplamalar sonucu aşağıdaki denklem elde edilir ve (6.8.1) ve (6.8.2)'den Teorem ... yazılır.

$$
\begin{aligned}
\nabla_x G'_{xz} &= \nabla_x G'_{zx} = -\nabla_x G'_{yt} = -\nabla_x G'_{ty}\frac{1}{2}\nabla_z G'_{xx} = -\frac{1}{2}c_x,\\
\nabla_x G'_{xz} &= -\frac{1}{2}ac_x, \nabla_x G'_{zt} = \nabla_x G'_{tz} = -\frac{1}{2}cc_x, \nabla_x G'_{tt} = \nabla_y G'_{tt} = \frac{1}{2}bc_x,\\
\nabla_y G'_{xz} &= \nabla_y G'_{zx} = \nabla_y G'_{yt} = -\nabla_y G'_{ty} = \frac{1}{2}\nabla_t G'_{yy} = -\frac{1}{2}c_y,\\
\nabla_y G'_{zz} &= -\frac{1}{2}ac_y, \nabla_y G'_{zt} = \nabla_y G'_{tz} = -\frac{1}{2}cc_y, \qquad (6.8.2)\\
\nabla_z G'_{xy} &= \nabla_z G'_{yx} = -\frac{1}{2}a_x - \frac{1}{2}c_y, \nabla_z G'_{xt} = \nabla_z G'_{tx} = -\frac{1}{4}bc_y - cc_x - \frac{1}{4}ba_x,\\
\nabla_z G'_{xz} &= \nabla_z G'_{zx} = -\frac{1}{4}ac_x - \frac{1}{2}ca_x - c_z + \frac{1}{2}a_t - \frac{1}{4}ba_y,\\
\nabla_z G'_{yy} &= -a_y, \nabla_z G'_{yz} = \nabla_z G'_{zy} = -\frac{1}{4}aa_x - \frac{1}{4}ac_y,\\
\nabla_z G'_{yt} &= \nabla_z G'_{ty} = c_z - \frac{1}{2}a_t - \frac{1}{4}ac_x - \frac{1}{2}cc_y - \frac{1}{4}ba_y,\\
\nabla_z G'_{zz} &= -ac_z + \frac{1}{2}aa_t - \frac{1}{4}aba_y - \frac{1}{2}aca_x - a_y,\\
\nabla_z G'_{zt} &= \nabla_z G'_{tz} = -cc_z - \frac{1}{4}bca_y + \frac{1}{2}ca_t - (\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{8}ab + \frac{1}{2})a_x\\
&\quad -\frac{1}{4}acc_x - (\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ab + \frac{1}{2})c_y,\\
\nabla_z G'_{tt} &= bc_z - \frac{1}{2}ba_t - \frac{1}{2}bcc_y - (c^2 + \frac{1}{4}ab + 1)c_x,\\
\nabla_t G'_{xx} &= -b_x, \nabla_t G'_{xy} = \nabla_t G'_{yx} = -\frac{1}{2}c_x - \frac{1}{2}b_y,\\
\nabla_t G'_{xz} &= \nabla_t G'_{zx} = -\frac{1}{4}ab_x - \frac{1}{2}b_z - \frac{1}{4}bc_y\frac{1}{2}cc_x,\\
\nabla_t G'_{xt} &= \nabla_t G'_{tx} = -\frac{1}{4}bb_y - cb_x - \frac{1}{4}bc_x, \nabla_t G'_{yz} = \nabla_t G'_{zy} = -\frac{1}{4}ab_y - \frac{1}{4}ac_x,\\
\nabla_t G'_{yt} &= \nabla_t G'_{ty} = \frac{1}{2}b_z - \frac{1}{4}ab_x - \frac{1}{4}bc_y - \frac{1}{2}cb_y,\\
\nabla_t G'_{zz} &= -\frac{1}{2}ab_z - \frac{1}{4}abc_y - \frac{1}{2}acc_x - c_y,\\
\nabla_t G'_{zt} &= \nabla_t G'_{tz} = -(\frac{1}{8}ab + \frac{1}{2})b_y - \frac{1}{4}acb_x - \frac{1}{4}bcc_y\\
\nabla_t G'_{tt} &= \frac{1}{2}bb_z - \frac{1}{2}bcb_y - \frac{1}{4}abb_x - c^2b_x - b_x.
\end{aligned}
$$

Teorem 6.8.2 (M_4, φ', g) üçlüsü aşağıdaki denklemleri sağlasın yada sağlamasın bir quasi-Kähler-Norden-Walker manifolddur.

$$a_x = a_y = b_x = b_y = b_z = c_x = c_y = 0, \;\; a_t - 2c_z = 0$$

7. SONUÇ ÖNERİLER

Sekiz bölümden oluşan bu çalışmada Norden manifoldları hakkında bilgi verildiken sonra Tachibana ve Vishnevskii operatörlerinden bahsedilmiştir. Bu operatörler pür tensörlere uygulanmaktadır. Tachibana operatörü kullanılarak Kähler-Norden manifoldlarının Riemann eğriliği ve skaler eğriliği hakkında bazı özelliklerden bahsdeimiştir. Daha sonra Norden-Walker metriklerinden bahsedilmş ve dört boyutlu Walker manifoldları üzerinde hemen hemen Norden yapının integrallenebilirliği ve holomorf (Kähler) şartlarına bakılmıştır. Daha sonra Norden-Walker 4 manifoldları üzerindeki zıt hemen hemen kompleks yapılardan bahsedilmiştir.

Bu tezde yapılan çalışmalar dört boyuttan daha üst boyutlara yükseltilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Aslanci, S., Kazimova, S., Salimov, A.A., 2010, Some notes concerning Riemannian extensions, Ukrainian Math.j., 62, no.5, 661-665.

[2] Blair, D., Davidov, J., Muškarov, O., 2004, Isotropic Kähler hyperbolic twistor spaces, J. Geom., 52, 74-88.

[3] Blažić, N., Bokan, N., 1996, Invariance theory and affine differential geometry: Differential geometry and application, Masarky Univ., pp.249-260

[4] Bonome, A., Castro, R., Hervella, L.M., Matsushita, Y., 2005, Construction of Norden structures on neutral 4-manifolds, JP J. Geom. Topol., 5, n.2, 121-140.

[5] Browiec, A., Ferrasis, M., Francaviglia, M., Volovich, I., 1999, Almost complexes and almost-product Einstein manifolds from a variational principle, J. Math. Phys., 40(7), 3446-3464.

[6] Borowiec, A., Francaviglia, M., Volovich, I., 2000, Anti-Kählerian manifolds, Dif. Geom. Appl., 12, no.3, 281-289.

[7] Cruceanu, V., Fortuny, P., Gadea, P.M., 1996, A survey on paracomplex geometry, rocky mountain J. Math., 26, no.1, 83-115.

[8] Davidov, J., Diaz-Ramos, J.C., García-Río, E., Matsushita, Y., Muškarov, O., Vázquez-Lorenzo, R., 2007, Almost Kähler-Walker 4- manifolds, J. Geom. Phys. 57, 1075-1088.

[9] Davidov, J., Diaz-Ramos, J.C., García-Río, E., Matsushita, Y., Muškarov, O., Vázquez-Lorenzo, R., 2008, Hermitian-Walker 4- manifolds, J. Geom. Phys. 58, 307-323.

[10] Dragomir, S., Francaviglia, M., 2000, On Norden metrics which are loccaly conformal to anti-Kählerian metrics, Acta Appl. Math., 60(2), 115-135.

[11] Etayo, F., Santamaria, R., 2000, $(I^2 = \pm 1)$-metric manifolds, Publ. Math. Debrecen, 57, 435-444.

[12] Evtushık, L.E., Lumiste, J.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P., 1979, Differential Geometric stuructures on manifolds, (Russian) problems in geometry, vol.9(Russian), akad. nauk sssr, vsesoyuz. inst. nauchn. i tekhn. informatsii, Moscow, pp:248.

[13] Frolicher, A., Nijenhuis, A., 1956, Theory of vector-valued differential forms. I, derivations of the graded ring of differential forms, nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser.a.59., Indag. Math., 18, 338-359.

[14] Frolicher, A., Nijenhuis, A., 1956, Some new cohomology invariants for complex manifolds. I, II., nederl. akad. wetensch. proc. ser. a. 59, Indag. Math., 18, 540-552, 553-564.

[15] Gadea, P.M., Grifone, J., Munoz , J.M., 2003, Manifolds modelled over free modules over the double numbers, acta math. hungar, 100, no.3, 187-203.

[16] Gadea, P.M., Grifone, J., Munoz, J.M., 2003, Stein embedding theorem for B-manifolds, proc. edinb. math. soc., (2)46, no.2, 489-499.

[17] Ganchev, G.T., Borisov, A.V., 1986, Note on the almost complex manifolds with a norden metric, C.R. Acad. Bulgarie Sci., 39, 31-34.

[18] Garcia-Rio, E., Matsushita, Y., 2000, Isotropic Kähler structures on Engel 4-manifolds, J. Geom. Phys., 33, 288-294.

[19] Gribachev, K., Mekerov, D., Djelepov, G., 1985, Generalized B-manifolds,c.r.acad. Bulgare sci., 38(3), 299-302.

[20] Iscan, M., Salimov, A.A., 2009, On Kähler-Norden manifolds, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 119, 71-80.

[21] Ishihara, Y.K., 1973, Tangent and cotangent bundles, Differential Geometry, Pure and Applied Mathematics, No. 16. Marcel Dekker, Inc., New York, Pp:423.

[22] Kobayashi, S., Nomizu, K., 1963, Foundations of differential geometry I, Willey.

[23] Kobayashi, S., Nomızu, K., 1969, Foundations of differential geometry II, Willey.

[24] Kruchkovichy, G.I., 1970, Conditions for the integrability of a regular hypercomplex sturucture on a manifold, (Russian) Ukrain. geometr.sb.vyp., 9, 67-75.

[25] Kruchkovich, G.I., 1972, Hypercomplex sturucture on a manifold I, Tr. Sem. Vect. Tens. Anal., Moscow Univ., 16, 174-201.

[26] Magden, A., Salimov, A.A., 2001, Horizontal lifts of tensor fields to sections of the tangent bundle, translation in Russian Math.(ız. vuz).45, no.3, 73-76.

[27] Magden, A., Salimov, A.A., 2006, On application of the yano-ako operator, Acta Univ. palack. olomuc.fac. rerum natur. math.45, 135-141.

[28] Magden, A., Salimov, A.A., 2009, Complete lifts of tensor fields on a pure cross-section in the tensor bundle, J. Geom., 93, no:1-2, 128-138.

[29] Manev, M., 2002, Clases of real time-like hypersurfaces of a Kähler manifold with B-metric, J. Geom. 75(1-2), 113-122.

[30] Manev, M., Mekerov, D., 2008, On Lie groups as quasi- Kähler manifolds with Killing Norden metric, Adv. Geom., 8, 343-352.

[31] Matsushita, Y., 1991, Fields of 2-planes and two kinds of almost complex structure on compact four-dimensional manifolds, Math. Z., 207, 281-291.

[32] Matsushita, Y., 1993, Some remarks on fields of 2-planes on compact smooth 4-manifolds, in: Adv. St. İn Pure Math., Kinokuniya, Tokyo, 22, 153-167.

[33] Matsushita, Y., 2004, Four-dimensionel Walker metrics and symplectic structure, J. Geom. Phys., 52, 89-99.

[34] Matsushita, Y., 2005, Walker 4-manifolds with proper almost complex sturucture, J. Geom. Phys., 55, 385-398.

[35] Matsushita, Y., 2007, Counterexamples of compact type to the Goldberg conjecture and various version of the conjecture, (Proceedings of The 8th International Workshop on Complex Stuructures and Vector Fields, 2004), 1-12, World Scientific.

[36] Matsushıta, Y., Haze, S., Law, P.R., 2007, Almost Kähler-Einstein structure on 8-dimensional Walker manifolds, Monatsh. Math. 150, 41-48.

[37] Matsushita, Y., Law, P., 2001, Hitchin-Thorpe-type inequalites for pseudo-Riemannian 4-manifolds of metric signature $(++--)$, Geom. Ded., 87, 65-89.

[38] Mekerov, D., 1985, On some clases of almost B-manifolds, c.r. acad.bulgare sci., 38(5), 559-561.

[39] Nijenhuis, A., 1951, X_{n-1}-forming sets of eigenvectors, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser.A. 54, Indag. Math., 13, 200-212.

[40] Norden, A.P., 1960, On a certain class of four-dimensional A-spaces, Iz. Vuz, 4, 145-157.

[41] Oproiu, V., Papaghiuc, N., 2004, Some clases of almost anti-Hermitian stuructures on the tangent bundle, Mediterr. J. Math. 1(2), 269-282.

[42] Popovici, I., 1978, Contribution à l'étude des espaces à connexion constante, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 23, no. 8, 1211.

[43] Salimov, A.A., 1983, Almost analyticity of a Riemannian metric and integrability of a sturucture, Trudy Geom. Sem. Kazan. Univ. (Russian), 15, 72-78.

[44] Salimov, A.A., 1989, Quasiholomorphic mapping and a tensor bundle, Translation in Soviet Math.(Iz.VUZ), 33, no.12, 89-92.

[45] Salimov, A.A., 1992, Almost ψ-holomorphic tensors and their properties, Translation in Russian Acad. Sci.Dokl.Math., 45, no.3, 602-605.

[46] Salimov, A.A., 1994, A new method in the theory of liftings of tensor fields in a tensor bundle, Tranlation in Russian Math.(Iz.VUZ), 38, no.3, 67-73.

[47] Salimov, A.A., 1994, Generalized Yano-Ako operatör and the complete lift of tensor fields, Tensor (N.S.), 55, 142-146.

[48] Salimov, A.A., 1996, Lifts of poly-affinor structures on püre sections of a tensor bundle, Iz. Vuz, 40, 52-59.

[49] Salimov, A.A., 2009, Nonexistence of Para-Kähler-Norden warpedmetrics, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 6, no. 7, 1097-1102.

[50] Salimov, A.A., 2011, A note on the Goldberg conjecture of Walker manifolds, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 8, no.5, (to appear).

[51] Salimov, A.A., 2011, On operators associated with tensor fields, J. Geom., (to appear).

[52] Salimov, A.A., Agca, F., 2010, On para-Nordenian stuructures, Ann. Polon. Math., 99, no.2, 193-200.

[53] Salimov, A.A., Agca, F., 2011, Some properties of Sasakian metrics in cotangent bundles, Mediterr. J. Math., 8, no.2, 243-255.

[54] Salimov, A.A., Akbulut, K., 2009, A note on integrability of almost product riemannian stuructures, Arab. J. Sci. Eng. Sect. A. Sci., 34, no.1, 153-157.,

[55] Salimov, A.A., Akbulut, K., 2009, A note on a paraholomorphic Cheeger-Gromoll metric, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), 119, no.2, 187-195.

[56] Salimov, A.A., Aslanci, S., 2011, Applications of Φ-operators to the hypercomplex Geometry, Adv. Appl. Clifford Algebr., (to appear).

[57] Salimov, A.A., Gezer, A., Akbulut, K., 2009, Geodesics of Sasakian metrics on tensor bundles. Mediterr J. Math. 6, no.2, 135-147.

[58] Salimov, A.A., Gezer, A., 2011, On the geometry of the $(1-1)$-tensors bundle with Sasaki type metric, Chin. Ann. Math. Ser. B, 32, no.3, (to appear).

[59] Salimov, A.A., Iscan, M., Etayo, F., 2007, Paraholomorphic B-manifold and its properties, Topology Apply., 154, 925-933.

[60] Salimov, A.A., Iscan, M., 2009, On the geometry of B-manifolds,Conference on Differential Geometry dedicated to 80^{th} anniversary of Prof. V. V. Vishnevskii, Kazan. Gos. Univ. Ucen. ZAp., 151, kn.4, pp:231-239.

[61] Salimov, A.A., Iscan, M., 2010, On Norden-Walker 4-manifolds, Note Mat., 30, no.1, (to appear).

[62] Salimov, A.A., Iscan, M., 2010, Some properties of Norden-Walker metrics, Kodai Math. J., 33, no.2, 283-293.

[63] Salimov, A.A., Iscan, M., Akbulut, K., 2008, Some remarks concerning hyperholomorpic B-manifolds, Chin.Ann.Math.Ser.B, 29, no.6, 631-640.

[64] Salimov, A.A., Iscan, M., Akbulut, K., 2010, Noten on a para-Norden-Walker 4-manifolds, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 7, no.8, 1331-1347.

[65] Salimov, A.A., Magden, A., 1998, Complete lifts of tensor fields on a pure cross-section in the tensor bundle $T^1_q(M_n)$, Note Math., 18, no.1, 27-37.

[66] Sasaki, S., 1958, On the Differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., 10, 338-358.

[67] Sato, I., 1966, Almost analytic tensor fields in almost complex manifolds, Tensor(N.S.), 17, 105-119.

[68] Scehefers, G., 1893, Generalization of the foundations of ordinary complex functions, I., II., (Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Functionen.I.II. German) Leipz. Ber. XLV., 828-848.

[69] Shirokov, A.P., 1955, On a property of convariantly constant affinors, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 102, 461-464.

[70] Shirokov, A.P., 1966, On the question of pure tensors and invariant subspaces in manifolds with almost algebraic structure, (Russian)Kazan.Gos. Univ. Učen. Zap., 126, kn.1, 81-89.

[71] Shirokov, A.P., 2002, Spaces over algebras and their applications. Geometry, 7.J. Math. Sci.(New York), 108, no.2, 232-248.

[72] Slebodzinski, W., 1964, Contribution à la géoméerié différentielle d'un tenseur mixte de valence deux, Colloq. Math., 13, 49-59.

[73] Sluka, K., 2005, On the curvature of Kähler-Norden manifolds, J. Geom. Phys. 54(2), 131-145.

[74] Tachibana, S., 1960, Analytic tensor and its generalization, Tohoku Math. J., 12, 209-221.

[75] Tachibana, S., Koto, S., 1962, On almost-analytic functions, tensors and invariant subspaces, Tohoku Math. J., 14, 177-186.

[76] Vishnevskii, V.V., 1970, Affinor structures of spaces with affine connection, (Russian) Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika, 92, no.1, 12-23.

[77] Vishnevskii, V.V., 1972, Certain properties of differential geometric structures that are determined by algebras, (Russian) Visš Ped. Inst. Plovdiv Naučn. Trud., 10, no.1, 23-30.

[78] Vishnevskii, V.V., 1972, Affinor structures of manifolds as stuructures definable by algebras, (Survey article), (Russian) Commemoration volumes for Prof. Dr. Akitsugu Kawaguchi's seventieth birthday, Vol. III.,Tensor(N.S.), 26, 363-372.

[79] Vishnevskii, V.V., 1974, Stuructures of manifolds that are defined by non-regular representations of algebras, (Russian) Differential geometry, no.1, (Russian), pp:3-14, 135. Izdat. Saratov. Univ. Saratov.

[80] Vishnevski, V.V., 2002, Integrable affinor stuructures and their plural interpretations, J. Of Math. Sciences, 108, 151-187.

[81] Vishnevskii, V.V., Shirokov, A.P., Shurygın, V.V., 1985, Spaces over algebras. Kazan Gos. University, Kazan, Russian.

[82] Vranceanu, G., 1958, Spazi a connessione affine e le algebre di numeri ipercomplessi, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 12, 5-20.

[83] Walker, A.G., 1950, Canonical form for a Rimannian space With a paralel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford, 1, n.2, 69-79.

[84] Wilmore, T.J., 1968, Note on the Slebodzinski tensor of an almost-complex sturucture, J.London Math. Soc., 43, 321-322.

[85] Yano, K., Ako, M., 1968, On certain operators associated with tensor fields, Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Yasemin ATEŞOĞLU
Doğum Yeri	**:**	Bitlis
Doğum Tarihi	**:**	17.06.1988
Medeni Hali	**:**	Bekar
Bildiği Yabancı Dil	**:**	İngilizce
İletişim Bilgileri	**:**	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, `aforizma.23@gmail.com`
Lise	**:**	Talas Lisesi-2005
Lisans	**:**	Fırat Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Matematik Böl.-2009