

**T.C.**  
**ORDU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNVOLÜT- EVOLÜT EĞRİLERİNE AİT**  
**FRENET ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ**

**SELİN SİVAS**

**Bu tez,**  
**Matematik Anabilim Dalında**  
**Yüksek Lisans**  
**derecesi için hazırlanmıştır**

**ORDU-2014**

## TEZ ONAY


Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Selin SİVAS tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT danışmanlığında yürütülen “**İNVLÖT-EVOLÖT EĞRİLERİNE AİT FRENET ÇATISINA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ**” adlı bu tez, jürimiz tarafından **08 / 08 / 2014** tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT


Başkan: Doç. Dr. Selahattin MADEN  
Matematik, Ordu Üniversitesi

İmza: 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT  
Matematik, Ordu Üniversitesi

İmza: 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Evren ERGÜN  
Matematik, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

İmza: 

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun **22.08.2014** tarih ve **2014/322** sayılı kararı ile onaylanmıştır.

**22/08/2014**

  
Enstitü Müdürü  
Prof. Dr. Mehmet Fikret BALTA

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

İmza  
Selin SİVAS

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirimlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

# İNVOLÜT- EVOLÜT EĞRİLERİNE AİT FRENET ÇATISININA GÖRE SMARANDACHE EĞRİLERİ

**Selin SİVAS**

Ordu Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı, 2014  
Yüksek Lisans Tezi, 87 s.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT

Bu çalışma, altı bölüm halinde düzenlenmiştir. Giriş Bölümünde çalışmanın amacı ve konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Önceki Çalışmalar Bölümünde Smarandache eğrileri ile ilgili çalışmalara yer verildi. Genel Bilgiler Bölümünde Öklid uzayı ile ilgili bilgilerden söz edildi. Materyal ve Yöntem Bölümünde Öklid uzayında İnvolut-evolüt eğrileri ve Smarandache eğrileri ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Bulgular Bölümü çalışmamızın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada bir evolüt eğrisine ait involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları hesaplandı. Daha sonra bulunan bu eğrilikler evolüt eğrisine bağlı olarak ifade edildi. Son olarak elde edilen Smarandache eğrilerinin İnvolut-evolüt eğrilerine dahil olup olmadığı incelendi.

**Anahtar Kelimeler:** Öklid uzayı, İnvolut-evolüt eğrileri, Smarandache eğrisi.

## ABSTRACT

### SMARANDACHE CURVES OF INVOLUTE-EVOLUTE CURVE ACCORDING TO FRENET FRAME

Selin SIVAS

University of Ordu  
Institute for Graduate Studies in Science and Technology  
Department of Mathematics, 2014  
MSc. Thesis, 87 p.

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Süleyman ŞENYURT

This study consist six fundamental chapters. In the introduction chapter, the aim of study and the reasons why this subject is interested are given. The next chapter is covered with literature review of Smarandache curve. In general formation chapter is included with some information about Euclidean space. The basic concepts of Involute-evolute curves on Euclidean space are given in the material and method chapter.

The Findings chapter is the original part of the study. Curvature and torsion of Smarandache curves are calculated. This Smarandache curves are obtain that Frenet vectors of involute curve incidental to a evolute curve and unit Darboux vector is taken position vector. Then these curvatures which are depends on evolute curve are explained. Finally, these Smarandache curves are include whether Involute-evolute curves researched.

**Key Words:** Euclidean space, Involute-evolute curves, Smarandache curves.

## TEŞEKKÜR

Tüm alıőmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu aan değerli hocam Sayın Yrd. Do. Dr. Süleyman ŞENYURT' a en samimi duygularım ile teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalıőmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölüm Baőkanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR, Matematik Bölümü đretim yeleri Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN, Sayın Doç. Dr. Erhan SET, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdal NLYOL, Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŐ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ, Sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Seher ASLANCI hocalarıma çok teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b>	I
<b>ABSTRACT</b>	II
<b>TEŞEKKÜR</b>	III
<b>İÇİNDEKİLER</b>	IV
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b>	V
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b>	VI
<b>1. GİRİŞ</b>	1
<b>2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR</b>	2
<b>3. GENEL BİLGİLER</b>	4
3.1 Öklid Uzayı	4
<b>4. MATERYAL VE YÖNTEM</b>	15
4.1 Öklid Uzayında İnvolut-Evolüt Eğrileri	15
4.2 Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri	25
<b>5. BULGULAR</b>	48
5.1 $T^*N^*$ Smarandache Eğrisi	48
5.2 $N^*B^*$ Smarandache Eğrisi	54
5.3 $T^*B^*$ Smarandache Eğrisi	59
5.4 $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi	64
5.5 $N^*C^*$ Smarandache Eğrisi	69
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER</b>	83
6.1 Sonuçlar	83
6.2 Öneriler	84
<b>KAYNAKLAR</b>	85
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	87

## ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Şekil No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Darboux vektörü	9
Şekil 4.1. $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi	44
Şekil 4.2. $TN$ -Smarandache eğrisi	45
Şekil 4.3. $NB$ -Smarandache eğrisi	45
Şekil 4.4. $TNB$ -Smarandache eğrisi	46
Şekil 4.5. $TB$ -Smarandache eğrisi	46
Şekil 4.6. $NC$ -Smarandache eğrisi	47
Şekil 5.1. $\alpha = \alpha(s)$ helis eğrisi	79
Şekil 5.2. $T^*N^*$ - Smarandache eğrisi	80
Şekil 5.3. $N^*B^*$ - Smarandache eğrisi	80
Şekil 5.4. $T^*N^*B^*$ - Smarandache eğrisi	81
Şekil 5.5. $T^*B^*$ - Smarandache eğrisi	81
Şekil 5.6. $N^*C^*$ - Smarandache eğrisi	82



## SİMGELER VE KISALTMALAR

$E^3$  : 3- boyutlu Öklid uzayı

$E_1^3$  : 3- boyutlu Lorentz uzayı

$S^2$  : Öklid uzayında birim Küre

$\tilde{S}^2$  : Dual uzayında birim Küre

$\| \cdot \|$  : Norm

$T$  : Teğet vektör

$N$  : Aslinormal vektör

$B$  : Binormal vektör

$C$  : Birim Darboux vektörü

$W$  : Darboux vektörü

$\kappa$  : Eğrilik

$\tau$  : Burulma

$\beta_1$  :  $T^*N^*$ -Smarandache eğrisi

$\beta_2$  :  $N^*B^*$ -Smarandache eğrisi

$\beta_3$  :  $T^*B^*$ -Smarandache eğrisi

$\beta_4$  :  $T^*N^*B^*$ -Smarandache eğrisi

$\beta_5$  :  $N^*C^*$ -Smarandache eğrisi

## 1.GİRİŞ

Diferansiyel geometride eğriler üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır ve hala da yapılmaya devam edilmektedir. Özellikle iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak birçok yeni açılımlar elde edilmiştir. Daha sonra bu açılımlar Minkowski uzayı, Galileo uzayı, Heisenberg uzayı ve Dual uzay gibi bir çok uzaylarda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve pek çok yeni karakterizasyonlar elde edilmiştir. Üzerinde en çok araştırma yapılan eğriler İvolüt-evolüt eğrileri, Bertrand eğrileri ve Mannheim eğrileridir. İvolüt-evolüt eğrileri üzerine bu zamana kadar pek çok çalışma yapılmıştır ve bu çalışmalardan bazıları [7],[9],[10],[16], [18],[19].

2008 yılında M. Turgut ve S. Yılmaz tarafından yapılan bir çalışmada, Smarandache eğrilerinin bir tanımı verilmiştir, [14]. Daha sonra bu eğriler farklı uzaylarda ele alınarak incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir, [1],[2],[3],[4], [5],[8],[11].

Bu çalışmada  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin bir involütü olmak üzere,  $\alpha^*$  involüt eğrisinin  $T^*, N^*, B^*$  Frenet vektörleri ile  $C^*$  birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığından bu vektörler tarafından oluşturulan,

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonları hesaplandı. Daha sonra bu eğrilikler  $\alpha$  evolüt eğrisinin eğrilik ve torsiyonları cinsinden ifade edildi.

## 2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Turgut ve Yılmaz, "*Smarandache Curves in Minkowski spacetime*" isimli çalışmada, Minkowski uzayında Smarandache eğrisinin tanımını ifade etmişlerdir.  $E_1^4$  de  $TB_2$  Smarandache eğrileri şeklinde adlandırılan eğrilerin özel bazı durumlarını incelemişlerdir ve bu eğrilerin Frenet elemanlarını hesaplamışlardır. Bu yöntemle  $E_1^4$  uzayında bir başka ortonormal çatı elde etmişlerdir, [14].

Ali, T.A., "*Special Smarandache Curves in the Euclidean Space*" isimli çalışmada, Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini tanımlayarak bu eğrilere ait Frenet-Serret invaryantlarının özel durumlarını çalışmıştır, [1].

Taşköprü ve Tosun, "*Smarandache Curves According to Sabban Frame on  $S^2$* " isimli çalışmada,  $S^2$  birim küresi üzerinde oluşan Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemişlerdir ve bu eğrilerin karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir, [12].

Şenyurt ve Çalışkan, "*Smarandache Curves In terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves*" isimli çalışmada, küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlardır. Bunun yanında da Smarandache eğrilerinin bazı karakterizasyonları ile ilgili sonuçlar vermişlerdir, [4].

Kahraman, Önder ve Uğurlu, "*Dual Smarandache Curves and Smarandache Ruled Surfaces*" isimli çalışmada, dual Darboux çatıyı ele alarak birim dual küre  $\tilde{S}^2$  üzerinde dual Smarandache eğrilerini tanımlamışlardır ve dual küresel eğri (regle yüzey) ve onun dual Smarandache eğrisi (Smarandache regle yüzey) arasında bağıntılar elde etmişlerdir, [8].

Bektaş ve Yüce, "*Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3- Space*" isimli çalışmada, Öklid uzayında Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerine ait bazı sonuçlar vermişlerdir, [2].

Çetin, Tunçer ve Karacan, “*Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space*” isimli çalışmada, Öklid uzayında Bishop çatısına göre özel Smarandache eğrilerini araştırmışlardır ve bu eğrilerin bazı diferansiyel geometrik özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca Smarandache eğrisine ait oskülatör kürelerinin merkezini ve kürelerin eğriliği ile ilgili sonuçlar bulmuşlardır,[5].

Bayrak, Bektaş ve Yüce, “*Special Smarandache Curves in  $E_1^3$* ” isimli çalışmada, Minkowski uzayında regüler bir eğriye ait Frenet vektörleri tarafından oluşturulan Smarandache eğrilerinin bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir,[3].

Şenyurt ve Sivas, “*Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama*” isimli çalışmada, bir  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektörleri  $T, N, B$  ve birim Darboux vektörü  $C$  olmak üzere  $NC$  - Smarandache eğrisini ifade ederek bu eğriyle birlikte  $NB$  -Smarandache ve  $TNB$  - Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonlarını hesaplamışlardır,[11].

### 3. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

#### 3.1. Öklid Uzayı

**Tanım 3.1.1:**  $A$  boş olmayan bir cümle,  $V$  de  $\mathfrak{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $f : A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa  $A$  ya  $V$  ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

$$A_1 : \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$$A_2 : \forall P \in A, \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek  $Q \in A$  noktası vardır.

**Tanım 3.1.2:**  $V$ ,  $A$  ile birleşen bir afin uzay olsun.  $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$  noktaları için  $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$  cümlesi  $V$  nin bir bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n+1)$ -lisine  $A$  afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada  $P_0$  noktasına çatının başlangıç noktası ve  $P_i, 1 \leq i \leq n$ , noktalarına da çatının birim noktaları denir.  $\text{boy}V = n$  ise  $A$  ya  $n$ -boyutlu bir afin uzay denir.

**Tanım 3.1.3:**  $V$ ,  $A$  ile birleşen bir afin uzay olsun.

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, bu fonksiyona bir iç çarpım fonksiyonu denir:  $\forall x, y, z \in V$  ve  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,$$

iii) Pozitif Tanımlılık (kararlılık) Aksiyomu;

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}.$$

**Tanım 3.1.4:** Reel standart afin uzayı  $\mathbb{R}^n$  olmak üzere,  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$  için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma  $\mathbb{R}^n$  de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpım denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $\mathbb{R}^n$  vektör uzayı ile birleşen afin uzayına  $n$ -boyutlu standart Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir.

**Örnek 3.1.1:**  $X, Y \in \mathbb{R}^2$  olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

**Tanım 3.1.5:**  $X \in E^n$  noktasının afin koordinat sistemine göre koordinatları  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun.  $x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ , fonksiyonuna  $E^n$  nin  $i$ -yinci koordinat fonksiyonu denir.

$$\mathbf{Tanım 3.1.6: } d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}, d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan  $d$  fonksiyonuna  $E^n$  Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve  $d(X, Y) \in \mathbb{R}$  sayısına da  $X$  ile  $Y$  noktaları arasındaki uzaklık denir.

**Tanım 3.1.7:**  $\mathbb{R}^n$  iç çarpım uzayı ile birleşen Öklid uzayı  $E^n$  olmak üzere,  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\} \in E^n$  nokta  $(n+1)$ -lisi için,  $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$  cümlesi  $E^n$  nin bir

ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  cümlesine  $E^n$  de bir Öklid çatı veya dik çatı denir.

**Tanım 3.1.8:**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  diferensiyellenebilir fonksiyona  $E^n$  de bir eğri denir. Burada  $I$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı ve  $t \in I$  değişkenine de  $\alpha$  eğrisinin parametresi denir.

**Tanım 3.1.9:**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  diferensiyellenebilir bir eğri olsun.

$$\|\alpha'\|: I \rightarrow \mathbb{R}, \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı  $\|\alpha'\|$  fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu,  $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$  sayısına  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(t)$  noktasındaki skaler hızı,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left( \frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right) \Big|_t$$

vektörüne de  $\alpha$  eğrisinin hız vektörü denir.

**Tanım 3.1.10:**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  eğrisi için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise eğriye birim hızlı eğri,  $s \in I$  parametresine de eğrinin yay parametresi denir.

**Tanım 3.1.11:**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  bir eğri ve  $a, b \in I$  için

$$s = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \tag{3.1.1}$$

reel sayısına  $\alpha(a)$  ile  $\alpha(b)$  noktaları arasındaki yay uzunluğu denir.

**Tanım 3.1.12:**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$  bir eğri ve  $\phi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(r)}\}$  cümlesi lineer bağımsız olsun.

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\phi\}, \quad k > r$$

olmak üzere  $\phi$  cümlesinden Gram Schmidt ortogonalleştirme yöntemi ile elde edilen  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  ortonormal sistemine  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Serret Frenet  $r$ -ayaklısı,  $\forall V_i, 1 \leq i \leq r$ , vektörüne de Serret Frenet vektörü denir.

**Teorem 3.1.1:**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı;

1)  $s \in I$  yay parametresi ise

$$\begin{cases} V_1(s) = \alpha'(s) \\ V_2(s) = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s) \\ V_3(s) = V_1(s) \times V_2(s) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

2)  $s \in I$  yay parametresi değilse

$$\begin{cases} V_1(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|} \alpha'(s) \\ V_2(s) = V_3(s) \times V_1(s) \\ V_3(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} (\alpha'(s) \times \alpha''(s)) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

şeklinde verilir, [7].

**Tanım 3.1.13:**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  olsun.

$$\begin{aligned} k_i : I &\rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin  $i$ -yinci eğrilik fonksiyonu,  $\forall s \in I$  için  $k_i(s) \in \mathbb{R}$  sayısına da  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki  $i$ -yinci eğriliği denir.



**Teorem 3.1.2:**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ,  $i$ -yinci eğriliği  $k_i(s)$  olsun. Bu durumda Frenet vektörleri ile bunların türev vektörleri arasında,

$$\begin{cases} V_1'(s) = k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), & 1 \leq i < r \\ V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_r(s) \end{cases}$$

bağıntısı vardır, [7].

$n=3$  özel halinde  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3-ayaklısı  $\{T, N, B\}$  ile gösterilir. Burada  $T$  ye teğet vektör,  $N$  ye aslinormal vektör ve  $B$  ye de binormal vektör denir.  $\alpha$  eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri de, sırasıyla,  $\kappa$  ve  $\tau$  ile gösterilir ve  $\kappa$  ya eğrinin eğriliği,  $\tau$  ya da burulması adı verilir. Bu halde Frenet formülleri,

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

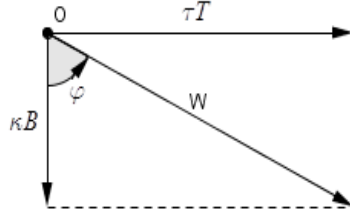
şeklinde olur [7].

Diğer taraftan, bir  $\alpha$  eğrisi üzerinde  $\alpha(s)$  noktası eğriyi çizerken bu noktadaki  $\{T, N, B\}$  Frenet 3-ayaklısı her  $s$  anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Darboux (ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = N \times N',$$

$$W = \tau T + \kappa B \quad (3.1.5)$$

şeklinde olur ve bu vektöre Darboux vektörü adı verilir ( Şekil 3.1 ).



**Şekil 3.1.** Darboux vektörü

$W$  ile  $B$  vektörleri arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse şekilden,

$$\sin \varphi = \frac{\tau}{\|W\|} \quad , \quad \cos \varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \quad (3.1.6)$$

yazılır.  $W$  Darboux vektörü yönündeki birim vektör  $C$  ile gösterilirse

$$C = \frac{\tau}{\|W\|} T + \frac{\kappa}{\|W\|} B$$

olur. Burada  $\kappa$  ile  $\tau$  nun yerine (3.1.4) deki karşılıkları yazılırsa

$$C = \sin \varphi T + \cos \varphi B \quad (3.1.7)$$

şeklinde bulunur, [7].

**Tanım 3.1.14:**  $\alpha : I \rightarrow E^n$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki 1. ve 2. eğrilikleri sırasıyla  $k_1(s)$  ve  $k_2(s)$  olsun.

$$H_1 : I \rightarrow IR$$

$$s \rightarrow H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı  $H_1$  fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin 1-inci harmonik eğriliği denir.

**Tanım 3.1.15:**  $\alpha: I \rightarrow E^n$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki hız vektörü, sabit bir  $U$  vektörü ile sabit açı yapıyorsa eğriye bir eğilim çizgisi,  $S_p\{U\}$  ya da eğilim çizgisinin eğilim eksenini denir.

**Teorem 3.1.3:**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi bir eğilim çizgisidir  $\Leftrightarrow H_1(s) = sbt.$ , [7].

**İspat:** " $\Rightarrow$ " Kabul edelim ki  $\alpha$  bir eğilim çizgisi olsun.  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  olmak üzere, eğilim çizgisi tanımına göre

$$\langle T(s), U \rangle = \cos \theta$$

olur. Bu ifadenin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\langle T'(s), U \rangle = 0,$$

$$\kappa \langle N(s), U \rangle = 0$$

bulunur. Bu durumda  $N \perp U$  olur.  $U \in S_p\{T(s), B(s)\}$  olduğundan

$$U = aT(s) + bB(s)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade sırasıyla  $T$  ve  $B$  ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle U, T(s) \rangle &= a = \cos \theta \\ \langle U, B(s) \rangle &= b = \sin \theta \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

olur. (3.1.6) bağıntısından

$$U = \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\langle N(s), U \rangle = 0$$

ifadesinin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle N'(s), U \rangle + \langle N(s), U' \rangle = 0,$$

$$\langle \kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s), U \rangle = 0,$$

$$\kappa(s)\langle T(s), U \rangle - \tau(s)\langle B(s), U \rangle = 0,$$

$$\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0,$$

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \tan\theta,$$

$$H_1(s) = \tan\theta.$$

elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Kabul edelim ki  $\forall s \in I$  için  $H_1(s) = \tan\theta$  olsun. İddia ediliyor ki  $\alpha$  bir eğilim çizgisidir.

$H_1(s) = \tan\theta$  ise  $H_1(s) = \tan\theta$  alınabilir. Buradan

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta\kappa(s) - \sin\theta\tau(s) = 0$$

olur. Şimdi

$$U = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$$

vektörünü tanımlayalım. Açının sabit olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa

$$U' = \cos\theta T' + \sin\theta B',$$

$$U' = (\cos \theta \kappa(s) - \sin \theta \tau(s)) N(s)$$

olur ve norm alınırsa

$$\|U'\| = 0 \Rightarrow U = sbt.$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), U \rangle &= \langle T(s), U \rangle \\ &= \langle T(s), \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s) \rangle \\ &= \cos \theta = sbt. \end{aligned}$$

olur ki bu da  $\alpha$  bir eğilim çizgisi olması demektir.

**Teorem 3.1.4:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart  $\tau = 0$  olmasıdır, [7].

**İspat:** " $\Rightarrow$ " Kabul edelim ki  $\alpha$  birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda  $\forall s \in I$  için  $\alpha(s)$  noktalarının tümü bir  $E$  düzlemi içinde bulunur. Düzlemin normali  $q$ , düzlem üzerinde herhangi bir nokta  $p$  olsun. Bu durumda

$$\langle \alpha(s) - p, q \rangle = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\langle \alpha'(s), q \rangle + \langle \alpha(s) - p, q' \rangle = 0,$$

$$\langle \alpha'(s), q \rangle = 0$$

olur ve tekrar türev alınırsa

$$\langle \alpha''(s), q \rangle = 0$$

bulunur. Buradan  $q$  vektörünün  $T$  ve  $N$  ye dik olduğu görülür. Bu durumda  $q$  vektörü  $B$  ye paralel olur. Dolayısıyla

$$B(s) = \pm \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde alınabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$B' = 0$$

bulunur ve

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

eşitliğinden

$$\tau(s) = 0$$

elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Kabul edelim ki  $\tau(s) = 0$  olsun.  $B'(s) = -\tau(s)N(s)$  idi. Buradan

$$B'(s) = 0,$$

$$B(s) = c = sbt.$$

olur. Şimdi

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow F(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle$$

fonksiyonu tanımlansın.  $s = 0$  ise  $F(0) = 0$  dır.  $F$  nin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$F'(s) = \langle \alpha'(s), B(s) \rangle + \langle \alpha'(s) - \alpha'(0), B'(s) \rangle$$

$$= \langle T(s), B(s) \rangle + \langle T(s), -\kappa(s)N(s) \rangle$$

$$= 0,$$

$$F(s) = sbt.$$

Buna göre

$$\langle \alpha(s) - \alpha(0), B(s) \rangle = 0$$

eşitliği,  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(0)$  noktasından geçen ve  $B$  vektörüne dik olan düzlem içinde olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 3.1.5:**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart  $\kappa=0$  olmasıdır, [7].

**İspat:**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin eğriliği

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

dir. Bu durumda

$$\kappa(s) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha''(s)\| = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha''(s) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(s) = b,$$

$$\Leftrightarrow \alpha(s) = bs + c, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

## 4. MATERYAL VE YÖNTEM

### 4.1 İnvölüt-Evolüt Eğrileri

**Tanım 4.1.1:** Birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi verilsin.  $\forall s \in I$  için  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki teğet vektörü  $\alpha^*(s)$  noktasından geçiyor ve bu noktadaki teğet vektöre dik oluyorsa  $\alpha$  eğrisine evolüt,  $\alpha^*$  eğrisine de  $\alpha$  eğrisinin involütü denir ve  $(\alpha, \alpha^*)$  şeklinde gösterilir.

Bu tanıma göre  $\alpha$  eğrisinin teğet vektörü  $T(s)$ ,  $\alpha^*$  eğrisinin teğet vektörü  $T^*(s)$  ile gösterilirse

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$$

olur, [7].

**Teorem 4.1.1:**  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin bir involütü ise bu eğriler arasında

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (-s + c)T(s) \quad (4.1.1)$$

bağıntısı vardır, [7].

**İspat:** İnvölüt eğri tanımından  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s)$  şeklinde verilebilir.

Buradan türev alınırsa

$$(\alpha^*)'(s) = (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s)$$

bulunur.  $\alpha^*$  eğrisi  $\alpha$  eğrisinin bir involütü olduğundan

$$\langle (\alpha^*)'(s), T(s) \rangle = 0$$

olur. Burada  $(\alpha^*)'(s)$  yerine yukarıdaki eşiti yazılırsa



$$1 + \lambda'(s) = 0$$

ve buradan

$$\lambda(s) = -s + c$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.2:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü ise  $\alpha(s)$  ve  $\alpha^*(s)$  noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \alpha^*(s)) = |c - s|, \quad c = sbt, \quad \forall s \in I \quad (4.1.2)$$

dır, [7].

**İspat:**  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s)$  ifadesinden norm alırsak

$$\|\alpha^*(s) - \alpha(s)\| = \|\lambda\|$$

olur. Burada

$$d(\alpha(s), \alpha^*(s)) = \|\alpha^*(s) - \alpha(s)\|$$

olduğundan

$$d(\alpha(s), \alpha^*(s)) = |c - s|, \quad c \in IR$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.3:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü olsun.  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  ile gösterilirse bu çatılar arasında

$$\begin{cases} T^* = N \\ N^* = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \\ B^* = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B \end{cases} \quad (4.1.3)$$

bağıntısı vardır, [9].

**İspat:** (4.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (\alpha^*)'(s) &= \alpha'(s) - T(s) + (-s + c)T'(s) \\ &= (-s + c)\kappa(s)N(s) \end{aligned}$$

dir. Buradan norm alınır

$$\left\| (\alpha^*)'(s) \right\| = |(-s + c)\kappa(s)|$$

olur.

$$T^*(s) = \frac{1}{\left\| (\alpha^*)'(s) \right\|} (\alpha^*)'(s)$$

olduğundan

$$T^*(s) = \frac{(-s + c)\kappa(s)}{|(-s + c)\kappa(s)|} N(s)$$

elde edilir. Bu eşitlikte  $T^*$  ve  $N$  vektörleri birim uzunlukta vektörler olduğundan

$$T^* = N \text{ veya } T^* = -N$$

olmak zorundadır. Bundan sonraki işlemler

$$T^* = N$$

olduğunu varsayılarak yapılacaktır.  $IR$  üstündeki koordinat fonksiyonunu  $x$  ile gösterilmek üzere  $\forall s \in I$  için  $x(s) = s$  dir. Bu durumda

$$(\alpha^*)'(s) = (-s + c)\kappa(s)N(s)$$

eşitliği

$$(\alpha^*)' = (-x + c)\kappa N$$

şekline dönüşür.  $\alpha^*$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri, sırasıyla,

$$(\alpha^*)'' = [ -(-x + c)\kappa^2 ]T + [ -\kappa + (-x + c)\kappa' ]N + [ (-x + c)\kappa\tau ]B$$

ve

$$\begin{aligned} (\alpha^*)''' &= [ 2\kappa^2 - 3(-x + c)\kappa\kappa' ]T \\ &+ [ -(-x + c)\kappa^3 - 2\kappa' + (-x + c)\kappa'' - (-x + c)\kappa\tau^2 ]N \\ &+ [ -2\kappa\tau + 2(-x + c)\kappa'\tau + (-x + c)\kappa\tau' ]B \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

olur. Buradan

$$(\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' = (-x + c)^2 \kappa^2 \tau T + (-x + c)^2 \kappa^3 B \quad (4.1.5)$$

şeklinde bulunur. Norm alınırsa

$$\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\| = (-x + c)^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

olur.

$$B^* = \frac{(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''}{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|}$$

olduğundan

$$B^* = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

bulunur.  $N^* = B^* \times T^*$  olduğundan

$$N^* = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.4:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü olsun.  $\alpha$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa$  ve  $\tau$ ,  $\alpha^*$  eğrisinin eğrilikleri de  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  ise bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \kappa^* = \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)}(s)}{(c-s)\kappa(s)}, & \lambda = c-s \\ \tau^* = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(s)}{(c-s)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)(s)} \end{cases} \quad (4.1.6)$$

bağıntısı vardır, [7].

**İspat:**  $\kappa^*(s) = \frac{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|}{\|(\alpha^*)'\|^3}$  idi. Burada  $(\alpha^*)'$  ve  $(\alpha^*)''$  türevleri yerine yazılırsa

$$\kappa^*(s) = \frac{(-s+c)^2 \kappa^2(s) \sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)(s)}}{|(-s+c)\kappa(s)|^3},$$

$$\kappa^*(s) = \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)(s)}}{|(-s+c)\kappa(s)|}$$

bulunur.

$$\tau^*(s) = \frac{\langle (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'', (\alpha^*)''' \rangle}{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|^2},$$

dır. (4.1.4) ve (4.1.5) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\langle (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'', (\alpha^*)''' \rangle = (-x+c)^3 \kappa^3 (\kappa\tau' - \kappa'\tau)$$

olur.  $(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''$  ifadesinin normunu alırsak

$$\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\| = (-x+c)^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

bulunur. Buradan da

$$\tau^*(s) = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(s)}{(-s+c)\kappa(\kappa^2 + \tau^2)(s)}$$

olur.

**Teorem 4.1.5:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin involütü ve Frenet çatıları, sırasıyla,  $\{T, N, B\}$  ve  $\{T^*, N^*, B^*\}$  olsun.  $B$  binormal vektörü ile  $W$  Darboux vektörü arasındaki açı  $\varphi$  ile gösterilirse Frenet çatıları arasında

$$\begin{cases} T^* = N \\ N^* = -\cos \varphi T + \sin \varphi B \\ B^* = \sin \varphi T + \cos \varphi B \end{cases} \quad (4.1.7)$$

bağıntısı vardır, [16].

**İspat:** (4.1.1) bağıntısının  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$(\alpha^*)' = T^* \frac{ds^*}{ds} = \lambda \kappa N \quad (4.1.8)$$

olur. Buradan norm alınırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \lambda \kappa$$

bulunur. Bu netice yukarıda yerine yazılırsa

$$T^* = N \quad (4.1.9)$$

elde edilir.  $(\alpha^*)' = \lambda \kappa N$  ifadesinin tekrar türevi alınırsa

$$(\alpha^*)'' = -\lambda \kappa^2 T + (\lambda \kappa - \kappa) N + \lambda \kappa \tau B$$

ve vektörel çarpımdan

$$(\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' = \lambda^2 \kappa^2 \tau T + \lambda^2 \kappa^3 B$$

olur. Bu ifade  $B^* = \frac{(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''}{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|}$  de yerine yazılırsa

$$B^* = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} B$$

bulunur. (3.1.6) denklemleri kullanılarak

$$B^* = \sin \varphi T + \cos \varphi B \quad (4.1.10)$$

olur.  $N^* = B^* \times T^*$  olduğundan

$$N^* = -\cos \varphi T + \sin \varphi B \quad (4.1.11)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.6:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü ve Darboux vektörleri de, sırasıyla,  $W$  ve  $W^*$  ile gösterilirse bu vektörler arasında

$$W^* = \frac{1}{\kappa(c-s)}(W + \varphi'N) \quad (4.1.12)$$

bağıntısı vardır, [16].

**İspat:** (3.1.5) bağıntısına benzer olarak  $W^*$  vektörü

$$W^* = \tau^* T^* + \kappa^* B^*$$

şeklinde yazılır. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  eğrilikleri ile  $T^*$  ve  $B^*$  vektörlerinin yerine (4.1.6), (4.1.9) ve (4.1.10) den karşılıkları yazılırsa

$$W^* = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\kappa(c-s)}(\sin \varphi T + \cos \varphi B) + \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)}N,$$

$$W^* = \frac{\tau}{\kappa(c-s)}T + \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa^2}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)}N + \frac{\kappa}{\kappa(c-s)}B,$$

$$W^* = \frac{1}{\kappa(c-s)}(\tau T + \kappa B + \varphi'N)$$

olur. (3.1.5) bağıntısı burada yerine yazılırsa

$$W^* = \frac{1}{\kappa(c-s)}(W + \varphi'N)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.7:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü ve birim Darboux vektörleri, sırasıyla,  $C$  ve  $C^*$  olsun. Bu vektörler arasında

$$C^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}} N + \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}} C \quad (4.1.13)$$

bağıntısı vardır, [16].

**İspat:**  $B^*$  binormal vektörü ile  $W^*$  Darboux vektörü arasındaki açı  $\varphi^*$  olmak üzere (3.1.7) bağıntısından

$$C^* = \sin \varphi^* T^* + \cos \varphi^* B^* \quad (4.1.14)$$

yazılır.  $\sin \varphi^*$  ve  $\cos \varphi^*$  değerleri (3.1.6) bağıntısına benzer olarak

$$\begin{cases} \kappa^* = \|W^*\| \cos \varphi^* \\ \tau^* = \|W^*\| \sin \varphi^* \end{cases} \quad (4.1.15)$$

şeklinde olur. Burada (4.1.6) ve (4.1.12) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\begin{cases} \sin \varphi^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}} \\ \cos \varphi^* = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}}. \end{cases} \quad (4.1.16)$$

olur. Bulunan bu ifade (4.1.14) de yerine yazılırsa  $C^*$  vektörü



$$C^* = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}} N + \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\sqrt{\varphi'^2 + \kappa^2 + \tau^2}} C$$

şeklinde elde edilir.

**Teorem 4.1.8:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü olmak üzere  $\alpha$  ve  $\alpha^*$  eğrisinin eğrilikleri, sırasıyla,  $\kappa, \tau$  ve  $\kappa^*, \tau^*$  olsun.  $\alpha$  eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart  $\alpha^*$  eğrisinin düzlemsel olmasıdır, [16].

**İspat:**  $\alpha$  eğrisi bir helis eğrisi olsun. Teorem 3.1.3 den

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit},$$

$$\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0 \tag{4.1.17}$$

dır. Diğer taraftan (4.1.6) bağıntısından

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa(c-s)(\kappa^2 + \tau^2)}}{\frac{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}}{\kappa(c-s)}},$$

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.1.18}$$

olur.  $\left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' = 0$  olduğundan

$$\tau^* = 0$$

bulunur. Bu da  $\alpha^*$  eğrisinin düzlemsel olması demektir.

**Sonuç 4.1.1:**  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü olsun. Eğer  $\alpha$  evolüt eğrisi bir helis ise

i)  $\alpha^*$  involüt eğrisinin  $W^*$  Darboux vektörü ile  $B^*$  Frenet vektörleri lineer bağımlıdır.

ii)  $(\alpha, \alpha^*)$  eğrilerinin Darboux vektörü yönündeki birim vektörleri aynıdır, [16].

## 4.2. Öklid Uzayında Smarandache Eğrileri

**Tanım 4.2.1:** Konum vektörü, herhangi bir  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir, [14].

Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

**Tanım 4.2.2:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun. Konum vektörü

$$\beta(s) = \frac{x(s)T(s) + y(s)N(s) + z(s)B(s)}{\sqrt{x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2}} \quad (4.2.1)$$

olan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir, [11].

**Tanım 4.2.3:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.  $TN$ -Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$$

şeklinde tanımlanır, [1].

**Teorem 4.2.1:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $TN$ -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{TN}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{TN}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\chi_1^2 + \nu_1^2 + \ell_1^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2},$$

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2}\left[(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa\bar{\ell}_1 + \tau\bar{\chi}_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(\bar{\nu}_1 - \bar{\chi}_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa\bar{\ell}_1 - \tau\bar{\nu}_1)\right]}{\left[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa\tau'\right]^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \chi_1 = -\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) - \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau') \\ \nu_2 = -\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) - \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau') \\ \ell_3 = \kappa\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2\kappa(\tau\kappa' - \kappa\tau') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_1 = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \bar{\nu}_1 = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \bar{\ell}_1 = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

dir, [1].

**İspat:**  $\beta_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + N)$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{TN}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TN}} \frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \frac{(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TN}}}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^2 + \tau^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{TN}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TN}}(s) = \frac{(-\kappa T + \kappa N + \tau B)}{\sqrt{2\kappa^2 + \tau^2}} \quad (4.2.2)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \chi_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + \tau^2) + \tau(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \\ \nu_1 = -[\kappa^2(2\kappa^2 + 3\tau^2) + \tau(\tau^3 - \tau\kappa' + \kappa\tau')] \\ \ell_1 = \kappa[\tau(2\kappa^2 + \tau^2) - 2(\tau\kappa' - \kappa\tau')] \end{cases}$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{TN}}$  türevi,

$$T'_{\beta_{TN}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2} (\chi_1 T + \nu_1 N + \ell_1 B) \quad (4.2.3)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{TN}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{TN}}$  ile gösterilirse (4.2.3) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{TN}}$  eğriliği,

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \|T'_{\beta_{TN}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{TN}} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\chi_1^2 + \nu_1^2 + \ell_1^2}}{(2\kappa^2 + \tau^2)^2}$$

olur.  $\beta_{TN}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{TN}}$  ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{T'_{\beta_{TN}}}{\|T'_{\beta_{TN}}\|},$$

$$N_{\beta_{TN}} = \frac{\chi_1 T + \nu_1 N + \ell_1 B}{\sqrt{\chi_1^2 + \nu_1^2 + \ell_1^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{TN}} = T_{\beta_{TN}} \times N_{\beta_{TN}}$  olduğundan  $B_{\beta_{TN}}$  vektörü

$$B_{\beta_{TN}} = \frac{(\kappa \ell_1 - \tau \nu_1) T + (\kappa \ell_1 + \tau \chi_1) N + (-\kappa \nu_1 - \kappa \chi_1)}{\sqrt{(\chi_1^2 + \nu_1^2 + \ell_1^2)(2\kappa^2 + \tau^2)}}$$

olur.  $\beta_{TN}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TN} = \frac{-(\kappa^2 + \kappa') T + (\kappa' - \kappa^2 - \tau^2) N + (\kappa \tau + \tau') B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta'''_{TN} = \frac{\bar{\chi}_1 T + \bar{\nu}_1 N + \bar{\ell}_1 B}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Burada  $\bar{\chi}_1$ ,  $\bar{\nu}_1$  ve  $\bar{\ell}_1$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_1 = \kappa^3 + \kappa(\tau^2 - 3\kappa') - \kappa'' \\ \bar{\nu}_1 = -\kappa^3 - \kappa(\tau^2 + 3\kappa') - 3\tau\tau' + \kappa'' \\ \bar{\ell}_1 = -\kappa^2\tau - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{TN}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{TN}}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_{TN}}$  torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\langle \beta'_{TN} \times \beta''_{TN}, \beta'''_{TN} \rangle}{\|\beta'_{TN} \times \beta''_{TN}\|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{TN}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{TN}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TN}} = \frac{\sqrt{2} \left[ (\kappa^2 + \tau^2 - \kappa')(\kappa \bar{\ell}_1 + \tau \bar{\chi}_1) + \kappa(\kappa\tau + \tau')(\bar{v}_1 - \bar{\chi}_1) + (\kappa^2 + \kappa')(\kappa \bar{\ell}_1 - \tau \bar{v}_1) \right]}{\left( \tau(2\kappa^2 + \tau^2) + \kappa\tau' - \kappa'\tau \right)^2 + (\kappa'\tau - \kappa\tau')^2 + (2\kappa^3 + \kappa\tau^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.4:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.  $NB$  - Smarandache eğrisi

$$\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$$

şeklinde tanımlanır, [1].

**Teorem 4.2.2:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $NB$  - Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{NB}}$  eğriliği  $\tau_{\beta_{NB}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\chi_2^2 + \upsilon_2^2 + \ell_2^2}}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2}$$

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2} \left[ 2\tau^3 \bar{\chi}_2 + 2\tau^2 \kappa \bar{\ell}_2 + \tau \kappa^2 \bar{\chi}_2 + \kappa^3 \bar{\ell}_2 - \kappa'\tau \bar{\ell}_2 - \kappa'\tau \bar{v}_2 + \kappa\tau' \bar{\ell}_2 + \kappa\tau' \bar{v}_2 \right]}{\left[ \tau(2\tau^2 + \kappa^2) \right]^2 + [-\kappa'\tau + \kappa\tau']^2 + \left[ \kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau\kappa' \right]^2}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \chi_2 = 2\tau^2(-\kappa' + \tau\kappa) + \kappa\tau(\kappa^2 + 2\tau') \\ \upsilon_2 = \kappa(-\kappa^3 - \tau'\kappa + \tau\kappa') - \tau^2(3\kappa^2 + 2\tau^2), \\ \ell_2 = \kappa^2(\tau' - \tau^2) - \tau(2\tau^3 + \kappa\kappa') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_2 = -\tau^3 \kappa + \kappa^3 + \kappa' \tau + 2\kappa \tau' - \kappa'' \\ \bar{\nu}_2 = \tau^3 + \tau \kappa^2 - 3\kappa \kappa' + 3\tau^2 \tau' - \tau'' \\ \bar{\ell}_2 = \tau^3 + \tau \kappa^2 - 3\tau \tau' - \tau \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır, [11].

**İspat:**  $\beta_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + B)$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{NB}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{NB}} \frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa T - \tau N + \tau B)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NB}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{NB}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NB}}(s) = \frac{-\kappa T - \tau N + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + 2\tau^2}} \quad (4.2.4)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \chi_2 = 2\tau^2(-\kappa' + \tau\kappa) + \kappa\tau(\kappa^2 + 2\tau') \\ \nu_2 = \kappa(-\kappa^3 - \tau'\kappa + \tau\kappa') - \tau^2(3\kappa^2 + 2\tau^2) \\ \ell_2 = \kappa^2(\tau' - \tau^2) - \tau(2\tau^3 + \kappa\kappa') \end{cases}$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{NB}}$  türevi

$$T'_{\beta_{NB}}(s) = \frac{\sqrt{2}(\chi_2 T + \nu_2 N + \ell_2 B)}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2} \quad (4.2.5)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{NB}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{NB}}$  ile gösterilirse (4.2.5) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{NB}}$  eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \|T'_{\beta_{NB}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\chi_2^2 + \nu_2^2 + \ell_2^2}}{(\kappa^2 + 2\tau^2)^2}$$

olur.  $\beta_{NB}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{NB}}$  ile gösterilirse bu vektör

$$N_{\beta_{NB}} = \frac{T'_{\beta_{NB}}(s)}{\|T'_{\beta_{NB}}(s)\|},$$

$$N_{\beta_{NB}} = \frac{\chi_2 T + \nu_2 N + \ell_2 B}{\sqrt{\chi_2^2 + \nu_2^2 + \ell_2^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{NB}} = T_{\beta_{NB}} \times N_{\beta_{NB}}$  olduğundan  $B_{\beta_{NB}}$  vektörü

$$B_{\beta_{NB}} = \frac{-\tau[\ell_2 + \nu_2]T + [\tau\chi_2 + \kappa\ell_2]N + [-\kappa\nu_2 + \tau\chi_2]B}{\sqrt{(\kappa^2 + 2\tau^2)(\chi_2^2 + \nu_2^2 + \ell_2^2)}}$$

olur.  $\beta_{NB}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla,

$$\beta''_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(-\kappa' + \tau\kappa)T - (\kappa^2 + \tau^2 + \tau')N + (\tau' - \tau^2)B\}$$

ve



$$\beta_{NB}''' = \frac{\bar{\chi}_2 T + \bar{v}_2 N + \bar{\ell}_2 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada  $\bar{\chi}_2$ ,  $\bar{v}_2$  ve  $\bar{\ell}_2$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_2 = -\kappa'' + \kappa(2\tau' + \kappa^2) + \tau(\kappa' + \kappa\tau) \\ \bar{v}_2 = \kappa(-3\kappa' + \tau\kappa) + \tau(-3\tau' + \tau^2) - \tau'' \\ \bar{\ell}_2 = -\tau(\kappa^2 + \tau^2 + 3\tau') + \tau'' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{NB}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{NB}}$  ile gösterilirse,  $\tau_{\beta_{NB}}$  torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\langle \beta_{NB}' \times \beta_{NB}'', \beta_{NB}''' \rangle}{\|\beta_{NB}' \times \beta_{NB}''\|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{NB}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{NB}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NB}} = \frac{\sqrt{2} \left[ (\tau(2\tau^2 + \kappa^2)) \bar{\chi}_2 + (-\kappa'\tau + \kappa\tau') \bar{v}_2 + (\kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau\kappa') \bar{\ell}_2 \right]}{\left[ \tau(2\tau^2 + \kappa^2) \right]^2 + \left[ -\kappa'\tau + \kappa\tau' \right]^2 + \left[ \kappa(\kappa^2 + 2\tau^2 + \tau') - \tau\kappa' \right]^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.5:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.  $TB$ -Smarandache eğrisi,

$$\beta_{TB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T + B)$$

şeklinde tanımlanır.

**Teorem 4.2.3:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $TB$ -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{TB}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{TB}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau}$$

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2} [\kappa^3 \bar{\ell}_3 - 2\kappa^2 \tau \bar{\ell}_3 + \kappa^2 \tau \bar{\chi}_3 + \kappa \tau^2 \bar{\ell}_3 - 2\kappa \tau^2 \bar{\chi}_3 + \tau^3 \bar{\chi}_3]}{[\tau(\kappa - \tau)^2]^2 + [\kappa(\kappa - \tau)^2]^2}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \bar{\chi}_3 = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau \\ \bar{U}_3 = \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'' \\ \bar{\ell}_3 = \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.

**İspat:**  $\beta_{TB}(s) = \frac{(T+B)}{\sqrt{2}}$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{TB}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TB}} \frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \frac{(\kappa - \tau)N}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TB}}}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa - \tau)^2}{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{TB}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TB}}(s) = N \quad (4.2.6)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$T'_{\beta_{TB}}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa - \tau} (-\kappa T + \tau B) \quad (4.2.7)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{TB}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{TB}}$  ile gösterilirse (4.2.7) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{TB}}$  eğriliği

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \|T'_{\beta_{TB}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2(\kappa^2 + \tau^2)}}{\kappa - \tau}$$

olur.  $\beta_{TB}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{TB}}$  ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{T'_{\beta_{TB}}}{\|T'_{\beta_{TB}}\|},$$

$$N_{\beta_{TB}} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{TB}} = T_{\beta_{TB}} \times N_{\beta_{TB}}$  olduğundan  $B_{\beta_{TB}}$  vektörü

$$B_{\beta_{TB}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

olur.  $\beta_{TB}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{TB} = \frac{(-\kappa^2 + \tau\kappa)T + (\kappa' - \tau')N + (\kappa\tau - \tau^2)B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta_{TB}''' = \frac{\bar{\chi}_3 T + \bar{v}_3 N + \bar{\ell}_3 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada  $\bar{\chi}_3$ ,  $\bar{v}_3$  ve  $\bar{\ell}_3$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_3 = -3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa'\tau \\ \bar{v}_3 = \kappa^3 + \tau\kappa^2 - \kappa\tau^2 + \tau^3 + \kappa'' - \tau'' \\ \bar{\ell}_3 = \kappa\tau' + 2\kappa'\tau - 3\tau\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{TB}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{TB}}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_{TB}}$  torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\langle \beta_{TB}' \times \beta_{TB}'', \beta_{TB}''' \rangle}{\|\beta_{TB}' \times \beta_{TB}''\|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{TB}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{TB}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TB}} = \frac{\sqrt{2}(\kappa^3\bar{\ell}_3 - 2\kappa^2\tau\bar{\ell}_3 + \kappa^2\tau\bar{\chi}_3 + \kappa\tau^2\bar{\ell}_3 - 2\kappa\tau^2\bar{\chi}_3 + \tau^3\bar{\chi}_3)}{(\tau(\kappa - \tau)^2)^2 + (\kappa(\kappa - \tau)^2)^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.6:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

$TNB$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$$

şeklinde tanımlanır, [1].

**Teorem 4.2.4:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $TNB$ -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{TNB}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{TNB}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\chi_4^2 + \upsilon_4^2 + \ell_4^2}}{(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)},$$

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3} \left[ \begin{array}{l} 2\kappa^3 \bar{\ell}_4 - 2\kappa^2 \tau \bar{\ell}_4 + 2\kappa^2 \tau \bar{\chi}_4 + 2\kappa \tau^2 \bar{\ell}_4 - 2\kappa \tau^2 \bar{\chi}_4 + 2\tau^3 \bar{\chi}_4 + \\ \kappa \tau' \bar{\ell}_4 - \kappa' \tau \bar{\ell}_4 + \kappa \tau' \bar{\upsilon}_4 + \kappa \tau' - \kappa' \tau \bar{\upsilon}_4 - \kappa' \tau \bar{\chi}_4 \end{array} \right]}{\left[ 2\kappa \tau (\kappa - \tau) + \kappa \tau' - \tau \kappa' + 2\tau^3 \right]^2 + [\kappa \tau' - \tau \kappa']^2 + \left[ 2\kappa^3 + \kappa \tau' + 2\kappa \tau^2 - 2\kappa^2 \tau - \kappa' \tau \right]^2}$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{cases} \chi_4 = \kappa^2 (-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 4\tau\kappa - \kappa^2 \tau') + \kappa \tau (\kappa' + 2\tau^2 + 2\tau') - 2\kappa' \tau^2 \\ \upsilon_4 = \kappa^2 (-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 2\kappa \tau - \tau') + \tau^2 (-2\tau^2 + 2\kappa \tau + \kappa') + \kappa \tau (\kappa' - \tau') \\ \ell_4 = 2\kappa^2 (\kappa \tau - 2\tau^2 + \tau') + \tau^2 (4\kappa \tau - 2\tau^2 + \kappa') - \kappa \tau (\tau' + 2\kappa') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_4 = \kappa' \tau - \kappa'' - 3\kappa \kappa' + 2\kappa \tau' + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\ \bar{\upsilon}_4 = \tau^3 - \kappa^3 - 3(\kappa \kappa' + \tau \tau') - (-\kappa'' + \tau'') + \kappa \tau (\kappa - \tau) \\ \bar{\ell}_4 = \tau'' - \kappa^2 \tau - 3\tau \tau' - \tau^3 + 2\tau \kappa' + \kappa \tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır, [11].

**İspat:**  $\beta_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T + N + B)$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_{TNB}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{TNB}} \frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} [-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B]$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{TNB}}}{ds} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau}}{3}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{TNB}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{-\kappa T + (\kappa - \tau)N + \tau B}{\sqrt{2}\sqrt{\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau}} \quad (4.2.8)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türev alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \chi_4 = \kappa^2(-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 4\tau\kappa - \kappa^2\tau') + \kappa\tau(\kappa' + 2\tau^2 + 2\tau') - 2\kappa'\tau^2 \\ \nu_4 = \kappa^2(-2\kappa^2 - 4\tau^2 + 2\kappa\tau - \tau') + \tau^2(-2\tau^2 + 2\kappa\tau + \kappa') + \kappa\tau(\kappa' - \tau') \\ \ell_4 = 2\kappa^2(\kappa\tau - 2\tau^2 + \tau') + \tau^2(4\kappa\tau - 2\tau^2 + \kappa') - \kappa\tau(\tau' + 2\kappa') \end{cases}$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{TNB}}$  türevi

$$T'_{\beta_{TNB}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\chi_4 T + \nu_4 N + \ell_4 B}{(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} \quad (4.2.9)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{TNB}}$  ile gösterilirse (4.2.9) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{TNB}}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_{TNB}} &= \|T'_{\beta_{TNB}}\|, \\ \kappa_{\beta_{TNB}} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\chi_4^2 + \nu_4^2 + \ell_4^2}}{(\kappa^2 + \tau^2 - \kappa\tau)^2} \end{aligned}$$

olur.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{TNB}}$  ile gösterilirse

$$N_{\beta_{TNB}} = \frac{T'_{\beta_{TNB}}(s)}{\|T'_{\beta_{TNB}}(s)\|},$$

$$N_{\beta_{TNB}} = \frac{\chi_4 T + \upsilon_4 N + \ell_4 B}{\sqrt{\chi_4^2 + \upsilon_4^2 + \ell_4^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{TNB}} = T_{\beta_{TNB}} \times N_{\beta_{TNB}}$  olduğundan  $B_{\beta_{TNB}}$  vektörü

$$B_{\beta_{TNB}} = \frac{((\kappa - \tau)\ell_4 - \tau\upsilon_4)T + (\tau\lambda_1 + \kappa\ell_4)N - (\kappa\upsilon_4 + (\kappa - \tau)\chi_4)B}{\sqrt{(2\kappa^2 + 2\tau^2 - 2\kappa\tau)(\chi_4^2 + \upsilon_4^2 + \ell_4^2)}}$$

olur.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa sırasıyla,

$$\beta_{TNB}'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ (-\kappa' - \kappa^2 + \kappa\tau)T - (\kappa^2 + \kappa' + \tau' + \tau^2)N + (\kappa\tau - \tau^2 + \tau')B \right]$$

ve

$$\beta_{TNB}''' = \frac{\bar{\chi}_4 T + \bar{\upsilon}_4 N + \bar{\ell}_4 B}{\sqrt{3}}$$

dır. Burada  $\bar{\chi}_4$ ,  $\bar{\upsilon}_4$  ve  $\bar{\ell}_4$

$$\begin{cases} \bar{\chi}_4 = \kappa'\tau - \kappa'' - 3\kappa\kappa' + 2\kappa\tau' + \kappa^3 + \kappa\tau^2 \\ \bar{\upsilon}_4 = \tau^3 - \kappa^3 - 3(\kappa\kappa' + \tau\tau') - (-\kappa'' + \tau'') + \kappa\tau(\kappa - \tau) \\ \bar{\ell}_4 = \tau'' - \kappa^2\tau - 3\tau\tau' - \tau^3 + 2\tau\kappa' + \kappa\tau' \end{cases}$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{TNB}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{TNB}}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_{TNB}}$  torsiyonu için

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\langle \beta_{TNB}' \times \beta_{TNB}'', \beta_{TNB}''' \rangle}{\| \beta_{TNB}' \times \beta_{TNB}'' \|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{TNB}$  eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{TNB}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{TNB}} = \frac{\sqrt{3} \left[ \begin{array}{l} 2\kappa^3 \bar{\ell}_4 - 2\kappa^2 \tau \bar{\ell}_4 + 2\kappa^2 \tau \bar{\chi}_4 + 2\kappa \tau^2 \bar{\ell}_4 - 2\kappa \tau^2 \bar{\chi}_4 + 2\tau^3 \bar{\chi}_4 + \\ \kappa \tau' \bar{\ell}_4 - \kappa' \tau \bar{\ell}_4 + \kappa \tau' \bar{v}_4 + \kappa \tau' - \kappa' \tau \bar{v}_4 - \kappa' \tau \bar{\chi}_4 \end{array} \right]}{\left[ 2\kappa \tau (\kappa - \tau) + \kappa \tau' - \tau \kappa' + 2\tau^3 \right]^2 + [\kappa \tau' - \tau \kappa']^2 + \left[ 2\kappa^3 + \kappa \tau' + 2\kappa \tau^2 - 2\kappa^2 \tau - \kappa' \tau \right]^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.2.7:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olsun.  $NC$ -Smarandache eğrisi

$$\beta_{NC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + C)$$

şeklinde tanımlanır, [11].

**Teorem 4.2.5:**  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$ , eğriliği  $\kappa$  ve torsiyonu  $\tau$  olsun.  $NC$ -Smarandache eğrisinin  $\kappa_{\beta_{NC}}$  eğriliği ve  $\tau_{\beta_{NC}}$  torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2}}{\left( (\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi' \|W\| \right)^2},$$

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \left[ \begin{array}{l} -2\bar{\chi}_5 \tau^2 \varphi' \sin \varphi + \bar{\chi}_5 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi - \bar{\chi}_5 \kappa^2 \varphi' \sin \varphi + \kappa \bar{v}_5 \tau + (\varphi')^3 \cos^2 \varphi \omega_2 \\ + \varphi'^2 \cos^2 \varphi \bar{\ell}_5 \kappa - 2\varphi' \cos \varphi \bar{\ell}_5 \kappa^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\ell}_5 \tau^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{v}_5 \tau - \kappa \bar{v}_5 \varphi'' \sin \varphi \\ - \kappa \bar{v}_5 \varphi'^2 \cos \varphi + \bar{v}_5 \varphi'' \cos \varphi \tau - \bar{v}_5 \varphi'^2 \sin \varphi \tau + \varphi'^2 \cos \varphi \bar{\ell}_5 \tau \sin \varphi \\ + \bar{v}_5 \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa \bar{\ell}_5 \tau \varphi' \sin \varphi - \bar{\chi}_5 \kappa \varphi' \cos \varphi \tau + \bar{\chi}_5 \kappa \varphi'^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ + \bar{\chi}_5 \kappa^2 \tau + \bar{v}_5 \varphi'^3 \sin^2 \varphi - \bar{v}_5 \kappa' \tau + \kappa \bar{\ell}_5 \tau^2 + \bar{\ell}_5 \kappa^3 + \bar{\chi}_5 \tau^3 \end{array} \right]}{\left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left( \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - \kappa^2 \varphi' - 2\tau^2 \varphi' \right) \sin \varphi + \kappa^2 \tau + \tau^3 \right]^2 + \left[ \left( \tau \varphi'' - \tau' \varphi' - \kappa (\varphi')^2 \right) \cos \varphi + \left( \kappa' \varphi' - \tau (\varphi')^2 - \kappa \varphi'' \right) \sin \varphi - \tau \kappa' + (\varphi')^3 + \kappa \tau' \right]^2 + \left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \cos \varphi + \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - 2\kappa^2 \varphi' - \tau^2 \varphi' \right) \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \right]^2}$$

şeklinde verilir. Burada



$$\left\{ \begin{array}{l}
\chi_5 = \tau^2 \varphi'' \cos \varphi - \kappa \varphi' \varphi'' \cos^2 \varphi - \tau \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - (\varphi')^4 \sin \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \sin \varphi \\
- \tau^2 (\varphi')^2 \sin \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin^2 \varphi - \kappa' (\varphi')^2 - \tau^2 \kappa' - 2\kappa' \kappa \varphi' \cos \varphi \\
- 2\kappa' \varphi' \tau \sin \varphi - \tau \tau' \varphi' \cos \varphi + \kappa' (\varphi')^2 \cos^2 \varphi + \tau' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \\
+ \kappa \tau \tau' - \kappa \tau \varphi'' \sin \varphi - \varphi' \tau' \kappa \sin \varphi \\
\\
v_5 = \kappa (\varphi')^3 \cos \varphi + 3\kappa^3 \varphi' \cos \varphi + 3\tau^2 \kappa \varphi' \cos \varphi - 2\kappa^2 (\varphi')^2 \cos^2 \varphi - 4\kappa \tau (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi \\
- \kappa^2 (\varphi')^2 - \kappa^4 - 2\kappa^2 \tau^2 + 3\kappa^2 \tau \varphi' \sin \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 + 3\tau^3 \varphi' \sin \varphi + \tau (\varphi')^3 \sin \varphi - 2\tau^2 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\
\\
\ell_5 = \tau' (\varphi')^2 + \kappa^2 \tau' - 2\kappa \tau' \varphi' \cos \varphi - \kappa^2 \varphi'' \sin \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi + \tau \varphi' \varphi'' \sin^2 \varphi \\
- (\varphi')^4 \cos \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \cos \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 \cos \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \cos^2 \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi \\
- \tau \varphi' \varphi'' - \tau \kappa \kappa' + \tau \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau \kappa' \varphi' \cos \varphi + \kappa \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - \tau' (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\
\\
\bar{\chi}_5 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa^2 \varphi' \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\
\\
\bar{v}_5 = 2\kappa \varphi'' \cos \varphi - 2\kappa (\varphi')^2 \sin \varphi - 3\kappa \kappa' + \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau' \varphi' \sin \varphi + 2\tau \varphi'' \sin \varphi \\
+ 2(\varphi')^2 \cos \varphi - 3\tau \tau' \\
\\
\bar{\ell}_5 = (\kappa \tau \varphi' - 3\varphi' \varphi'') \cos \varphi + (\tau^2 \varphi' - \varphi''' + (\varphi')^3) \sin \varphi - \kappa^2 \tau - \tau^3 + \tau''
\end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır, [11].

**İspat:** 
$$\beta_{NC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N + C)$$

Smarandache eğrisinde  $C$  nin yerine (3.1.7) den karşılığı yazılırsa

$$\beta_{NC} = \frac{(\sin \varphi T + N + \cos \varphi B)}{\sqrt{2}}$$

olur.  $s_{\beta_{NC}}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_{NC}} \frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \frac{(\varphi' \cos \varphi - \kappa)T + (\tau - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{2}}$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_{NC}}}{ds} = \frac{\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_{NC}$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_{NC}}(s) = \frac{(\varphi' \cos \varphi - \kappa)T + (\tau - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{(\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|}} \quad (4.2.10)$$

olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_5 = \tau^2 \varphi'' \cos \varphi - \kappa \varphi' \varphi'' \cos^2 \varphi - \tau \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi - (\varphi')^4 \sin \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \sin \varphi \\ \quad - \tau^2 (\varphi')^2 \sin \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin^2 \varphi - \kappa' (\varphi')^2 - \tau^2 \kappa' - 2\kappa' \kappa \varphi' \cos \varphi \\ \quad - 2\kappa' \varphi' \tau \sin \varphi - \tau \tau' \varphi' \cos \varphi + \kappa' (\varphi')^2 \cos^2 \varphi + \tau' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \\ \quad + \kappa \tau \tau' - \kappa \tau \varphi'' \sin \varphi - \varphi' \tau' \kappa \sin \varphi \\ \nu_5 = \kappa (\varphi')^3 \cos \varphi + 3\kappa^3 \varphi' \cos \varphi + 3\tau^2 \kappa \varphi' \cos \varphi - 2\kappa^2 (\varphi')^2 \cos^2 \varphi - 4\kappa \tau (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \kappa^2 (\varphi')^2 - \kappa^4 - 2\kappa^2 \tau^2 + 3\kappa^2 \tau \varphi' \sin \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 + 3\tau^3 \varphi' \sin \varphi + \tau (\varphi')^3 \sin \varphi \\ \quad - 2\tau^2 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \\ \ell_5 = \tau' (\varphi')^2 + \kappa^2 \tau' - 2\kappa \tau' \varphi' \cos \varphi - \kappa^2 \varphi'' \sin \varphi + \kappa \varphi' \varphi'' \sin \varphi \cos \varphi + \tau \varphi' \varphi'' \sin^2 \varphi \\ \quad - (\varphi')^4 \cos \varphi - \kappa^2 (\varphi')^2 \cos \varphi - \tau^2 (\varphi')^2 \cos \varphi + 2\kappa (\varphi')^3 \cos^2 \varphi + 2\tau (\varphi')^3 \sin \varphi \cos \varphi \\ \quad - \tau \varphi' \varphi'' - \tau \kappa \kappa' + \tau \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau \kappa' \varphi' \cos \varphi + \kappa \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa' (\varphi')^2 \sin \varphi \cos \varphi - \tau' (\varphi')^2 \sin^2 \varphi \end{array} \right.$$

olmak üzere  $T'_{\beta_{NC}}$  türevi

$$T'_{\beta_{NC}}(s) = \frac{\sqrt{2}(\chi_5 T + \nu_5 N + \ell_5 B)}{\left((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|\right)^2} \quad (4.2.11)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{NC}$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_{NC}}$  ile gösterilirse (4.2.11) bağıntısından  $\kappa_{\beta_{NC}}$  eğriliği

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \|T'_{\beta_{NC}}\|,$$

$$\kappa_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2}}{\left((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|\right)^2}$$

olur.  $\beta_{NC}$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_{NC}}$  ile gösterilirse

$$N_{\beta_{NC}} = \frac{T'_{\beta_{NC}}(s)}{\|T'_{\beta_{NC}}(s)\|},$$

$$N_{\beta_{NC}} = \frac{\chi_5 T + \upsilon_5 N + \ell_5 B}{\sqrt{\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2}}$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_{NC}} = T_{\beta_{NC}} \times N_{\beta_{NC}}$  olduğundan  $B_{\beta_{NC}}$  vektörü

$$B_{\beta_{NC}} = \frac{\upsilon_5 (\varphi' \sin \varphi - \tau)T + (\chi_5 (\tau - \varphi' \sin \varphi) - \ell_5 (\varphi' \cos \varphi - \kappa))N + (\upsilon_5 (\varphi' \cos \varphi - \kappa))B}{\sqrt{\left((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|\right)(\chi_5^2 + \upsilon_5^2 + \ell_5^2)}}$$

şeklinde bulunur.  $\beta_{NC}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta''_{NC} = \frac{(\varphi'' \cos \varphi - (\varphi')^2 \sin \varphi - \kappa')T + (\kappa\varphi' \cos \varphi + \tau\varphi' \sin \varphi - \kappa^2 - \tau^2)N}{\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{(\tau' - \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^2 \cos \varphi)B}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\beta'''_{NC} = \frac{\bar{\chi}_5 T + \bar{\upsilon}_5 N + \bar{\ell}_5 B}{\sqrt{2}}$$

dır. Burada  $\bar{\chi}_5$ ,  $\bar{v}_5$  ve  $\bar{\ell}_5$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\chi}_5 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - (\varphi')^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa^2 \varphi' \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \\ \bar{v}_5 = 2\kappa \varphi'' \cos \varphi - 2\kappa (\varphi')^2 \sin \varphi - 3\kappa \kappa' + \kappa \varphi'' \cos \varphi + \tau' \varphi' \sin \varphi + 2\tau \varphi'' \sin \varphi \\ \quad + 2(\varphi')^2 \cos \varphi - 3\tau \tau' \\ \bar{\ell}_5 = (\kappa \tau \varphi' - 3\varphi' \varphi'') \cos \varphi + (\tau^2 \varphi' - \varphi''' + (\varphi')^3) \sin \varphi - \kappa^2 \tau - \tau^3 + \tau'' \end{array} \right.$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_{NC}$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_{NC}}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_{NC}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\langle \beta_{NC}' \times \beta_{NC}'', \beta_{NC}''' \rangle}{\| \beta_{NC}' \times \beta_{NC}'' \|^2}$$

yazılır. Burada  $\beta_{NC}$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa  $\tau_{\beta_{NC}}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_{NC}} = \frac{\sqrt{2} \left[ \begin{array}{l} -2\bar{\chi}_5 \tau^2 \varphi' \sin \varphi + \bar{\chi}_5 (\varphi')^2 \sin^2 \varphi - \bar{\chi}_5 \kappa^2 \varphi' \sin \varphi + \kappa \bar{v}_5 \tau + (\varphi')^3 \cos^2 \varphi \omega_2 \\ + \varphi'^2 \cos^2 \varphi \bar{\ell}_5 \kappa - 2\varphi' \cos \varphi \bar{\ell}_5 \kappa^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{\ell}_5 \tau^2 - \varphi' \cos \varphi \bar{v}_5 \tau - \kappa \bar{v}_5 \varphi'' \sin \varphi \\ - \kappa \bar{v}_5 \varphi'^2 \cos \varphi + \bar{v}_5 \varphi'' \cos \varphi \tau - \bar{v}_5 \varphi'^2 \sin \varphi \tau + \varphi'^2 \cos \varphi \bar{\ell}_5 \tau \sin \varphi \\ + \bar{v}_5 \kappa' \varphi' \sin \varphi - \kappa \bar{\ell}_5 \tau \varphi' \sin \varphi - \bar{\chi}_5 \kappa \varphi' \cos \varphi \tau + \bar{\chi}_5 \kappa \varphi'^2 \cos \varphi \sin \varphi \\ + \bar{\chi}_5 \kappa^2 \tau + \bar{v}_5 \varphi'^3 \sin^2 \varphi - \bar{v}_5 \kappa' \tau + \kappa \bar{\ell}_5 \tau^2 + \bar{\ell}_5 \kappa^3 + \bar{\chi}_5 \tau^3 \end{array} \right]}{\left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left( \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - \kappa^2 \varphi' - 2\tau^2 \varphi' \right) \sin \varphi + \kappa^2 \tau + \tau^3 \right]^2 + \left[ \left( \tau \varphi'' - \tau' \varphi' - \kappa (\varphi')^2 \right) \cos \varphi + \left( \kappa' \varphi' - \tau (\varphi')^2 - \kappa \varphi'' \right) \sin \varphi - \tau \kappa' + (\varphi')^3 + \kappa \tau' \right]^2 + \left[ \left( \kappa (\varphi')^2 \cos \varphi + \tau (\varphi')^2 \sin \varphi - 2\kappa^2 \varphi' - \tau^2 \varphi' \right) \cos \varphi - \kappa \tau \varphi' \sin \varphi + \kappa^3 + \kappa \tau^2 \right]^2}$$

şeklinde elde edilir.

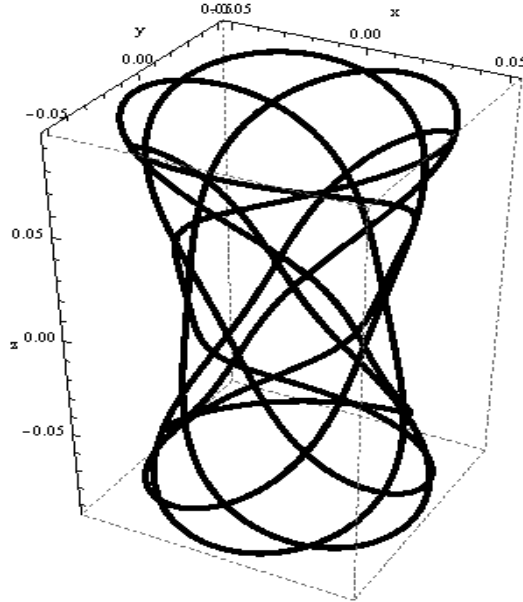
**Örnek 4.2.1:**

$\gamma(s) = \left( \frac{9}{208} \sin 16s - \frac{1}{117} \sin 36s, -\frac{9}{208} \cos 16s + \frac{1}{117} \cos 36s, \frac{6}{65} \sin 10s \right)$  eğrisinin

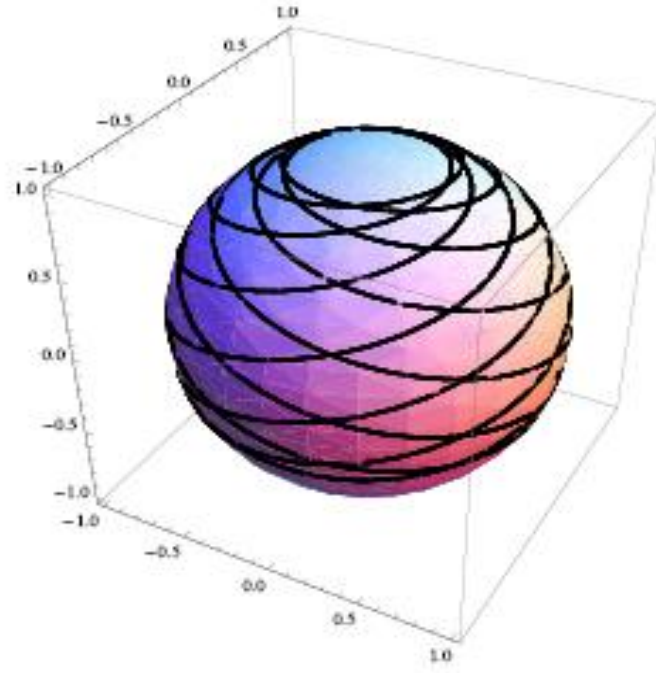
Frenet vektörleri, [1], ve birim Darboux vektörü

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s) = \left( \frac{9}{13} \cos 16s - \frac{4}{13} \cos 36s, \frac{9}{13} \sin 16s - \frac{4}{13} \sin 36s, \frac{12}{13} \cos 10s \right) \\ N(s) = \left( \frac{12}{13} \cos 26s, \frac{12}{13} \sin 26s, -\frac{5}{13} \right) \\ B(s) = \left( -\frac{9}{13} \sin 16s - \frac{4}{13} \sin 36s, \frac{4}{13} \cos 36s + \frac{9}{13} \cos 16s, \frac{12}{13} \sin 10s \right) \\ C(s) = \left( \frac{5}{13} \cos 26s, \frac{5}{13} \sin 26s, \frac{12}{13} \right) \end{array} \right.$$

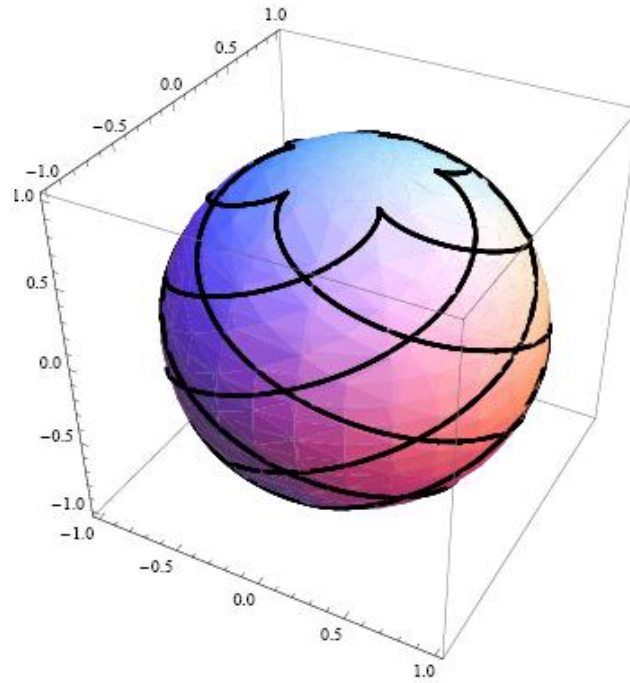
şeklinde bulunur. Bu eğriye ait Smarandache eğrileri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



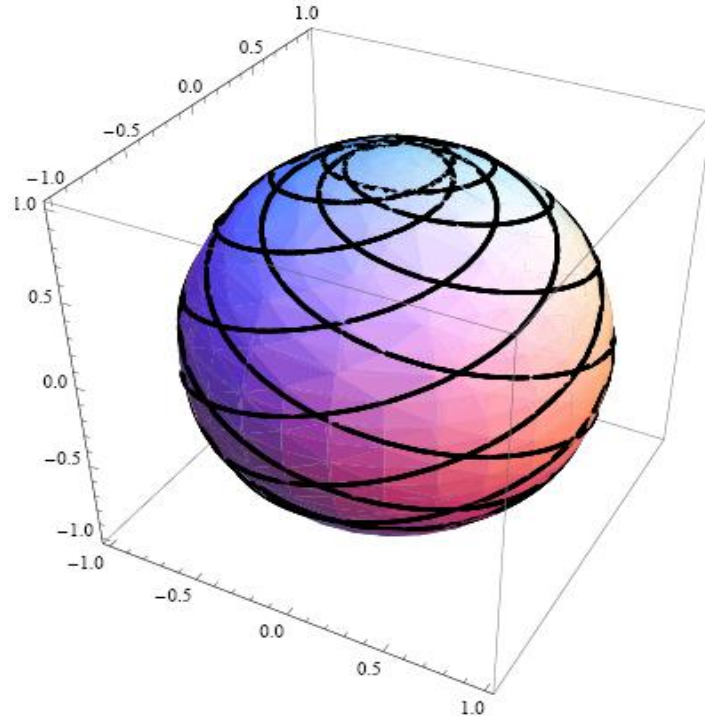
**Şekil 4.1.**  $\gamma = \gamma(s)$  eğrisi



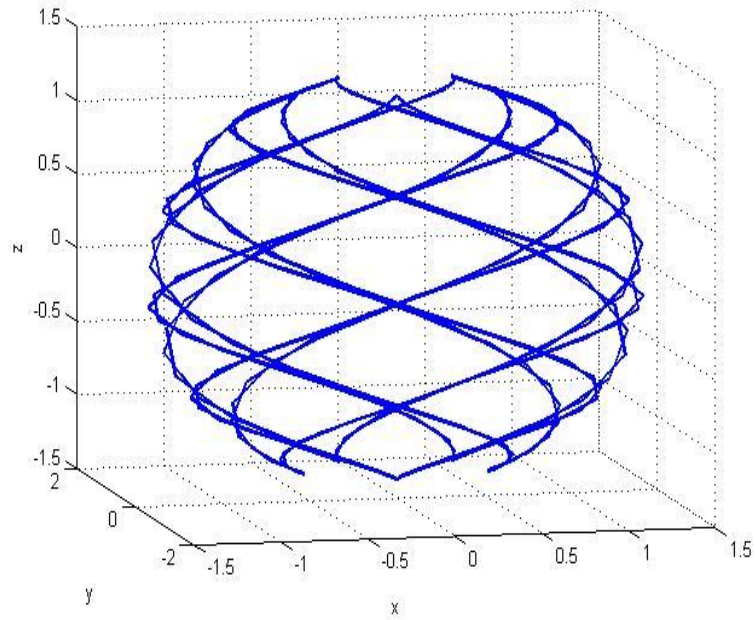
Şekil 4.2.  $\gamma(s)$  eğrisine ait *TN*-Smarandache Eğrisi



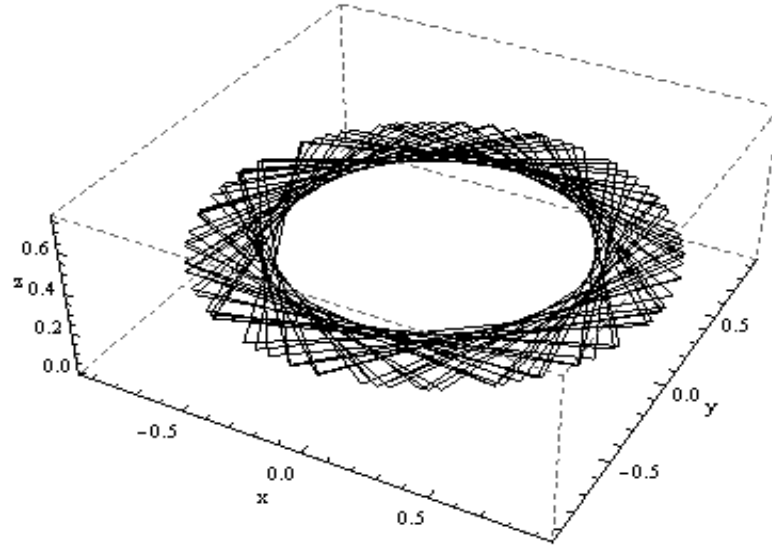
Şekil 4.3.  $\gamma(s)$  eğrisine ait *NB*-Smarandache eğrisi



Şekil 4.4.  $\gamma(s)$  eğrisine ait *TNB*-Smarandache eğrisi



Şekil 4.5.  $\gamma(s)$  eğrisine ait *TB*-Smarandache eğrisi



Şekil 4.6.  $\gamma(s)$  eğrisine ait *NC*-Smarandache eğrisi



## 5. BULGULAR

Bu bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü olmak üzere, konum vektörü involüt eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan regüler Smarandache eğrileri,

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

şeklinde gösterilecek ve bu eğrilerin eğrilik ve burulmaları hesaplanacaktır. Daha sonra bu eğrilerin eğrilik ve burulmaları evolüt eğrisinin Frenet elemanlarına bağlı olarak ifade edilecektir.

### 5.1. $T^*N^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad (5.1.1)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_1}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_1} \frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \frac{(-\kappa^* T^* + \kappa^* N^* + \tau^* B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.1.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_1}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds} = \sqrt{\frac{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}{2}} \quad (5.1.3)$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_1$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + \kappa^* N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{2\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \quad (5.1.4)$$

şeklinde olur. (5.1.1) ifadesinde  $T^*$  ve  $N^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos \varphi(s)T(s) + N(s) + \sin \varphi(s)B(s)) \quad (5.1.5)$$

olur. (5.1.4) denkleminde (4.1.6), (4.1.7) bağıntıları dikkate alınır (5.1.5) ifadesindeki  $\beta_1$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_1}(s) = \frac{(\varphi' \sin \varphi - \kappa)T - \|W\|N + (\varphi' \cos \varphi + \tau)B}{\sqrt{\varphi'^2 + 2\|W\|^2}} \quad (5.1.6)$$

şeklinde bulunur. (5.1.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\begin{cases} \omega_1 = -\kappa^{*2}(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - \tau^*(\tau^* \kappa^{*'} - \kappa^* \tau^{*'}) \\ \phi_1 = -\kappa^{*2}(2\kappa^{*2} + 3\tau^{*2}) - \tau^*(\tau^{*3} - \tau^* \kappa^{*'} + \kappa^* \tau^{*'}) \\ \sigma_1 = \kappa^* \tau^*(2\kappa^{*2} + \tau^{*2}) - 2\kappa^*(\tau^* \kappa^{*'} - \kappa^* \tau^{*'}) \end{cases} \quad (5.1.7)$$

olmak üzere  $T'_{\beta_1}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_1}(s) = \frac{\sqrt{2}}{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^2} (\omega_1 T^* + \phi_1 N^* + \sigma_1 B^*) \quad (5.1.8)$$

olur. (5.1.7) ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1 = (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - \kappa' + \kappa \|W\|) \sqrt{\varphi'^2 + 2\|W\|^2} \\ \quad - (\varphi' \sin \varphi - \kappa) (\sqrt{\varphi'^2 + 2\|W\|^2})' \\ \bar{\phi}_1 = (-\|W\|^2 - \|W\|') \sqrt{\varphi'^2 + 2\|W\|^2} + \|W\| (\sqrt{\varphi'^2 + 2\|W\|^2})' \\ \bar{\sigma}_1 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \tau' - \tau \|W\|) \sqrt{\varphi'^2 + 2\|W\|^2} \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi + \tau) (\sqrt{\varphi'^2 + 2\|W\|^2})' \end{cases} \quad (5.1.9)$$

şeklinde olur.  $T'_{\beta_1}(s)$  türev ifadesinde (4.1.7) ve (5.1.9) bağıntıları yerine yazılırsa  $T'_{\beta_1}$  vektörünün evölüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_1}(s) = \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_1 T + \bar{\phi}_1 N + \bar{\sigma}_1 B}{(\varphi'^2 + 2\|W\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.1.10)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_1$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_1}$  ile gösterilirse (5.1.8) bağıntısından  $\kappa_{\beta_1}$  eğriliği,

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_1} &= \|T'_{\beta_1}\|, \\ \kappa_{\beta_1} &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}}{(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

olur. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) dan karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_1}$  eğriliğinin evölüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}}{(\varphi'^2 + 2\|W\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.1.12)$$

şekline dönüşür.  $\beta_1$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_1}$  ile gösterilirse (5.1.8) bağıntısından

$$N_{\beta_1} = \frac{T'_{\beta_1}}{\|T'_{\beta_1}\|},$$

$$N_{\beta_1} = \frac{\omega_1 T^* + \phi_1 N^* + \sigma_1 B^*}{\sqrt{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2}}$$

olur. Burada  $T^*, N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_1}$  ifadesinin evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$N_{\beta_1} = \frac{\bar{\omega}_1 T + \bar{\phi}_1 N + \bar{\sigma}_1 B}{\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2}} \quad (5.1.13)$$

şeklindedir.  $B_{\beta_1} = T_{\beta_1} \times N_{\beta_1}$  olduğundan  $B_{\beta_1}$  vektörü

$$B_{\beta_1} = \frac{(\kappa^* \sigma_1 - \tau^* \phi_1) T^* + (\kappa^* \sigma_1 + \tau^* \omega_1) N^* + (-\kappa^* \phi_1 - \kappa^* \omega_1) B^*}{\sqrt{(\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2)(2\kappa^{*2} + \tau^{*2})}} \quad (5.1.14)$$

olur. Burada  $T^*, N^*, B^*, \kappa^*$  ve  $\tau^*$  ifadelerinin yerine (4.1.6) ve (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_1}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı,

$$B_{\beta_1} = \frac{(-\|W\| \bar{\sigma}_1 - (\varphi' \cos \varphi + \tau) \bar{\phi}_1) T + (\bar{\omega}_1 (\varphi' \cos \varphi + \tau) - \bar{\sigma}_1 (\varphi' \sin \varphi - \kappa)) N}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2\|W\|^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} + \frac{(\bar{\phi}_1 (\varphi' \sin \varphi - \kappa) + \bar{\omega}_1 \|W\|) B}{\sqrt{(\varphi'^2 + 2\|W\|^2)(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\phi}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2)}} \quad (5.1.15)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_1$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri, sırasıyla,

$$\beta_1'' = \frac{-\left(\kappa^{*2} + \kappa^{*'}\right)T^* + \left(\kappa^{*'} - \kappa^{*2} - \tau^{*2}\right)N^* + \left(\kappa^* \tau^* + \tau^{*'}\right)B^*}{\sqrt{2}}$$

$$\beta_1''' = \frac{\eta_1 T^* + \theta_1 N^* + \rho_1 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada  $\eta_1$ ,  $\theta_1$  ve  $\rho_1$

$$\begin{cases} \eta_1 = \kappa^{*3} + \kappa^* \left( \tau^{*2} - 3\kappa^{*'} \right) - \kappa^{*''} \\ \theta_1 = -\kappa^{*3} - \kappa^* \left( \tau^{*2} + 3\kappa^{*'} \right) - 3\tau^* \tau^{*'} + \kappa^{*''} \\ \rho_1 = -\kappa^{*2} \tau^* - \tau^{*3} + 2\tau^* \kappa^{*'} + \kappa^* \tau^{*'} + \tau^{*''} \end{cases} \quad (5.1.16)$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_1$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_1}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_1}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\langle \beta_1' \times \beta_1'', \beta_1''' \rangle}{\| \beta_1' \times \beta_1'' \|^2}$$

dır. Burada  $\beta_1'$ ,  $\beta_1''$  ve  $\beta_1'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\tau_{\beta_1}$  torsiyonu,

$$\tau_{\beta_1} = \frac{\sqrt{2} \left[ \left( \kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^{*'} \right) \left( \kappa^* \rho_1 + \tau^* \eta_1 \right) + \kappa^* \left( \kappa^* \tau^* + \tau^{*'} \right) \left( \theta_1 - \eta_1 \right) + \left( \kappa^{*2} + \kappa^{*'} \right) \left( \kappa^* \rho_1 - \tau^* \theta_1 \right) \right]}{\left[ \tau^* \left( 2\kappa^{*2} + \tau^{*2} \right) + \kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*'} \tau^* \right]^2 + \left( \kappa^{*'} \tau^* - \kappa^* \tau^{*'} \right)^2 + \left( 2\kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} \right)^2} \quad (5.1.17)$$

olur. (5.1.16) bağıntısında  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar,

$$\begin{cases} \bar{\eta}_1 = \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi - \kappa'' + \kappa' \|W\| + 2\kappa \|W\|' + \kappa \|W\|^2 \\ \bar{\theta}_1 = \varphi'^2 \|W\| - \kappa \kappa' - \tau \tau' + \|W\|^3 - 2\|W\| \|W\|' + \|W\|'' \\ \bar{\rho}_1 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \tau'' - \tau' \|W\| - 2\tau \|W\|' - \tau \|W\|^2 \end{cases} \quad (5.1.18)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.1.17)de yerine yazılırsa  $T^*N^*$  Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_1}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = -\|W\|(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \tau' - \tau \|W\|) + (\|W\|^2 + \|W\|')(\varphi' \cos \varphi + \tau) \\ \tilde{\phi}_1 = (\varphi' \cos \varphi + \tau)(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - \kappa' + \kappa \|W\|) \\ \quad - (\varphi' \sin \varphi - \kappa)(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \tau' - \tau \|W\|) \\ \tilde{\sigma}_1 = (\varphi' \sin \varphi - \kappa)(-\|W\|^2 - \|W\|') + \|W\|(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - \kappa' + \kappa \|W\|) \end{cases} \quad (5.1.19)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_1} &= \frac{\sqrt{2}\tilde{\omega}_1 \left( \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi - \kappa'' + \kappa' \|W\| + 2\kappa \|W\|' + \kappa \|W\|^2 \right)}{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\sigma}_1^2} \\ &+ \frac{\sqrt{2}\tilde{\phi}_1 \left( \varphi'^2 \|W\| - \kappa \kappa' - \tau \tau' + \|W\|^3 - 2\|W\| \|W\|' + \|W\|'' \right)}{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\sigma}_1^2} \\ &+ \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_1 \left( \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \tau'' - \tau' \|W\| - 2\tau \|W\|' - \tau \|W\|^2 \right)}{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\sigma}_1^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

## 5.2. $N^*B^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_2(s) = \frac{(N^* + B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.2.1)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_2}$  yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_2} \frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \frac{(-\kappa T^* - \tau N^* + \tau B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.2.2)$$

olur ve norm alınır  $\frac{ds_{\beta_2}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_2}}{ds} = \sqrt{\frac{2\tau^{*2} + \kappa^{*2}}{2}} \quad (5.2.3)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_2$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_2}(s) = \frac{-\kappa T^* - \tau N^* + \tau B^*}{\sqrt{2\tau^{*2} + \kappa^{*2}}} \quad (5.2.4)$$

şeklinde olur. (5.2.1) ifadesinde  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evölüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sin \varphi - \cos \varphi)T + (\sin \varphi + \cos \varphi)B] \quad (5.2.5)$$

olur. (5.2.4) denkleminde (4.1.6) ve (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa (5.2.5) ifadesinde verilen  $\beta_2$  eğrisinin teğet vektörü,

$$T_{\beta_2} = \frac{(\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi)T - \|W\|N + (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi)B}{\sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2}} \quad (5.2.6)$$

şeklinde bulunur. (5.2.4) ifadesinin tekrar türevi alınır katsayılar

$$\begin{cases} \omega_2 = 2\tau^{*2}(-\kappa^{*'} + \tau^* \kappa^{*'}) + \kappa^* \tau^* (\kappa^{*2} + 2\tau^{*'}) \\ \phi_2 = \kappa^* (-\kappa^{*3} - \tau^{*'} \kappa^* + \tau^* \kappa^{*'}) - \tau^{*2} (3\kappa^{*2} + 2\tau^{*2}) \\ \sigma_2 = \kappa^{*2} (\tau^{*'} - \tau^{*2}) - \tau^* (2\tau^{*3} + \kappa^* \kappa^{*'}) \end{cases} \quad (5.2.7)$$

olmak üzere  $T'_{\beta_2}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_2}(s) = \frac{\sqrt{2}(\omega_2 T + \phi_2 N + \sigma_2 B)}{(\kappa^{*2} + 2\tau^{*2})^2} \quad (5.2.8)$$

olur. (5.2.7) ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\omega}_2 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + \kappa \|W\|) \sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2} \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi) (\sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2})' \\ \bar{\phi}_2 = (\|W\| \varphi' - \|W\|') \sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2} + \|W\| (\sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2})' \\ \bar{\sigma}_2 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - \tau \|W\|) \sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2} \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi) (\sqrt{2\varphi'^2 + \|W\|^2})' \end{cases} \quad (5.2.9)$$

şeklinde olur.  $T'_{\beta_2}(s)$  türev ifadesinde (4.1.6) ve (5.2.9) bağıntıları yerine yazılırsa  $T'_{\beta_2}$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_2}(s) = \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_2 T + \bar{\phi}_2 N + \bar{\sigma}_2 B}{(2\varphi'^2 + \|W\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.2.10)$$



şeklinde bulunur.  $\beta_2$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_2}$  ile gösterilirse (5.2.8) bağıntısından  $\kappa_{\beta_2}$  eğriliği,

$$\kappa_{\beta_2} = \|T'_{\beta_2}\|, \quad (5.2.11)$$

$$\kappa_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}}{(\kappa^{*2} + 2\tau^{*2})^{\frac{3}{2}}}$$

dır. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) den karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_2}$  eğriliğinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_2} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}}{(2\phi'^2 + \|W\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.2.12)$$

şekline dönüşür.  $\beta_2$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_2}$  ile gösterilirse (5.2.8) bağıntısından

$$N_{\beta_2} = \frac{T'_{\beta_2}}{\|T'_{\beta_2}\|},$$

$$N_{\beta_2} = \frac{\omega_2 T^* + \phi_2 N^* + \sigma_2 B^*}{\sqrt{\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2}}$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_2}$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_2} = \frac{\bar{\omega}_2 T + \bar{\phi}_2 N + \bar{\sigma}_2 B}{\sqrt{\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2}} \quad (5.2.13)$$

şeklindedir.  $B_{\beta_2} = T_{\beta_2} \times N_{\beta_2}$  olduğundan  $B_{\beta_2}$  vektörü

$$B_{\beta_2} = \frac{-\tau^* [\sigma_2 + \phi_2] T^* + [\tau^* \omega_2 + \kappa^* \sigma_2] N^* + [-\kappa^* \phi_2 + \tau^* \omega_2] B^*}{\sqrt{(\kappa^{*2} + 2\tau^{*2})(\omega_2^2 + \phi_2^2 + \sigma_2^2)}} \quad (5.2.14)$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$ ,  $B^*$ ,  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) ve (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_2}$  binormal vektörünün evölüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi,

$$\begin{aligned}
B_{\beta_2} &= \frac{-\|W\|\bar{\sigma}_2 - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi)\bar{\phi}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + \|W\|^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} T \\
&+ \frac{(\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi)\bar{\omega}_2 - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi)\bar{\sigma}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + \|W\|^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} N \\
&+ \frac{(\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi)\bar{\phi}_2 + \|W\|\bar{\omega}_2}{\sqrt{(2\varphi'^2 + \|W\|^2)(\bar{\omega}_2^2 + \bar{\phi}_2^2 + \bar{\sigma}_2^2)}} B
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

şeklinde bulunur.  $\beta_2$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\beta_2'' &= \frac{(-\kappa^{*'} + \tau^* \kappa^*)T^* - (\kappa^{*2} + \tau^{*2} + \tau^{*'})N^* + (\tau^{*'} - \tau^{*2})B^*}{\sqrt{2}} \\
\beta_2''' &= \frac{\eta_2 T^* + \theta_2 N^* + \rho_2 B^*}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{cases}
\eta_2 = -\tau^{*3} \kappa^* + \kappa^{*3} + \kappa^{*'} \tau^* + 2\kappa^* \tau^{*'} - \kappa^{*''} \\
\theta_2 = \tau^{*3} - \tau^* \kappa^{*2} - 3\kappa^* \kappa^{*'} + 3\tau^{*2} \tau^{*'} - \tau^{*''} \\
\rho_2 = \tau^{*3} + \tau^* \kappa^{*2} - 3\tau^* \tau^{*'} - \tau^* \tau^{*''}
\end{cases} \tag{5.2.16}$$

şeklinde bire katsayıdır.  $\beta_2$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_2}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_2}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\langle \beta_2' \times \beta_2'', \beta_2''' \rangle}{\|\beta_2' \times \beta_2''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_2'$ ,  $\beta_2''$  ve  $\beta_2'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$\tau_{\beta_2}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_2} = \frac{\sqrt{2} \left[ \left( \tau^* (2\tau^{*2} + \kappa^{*2}) \right) \eta_2 + \left( -\kappa^* \tau^* + \kappa^* \tau^{*'} \right) \theta_2 + \left( \kappa^* (\kappa^{*2} + 2\tau^{*2} + \tau^{*'}) - \tau^* \kappa^{*'} \right) \rho_2 \right]}{\left[ \tau^* (2\tau^{*2} + \kappa^{*2}) \right]^2 + \left[ -\kappa^* \tau^* + \kappa^* \tau^{*'} \right]^2 + \left[ \kappa^* (\kappa^{*2} + 2\tau^{*2} + \tau^{*'}) - \tau^* \kappa^{*'} \right]^2} \quad (5.2.17)$$

olur. (5.2.16) katsayılar ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\eta}_2 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi \\ \quad + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi + \kappa' \|W\| + 2\kappa \|W\|' - \kappa \varphi' \|W\| \\ \bar{\theta}_2 = 2\varphi'' \|W\| + \varphi'^2 \|W\| + \|W\|^3 + \|W\|' \varphi' - \|W\|'' \\ \bar{\rho}_2 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi \\ \quad - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi - \tau' \|W\| - 2\tau \|W\|' + \tau \|W\| \varphi' \end{cases} \quad (5.2.18)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.2.17) de yerine yazılırsa  $N^* B^*$  Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_2}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_2 = -\|W\| \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - \tau \|W\| \right) \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi) \left( \|W\| \varphi' - \|W\|' \right) \\ \tilde{\phi}_2 = (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi) \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + \kappa \|W\| \right) \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi) \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi - \tau \|W\| \right) \\ \tilde{\sigma}_2 = (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi) \left( \|W\| \varphi' - \|W\|' \right) \\ \quad + \|W\| \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + \kappa \|W\| \right) \end{cases} \quad (5.2.19)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_2} = & \frac{\sqrt{2}\tilde{\omega}_2 \left( \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi \right)}{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2} \\ & + \frac{\sqrt{2}\tilde{\phi}_2 \left( 2\varphi'' \|W\| + \varphi'^2 \|W\| + \|W\|^3 + \|W\|' \varphi' - \|W\|'' \right)}{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2} \\ & + \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_2 \left( \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi \right)}{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2} \\ & - \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_2 \left( -\tau' \|W\| - 2\tau \|W\|' + \tau \|W\| \varphi' \right)}{\omega_1^2 + \phi_1^2 + \sigma_1^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

### 5.3. $T^*B^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad (5.3.1)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_3}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_3} \frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \frac{(\kappa^* - \tau^*)N^*}{\sqrt{2}} \quad (5.3.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_3}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_3}}{ds} = \sqrt{\frac{(\kappa^* - \tau^*)^2}{2}} \quad (5.3.3)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_3$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_3}(s) = N^* \quad (5.3.4)$$

şeklinde olur. (5.3.1) ifadesinde  $T^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \varphi T + N + \cos \varphi B) \quad (5.3.5)$$

olur. (5.3.4) bağıntısında (4.1.7) den karşılığı yazılırsa (5.3.5) ifadesinde verilen  $\beta_3$  eğrisinin teğet vektörü,

$$T_{\beta_3}(s) = \frac{(\varphi' \cos \varphi - \kappa)T + (-\varphi' \sin \varphi + \tau)B}{\sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi'\|W\| + \|W\|^2}} \quad (5.3.6)$$

şeklinde bulunur. (5.3.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa  $T'_{\beta_3}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_3}(s) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa^* - \tau^*}(-\kappa^* T^* + \tau^* B^*) \quad (5.3.7)$$

olur veya bu ifadelerin yerine  $T^*, B^*, \kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) ve (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_3 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \kappa') \sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi'\|W\| + \|W\|^2} \\ \quad - (\varphi' \cos \varphi - \kappa) \left( \sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi'\|W\| + \|W\|^2} \right)' \\ \bar{\phi}_3 = (\varphi' \|W\| - \|W\|^2) \sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi'\|W\| + \|W\|^2} \\ \bar{\sigma}_3 = (-\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + \tau') \sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi'\|W\| + \|W\|^2} \\ \quad - (-\varphi' \sin \varphi + \tau) \left( \sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi'\|W\| + \|W\|^2} \right)' \end{array} \right. \quad (5.3.8)$$

şeklinde olur. (5.3.7) türev ifadesinde (4.1.7) ve (5.3.8) bağıntıları yerine yazılırsa  $T'_{\beta_3}(s)$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden karşılığı

$$T'_{\beta_3}(s) = \sqrt{2} \frac{\bar{\omega}_3 T + \bar{\phi}_3 N + \bar{\sigma}_3 B}{(\varphi'^2 - 2\varphi' \|W\| + \|W\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.3.9)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_3$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_3}$  ile gösterilirse (5.3.7) bağıntısından  $\kappa_{\beta_3}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_3} &= \|T'_{\beta_3}\|, \\ \kappa_{\beta_3} &= \frac{\sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2})}}{\kappa^* - \tau^*} \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

olur. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) dan karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_3}$  eğriliğinin evölüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2)}}{(\varphi'^2 - 2\varphi' \|W\| + \|W\|^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.3.11)$$

şekline dönüşür.  $\beta_3$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_3}$  ile gösterilirse (5.3.7) bağıntısından

$$\begin{aligned} N_{\beta_3} &= \frac{T'_{\beta_3}}{\|T'_{\beta_3}\|}, \\ N_{\beta_3} &= \frac{-\kappa^* T^* + \tau^* B^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \end{aligned}$$

olur. Burada  $T^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_3}$  vektörünün evölüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$N_{\beta_3} = \frac{\bar{\omega}_3 T + \bar{\phi}_3 N + \bar{\sigma}_3 B}{\sqrt{\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2}} \quad (5.3.12)$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_3} = T_{\beta_3} \times N_{\beta_3}$  olduğundan  $B_{\beta_3}$  vektörü

$$B_{\beta_3} = \frac{\tau^* T^* + \kappa^* B^*}{\sqrt{\kappa^{*2} + \tau^{*2}}} \quad (5.3.13)$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $B^*$ ,  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) ve (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_3}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$B_{\beta_3} = \frac{\left[ (\varphi' \sin \varphi - \tau) \bar{\phi}_3 \right] T + \left[ (\varphi' \sin \varphi - \tau) \bar{\omega}_3 - (\varphi' \cos \varphi - \kappa) \bar{\sigma}_3 \right] N + \left[ (\varphi' \cos \varphi - \kappa) \bar{\phi}_3 \right] B}{\sqrt{(\bar{\omega}_3^2 + \bar{\phi}_3^2 + \bar{\sigma}_3^2) (\varphi'^2 - 2\varphi' \|W\| + \|W\|^2)}} \quad (5.3.14)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_3$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_3'' = \frac{(-\kappa^{*2} + \tau^* \kappa^*) T^* + (\kappa^{*'} - \tau^{*'}) N^* + (\kappa^* \tau^* - \tau^{*2}) B^*}{\sqrt{2}}$$

$$\beta_3''' = \frac{\eta_3 T^* + \theta_3 N^* + \rho_3 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} \eta_3 = -3\kappa^* \kappa^{*'} + 2\kappa^* \tau^{*'} + \kappa^{*'} \tau^* \\ \theta_3 = \kappa^{*3} + \tau^* \kappa^{*2} - \kappa^* \tau^{*2} + \tau^{*3} + \kappa^{*''} - \tau^{*''} \\ \rho_3 = \kappa^* \tau^{*'} + 2\kappa^{*'} \tau^* - 3\tau^* \tau^{*'} \end{cases} \quad (5.3.15)$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_3$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_3}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_3}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\langle \beta_3' \times \beta_3'', \beta_3''' \rangle}{\| \beta_3' \times \beta_3'' \|^2}$$

dır. Burada  $\beta_3'$ ,  $\beta_3''$  ve  $\beta_3'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\tau_{\beta_3}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_3} = \frac{\sqrt{2} \left[ \kappa^{*3} \rho_3 - 2\kappa^* \tau^* \rho_3 + \kappa^{*2} \tau^* \eta_3 + \kappa^* \tau^{*2} \rho_3 - 2\kappa^* \tau^{*2} \eta_3 + \tau^{*3} \eta_3 \right]}{\left[ \tau^* (\kappa^* - \tau^*)^2 \right]^2 + \left[ \kappa^* (\kappa^* - \tau^*)^2 \right]^2} \quad (5.3.16)$$

olur. (5.3.15) katsayılar ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\eta}_3 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa \varphi' \|W\| + \kappa \|W\|^2 \\ \bar{\theta}_3 = \varphi'' \|W\| - \kappa \kappa' - \tau \tau' + \varphi'' \|W\| + \varphi' \|W\|' - 2\|W\| \|W\|' \\ \bar{\rho}_3 = -\varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi + \tau'' + \tau \varphi' \|W\| - \tau \|W\|^2 \end{cases} \quad (5.3.17)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.3.16) da yerine yazılırsa  $T^* B^*$  Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_3}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_3 = (\varphi' \sin \varphi - \tau) (\varphi' \|W\| - \|W\|^2) \\ \tilde{\phi}_3 = (\varphi' \sin \varphi - \tau) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \kappa') - (\varphi' \cos \varphi - \kappa) (-\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + \tau') \\ \tilde{\sigma}_3 = (\varphi' \cos \varphi - \kappa) (\varphi' \|W\| - \|W\|^2) \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_{\beta_3} = & \frac{\sqrt{2} \tilde{\omega}_3 (\varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \kappa'' - \kappa \varphi' \|W\| + \kappa \|W\|^2)}{\tilde{\omega}_3^2 + \tilde{\phi}_3^2 + \tilde{\sigma}_3^2} \\ & + \frac{\sqrt{2} \tilde{\phi}_3 (\varphi'' \|W\| - \kappa \kappa' - \tau \tau' + \varphi'' \|W\| + \varphi' \|W\|' - 2\|W\| \|W\|')}{\tilde{\omega}_3^2 + \tilde{\phi}_3^2 + \tilde{\sigma}_3^2} \\ & + \frac{\sqrt{2} \tilde{\sigma}_3 (-\varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi + \tau'' + \tau \varphi' \|W\| - \tau \|W\|^2)}{\tilde{\omega}_3^2 + \tilde{\phi}_3^2 + \tilde{\sigma}_3^2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.



#### 5.4. $T^*N^*B^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_4(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T^* + N^* + B^*) \quad (5.4.1)$$

Smarandache eğrisinin  $s_{\beta_4}$  yay parametresine göre türevi alınır

$$T_{\beta_4} \frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}[-\kappa^* T^* + (\kappa^* - \tau^*) N^* + \tau^* B^*] \quad (5.4.2)$$

olur ve norm alınır  $\frac{ds_{\beta_4}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_4}}{ds} = \sqrt{\frac{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)}{3}} \quad (5.4.3)$$

bulunur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_4$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_4}(s) = \frac{-\kappa^* T^* + (\kappa^* - \tau^*) N^* + \tau^* B^*}{\sqrt{2(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*)}} \quad (5.4.4)$$

şeklinde olur. (5.4.1) ifadesinde  $T^*, N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\sin \varphi - \cos \varphi) T + N + (\sin \varphi + \cos \varphi) B] \quad (5.4.5)$$

olur. (5.4.4) denkleminde (4.1.6) ve (4.1.7) bağıntıları dikkate alınır (5.4.5) ifadesindeki  $\beta_4$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[(\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - \kappa) T - \|W\| N + (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + \tau) B]}{\sqrt{\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2}} \quad (5.4.6)$$

şeklinde bulunur. (5.4.4) ifadesinin tekrar türevi alınır katsayılar

$$\begin{cases} \omega_4 = \kappa^{*2} \left( -2\kappa^{*2} - 4\tau^{*2} + 4\tau^* \kappa^* - \kappa^{*2} \tau^{*'} \right) + \kappa^* \tau^* \left( \kappa^{*' } + 2\tau^{*2} + 2\tau^{*' } \right) - 2\kappa^{*' } \tau^{*2} \\ \phi_4 = \kappa^{*2} \left( -2\kappa^{*2} - 4\tau^{*2} + 2\kappa^* \tau^* - \tau^{*' } \right) + \tau^{*2} \left( -2\tau^{*2} + 2\kappa^* \tau^* + \kappa^{*' } \right) + \kappa^* \tau^* \left( \kappa^{*' } - \tau^{*' } \right) \\ \sigma_4 = 2\kappa^{*2} \left( \kappa^* \tau^* - 2\tau^{*2} + \tau^{*' } \right) + \tau^{*2} \left( 4\kappa^* \tau^* - 2\tau^{*2} + \kappa^{*' } \right) - \kappa^* \tau^* \left( \tau^{*' } + 2\kappa^{*' } \right) \end{cases} \quad (5.4.7)$$

olmak üzere  $T'_{\beta_4}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\omega_4 T + \phi_4 N + \sigma_4 B}{\left( \kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^* \right)^2} \quad (5.4.8)$$

olur. (5.4.7) ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\begin{cases} \bar{\omega}_4 = \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - \kappa' + \kappa \|W\| \right) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2} \\ \quad - \left( \varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - \kappa \right) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2} \right)' \\ \bar{\phi}_4 = \left( \|W\| \varphi' - \|W\|^2 - \|W\|' \right) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2} + \|W\| \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2} \right)' \\ \bar{\sigma}_4 = \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + \tau' - \tau \|W\| \right) \sqrt{\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2} \\ \quad - \left( \varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + \tau \right) \left( \sqrt{\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2} \right)' \end{cases} \quad (5.4.9)$$

şeklinde olur.  $T'_{\beta_4}(s)$  türev ifadesinde (4.1.7) ve (5.4.9) bağıntıları yerine yazılırsa

$T'_{\beta_4}$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_4}(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{\omega}_4 T + \bar{\phi}_4 N + \bar{\sigma}_4 B}{\left(\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.4.10)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_4$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_4}$  ile gösterilirse (5.4.8) bağıntısından  $\kappa_{\beta_4}$  eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta_4} &= \|T'_{\beta_4}\|, \\ \kappa_{\beta_4} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}}{\left(\kappa^{*2} + \tau^{*2} - \kappa^* \tau^*\right)^2} \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

olur. Burada  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) dan karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_4}$  eğriliğinin evölüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}}{\left(\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.4.12)$$

şekline dönüşür.  $\beta_4$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_4}$  ile gösterilirse (5.4.8) bağıntısından

$$\begin{aligned} N_{\beta_4} &= \frac{T'_{\beta_4}}{\|T'_{\beta_4}\|}, \\ N_{\beta_4} &= \frac{\omega_4 T^* + \phi_4 N^* + \sigma_4 B^*}{\sqrt{\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2}} \end{aligned}$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_4}$  vektörünün evölüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$N_{\beta_4} = \frac{\bar{\omega}_4 T + \bar{\phi}_4 N + \bar{\sigma}_4 B}{\sqrt{\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2}} \quad (5.4.13)$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_4} = T_{\beta_4} \times N_{\beta_4}$  olduğundan  $B_{\beta_4}$  vektörü

$$B_{\beta_4} = \frac{\left( (\kappa^* - \tau^*) \sigma_4 - \tau^* \phi_4 \right) T^* + \left( \tau^* \omega_4 + \kappa^* \sigma_4 \right) N^* - \left( \kappa^* \phi_4 + (\kappa^* - \tau^*) \omega_4 \right) B^*}{\sqrt{(2\kappa^{*2} + 2\tau^{*2} - 2\kappa^* \tau^*) (\omega_4^2 + \phi_4^2 + \sigma_4^2)}} \quad (5.4.14)$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$ ,  $B^*$ ,  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) ve (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_4}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} B_{\beta_4} &= \frac{-\|W\| \bar{\sigma}_4 - (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + \tau) \bar{\phi}_4}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2) (\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)}} T \\ &+ \frac{(\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + \tau) \bar{\omega}_4 - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - \kappa) \bar{\sigma}_4}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2) (\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)}} N \\ &+ \frac{(\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - \kappa) \bar{\phi}_4 + \|W\| \bar{\omega}_4}{\sqrt{2(\varphi'^2 - \varphi' \|W\| + \|W\|^2) (\bar{\omega}_4^2 + \bar{\phi}_4^2 + \bar{\sigma}_4^2)}} B \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_4$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla

$$\beta_4'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ (-\kappa^{*'} - \kappa^{*2} + \kappa^* \tau^*) T^* - (\kappa^{*2} + \kappa^{*'} + \tau^{*'} + \tau^{*2}) N^* + (\kappa^* \tau^* - \tau^{*2} + \tau^{*'}) B^* \right]$$

$$\beta_4''' = \frac{\eta_4 T^* + \theta_4 N^* + \rho_4 B^*}{\sqrt{3}}$$

olur. Burada

$$\begin{cases} \eta_4 = \kappa^{*'} \tau^* - \kappa^{*''} - 3\kappa^* \kappa^{*'} + 2\kappa^* \tau^{*'} + \kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} \\ \theta_4 = \tau^{*3} - \kappa^{*3} - 3(\kappa^* \kappa^{*'} + \tau^* \tau^{*'}) - (-\kappa^{*''} + \tau^{*''}) + \kappa^* \tau^* (\kappa^* - \tau^*) \\ \rho_4 = \tau^{*''} - \kappa^{*2} \tau^* - 3\tau^* \tau^{*'} - \tau^{*3} + 2\tau^* \kappa^{*'} + \kappa^* \tau^{*'} \end{cases} \quad (5.4.16)$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_4$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_4}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_4}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\langle \beta_4' \times \beta_4'', \beta_4''' \rangle}{\|\beta_4' \times \beta_4''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_4'$ ,  $\beta_4''$  ve  $\beta_4'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa  $\tau_{\beta_4}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_4} = \frac{\sqrt{3} \left[ \eta_4 \left( 2\kappa^* \tau^* (\kappa^* - \tau^*) + \kappa^* \tau^{*'} - \tau^* \kappa^{*' } + 2\tau^{*3} \right) + \theta_4 \left( \kappa^* \tau^{*' } - \tau^* \kappa^{*' } \right) + \rho_4 \left( 2\kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*' } + 2\kappa^* \tau^{*2} - 2\kappa^{*2} \tau^* - \kappa^{*' } \tau^* \right) \right]}{\left[ 2\kappa^* \tau^* (\kappa^* - \tau^*) + \kappa^* \tau^{*' } - \tau^* \kappa^{*' } + 2\tau^{*3} \right]^2 + \left[ \kappa^* \tau^{*' } - \tau^* \kappa^{*' } \right]^2 + \left[ 2\kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*' } + 2\kappa^* \tau^{*2} - 2\kappa^{*2} \tau^* - \kappa^{*' } \tau^* \right]^2} \quad (5.4.17)$$

olur. (5.4.16) katsayılar ifadesinde  $\kappa^*$  ve  $\tau^*$  in yerine (4.1.6) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_4 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\ \quad - \varphi'^3 \sin \varphi - \kappa'' + \kappa' \|W\| + 2\kappa \|W\|' - \kappa \|W\| \varphi' + \kappa \|W\|^2 \\ \bar{\theta}_4 = \varphi'' \|W\| + \varphi'^2 \|W\| + \|W\|^3 - \kappa \kappa' - \tau \tau' + \varphi' \|W\|' + \varphi'' \|W\| - 2\|W\| \|W\|' - \|W\|'' \\ \bar{\rho}_4 = \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi \\ \quad + \varphi'^3 \sin \varphi + \tau'' - \tau' \|W\| - 2\tau \|W\|' + \tau \|W\| \varphi' - \tau \|W\|^2 \end{array} \right. \quad (5.4.18)$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.4.17) de yerine yazılırsa  $T^* N^* B^*$  Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_4}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\left\{ \begin{array}{l}
\tilde{\omega}_4 = -\|W\|(\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + \tau' - \tau \|W\|) \\
\quad - \left( \|W\| \varphi' - \|W\|^2 - \|W\|' \right) (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + \tau) \\
\tilde{\phi}_4 = (\varphi' \cos \varphi - \varphi' \sin \varphi + \tau) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - \kappa' + \kappa \|W\|) \\
\quad - (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - \kappa) (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + \tau' - \tau \|W\|) \\
\tilde{\sigma}_4 = (\varphi' \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi - \kappa) \left( \|W\| \varphi' - \|W\|^2 - \|W\|' \right) \\
\quad + \|W\| (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi - \kappa' + \kappa \|W\|)
\end{array} \right. \quad (5.4.19)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tau_{\beta_4} = & \frac{\sqrt{3} \tilde{\omega}_4 \left( \begin{array}{l} \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi''' \sin \varphi + 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^3 \sin \varphi \\ -\kappa'' + \kappa' \|W\| + 2\kappa \|W\|' - \kappa \|W\| \varphi' + \kappa \|W\|^2 \end{array} \right)}{\tilde{\omega}_4^2 + \tilde{\phi}_4^2 + \tilde{\sigma}_4^2} \\
& + \frac{\sqrt{3} \tilde{\phi}_4 \left( \varphi'' \|W\| + \varphi'^2 \|W\| + \|W\|^3 - \kappa \kappa' - \tau \tau' + \varphi' \|W\|' + \varphi'' \|W\| - 2\|W\| \|W\|' - \|W\|'' \right)}{\tilde{\omega}_4^2 + \tilde{\phi}_4^2 + \tilde{\sigma}_4^2} \\
& + \frac{\sqrt{3} \tilde{\sigma}_4 \left( \begin{array}{l} \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi - \varphi''' \sin \varphi - 3\varphi' \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^3 \sin \varphi \\ +\tau'' - \tau' \|W\| - 2\tau \|W\|' + \tau \|W\| \varphi' - \tau \|W\|^2 \end{array} \right)}{\tilde{\omega}_4^2 + \tilde{\phi}_4^2 + \tilde{\sigma}_4^2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

### 5.5. $N^*C^*$ Smarandache Eğrisi

$$\beta_5(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (N^* + C^*)$$

Smarandache eğrisinde  $C^*$  in yerine (4.1.13) dan karşılığı yazılırsa

$$\beta_5(s) = \frac{(\sin \varphi^* T^* + N^* + \cos \varphi^* B^*)}{\sqrt{2}} \quad (5.5.1)$$

olur. Bu eğrinin  $s_{\beta_5}$  yay parametresine göre türevi alınırsa

$$T_{\beta_5} \frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \frac{(\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*) T^* + (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*) B^*}{\sqrt{2}} \quad (5.5.2)$$

olur ve norm alınırsa  $\frac{ds_{\beta_5}}{ds}$  ifadesi

$$\frac{ds_{\beta_5}}{ds} = \sqrt{\frac{(\varphi'^*)^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi'^* \|W^*\|}{2}} \quad (5.5.3)$$

bulunur. Bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa  $\beta_5$  eğrisinin teğet vektörü

$$T_{\beta_5}(s) = \frac{(\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*) T^* + (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*) B^*}{\sqrt{(\varphi'^*)^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi'^* \|W^*\|}} \quad (5.5.4)$$

şeklinde olur. (5.5.1) ifadesinde  $T^*, N^*, B^*, \sin \varphi^*$  ve  $\cos \varphi^*$  in yerine (4.1.7) ve (4.1.16) den karşılıkları yazılırsa Smarandache eğrisinin evolüt eğrisine bağlı ifadesi

$$a = \frac{\|W\|}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}, \quad b = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \|W\|^2}}$$

olmak üzere

$$\beta_5(s) = \frac{(-\cos \varphi + a \sin \varphi) T + b N + (\sin \varphi + a \cos \varphi) B}{\sqrt{2}} \quad (5.5.5)$$

olur. (5.5.4) denkleminde (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.16) bağıntıları dikkate alınırsa (5.5.5) ifadesindeki  $\beta_5$  eğrisinin teğet vektörü

$$\begin{aligned}
T_{\beta_5}(s) = & \frac{(\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - \kappa b)T + (-\|W\| + b')N}{\sqrt{\varphi'^2 + 2\varphi'a' + a'^2 + a^2\varphi'^2 - 2\varphi'ab\|W\| + b^2\|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2}} \\
& + \frac{(\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + \tau b)B}{\sqrt{\varphi'^2 + 2\varphi'a' + a'^2 + a^2\varphi'^2 - 2\varphi'ab\|W\| + b^2\|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2}}
\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

şeklinde bulunur. (5.5.4) ifadesinin tekrar türevi alınırsa katsayılar

$$\left\{ \begin{aligned}
\omega_5 = & \tau^{*2} \varphi^{*''} \cos \varphi^* - \kappa^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \cos^2 \varphi^* - \tau^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* - (\varphi^{*'})^4 \sin \varphi^* \\
& - \kappa^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - \tau^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* + 2\kappa^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* \cos \varphi^* + 2\tau^* (\varphi^{*'})^3 \sin^2 \varphi^* \\
& - \kappa^{*'} (\varphi^{*'})^2 - \tau^{*2} \kappa^* - 2\kappa^{*'} \kappa^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* - 2\kappa^{*'} \varphi^{*'} \tau^* \sin \varphi^* - \tau^* \tau^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* \\
& + \kappa^{*'} (\varphi^{*'})^2 \cos^2 \varphi^* + \tau^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* + \kappa^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} + \kappa^* \tau^* \tau^{*'} - \kappa^* \tau^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* \\
& - \varphi^{*'} \tau^{*'} \kappa^* \sin \varphi^* \\
\phi_5 = & \kappa^* (\varphi^{*'})^3 \cos \varphi^* + 3\kappa^{*3} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + 3\tau^{*2} \kappa^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* - 2\kappa^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos^2 \varphi^* \\
& - 4\kappa^* \tau^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - \kappa^{*2} (\varphi^{*'})^2 - \kappa^{*4} - 2\kappa^{*2} \tau^{*2} + 3\kappa^{*2} \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* \\
& - \tau^{*2} (\varphi^{*'})^2 + 3\tau^{*3} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + \tau^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* - 2\tau^{*2} (\varphi^{*'})^2 \sin^2 \varphi^* \\
\sigma_5 = & \tau^{*'} (\varphi^{*'})^2 + \kappa^{*2} \tau^{*'} - 2\kappa^* \tau^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* - \kappa^{*2} \varphi^{*''} \sin \varphi^* + \kappa^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* \cos \varphi^* \\
& + \tau^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin^2 \varphi^* - (\varphi^{*'})^4 \cos \varphi^* - \kappa^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* - \tau^{*2} (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* \\
& + 2\kappa^* (\varphi^{*'})^3 \cos^2 \varphi^* + 2\tau^* (\varphi^{*'})^3 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - \tau^* \varphi^{*'} \varphi^{*''} - \tau^* \kappa^* \kappa^{*'} + \tau^* \kappa^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* \\
& + \tau^* \kappa^{*'} \varphi^{*'} \cos \varphi^* + \kappa^* \kappa^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* - \kappa^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* - \tau^{*'} (\varphi^{*'})^2 \sin^2 \varphi^*
\end{aligned} \right. \tag{5.5.7}$$



olmak üzere  $T'_{\beta_5}(s)$  türevi

$$T'_{\beta_5}(s) = \frac{\sqrt{2}(\omega_5 T^* + \phi_5 N^* + \sigma_5 B^*)}{\left( (\phi')^2 + \|W^*\|^2 - 2\phi' \|W^*\| \right)^2} \quad (5.5.8)$$

olur. (5.5.7) ifadesinde  $\kappa^*, \tau^*$  ve  $\phi'$  in yerine (4.1.6) ve (4.1.10) den karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_5 = \left( (\phi'' + a'' - a\phi'^2) \sin \phi + (\phi'^2 + 2a'\phi' + a\phi'') \cos \phi - \kappa'b - 2\kappa b' + \kappa \|W\| \right) \\ \cdot \sqrt{\phi'^2 + 2\phi'a' + a'^2 + a^2\phi'^2 - 2\phi'ab \|W\| + b^2 \|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2} \\ - ((\phi' + a') \sin \phi + a\phi' \cos \phi - \kappa b) \\ \cdot \left( \sqrt{\phi'^2 + 2\phi'a' + a'^2 + a^2\phi'^2 - 2\phi'ab \|W\| + b^2 \|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2} \right)' \\ \bar{\phi}_5 = \left( a\phi' \|W\| - b \|W\|^2 - \|W\|' + b'' \right) \\ \cdot \sqrt{\phi'^2 + 2\phi'a' + a'^2 + a^2\phi'^2 - 2\phi'ab \|W\| + b^2 \|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2} \\ + (\|W\| + b') \cdot \left( \sqrt{\phi'^2 + 2\phi'a' + a'^2 + a^2\phi'^2 - 2\phi'ab \|W\| + b^2 \|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2} \right)' \\ \bar{\sigma}_5 = \left( (\phi'' + a'' - a\phi'^2) \cos \phi - (2a'\phi' + \phi'^2 + a\phi'') \sin \phi + \tau'b + 2\tau b' - \tau \|W\| \right) \\ \cdot \sqrt{\phi'^2 + 2\phi'a' + a'^2 + a^2\phi'^2 - 2\phi'ab \|W\| + b^2 \|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2} \\ - ((\phi' + a') \cos \phi - a\phi' \sin \phi + \tau b) \\ \cdot \left( \sqrt{\phi'^2 + 2\phi'a' + a'^2 + a^2\phi'^2 - 2\phi'ab \|W\| + b^2 \|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2} \right)' \end{array} \right.$$

şeklinde olur. Bulunan bu ifadeler  $T'_{\beta_5}(s)$  türev ifadesinde yerine yazılırsa  $T'_{\beta_5}(s)$  vektörünün evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$T'_{\beta_5}(s) = \frac{\sqrt{2}(\bar{\omega}_5 T + \bar{\phi}_5 N + \bar{\sigma}_5 B)}{\left(\varphi'^2 + 2\varphi'a' + a'^2 + a^2\varphi'^2 - 2\varphi'ab\|W\| + b^2\|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.5.9)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_5$  eğrisinin eğriliği  $\kappa_{\beta_5}$  ile gösterilirse (5.5.8) bağıntısından  $\kappa_{\beta_5}$  eğriliği

$$\kappa_{\beta_5} = \|T'_{\beta_5}\|, \quad (5.5.10)$$

$$\kappa_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}}{\left(\left(\varphi^{*'}\right)^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi^{*'}\|W^*\|\right)^2}$$

olur. Burada  $\kappa^*$ ,  $\tau^*$  ve  $\varphi^{*'}$  in yerine (4.1.6) ve (4.1.16) den karşılıkları yazılırsa  $\kappa_{\beta_5}$  eğriliğinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$\kappa_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}}{\left(\varphi'^2 + 2\varphi'a' + a'^2 + a^2\varphi'^2 - 2\varphi'ab\|W\| + b^2\|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.5.11)$$

şekline dönüşür.  $\beta_5$  eğrisinin aslinormali  $N_{\beta_5}$  ile gösterilirse (5.5.8) bağıntısından

$$N_{\beta_5} = \frac{T'_{\beta_5}}{\|T'_{\beta_5}\|},$$

$$N_{\beta_5} = \frac{\omega_5 T^* + \phi_5 N^* + \sigma_5 B^*}{\sqrt{\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2}}$$

olur. Burada  $T^*$ ,  $N^*$  ve  $B^*$  in yerine (4.1.7) den karşılıkları yazılırsa  $N_{\beta_5}$  ifadesinin evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$N_{\beta_5} = \frac{\bar{\omega}_5 T + \bar{\phi}_5 N + \bar{\sigma}_5 B}{\sqrt{\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2}} \quad (5.5.12)$$

şeklinde bulunur.  $B_{\beta_5} = T_{\beta_5} \times N_{\beta_5}$  olduğundan  $B_{\beta_5}$  vektörü

$$B_{\beta_5} = \frac{\phi_5 (\varphi'^* \sin \varphi^* - \tau^*) T^* + (\omega_5 (\tau^* - \varphi'^* \sin \varphi^*) - \sigma_5 (\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*)) N^*}{\sqrt{((\varphi'^*)^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi'^* \|W^*\|)(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}} \quad (5.5.13)$$

$$+ \frac{(\phi_5 (\varphi'^* \cos \varphi^* - \kappa^*)) B^*}{\sqrt{((\varphi'^*)^2 + \|W^*\|^2 - 2\varphi'^* \|W^*\|)(\omega_5^2 + \phi_5^2 + \sigma_5^2)}}$$

olur. Burada  $T^*, N^*, B^*, \kappa^*, \tau^*, \sin \varphi^*, \cos \varphi^*$  ve  $\varphi'^*$  in yerine karşılıkları yazılırsa  $B_{\beta_5}$  binormal vektörünün evolüt eğrisinin eğriliklerine bağlı ifadesi

$$B_{\beta_5} = \frac{\bar{\sigma}_5 (-\|W\| + b') - \bar{\phi}_5 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + \tau b)}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2)(\varphi'^2 + 2\varphi'a' + a'^2 + a^2\varphi'^2 - 2\varphi'ab\|W\| + b^2\|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2)}} T$$

$$+ \frac{\bar{\omega}_5 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + \tau b) - \bar{\sigma}_5 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - \kappa b)}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2)(\varphi'^2 + 2\varphi'a' + a'^2 + a^2\varphi'^2 - 2\varphi'ab\|W\| + b^2\|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2)}} N$$

$$+ \frac{\bar{\phi}_5 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - \kappa b) - \bar{\omega}_5 (-\|W\| + b')}{\sqrt{(\bar{\omega}_5^2 + \bar{\phi}_5^2 + \bar{\sigma}_5^2)(\varphi'^2 + 2\varphi'a' + a'^2 + a^2\varphi'^2 - 2\varphi'ab\|W\| + b^2\|W\|^2 + \|W\|^2 - 2b'\|W\| + b'^2)}} B \quad (5.5.14)$$

şeklinde bulunur.  $\beta_5$  eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri, sırasıyla,

$$\beta_5'' = \frac{\left( \varphi^{*''} \cos \varphi^* - (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - \kappa^{*'} \right) T^* + \left( \kappa^* \varphi^{*'} \cos \varphi^* + \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* - \kappa^{*2} - \tau^{*2} \right) N^*}{\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{\left( \tau^{*'} - \varphi^{*''} \sin \varphi^* - (\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* \right) B^*}{\sqrt{2}},$$

$$\beta_5''' = \frac{\eta_5 T^* + \theta_5 N^* + \rho_5 B^*}{\sqrt{2}}$$

olur. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_5 = \varphi^{*'''} \cos \varphi^* - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''} \sin \varphi^* - (\varphi^{*'})^3 \cos \varphi^* - \kappa^{*''} - \kappa^{*2} \varphi^{*'} \cos \varphi^* \\ \quad - \kappa^* \tau^* \varphi^{*'} \sin \varphi^* + \kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} \\ \theta_5 = 2\kappa^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* - 2\kappa^* (\varphi^{*'})^2 \sin \varphi^* - 3\kappa^* \kappa^{*'} + \kappa^* \varphi^{*''} \cos \varphi^* \\ \quad + \tau^{*'} \varphi^{*'} \sin \varphi^* + 2\tau^* \varphi^{*''} \sin \varphi^* + 2(\varphi^{*'})^2 \cos \varphi^* - 3\tau^* \tau^{*'} \\ \rho_5 = (\kappa^* \tau^* \varphi^{*'} - 3\varphi^{*'} \varphi^{*''}) \cos \varphi^* + (\tau^{*2} \varphi^{*'} - \varphi^{*''} + (\varphi^{*'})^3) \sin \varphi^* \\ \quad - \kappa^{*2} \tau^* - \tau^{*3} + \tau^{*''} \end{array} \right. \quad (5.5.15)$$

şeklinde birer katsayıdır.  $\beta_5$  eğrisinin torsiyonu  $\tau_{\beta_5}$  ile gösterilirse  $\tau_{\beta_5}$  torsiyonu

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\langle \beta_5' \times \beta_5'', \beta_5''' \rangle}{\|\beta_5' \times \beta_5''\|^2}$$

dır. Burada  $\beta_5'$ ,  $\beta_5''$  ve  $\beta_5'''$  değerleri yerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$\tau_{\beta_5}$  torsiyonu

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\eta}_5 = \left( \kappa^* (\varphi')^2 \sin \varphi^* \right) \cos \varphi^* + \left( \tau^* (\varphi')^2 \sin \varphi^* - \kappa^{*2} \varphi'^* - 2\tau^{*2} \varphi'^* \right) \sin \varphi^* + \kappa^{*2} \tau^* + \tau^{*3} \\ \tilde{\theta}_5 = \left( \tau^* \varphi'^{**} - \tau'^* \varphi'^* - \kappa^* (\varphi')^2 \right) \cos \varphi^* + \left( \kappa'^* \varphi'^* - \tau^* (\varphi')^2 - \kappa^* \varphi'^{**} \right) \sin \varphi^* - \tau^* \kappa'^* \\ + (\varphi')^3 + \kappa^* \tau'^* \\ \tilde{\rho}_5 = \left( \kappa^* (\varphi')^2 \cos \varphi^* + \tau^* (\varphi')^2 \sin \varphi^* - 2\kappa^{*2} \varphi'^* - \tau^{*2} \varphi'^* \right) \cos \varphi^* - \kappa^* \tau^* \varphi'^* \sin \varphi^* \\ + \kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} \end{array} \right.$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2} \tilde{\eta}_5 \left( \begin{array}{l} \varphi'^{***} \cos \varphi^* - 3\varphi'^* \varphi'^{**} \sin \varphi^* - (\varphi')^3 \cos \varphi^* - \kappa^{**} - \kappa^{*2} \varphi'^* \cos \varphi^* \\ - \kappa^* \tau^* \varphi'^* \sin \varphi^* + \kappa^{*3} + \kappa^* \tau^{*2} \end{array} \right)}{\tilde{\eta}_5^2 + \tilde{\theta}_5^2 + \tilde{\rho}_5^2}$$

$$+ \frac{\sqrt{2} \tilde{\theta}_5 \left( \begin{array}{l} 2\kappa^* \varphi'^{**} \cos \varphi^* - 2\kappa^* (\varphi')^2 \sin \varphi^* - 3\kappa^* \kappa'^* + \kappa^* \varphi'^{**} \cos \varphi^* \\ + \tau'^* \varphi'^* \sin \varphi^* + 2\tau^* \varphi'^{**} \sin \varphi^* + 2(\varphi')^2 \cos \varphi^* - 3\tau^* \tau'^* \end{array} \right)}{\tilde{\eta}_5^2 + \tilde{\theta}_5^2 + \tilde{\rho}_5^2} \quad (5.5.16)$$

$$+ \frac{\sqrt{2} \tilde{\rho}_5 \left( \begin{array}{l} (\kappa^* \tau^* \varphi'^* - 3\varphi'^* \varphi'^{**}) \cos \varphi^* + (\tau^{*2} \varphi'^* - \varphi'^{***} + (\varphi')^3) \sin \varphi^* \\ - \kappa^{*2} \tau^* - \tau^{*3} + \tau^{**} \end{array} \right)}{\tilde{\eta}_5^2 + \tilde{\theta}_5^2 + \tilde{\rho}_5^2}$$

olur. (5.5.15) katsayılar ifadesinde  $\kappa^*, \tau^*, \sin \varphi^*, \cos \varphi^*$  ve  $\varphi'^*$  in yerine (4.1.6) ve (4.1.16) dan karşılıkları yazılırsa yeni katsayılar

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_5 = (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + a'' \sin \varphi + 2a' \varphi' \cos \varphi + a\varphi'' \cos \varphi - a\varphi'^2 \sin \varphi - \kappa' b - 2\kappa b' + \kappa \|W\|)' \\ \quad - \kappa a \varphi' \|W\| + \kappa b \|W\|^2 + \kappa \|W\|' - \kappa b'' \\ \bar{\theta}_5 = \varphi'^2 \|W\| + 2a' \varphi' \|W\| + a\varphi'' \|W\| - b(\kappa \kappa' + \tau \tau') - 2b' \|W\|^2 + \|W\|^3 \\ \bar{\rho}_5 = (\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + a'' \cos \varphi - 2a' \varphi' \sin \varphi - a\varphi'' \sin \varphi - a\varphi'^2 \cos \varphi + \tau' b + 2\tau b' - \tau \|W\|)' \\ \quad + \tau a \varphi' \|W\| - \tau b \|W\|^2 - \tau \|W\|' + \tau b'' \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur ve bu katsayılar (5.5.16) bağıntısında yerine yazılırsa  $N^*C^*$  Smarandache eğrisinin  $\tau_{\beta_5}$  torsiyonunun evolüt eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + a'' \sin \varphi + 2a' \varphi' \cos \varphi + a\varphi'' \cos \varphi - a\varphi'^2 \sin \varphi - \kappa' b - 2\kappa b' + \kappa \|W\| \\ \varepsilon_2 = a\varphi' \|W\| - b \|W\|^2 - \|W\|' + b'' \\ \varepsilon_3 = \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + a'' \cos \varphi - 2a' \varphi' \sin \varphi - a\varphi'' \sin \varphi - a\varphi'^2 \cos \varphi + \tau' b + 2\tau b' - \tau \|W\| \end{array} \right.$$

ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_4 = \varepsilon_3 (-\|W\| + b') - \varepsilon_2 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + \tau b) \\ \varepsilon_5 = \varepsilon_1 (\varphi' \cos \varphi + a' \cos \varphi - a\varphi' \sin \varphi + \tau b) - \varepsilon_3 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - \kappa b) \\ \varepsilon_6 = \varepsilon_2 (\varphi' \sin \varphi + a' \sin \varphi + a\varphi' \cos \varphi - \kappa b) - \varepsilon_1 (-\|W\| + b') \end{array} \right.$$

olmak üzere

$$\tau_{\beta_5} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_4 \left[ \begin{array}{l} \left( \varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi + a'' \sin \varphi + 2a' \varphi' \cos \varphi + a\varphi'' \cos \varphi - a\varphi'^2 \sin \varphi \right)' \\ -\kappa' b - 2\kappa b' + \kappa \|W\| \\ -\kappa a \varphi' \|W\| + \kappa b \|W\|^2 + \kappa \|W\|' - \kappa b'' \end{array} \right]}{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2} + \frac{\sqrt{2}\varepsilon_5 \left[ \varphi'^2 \|W\| + 2a' \varphi' \|W\| + a\varphi'' \|W\| - b(\kappa \kappa' + \tau \tau') - 2b' \|W\|^2 + \|W\|^3 \right]}{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2} + \frac{\sqrt{2}\varepsilon_6 \left[ \begin{array}{l} \left( \varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi + a'' \cos \varphi - 2a' \varphi' \sin \varphi - a\varphi'' \sin \varphi - a\varphi'^2 \cos \varphi \right)' \\ +\tau' b + 2\tau b' - \tau \|W\| \\ +\tau a \varphi' \|W\| - \tau b \|W\|^2 - \tau \|W\|' + \tau b'' \end{array} \right]}{\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2}$$

şeklinde elde edilir.

**Örnek 5.1:**  $\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, s)$  helis eğrisi bir evolüt eğrisidir. Bu eğrinin

Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, -\cos s, 1), \quad N(s) = (\cos s, \sin s, 0), \quad B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, 1),$$

$$C(s) = (0, 0, 1),$$

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tau(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

şeklinde bulunur. Bu eğriye ait involüt eğrisinin denklemi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (-s + c)T(s)$$

idi.  $\alpha(s)$  ve  $T(s)$  değerleri yerine yazılırsa involüt eğrisinin denklemi

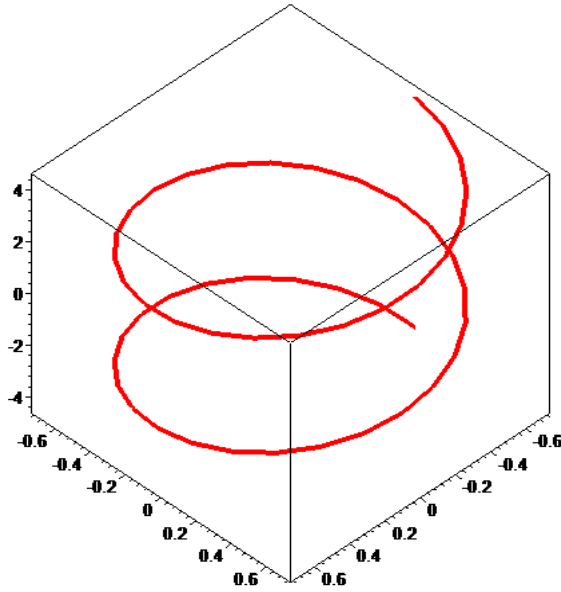
$$\alpha^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s + (c-s)\sin s, -\sin s - (c-s)\cos s, c)$$

olur.  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisinin Frenet vektörleri, birim Darboux vektörü, eğrilik ve torsiyonu

$$T^*(s) = (\cos s, \sin s, 0), N^*(s) = (-\sin s, \cos s, 0), B^*(s) = (0, 0, 1), C^*(s) = (0, 0, 1),$$

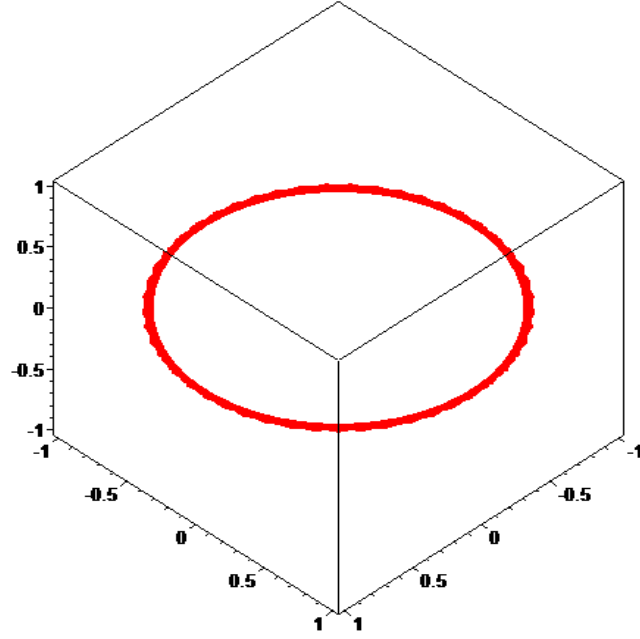
$$\kappa^*(s) = \frac{\sqrt{2}}{(c-s)}, \tau^*(s) = 0$$

şeklinde bulunur. İnvölüt eğrisine ait Smarandache eğrileri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.

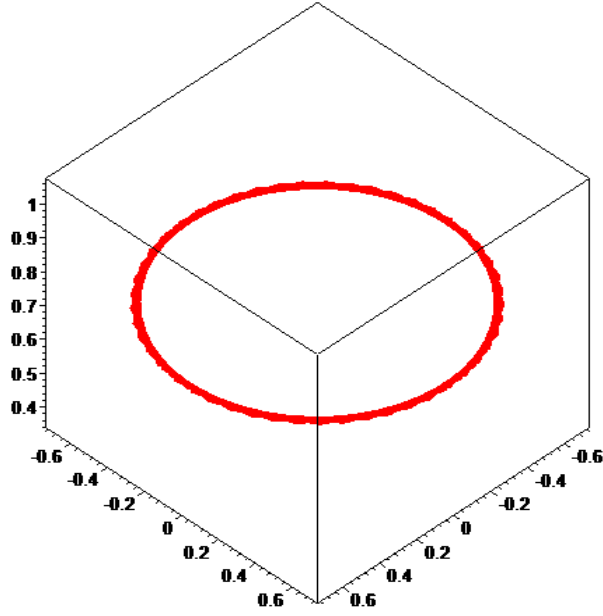


Şekil 5.1.  $\alpha = \alpha(s)$  helis eğrisi

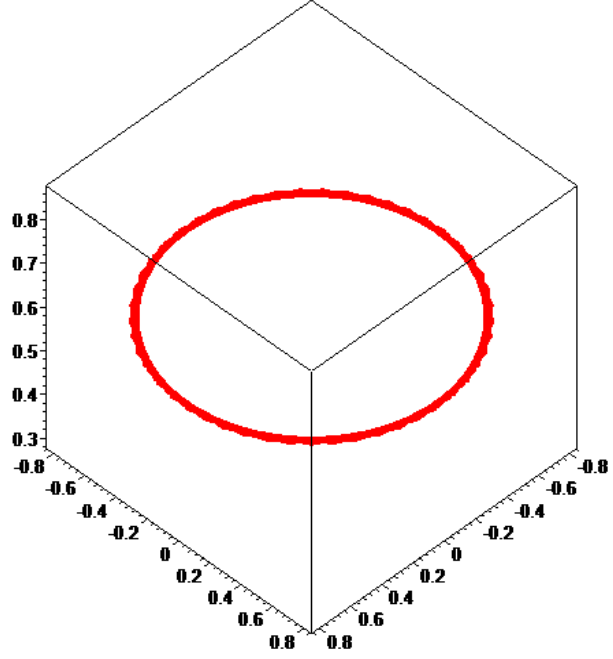




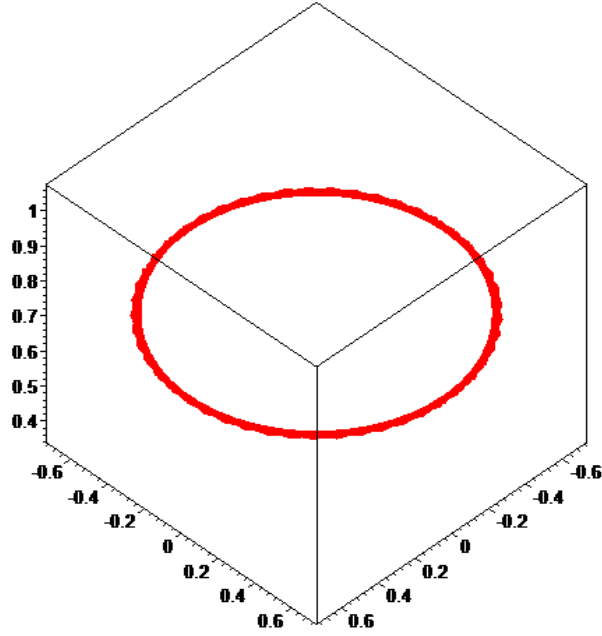
Şekil 5.2.  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisine ait  $T^*N^*$  - Smarandache eğrisi



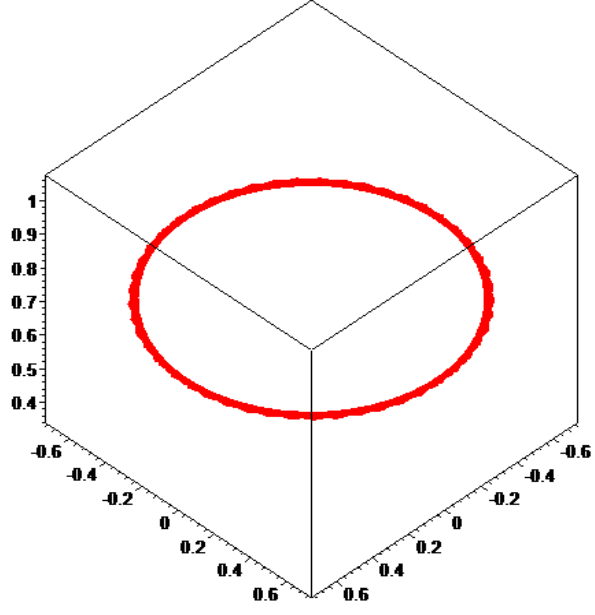
Şekil 5.3.  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisine ait  $N^*B^*$  - Smarandache eğrisi



Şekil 5.4.  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisine ait  $T^*N^*B^*$  - Smarandache eğrisi



Şekil 5.5.  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisine ait  $T^*B^*$  - Smarandache eğrisi



Şekil 5.6.  $\alpha^*(s)$  involüt eğrisine ait  $N^*C^*$ -Smarandache eğrisi

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

### 6.1. Sonuçlar

Bu tezde ilk olarak,  $\alpha^* : I \rightarrow E^3$  eğrisi  $\alpha : I \rightarrow E^3$  eğrisinin bir involütü olarak alındığında konum vektörü,  $\alpha^*$  involüt eğrisinin Frenet vektörleri tarafından çizilen regüler Smarandache eğrileri

$$\beta_1 = \beta_{T^*N^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^*) \quad T^*N^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_2 = \beta_{N^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + B^*) \quad N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_3 = \beta_{T^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + B^*) \quad T^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_4 = \beta_{T^*N^*B^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^* + N^* + B^*) \quad T^*N^*B^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

$$\beta_5 = \beta_{N^*C^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^* + C^*) \quad N^*C^* \text{-Smarandache eğrisi}$$

şeklinde verilmiş olup bu eğrilerin eğrilik ve burulmaları hesaplandı.

İkinci olarak  $\alpha^*$  eğrisinin  $\{T^*, N^*, B^*\}$  Frenet vektörleri ve  $C^*$  birim Darboux vektörü konum vektörü olarak alındığında elde edilen Smarandache eğrilerinin eğrilik ve burulmaları  $\alpha$  evolüt eğrisinin Frenet elemanlarına bağlı olarak ifade edildi.

Son olarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

**Sonuç 6.1:**  $(\alpha, \alpha^*)$  Invölüt-evölüt eğrilerinden elde edilen Smarandache eğrilerinin hiçbiri Invölüt-evölüt eğrilerine dahil değildir.

## 6.2. Öneriler

Bu çalışma  $(\alpha, \alpha^*)$  evolüt-involüt eğrileri ele alınarak yapılmıştır.

**a)**  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti olması durumunda yapılabilir.

**b)**  $(\alpha, \alpha^*)$  Mannheim eğri çifti içinde yapılabilir.

Bu iki çalışma Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans Tezi olarak yapılmaktadır. Benzer şekilde  $(\alpha, \alpha^*)$  Evolüt-involüt eğrileri,  $(\alpha, \alpha^*)$  Bertrand eğri çifti ve  $(\alpha, \alpha^*)$  Mannheim eğri çifti için yapılan bu çalışmalar Lorentz uzayında ve Dual uzayda da yapılabilir. Hatta bu uzaylar üzerinde değişik çatılar alınarak bu çatılar tarafından üretilecek Smarandache eğrileri tanımlanabilir ve bu eğrilerin bazı özellikleri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] **Ali, A. T., 2010.** Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.2, pp.30-36.
- [2] **Bektaş Ö.,Yüce S., 2013.** Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3- Space, Romanian Journal of Mathematics and Computer science, vol:3,issue:1,pp:48-59.
- [3] **Bayrak, N., Bektaş, Ö. and Yüce, S., 2012.** Special Smarandache Curves in  $E_1^3$ , International Conference on Applied Analysis and Algebra, 20-24 Haziran 2012, Yıldız Teknik Üniversitesi, pp.209, İstanbul.
- [4] **Çalışkan, A., Şenyurt, S., 2013.** Smarandache Curves In terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves, XI. Geometri Sempozyumu,Ordu.
- [5] **Çetin, M., Tuncer, Y. and Karacan M.K., 2011.** Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space, arxiv:1106.3202 v1 [math.DG].
- [6] **Fenchel, W., 1951.** On The Differential Geometry of Closed Space Curves, Bull. Amer. Math. Soc. 57, 44-54, 1951.
- [7] **Hacısalıhoğlu, H.H., 1983.** Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. No.7, Malatya.
- [8] **Kahraman, T., Önder, M. and Uğurlu, H.H., 2008.** Dual Smarandache Curves and Smarandache Ruled Surfaces.arxiv:1205.2180 [math.GM].
- [9] **Sabuncuoğlu, A., 2006.** “Diferansiyel Geometri” , Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [10] **Millman, R.S. and Parker, G.D., 1977.** Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 265p.
- [11] **Şenyurt, S., and Sivas, S., 2013.** Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama, Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., Cilt:3, Sayı:1,2013, 46-60.

- [12] **Taşköprü, K., and Tosun, M., 2014.** Smarandache Curves According to Sabban Frame on  $S^2$ , Boletim da Sociedade paranense de Mathematica 3 srie. Vol:32, no:1,pp.51-59 issn-0037-8712.
- [13] **Thorpe, J.A., 1979.** Elementary Topics In Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, Heidelberg-Berlin, 254p..
- [14] **Turgut, M., and Yılmaz, S., 2008.** Smarandache Curves in Minkowski space-time, International Journal of Mathematical Combinatorics, Vol.3, pp.51-55.
- [15] **Wang, F.,and Liu, H., 2008.** Mannheim Partner Curves in 3-Space, Journal of Geometry, vol. 88, no. 1-2,pp. 120-126(7).
- [16] **Bilici, M., 1999.** İnvolut-Evolüt Eğrilerinin Küresel Göstergelerinin Eğrilikleri ve Tabii Liftleri, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,Samsun,49s.
- [17] **O'Neill, B., 1996.** Elementary Differential Geometry, Academic Press Inc. New York,411p.
- [18] **Çalışkan, M., Bilici, M., 2002.** Some Characterizations for The Pair of Involute-Evolute Curves in Euclidean Space  $E^3$ , Bulletin of Pure and Applied Sciences. Vol. 21E (No:2), 289-294.
- [19] **Çalışkan, M., Bilici, M., 2006.** On The Involutes of Timelike Curves in  $IR_1^3$ , IV. International Geometry Symposium, Zonguldak Karaelmas University 17-21 July.
- [20] **Bükcü, B., Karacan, M.K., 2007.** On the Involute and Evolute Curves of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space, Int. J. Math. Sciences, Vol. 2, no. 5 , 221-232.
- [21] **Kılıçoğlu, Ş., 2011.**On the Involute B-scrolls in the Euclidean 3-space  $IE^3$ , XIII.International Conference Geometry, Integrability and Quantization, June 3-8 2011, Varna, Bulgaria.

## ÖZGEÇMİŞ

- Adı-Soyadı** : Selin SİVAS
- Doğum Yeri** : Ordu
- Doğum Tarihi** : 04.11.1990
- Medeni Hali** : Bekar
- Bildiği Yabancı Dil** : İngilizce
- İletişim Bilgileri** : selin\_svs\_90@hotmail.com
- Lise** : Özel Ordu Seçkin Fen Lisesi (Seçkin Kolej)-2007
- Lisans** : Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik  
Bölümü-2011
- Tezsiz Yüksek Lisans** : Ondokuz Mayıs Üniversitesi-2014