λ –İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ARACILIĞIYLA KOROVKİN TİPİ TEOREMLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

YASEMİN PARK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

λ –İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ARACILIĞIYLA KOROVKİN TİPİ TEOREMLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

YASEMİN PARK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

ORDU – 2011

λ –İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ARACILIĞIYLA KOROVKİN TİPİ TEOREMLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde dizi uzayları ve matris dönüşümleri ile pozitif lineer operatörler tanıtılıp bunlara ilişkin bazı bilinen sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde $C[a,b]$ uzayında Korovkin tipi teoremler ve bazı sonuçları verilmiştir. Ayrıca Korovkin tipi teoremlerin bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde istatistiksel yakınsaklık yoluyla bazı yaklaşım teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Bu bölümde ilk olarak istatistiksel yakınsaklık ve yoğunluk kavramları tanıtılıp bunlarla ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra Korovkin ve Weierstrass tipi yaklaşım teoremleri ifade edilmiş, istatistiksel yakınsaklık mertebesi tanıtılmıştır. $L_p[a,b]$ uzayında pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı üzerinde durulmuştur. Beşinci ve son bölümde ise öncelikle λ –istatistiksel yakınsaklık tanıtılıp daha sonra dördüncü bölümde yer alan Korovkin tipi teoremler λ –istatistiksel yakınsaklık yardımıyla genelleştirilmiştir. Son olarak ise λ –istatistiksel yakınsaklık mertebesi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, pozitif lineer operatörler, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, λ –istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık mertebesi, λ –istatistiksel yakınsaklık mertebesi, Bernstein polinomları.

GENERALIZED KOROVKİN TYPE THEOREMS BY λ –STATISTICAL CONVERGENCE

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter the sequence spaces and matrix transformation and positive linear operators have been recalled and some known results concerning them have also been considered. In the third chapter Korovkin type theorems in $C[a,b]$ space and several results have been presented. Furthermore some applications ofKorovkin type theorems have been given. In the fourth chapter some approximation theorems are proved by statistical convergence. In this chapter, firstly, it is given the concepts of statistical convergence and density and some definition and theorems related with them. Also Korovkin and Weierstrass type approximation theorems and the order of statistical convergence are stated. Statistical convergence of positive linear operators is considered in the space $L_p[a,b]$. In the fifty chapter, λ-statistical convergence is defined and a generalization of Korovkin type theorems given in previous chapter obtained by λ-statistical convergence. Finally the order of λ-statistical convergence is also given.

Key words: Statistical convergence, positive linear operators, Korovkin type approximation theorem, λ –statistical convergence, the order of statistical convergence, the order of λ –statistical convergence, Bernstein polynomials.

TEŞEKKÜRLER

Tezimin hazırlanması esnasında her türlü yardımını esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, cesaretlendiren danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN'e tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm Matematik Bölümü hocalarıma çok teşekkür ederim. Tez konumu belirleyip çalışmalarıma başlangıç oluşturan, beni çalıştıran ve yönlendiren Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM'a (Cumhuriyet Üniversitesi) ve tezimin derlenmesinde bana yardımcı olan Sayın Araş. Gör. Serkan DEMİRİZ'e (Gaziosmanpaşa Üniversitesi) teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım süresince daima yanımda olan ve beni destekleyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..…………………………………….………………………………. i

ABSTRACT ..……………………….…………………………………….. ii

TEŞEKÜR …….…………………………….…………………………… iii

SİMGELER ..…………………………………………………………… vi

1.GİRİŞ ………………………………………………………………………… 1

2.TEMEL KAVRAMLAR …………………………………………………… 3

2.1 Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri ……………………………….…... 3

2.2 Pozitif Lineer Operatörler ..…………………………………………… 5

3. $C[a,b]$ UZAYINDA KOROVKİN TEOREMİ VE UYGULAMALARI ….. 9

3.1. Korovkin Teoremi …………………………………………………. 9

3.2 Korovkin Teoreminin Uygulaması ………………………………………. 13

4. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ARACILĞIYLA BAZI YAKLAŞIM TEOREMLERİ ………………………………………………………………. 16

4.1 İstatistiksel Yakınsaklık ve Yoğunluk ..……………….…………………….. 16

4.2 İstatistiksel Yakınsaklık Kullanılarak Elde Edilen Bazı Korovkin ve Weierstrass Tipi Yaklaşım Teoremleri ..…………………………………….…………….... 24

4.3 İstatistiksel Yakınsaklık Mertebesi ..……………………………………... 29

4.4 $L_p[a,b]$ Uzayında Pozitif Lineer Operatörlerin İstatistiksel Yakınsaklığı ..…. 31

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KAVRAMI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN KOROVKİN TİPİ TEOREMLER ………. 33

5.1 λ –İstatistiksel Yakınsaklık ...………..………………………..………… 33

5.2 $C[a,b]$ Uzayında Pozitif Lineer Operatörler Dizisinin λ –İstatistiksel Yakınsaklığı ………………………………………………………………………………………. 37

5.3 λ –İstatistiksel Yakınsaklık Mertebesi ……………………………………..…… 43

6. SONUÇ VE ÖNERİLER ……………………………………………………….. 45

7. KAYNAKLAR ...…………………………………………………………… 46

8. ÖZGEÇMİŞ ………………………………………………………….......... 48

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
ω	: tüm diziler uzayı
ℓ_∞	: sınırlı diziler uzayı
c	: yakınsak diziler uzayı
c_0	: sıfıra yakınsak diziler uzayı
C $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	: $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı
$Ax = \left(A_n(x)\right)$	: $(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k)$ dönüşüm dizisi
C_1	: 1. mertebeden Cesaro operatörü
$\delta(A)$	: A kümesinin doğal yoğunluğu
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
w_p	: kuvvetli p-Cesaro yakınsak dizilerin kümesi
$L_p[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	: p-yinci mertebeden Lebesque anlamında integralllenebilen fonksiyonların uzayı
B $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	: $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ üzerinde sınırlı fonksiyonların uzayı
$L_n(f; x)$	: pozitif lineer operatörler
$\rightrightarrows$	: düzgün yakınsaklık
st_λ	: λ-istatistiksel yakınsak diziler uzayı
(V, λ)	: de la Vaile-Pousion operatörü
$\{B_n(f; x)\}$	: Bernstein polinomlar dizisi

$t_n(x)$	: de la Vaile-Pousion genellenmesi
$(st) - o(n^{-\beta})$	: $o(n^{-\beta})$ oranında istatistiksel yakınsak
$(st_\lambda) - o(n^{-\beta})$	: $o(n^{-\beta})$ oranında λ- istatistiksel yakınsak
$\mu(E)$	: E kümesinin ölçüsü

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1949 yılında Steinhaus tarafından Polonya'da Wroclaw Üniversitesinde bir konferansta tanıtıldı. Daha sonra 1951 yılında Fast tarafından geliştirildi. İstatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirme fikri ise ilk defa 1953 yılında Buck tarafından düşünülmüştür. İstatistiksel Yakınsaklık kavramı matematiğin birçok alanı ile olan ilişkisi nedeniyle uzun süredir birçok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Toplanabilme Teorisi, Fonksiyonel Analiz, Fourier Serileri, Sayılar Teorisi, Ölçü Teorisi, İstatistik, Optimizasyon Teorisi ve Yaklaşımlar Teorisi gibi birçok alanda kullanılan istatistiksel yakınsaklık son yıllarda Connor, Khan, Maddox, Moricz, Gadjiev, Orhan, Pehlivan, Duman tarafından çalışılmıştır ve çalışmalar hızla devam etmektedir.

Fonksiyonlar teorisinin en çok uygulaması olan dalı yaklaşımlar teorisidir. Genelde fonksiyonların yaklaşmasını inceleyen en basit yapılar pozitif lineer operatörler yardımıyla tanımlanabildiğinden 1960 lardan beri yaklaşımlar teorisinde pozitif lineer operatörler önemli bir yere sahiptir. Pozitif operatörler pozitif fonksiyonları yine pozitif fonksiyonlara dönüştürdüğünden dolayı monoton operatörlerdir ve bu özellik birçok önemli eşitsizliği ispatlamaya olanak sağlar. 1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımını incelemiştir. 1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve Bohman'ın koşullarının genel halde de geçerli olduğunu göstermiştir. Bu teori polinomsal yaklaşım teorisinde, fonksiyonel analizin çeşitli alanlarında, diferansiyelin ve integral denklemlerin sayısal çözümlerinde uygulamalara sahiptir.

Klasik Korovkin teoremi, bir pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsayıp yakınsamasına ilişkin şartları belirler (Bohman 1952, Korovkin 1953). Matris toplanabilme metotları Korovkin yaklaşım teorisinde ilk defa 1979 yılında Swetits tarafından kullanılmıştır (Swetits 1979). Klasik Korovkin teoremindeki pozitif lineer operatör dizisinin birim operatöre yakınsamaması durumunda istatistiksel yakınsaklık metodu düşünülmüş ve bu metot yardımı ile klasik Korovkin teoremi geliştirilmiştir (Gadjiev and Orhan 2002). 2000 yılında Mursaleen λ –istatistiksel yakınsaklığı tanımlamıştır (Mursaleen 2000). 2010 yılında ise λ –istatistiksel yakınsaklıktan yola çıkarak genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklık yoluyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde edilmiştir (Osama H.H. Edely, S.A. Mohiuddine, Abdullah K. Noman; 2010). Bu tez ise bu çalışmaların derlenmesinden oluşmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde dizi uzayları ve matris dönüşümleri ile pozitif lineer operatörler tanıtılacak ve tez boyunca ihtiyaç duyulacak bazı tanım, teorem ve notasyonlar hatırlatılacaktır.

2.1. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Bu kısımda tezimizde ihtiyaç duyacağımız matris toplanabilme metodundan ve buna ilişkin bazı sonuçlardan söz edilecektir. Öncelikle dizi uzaylarını ve matris toplanabilme metodunu hatırlatacağız.

Tanım 2.1.1: Reel yada kompleks terimli tüm dizi uzayları s veya w, sınırlı diziler uzayı ℓ_∞, yakınsak diziler uzayı c, sıfıra yakınsak diziler uzayı ise c_0 ile gösterilecektir. Yani

$$\ell_\infty := \{x = (x_n) \in s : sup_n |x_n| \leq c_x \text{ olacak şekilde } c_x > 0 \text{ var}\}$$

$$c := \left\{x = (x_n) \in s : \lim_n x_n = \text{mevcut}\right\}$$

$$c_0 := \left\{x = (x_n) \in s : \lim_n x_n = 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2: $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris ve $X \subset s$ olsun. $x \in X$ olmak üzere $x = (x_n)$ dizisi için

$$y_n \coloneqq A_n(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k\,, \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{2.1}$$

yakınsak ise $Ax = \big(A_n(x)\big)$ dönüşüm dizisi mevcut denir. Eğer X ve Y, tüm diziler uzayı s nin iki alt kümesi olmak üzere $x \in X$ için $\big(A_n(x)\big)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $\big(A_n(x)\big) \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Eğer $A_n(x) \to x_0$ $(n \to \infty)$ ise (x_n) dizisine x_0 değerine A-toplanabilirdir (veya A-limitlenebilirdir) denir (Sınırlı dizileri yine sınırlı dizilere dönüştüren dönüşümlere limitleme metodu denir.) ve bu durum $A - limx = x_0$ ile gösterilir. Toplamı ve limiti koruyan matrislerin sınıfı ise (X, Y, p) ile gösterilir. Eğer özel olarak

$A \in (c,c)$ ise A ya konservatif (korunumlu) $A \in (c,c;p)$ ise A ya regüler matris denir. (2.1) serisi her n için yakınsak olacağından matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. Burada matris dönüşümünü kullanmamızın sebebi iki dizi uzayı arasındaki en genel dönüşüm olmasıdır. Aşağıda toplanabilme teorisinde büyük öneme sahip olan bir matris örneği verilecektir.

Örnek 2.1.1: Bir $\mathrm{x} = (\mathrm{x_k})$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan

$$\sigma_n = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1}$$

dizisine dönüştüren operatöre Cesaro operatörü denir ve $(C,1)$ veya C_1 ile gösterilir. Bu operatöre karşılık gelen matris

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ile verilir.

Teorem 2.1.1 (Kojima-Schur): $A \in (c,c)$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\|A\|_\infty \coloneqq sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk} = a_p$ (her sabit p için)

özelliklerinin gerçeklenmesidir. (Maddox, 1970)

Teorem 2.1.2 (Silverman-Teoplitz): $A \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\|A\|_\infty \coloneqq sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim_n a_{nk} = 0$ (her sabit k için)

(iii) $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$

koşullarının gerçeklenmesidir. (Maddox, 1970)

Tanım 2.1.3: $x=(x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p>0$ bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-L|^p=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli p-Cesaro yakınsaktır denir. Kuvvetli p-Cesaro yakınsak dizilerin kümesi

$$w_p=\left\{x=(x_k):\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-L|^p=0 \quad \text{en az bir } L \text{ için}\right\}$$

ile gösterecektir. (Maddox, 1978)

2.2. Pozitif Lineer Operatörler

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve $g(x)=L(f;x)$ şeklinde gösterilir.

X bir lineer uzay olduğunda Lineer operatörün tanımını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$, X uzayında herhangi iki fonksiyon a_1 ve a_2 ise keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü

$$L(a_1f_1+a_2f_2;x)=a_1L(f_1;x)+a_2L(f_2;x)$$

koşulunu sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir. Lineer operatörler içinde çok önemli bir alt sınıf vardır ki o da pozitif lineer operatörlerdir. $Y=\mathbb{R}$ veya $Y=\mathbb{C}$ olması durumunda ise L ’ye bir lineer fonksiyonel denir.

Tanım 2.2.1: X ve Y reel değerli fonksiyonların iki uzayı olmak üzere L, X uzayını Y uzayına dönüştüren bir lineer operatör olsun. X tanım uzayından alınan her $f\geq 0$

fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ koşulu gerçekleniyor ise bu durumda L operatörüne pozitif lineer operatör adı verilir. (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995)

Pozitif lineer operatörler aşağıdaki özellikleri gerçekler:

1. $f \leq g \Rightarrow L(f;x) \leq L(g;x)$
2. $|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$.

Tanım 2.2.2: L lineer operatörü X uzayından Y uzayına dönüşüm yapıyorsa ve

$$\|L(f;x)\|_y \leq C\|f\|_x$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu koşulu sağlayan C sabitlerinin infimumuna ise L operatörünün normu denir ve $\|L\|_{x\to y}$ ya da basit şekilde $\|L\|$ ile gösterilir. Yani,

$$\|L\| = inf\left\{C: \|L(f;x)\|_y \leq C\|f\|_x\right\}$$

dir. Bu tanımdan

$$C \geq \sup_{\|f\|_x \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_y}{\|f\|_x} \tag{2.2}$$

olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan en küçük değerin tanımına göre $\forall\, \varepsilon > 0$ için bir $f_\varepsilon \in X$ fonksiyonu vardır ki onun için

$$\|L(f_\varepsilon;x)\|_y \leq (C-\varepsilon)\|f_\varepsilon\|_x$$

eşitsizliği sağlanır. Yani,

$$\frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_y}{\|f_\varepsilon\|_x} \geq C-\varepsilon$$

olur ve buradan da

$$\sup_{\|f\|_x \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_y}{\|f\|_x} \geq \frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_y}{\|f_\varepsilon\|_x} \geq C-\varepsilon$$

elde edilir. Bu takdirde $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\sup_{\|f\|_x \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_y}{\|f\|_x} \geq C \tag{2.3}$$

yazılabilir. (2.2) gösterimi ve (2.3) eşitsizliğinden dolayı

$$\|L\| = \|L\|_{x\to y} = \sup_{\|f\|_x\neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_y}{\|f\|_x} \tag{2.4}$$

olur. L lineer operatör olduğundan

$$\|L\| = \sup_{\|f\|_x\neq 0} \|L(f;x)\|_y \tag{2.5}$$

yazabiliriz. Elde edilen (2.4) ve (2.5) eşitlikleri her L lineer operatörü için geçerlidir.

Şimdi de L operatörünün bir pozitif operatör olduğunu varsayalım. Bu durumda L operatörünün monotonluğundan ve $f(x) \leq |f(x)|$ eşitsizliğinden yararlanarak

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Eğer $X = Y = C[a,b]$ ve L operatörü f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsız ise bu durumda

$$\|L\|_{C[a,b]\to C[a,b]} = \sup_{\|f\|_x\neq 0} \|L(f;x)\|_{C[a,b]} \leq \|L(1;x)\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$\|L\|_{C[a,b]\to C[a,b]} = sup_{\|f\|_c=1} \|L(f;x)\|_{C[a,b]} \geq \|L(1;x)\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Bu iki eşitsizlikten L lineer pozitif operatörü için

$$\|L\|_{C[a,b]\to C[a,b]} = \|L(1;x)\|_{C[a,b]} \tag{2.6}$$

eşitliği sağlanır.

Eğer L operatörü f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının dışındaki değerleri ile bağımlı ise (örneğin $L(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(t,x)dt$, $x \in [a,b]$ gibi) bu durumda

$$M = max\left(\|f\|_{C[a,b]};\ sup_{x\notin[a,b]}|f(x)|\right)$$

olmak üzere

$$\|L\|_{C[a,b]\to C[a,b]} \leq M\|L(1;x)\|_{C[a,b]} \tag{2.7}$$

eşitsizliği yazılabilir.

3. $C[a,b]$ UZAYINDA KOROVKİN TEOREMİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde Korovkin teoremi verilecek onun bir uygulaması olan Bernstein polinomları tanımlanacak ve Bernstein polinomlarının sürekli fonksiyonlara yakınsaklığına yer verilecektir.

3.1. Korovkin Teoremi

1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohman göstermiştir ki $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n})\, P_{k,n}(x), \qquad P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif operatörler dizisinin $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{3.1}$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{3.2}$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{3.3}$$

durumlarının sağlanmasıdır.

Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır.

1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve Bohman'ın koşullarının genel halde de doğru olduğunu göstermiştir.

$C[a,b]$ uzayını hatırlayacak olursak bu uzaydaki fonksiyonlar $[a,b]$ aralığının tüm iç ve uç noktalarında süreklidir ve $C[a,b]$ bu fonksiyonların uzayıdır. Yani a

noktasında sağdan ve b noktasında soldan süreklidirler. Şimdi Korovkin teoremine geçebiliriz.

Teorem 3.1.1: Eğer L_n pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında (3.1), (3.2) ve (3.3) koşullarını sağlıyorsa $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \;\; a \le x \le b$$

olur. (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995)

İspat. f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan öyle bir M pozitif sayısı bulunabilir ki her x için

$$|f(x)| \le M \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır. $f \in C[a,b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.5}$$

yazılabilir. $x, t \in [a,b]$ olduğunda (3.5) eşitsizliği f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğu için gerçeklenir. $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise (3.5) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarında, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için sağlanır. Böylece (3.4) ve (3.5) eşitsizliklerinden dolayı tüm $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ ifadesi daima pozitif olacağından $|t-x| < \delta$ olduğunda (3.6) eşitsizliği (3.5) eşitsizliğinden elde edilir. $|t-x| \ge \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \ge 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \ge 2M$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ olduğu için (3.4) eşitsizliğinden (3.6) eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\|L_n(f;x) - f(x)\|_c &= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)L_n(1;x) - f(x)\|_c \\ &\le \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_c + \|f\|_c \|L_n(1;x) - 1\|_c\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim $n \to \infty$ için (3.1) den dolayı sıfıra yakınsar. Yani $\|f\|_c \|L_n(1;x) - 1\|_c \le \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$ dır. O halde

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_c \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_c + \varepsilon_n \tag{3.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Birinci terime bakarsak (3.6) eşitsizliğinden dolayı

$$L_n(|f(t) - f(x)|;x) \leq \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2;x)$$

$$= \varepsilon[L_n(1;x) - 1] + \varepsilon$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x)]$$

$$= \varepsilon[L_n(1;x) - 1] + \varepsilon$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x) - x^2] - 2x[L_n(t;x) - x] + x^2[L_n(1;x) - 1]\}$$

elde edilir. O halde

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_c \leq C_1\|L_n(t^2;x) - x^2\|_c + C_2\|L_n(1;x) - 1\|_c$$

yazılabilir. (3.1), (3.2) ve (3.3) koşullarından dolayı $n \to \infty$ için

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_c \to 0$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.1 in ispatından yararlanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1: Eğer $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi, $[a,b]$ aralığında

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{3.8}$$

$$L_n((t-x)^2;x) \rightrightarrows 0 \tag{3.9}$$

koşullarını sağlıyorsa $C[a,b]$ uzayından olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ için

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)\,, \qquad a \leq x \leq b$$

sağlanır. (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995)

Korovkin teoreminin bu ispatı gösteriyor ki $m-$boyutlu halde (yani sonlu boyutlu) ve L_p uzayında da bu teorem ispatlanabilir.

Şimdi benzer ispat yöntemini kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlamadan önce bir hatırlatma yapalım.

Teorem 3.1.2 (Luzin Teoremi): Her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu\{E: f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir g fonksiyonu bulunur. Tüm reel eksende L_p den olan fonksiyonlar için bu özellik keyfi sonlu alt aralıklarda geçerlidir.

Teorem 3.1.3: $L_p[a,b]$ den $L_p[a,b]$ ye tanımlı $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi için aşağıdaki şartlar geçerli olsun.

a) L_n lerin normları düzgün sınırlı olsun. Yani öyle bir M sabiti bulunsun ki her n için

$$\|L_n\|_{L_p \to L_p} \leq M < \infty, \qquad n = 1,2,\ldots$$

sağlansın.

b) $n \to \infty$ ve $v = 0,1,2$ için

$$\|L_n(t^v; x) - x^v\|_{L_p} \to 0$$

olsun. Bu takdirde keyfi $f \in L_p[a,b]$ fonksiyonu için $n \to \infty$ iken

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{L_p} \to 0$$

olur. (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995)

İspat. Luzin Teoremine göre L_p uzayındaki fonksiyonlar için öyle bir g sürekli fonksiyonu bulabiliriz ki her $\varepsilon > 0$ için $\|f - g\|_{L_p} < \varepsilon$ sağlanır. Bu durumda

$$\|L_n(f; x) - f(x)\|_{L_p} \leq \|L_n(f - g; x)\|_{L_p} + \|L_n(g; x) - g(x)\|_{L_p} + \|f - g\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon(1 + M) + \|L_n(g; x) - g(x)\|_{L_p}$$

elde edilir. g fonksiyonu sürekli olduğundan (3.6) eşitsizliği geçerlidir ve buradan da $|g(x)| \leq C$ yazabiliriz. Böylece

$$\|L_n(f;x) - f(x)\|_{L_p} \leq \|L_n(|g(t) - g(x)|;x)\|_{L_p} + C\|L_n(1;x) - 1\|_{L_p}$$

olup (3.6) dan

$$\|L_n(|g(t) - g(x)|;x)\|_{L_p} \leq \varepsilon\|L_n(1;x)\|_{L_p} + \|L_n((t-x)^2;x)\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon\left(\|L_n(1;x) - 1\|_{L_p} + 1\right) + \|L_n(t^2;x) - x^2\|_{L_p}$$

$$+2b\varepsilon\|L_n(t;x) - x\|_{L_p} + b^2\varepsilon\|L_n(1;x) - 1\|_{L_p}$$

eşitsizliği yazılabilir. Teoremin şartlarından dolayı $n \to \infty$ için sağ taraf sıfıra yaklaşır ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi Korovkin teoremlerinin bir uygulamasını verelim.

3.2 Korovkin Teoreminin Uygulaması

Bu kısımda klasik Korovkin teorisinde önemli bir yere sahip olan Bernstein polinomları ve bu polinomların genelleştirmesi verilecektir. 1912 yılında S. Bernstein $[0,1]$ aralığında verilmiş sürekli bir fonksiyona yakınsayan bir $B_n(f;x)$ polinomunu $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır. $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $B_n(f;x)$ polinomu bir pozitif lineer operatördür. Aşağıda $B_n(f;x)$ polinomunun Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı araştırılacaktır. Bu durumda

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1$$

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k} x^k (1-x)^{n-1-k} = x$$

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} . \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} . \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n} . \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n-2} C_{n-2}^{k} x^k (1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $n \to \infty$ için

$\|B_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} \to 0$

$\|B_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} \to 0$

$\|B_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,1]} \to 0$

durumları sağlanır. Bu durumda Korovkin teoremine göre $f \in C[0,1]$ için

$\|B_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,1]} \to 0$

olduğu görülür.

Bu polinomlar pek çok yeni pozitif lineer operatörlerin tanımlanmasına yardımcı olmuştur. Korovkin teoremlerini sağlayan operatör dizilerinin bulunma yöntemleri Bernstein polinomlarının bulunma yöntemleriyle elde edilmiştir.

4. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK KULLANILARAK ELDE EDİLEN KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde öncelikle istatistiksel yakınsaklık tanıtılıp alışılmış anlamdaki yakınsaklık ve yoğunluk arasındaki ilişkiler araştırılacaktır. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık kullanılarak Korovkin ve Weierstrass tipi teorem kanıtlanacaktır ve istatistiksel yakınsaklık mertebesi tanıtılacaktır. Son olarak $L_p[a,b]$ uzayında pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yakınsaklığı araştırılacaktır.

4.1 Yoğunluk ve İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin A alt cümlesinin kardinal sayısı $|A|$ ile gösterilsin, yani $|A| = cardA$ olsun.

Tanım 4.1.1: $A \subset \mathbb{N}$ ve $A_n := \{k \leq n : k \in A\} = A \cap \{1,2,\dots,n\}$ olsun. Eğer

$$\delta(A) := \lim_n \frac{|A_n|}{n}$$

limiti mevcut ise $\delta(A)$ sayısına A kümesinin yoğunluğu denir. (Niven ve Zuckerman,1980)

Bu tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$\chi_A(k) := \begin{cases} 1, & k \in A \\ 0, & k \notin A \end{cases}$$

A kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\delta(A) := \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k)$$

limiti mevcut ise A kümesi $\delta(A)$ yoğunluğuna sahiptir denir. Bu şekilde tanımlanan

$$\delta\colon \wp(\mathbb{N}) \to [0,1]$$
$$A \to \delta(A) = \lim_n \frac{|A_n|}{n}$$

yoğunluk fonksiyonunun sağladığı özellikler şu şekilde sıralanabilir. $A, B \in \wp(\mathbb{N})$ olmak üzere

1) $\delta(\mathbb{N} - A) = 1 - \delta(A)$
2) $\delta(\mathbb{N}) = 1$ ve $\delta(\emptyset) = 0$
3) $A \subseteq B$ ise $\delta(A) \leq \delta(B)$
4) $A \sim B$ ise (yani $A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ sonlu ise) $\delta(A) = \delta(B)$
5) A sonlu küme ise $\delta(A) = 0$

dir.

Tanım 4.1.2: $\mathrm{x} = (\mathrm{x_k})$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n \colon |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $\mathrm{x} = (\mathrm{x_k})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st - \lim_n x = L$ veya $x_k \to L(st)$ gösterimi kullanılır. Eğer $L = 0$ ise $\mathrm{x} = (\mathrm{x_k})$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. (Fast, 1951)

Örnek 4.1.1:

$$x_k := \begin{cases} 1, & k = m^2\,, \;\; (m = 1,2,\dots) \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n \colon |x_k - 0| \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n \colon x_k \neq 0\}$$

$$|\{k \leq n \colon |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n \colon x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n \colon x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Şöyle ki $\{k \in \mathbb{N}: |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ kümesinin elemanları hariç diğer bütün k lar için $|x_k - 0| < \varepsilon$ (her $\varepsilon > 0$) olduğundan $x_k \to 0(st)$ dir.

Örnek 4.1.2:

$$x_k := \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2\ , \quad (m = 1,2, \dots) \\ 2, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - lim\, x = 2$ olduğu açıktır.

Bu iki örnek bize istatistiksel yakınsaklık ile Cauchy yakınsaklık arasındaki ilişkiyi gösterir. Örneklerden görülebileceği gibi sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir. Bu ise Cauchy yakınsaklığın istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğini fakat tersinin doğru olmadığını gösterir.

Tanım 4.1.3: $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N > 0$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına A −istatistiksel yakınsaktır denir ve $x \xrightarrow{(A)} L$ şeklinde yazılabilir. (Fredman ve Sember, 1981)

Tanım 4.1.4: $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen her k için yakınsaktır denir. (Buck,1953)

Bu tanım istatistiksel yakınsaklık tanımından başka bir şey değildir.

Eğer $x = (x_k)$ dizisi sıfır yoğunluğa sahip bir kümenin dışındaki her k için bir p özelliğine sahip ise $x = (x_k)$ dizisi hemen her k için p özelliğine sahiptir denir ve kısaca h.h.k. ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem İstatistiksel yakınsaklık metodunun lineer olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.1: $st - lim\, x = L_1$ ve $st - lim\, y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

(i) $st - lim(x + y) = L_1 + L_2$

(ii) $st - lim(\alpha x) = \alpha\, L_1$

dir. (Fast,1951)

İspat. (i) $s_t - lim\, x = L_1$ olsun. Bu durumda $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olduğunda $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_1$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L_1| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

$st - lim\, y = L_2$ olsun. Bu durumda $B \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(B) = 0$ olduğunda $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_2$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus B)$ için $|y_k - L_2| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

$k_0 = max\{k_1, k_2\}$ diyelim. Buradan her $k \in \big(\mathbb{N} \setminus (A \cap B)\big)$ ve her $k > k_0$ için $|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$ olduğunu gösterelim. Öncelikle sıfır yoğunluklu iki kümenin arakesiti de sıfır yoğunluklu olacağından $A \cap B$ kümesi sıfır yoğunlukludur. O halde her $k \in \big(\mathbb{N} \setminus (A \cap B)\big)$ ve her $k > k_0$ için

$$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \le |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \le n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olup buradan da

$$st - lim(x + y) = L_1 + L_2$$

elde edilir.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ise $\alpha x = 0$ olup $\alpha x_k \to 0$ dır.

Şimdi $\alpha \ne 0$ olmak üzere $st - lim\, x = L_1$ olsun. Bu durumda, $A \subset \mathbb{N}$ için $\delta(A) = 0$ olduğunda $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L_1| < {}^{\varepsilon}/_{|\alpha|}$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ ve her $k > k_0$ için

$$|\alpha x_k - \alpha L_1| = |\alpha||x_k - L_1| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

olup her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \le n : |\alpha x_k - \alpha L_1| \ge \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir, yani $st - lim(\alpha x) = \alpha\, L_1$ dir.

Tanım 4.1.5: Her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n \colon |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir. (Fridy, 1985)

Teorem 4.1.2: Aşağıdaki önermeler denktir.

(i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

(ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) h.h.k. için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır. (Fridy, 1985)

Teorem 4.1.3: $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $x = y + z$ olacak şekilde L sayısına yakınsak olan bir y dizisi ve istatistiksel sıfır z dizisi vardır. (Connor,1988)

Teorem 4.1.3 istatistiksel yakınsaklığın ayrışım teoremi olarak da bilinir.

Sonuç 4.1.1: Bir x dizisi bir L noktasına istatistiksel yakınsak ise aynı noktaya Cauchy anlamında yakınsayan bir alt dizi içerir. (Connor,1988)

Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.3 istatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri belirlemektir.

Teorem 4.1.4: $st - limx = L$ ve her $n \in N$ için $|x_n| \leq K$ ise $C_1 - limx = L$ dir. Yani sınırlı istatistiksel yakınsak her dizinin aritmetik ortalaması da yine aynı L sayısına yakınsaktır. (Schoenberg,1959)

Bu teoremin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $x = (1,0,1,0, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması ${}^1\!/_2$ ye yakınsaktır. Fakat bu dizinin kendisi istatistiksel yakınsak değildir. O halde teoremin karşıtı doğru değildir.

Şimdi ise istatistiksel yakınsaklık metodunun hiçbir matris metodu tarafından içerilmediğini göstereceğiz. Bunun için de öncelikle bir Lemma verelim.

Lemma 4.1.1: Sonsuz çokluktaki k lar için $t_k \neq 0$ olacak şekildeki bir t dizisi verildiğinde h.h.k. için $x_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$ olacak şekilde bir x dizisi vardır (Fridy, 1985).

Teorem 4.1.5: Hiçbir toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez (Fridy,1985). (yani $A \in (st, c; p)$ olacak şekilde hiçbir matris yoktur)

İspat. Lemma 4.1.1 gereğince istatistiksel yakınsaklığı içeren bir matris satır sonlu olmak zorundadır. O halde satır sonlu keyfi bir matris A olsun. İstatistiksel yakınsaklık metodu regüler olduğundan, A yı regüler almak genellikten bir şey kaybettirmez. A matrisinin sıfırdan farklı bir $a_{n(1)k(1)}$ bileşenini

$k(1) \geq k'(1)$ ise $a_{n(1),k(1)} \neq 0$

$k \geq k(1)$ ise $a_{n(1),k} = 0$

olacak şekilde seçelim. Şimdi her m için,

$k > k(m)$ ise $a_{n(m),k} = 0$

ve

$k(m) \geq m^2$ ise $a_{n(m),k(m)} \neq 0$

olmak üzere satır ve sütunların artan bir dizisini seçebiliriz. Şimdi x dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x_{k(1)} = \frac{1}{a_{n(1),k(1)}}$$

$$\vdots$$

$$x_{k(m)} = \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right]$$

$$\vdots$$

Diğer durumlarda $x_k = 0$. Bu durumda

$$(Ax)_{n(m)} = \sum_{i=1}^{m} a_{n(m),k(i)}\, x_{k(i)} = \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)}\, x_{k(i)} + a_{n(m),k(m)} x_{k(m)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)}\, x_{k(i)} + a_{n(m),k(m)} \frac{1}{a_{n(m),k(m)}} \left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m),k(i)} x_{k(i)} \right]$$

olduğundan Ax dönüşüm dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak değildir. Başka bir deyişle x dizisi A-toplanabilir değildir. Diğer yandan $k(m) \geq m^2$ olduğundan

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

olacaktır, yani h.h.k. için $x_k = 0$ olur. Dolayısıyla $st - lim x = 0$ yazılabilir. Fakat bu yakınsaklık $A -$ istatistiksel yakınsaklığı içermez. ■

İstatistiksel yakınsaklık metodu $\{(-1)^k\}$ gibi periyodik bir diziyi toplamaz. Yani $\{(-1)^k\}$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Bu yüzden istatistiksel yakınsaklık metodu, klasik toplanabilme metotlarının birçoğunu içermez.

Matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kesin bir sonuca ulaşmak için matrislerin aşağıdaki sınıfını verelim.

Negatif olmayan alt üçgensel $A = (a_{nk})$ matrisi

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$

(ii) $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğunda $\lim_n \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 0$

koşullarını gerçeklerse, A matrisi τ sınıfına aittir denir. τ sınıfına ait her bir A matrisi negatif olmayan terimli olduğundan (i) ve (ii) koşulları A matrisinin regülerliğini garanti eder. Öyle ise aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.6: Sınırlı bir x dizisi için $st - limx = L$ olması için gerek yeter koşul her $A \in \tau$ için $A - limx = L$ olmasıdır. (Fridy ve Miller, 1991)

Teorem 4.1.7: $p \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

(i) Bir dizi bir L sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilir ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Sınırlı bir dizi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir (Connor, 1988).

Sonuç 4.1.2 Sınırlı diziler üzerinde kuvvetli p-Cesaro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık denktir, yani $p > 0$ olmak üzere $w_p \cap l_\infty = st \cap l_\infty$ dir.

Sonuç 4.1.3: Kompleks terimli bir x dizisi bir L sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilir veya L sayısına istatistiksel yakınsak ise x, L sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir (Connor, 1988).

Sonuç 4.1.4: x reel terimli bir dizi olsun. Bu durumda lim $inf x_n = L$ ve $C_1 -$ lim $x = L$ ise $x_n \to L(st)$ dir (Connor, 1988).

Teorem 4.1.8: $p > 0$ olsun. $A \in \left(l_\infty \cap w_p, c\right)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in (c, c)$ ve sıfır yoğunluğa sahip her E kümesi için

$$\sum_{k \in E} |a_{nk} - a_k| \to 0, \qquad (n \to \infty)$$

olmasıdır (Maddox, 1974).

4.2. İstatistiksel Yakınsaklık Kullanılarak Elde Edilen Bazı Korovkin ve Weierstrass Tipi Yaklaşım Teoremleri

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklığı kullanarak Korovkin teoremi ve Weierstrass tipi yaklaşım teoremi kanıtlanacaktır.

Klasik Korovkin teoremini formüle etmek için bazı notasyonlar verelim.

$C[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığının her noktasında tanımlı ve tamamında sınırlı olan tüm fonksiyonlar uzayını gösterelim, M_f f' ye bağlı bir sabit olmak üzere $C[a,b]$

$$|f(x)| \leq M_f, \quad -\infty < x < \infty$$

koşulunu sağlayan ve $[a,b]$ de sürekli olan fonksiyonların uzayıdır. (L_n) pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $B[a,b]$ de $[a,b]$ deki tüm sınırlı fonksiyonların kümesi olmak üzere (L_n), $C[a,b]$ den $B[a,b]$ ye tanımlanan pozitif lineer operatörlerin dizisi olsun. Bu durumda $B[a,b]$, $\|f\|_B := sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ normu ile Banach uzayıdır. Genellikle $L_n(f(t),x)$ yerine $L_n(f,x)$ yazılır.

Bu terminolojiye göre klasik Korovkin teoremi $L_n: C[a,b] \rightarrow B[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin dizisinin

(a) $\|L_n(1,x) - 1\|_B \rightarrow 0, \ n \rightarrow \infty,$

(b) $\|L_n(t,x) - x\|_B \rightarrow 0, \ n \rightarrow \infty,$

(c) $\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \rightarrow 0, \ n \rightarrow \infty.$

şartlarını sağlaması durumunda her $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_B \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

olduğunu ifade eder.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1: Pozitif lineer operatörlerin $L_n: C[a,b] \to B[a,b]$ dizisi

$$st - lim\|L_n(1,x) - 1\|_B = 0 \tag{4.1}$$

$$st - lim\|L_n(t,x) - x\|_B = 0 \tag{4.2}$$

$$st - lim\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B = 0 \tag{4.3}$$

şartlarını sağlıyorsa bu takdirde herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$st - lim\|L_n(f(x),x) - f(x)\|_B = 0 \tag{4.4}$$

sağlanır. (Gadjiev and Orhan, 2002)

İspat. Belirli aşamaya kadar Korovkin teoreminin ispatını takip edebiliriz. f fonksiyonu tüm reel eksen üzerinde sınırlı olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M, \quad -\infty < t,x < \infty$$

yazılabilir. Bunun yanı sıra f, $[a,b]$ de sürekli olduğu için $|t-x| \leq \delta$ yı sağlayan her t,x için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

dır. Bu yüzden her $t \in (-\infty,\infty)$ ve her $x \in [a,b]$ için δ sabit reel sayı olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \tfrac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{4.5}$$

olduğu görülür. Şimdi

$$L_n(f,x) - f(x) = L_n(f(t) - f(x),x) + f(x)(L_n(1,x) - 1)$$

alındığında

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_B \leq \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\right)\|L_n(1,x) - 1\|_B$$

$$+\frac{4Mb}{\delta^2}\|L_n(t,x) - x\|_B + \frac{2M}{\delta^2}\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B$$

$$\leq K_1(\|L_n(1,x) - 1\|_B + \|L_n(t,x) - x\|_B + \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B)$$

yazılabilir, burada

$$K_1 = \max\left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}, \frac{4Mb}{\delta^2}\right)$$

olacaktır.

Son eşitsizlik herhangi $\varepsilon' > 0$ için

$$|\{n \le N: \|L_n(f,x) - f(x)\|_B \ge \varepsilon'\}| \tag{4.6}$$

$$\le \left|\left\{n \le N: \|L_n(1,x) - 1\|_B + \|L_n(t,x) - x\|_B + \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{K_1}\right\}\right|$$

yazılabileceğini gösterir. Bu durumda

$$D := \left\{n: \|L_n(1,x) - 1\|_B + \|L_n(t,x) - x\|_B + \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{K_1}\right\},$$

$$D_1 := \left\{n: \|L_n(1,x) - 1\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1}\right\},$$

$$D_2 := \left\{n: \|L_n(t,x) - x\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1}\right\},$$

$$D_3 := \left\{n: \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1}\right\}.$$

tanımlanırsa $D \subset D_1 \subset D_2 \subset D_3$ olduğu kolayca görülür. Böylece (4.6) eşitsizliği

$$|\{n \le N: \|L_n(f,x) - f(x)\|_B \ge \varepsilon'\}|$$

$$\le \left|\left\{n \le N: \|L_n(1,x) - 1\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1}\right\}\right| + \left|\left\{n \le N: \|L_n(t,x) - x\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1}\right\}\right|$$

$$+ \left|\left\{n \le N: \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1}\right\}\right| \tag{4.7}$$

olduğunu gösterir.

(4.1), (4.2) ve (4.3) bağıntıları kullanılarak

$$st - lim\|L_n(f(x),x) - f(x)\|_B = 0$$

olduğu görülür ve bu da teoremin ispatını tamamlar.

$$B_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}; 0 \le x \le 1,$$

klasik Bernstein polinomlarının dizisinin Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı ve dolayısıyla, Teorem 4.2.1 i de sağladığı görülür. Şimdi Teorem 4.2.1'in şartlarını sağladığı halde klasik Korovkin teoremini sağlamayan bir pozitif lineer operatörlerin dizisi örneği verelim.

Örnek 4.2.1: (α_n) sınırsız istatistiksel yakınsak dizi ve (B_n) Bernstein polinomlarının dizisi olmak üzere $P_n: C[0,1] \to B[0,1]$, $P_n(f,x) = (1+\alpha_n)B_n(f,x)$ ile tanımlanan (P_n) dizisini göz önüne alalım. Bu takdirde

$$B_n(1,x) = 1, \quad B_n(t,x) = x \quad \text{ve} \quad B_n(t^2,x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$$

olduğu bilinir. (P_n) dizisi için (4.1), (4.2) ve (4.3) şartlarının sağlandığı açıktır. O halde

$$st - lim\|P_n(f,x) - f(x)\|_B = 0$$

olacaktır. Diğer taraftan $B_n(f,0) = f(0)$ olduğundan $P_n(f,0) = (1+\alpha_n)f(0)$ dir. Bu nedenle

$$\|P_n(f,x) - f(x)\| \ge |P_n(f,0) - f(0)| = \alpha_n|f(0)| \tag{4.8}$$

yazılabilir. $\lim_n sup_{n\to\infty}\alpha_n = \infty$ ile (4.8) birleştirildiğinde (P_n) 'nin bu iddiayı sağlayan klasik Korovkin teoremini sağlamadığı görülür.

Teorem 4.2.2: $L_n: C[a,b] \to B[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin dizisi için Teorem 4.2.1'in (4.2) ve (4.3) şartlarını ve

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(1,x) - 1\|_B = 0 \tag{4.9}$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|L_n(f,x) - f(x)\|_B = 0$$

dır. (Gadjiev and Orhan, 2002)

İspat. (4.9) koşulundan her n için

$$\|L_n(1,x)\|_B \leq M_1$$

olacak şekilde bir M_1 sabitinin mevcut olduğu görülür. Bu nedenle herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu ve $n = 1,2,3,\ldots,$ sayısı için

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_B \leq \|f\|_C \|L_n(1,x)\|_B + \|f\|_C \leq M(M_1 + 1) \tag{4.10}$$

elde edilir. Ayrıca (4.9) bağıntısı (4.1)'i sağladığından Teorem 4.2.1'e göre

$$st - \lim_n \|L_n(f,x) - f(x)\|_B = 0 \tag{4.11}$$

olduğu görülür.

Herhangi sınırlı istatistiksel yakınsak dizinin Cesaro toplanabilir olduğu bilinir. Buradan (4.10) ve (4.11) sonuçlarına ulaşılır. (Schoenberg, 1959**)**

Bu kısmı aşağıdaki gözlemlerle sonuçlandıralım.

Weierstrass yaklaşım teoremi f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ise

$$\lim_n \|P_n - f\|_{C[a,b]} = 0 \tag{4.12}$$

polinomların bir (P_n) dizisinin mevcut olduğunu ifade eder. Buradan

$$st - \lim_n \|P_n - f\|_{C[a,b]} = 0 \tag{4.13}$$

yazılabilir.

(4.13) bağıntısı (P_n) polinomlar dizisinin $[a,b]$ de sürekli f fonksiyonuna "düzgün istatistiksel yakınsak" olduğunu ifade eder. Bu durumda (4.13) 'ü sağladığı halde (4.12) yi sağlamayan bir (P_n) polinomlar dizisinin mevcut olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bu soruya verilen cevap Örnek 4.2.1 de ele alınan (P_n) dizisidir.

Önerme 4.2.1: f, $[a,b]$ de sürekli bir fonksiyon ise polinomların bir dizisi bu aralıkta f ye istatistiksel düzgün yakınsaktır fakat düzgün yakınsak değildir.

4.3. İstatistiksel Yakınsaklık Mertebesi

Bu kısımda pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yakınsaklık mertebesi ile ilgileneceğiz.

Tanım 4.3.1: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n} \frac{|\{k \leq n : |\alpha_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n^{1-\beta}} = 0$$

ise $\alpha = (\alpha_k)$ sayı dizisi L sayısına $0 < \beta < 1$ dereceden istatistiksel yakınsak denir.

Bu durumda

$$\alpha_k - L = st - o\left(k^{-\beta}\right), \qquad k \to \infty \text{ için}$$

yazılır.

Teorem 4.2.1 de verilen pozitif lineer operatörler dizisinin istatistiksel yakınsaklık derecesi bulunacaktır.

Teorem 4.3.2: $L_n: C[a,b] \to B[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin dizisi $n \to \infty$ için

$$\|L_n(1,x) - 1\|_B = st - o\left(n^{-\beta_1}\right) \tag{4.14}$$

$$\|L_n(t,x) - x\|_B = st - o\left(n^{-\beta_2}\right) \tag{4.15}$$

$$\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B = st - o\left(n^{-\beta_3}\right) \tag{4.16}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için $\beta = min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ olmak üzere

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_B = st - o\left(n^{-\beta}\right)$$

olacaktır. (Gadjiev and Orhan, 2002)

İspat. Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi (4.7) eşitsizliğini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\frac{|\{n \leq m : \|L_n(f,x) - f(x)\|_B \geq \varepsilon'\}|}{n^{1-\beta}}$$

$$\leq \frac{\left|\left\{n \leq m: \|L_n(1,x)-1\|_B \geq \left({\varepsilon'}/{3K_1}\right)\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}} \cdot \frac{m^{1-\beta_1}}{m^{1-\beta}}$$

$$+\frac{\left|\left\{n \leq m: \|L_n(t,x)-x\|_B \geq \left({\varepsilon'}/{3K_1}\right)\right\}\right|}{n^{1-\beta_2}} \cdot \frac{m^{1-\beta_2}}{m^{1-\beta}}$$

$$+\frac{\left|\left\{n \leq m: \|L_n(t^2,x)-x^2\|_B \geq \left({\varepsilon'}/{3K_1}\right)\right\}\right|}{n^{1-\beta_3}} \cdot \frac{m^{1-\beta_3}}{m^{1-\beta}}.$$

Buradan istenen sonuç elde edilir.

Bir uygulama olarak klasik Bernstein polinomlarını yeniden inceleyelim.

$B_n(1,x) = 1$, $B_n(t,x) = x$ ve $B_n(t^2,x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$,

olduğunu hatırlarsak (4.14) ve (4.15) koşullarının sağlandığı görülür. Ayrıca

$$\{n: \|B_n(t^2,x)-x^2\|_B \geq \varepsilon'\} = \left\{n: \frac{1}{4n} \geq \varepsilon'\right\}$$

kümesi doğal sayıların sonlu bir alt kümesi olduğundan (4.16) koşulu da sağlanır.

Sonuç 4.3.1: Eğer f fonksiyonu $[0,1]$ de sürekli bir fonksiyon ise bu takdirde her Bernstein polinomu ve $\beta \epsilon (0,1)$ için

$$\|B_n(f,x)-f(x)\|_B = st - o\left(n^{-\beta}\right), \qquad n \to \infty \text{ için}$$

sağlanır.

4. 4. $L_p[a, b]$ de Pozitif Lineer Operatörlerin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda pozitif lineer operatörlerin $L_n: L_p[a, b] \to L_p[a, b]$ dizisi göz önüne alınarak istatistiksel yakınsaklık yoluyla Korovkin tipi teoremi verilecektir.

Teorem 4.4.1: (L_n) dizisi $L_n: L_p[a, b] \to L_p[a, b]$ ile tanılanan pozitif lineer operatörler dizisi ve $(\|L_n\|)$ dizisi düzgün sınırlı olsun. Eğer

$$st - \lim_n \|L_n(t^v, x) - x^v\|_{L_p} = 0, \quad v = 0,1,2, \tag{4.17}$$

ise bu takdirde herhangi bir $f \in L_p[a, b]$ fonksiyonu için

$$st - \lim_n \|L_n(f, x) - f(x)\|_{L_p} = 0$$

dır.

İspat. (4.17)' ye göre $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $n \in K_v$ ve $n > n_v$, $v = 0,1,2$ için

$$\|L_n(t^v, x) - x^v\|_{L_p} < \varepsilon \tag{4.18}$$

olacak şekilde 1 yoğunluklu K_v, $v = 0,1,2$, alt kümeleri ve $n_v(\varepsilon)$, $v = 0,1,2$, sayıları vardır.

$\delta(K_0 \cap K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan (4.18) eşitsizliği $n \in K := K_0 \cap K_1 \cap K_2$ ve $n > max\{n_0, n_{1,} n_2\}$ için sağlanır.

Hipoteze göre $\|L_n\|_{L_p \to L_p} \leq M$, $n = 1,2, \ldots$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. $C[a, b]$, $L_p[a, b]$ de yoğun olduğundan dolayı $f \in L_p[a, b]$ verildiği zaman $\|f - g\|_{L_p} < \varepsilon$ olacak şekilde $g \in C[a, b]$ vardır. Bu nedenle

$$\|L_n(f, x) - f(x)\|_{L_p} \leq \|L_n(f - g, x)\|_{L_p} + \|L_n(g, x) - g(x)\|_{L_p} + \|f - g\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon(1 + M) + \|L_n(g, x) - g(x)\|_{L_p} \tag{4.19}$$

elde edilir. Öte yandan g, $[a, b]$ de sürekli olduğundan her $x \in [a, b]$ ve bir C sabiti için $|g(x)| \leq C$ yazılabilir. Böylece

$$\|L_n(g, x) - g(x)\|_{L_p} \leq \|L_n(|g(t) - g(x)|, x)\|_{L_p} + C\|L_n(1, x) - 1\|_{L_p}$$

olduğu görülür. $g \in C[a,b]$ olduğundan (4.5) deki gibi her $t, x \in [a,b]$ için H ve δ pozitif sabitler olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon + 2H\delta^{-2}(t-x)^2$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\|L_n(|g(t) - g(x)|, x)\|_{L_p} \leq \varepsilon\|L_n(1,x)\|_{L_p} + \|L_n((t-x)^2, x)\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon\left(\|L_n(1,x) - 1\|_{L_p} + 1\right) + \|L_n(t^2, x) - x^2\|_{L_p} + 2b\|L_n(t,x) - x\|_{L_p}$$

$$+ b^2\|L_n(1,x) - 1\|_{L_p} \qquad (4.20)$$

elde edilir. (4.18) den $n \in K$ ve $n > max\{n_0, n_{1,} n_2\}$ için (4.20) eşitsizliğinin son terimi istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu nedenle (4.19) bağıntısına göre

$$st - \lim_n \|L_n(f,x) - f(x)\|_{L_p} = 0$$

olduğu görülür.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIKLA ELDE EDİLEN KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde λ– istatistiksel yakınsaklık ile λ– istatistiksel yakınsaklık mertebesi tanıtılacak ve $C[a,b]$ uzayında pozitif lineer operatörler dizisinin $\lambda-$istatistiksel yakınsaklığı araştırılacaktır.

5.1. $\boldsymbol{\lambda}$ –İstatistiksel Yakınsaklık

$\lambda = (\lambda_n)$ dizisi

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$$

olacak şekildeki pozitif sayıların ∞ ‘a giden azalmayan bir dizisi olsun.

Genelleştirilmiş De la Vaile- Pousion ortalaması $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $n \to \infty$ iken

$$t_n(x) \to L$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına $(V, \lambda) -$ toplanabilirdir denir. Bu tanıma göre eğer $\lambda_n = n$ alınırsa $(V, \lambda) -$ toplanabilirlik $(C, 1) -$ toplanabilirliğe indirgenir.

L ye Kuvvetli Cesaro toplanabilir ve kuvvetli $(V, \lambda) -$toplanabilir $x = (x_k)$ dizilerinin kümesi için sırasıyla

$$[C, 1] := \left\{ x = (x_n) \colon \exists L \in \mathbb{R}, \ \ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ve

$$[V,\lambda]:=\left\{x=(x_n):\ \exists L\in\mathbb{R},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k-L|=0\right\}$$

gösterimi kullanılacak ve bu durumlar $x_k \to L[C,1]$ ve $x_k \to L[V,\lambda]$ şeklinde ifade edilecektir.

Bu kısımda λ –istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılıp bu kavramın $st-$ ve $[V,\lambda]-$ yakınsaklıklarla nasıl bir ilişkisi olduğu verilecektir.

Tanım 5.1.1: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}|\{k\in I_n:|\ x_k-L|\geq\varepsilon\}|=0$$

ise $x=(x_n)$ dizisi L sayısına λ -istatistiksel yakınsaktır veya s_λ-yakınsaktır denir.

Bu durumda $s_\lambda := \{x: \exists L\in\mathbb{R},\ s_\lambda - lim x = L\}$ olmak üzere $s_\lambda - \lim_n x = L$ veya $x_k \to L(s_\lambda)$ gösterimi kullanılır.

Uyarı 5.1.1:

(i) Eğer $\lambda_n = n$ alınırsa o zaman s_λ ile st aynı olur.

(ii) Eğer $A=(a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_n} & k\in I_n\ ise\\ 0 & k\notin I_n\ ise\end{cases}$$

olarak alınırsa bu durumda λ -istatistiksel yakınsaklık A-istatistiksel yakınsaklığın özel bir durumu olacaktır.

Aşağıda s_λ ile $[V,\lambda]$ ve $(C,1)$ metotları arasındaki ilişkiler verilecektir.

$\lambda_1 = 1$ olmak üzere $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1,\ n \geq 1$ koşulunu sağlayan pozitif sayıların ∞' a giden azalmayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini Λ ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1.2: $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu takdirde

(i) $x_k \to L[V,\lambda] \Rightarrow x_k \to L(s_\lambda)$ ve $[V,\lambda] \subseteq s_\lambda$ kapsaması doğrudur

(ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ise $x_k \to L(s_\lambda) \Rightarrow x_k \to L[V,\lambda]$ dir ve bu nedenle $x = (x_k)$ sabit olmamak kaydıyla $x_k \to L(C,1)$ dır.

(iii) $s_\lambda \cap \ell_\infty = [V,\lambda] \cap \ell_\infty$ dir.

İspat.

(i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L[V,\lambda]$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k\in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k - L|\geq\varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon |\{k \in I_n : |\ x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazılabilir. Bu nedenle de $x_k \to L[V,\lambda] \Rightarrow x_k \to L(s_\lambda)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki örnek $s_\lambda \subsetneq [V,\lambda]$ olduğunu gösterir. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} k, & n - \left[\sqrt{\lambda_n}\right] + 1 \leq k \leq n \ \text{ için} \\ 0, & \quad\quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $x \notin \ell_\infty$ olup her $\varepsilon\ (0 < \varepsilon \leq 1)$ için

$$\frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\ x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{\left[\sqrt{\lambda_n}\right]}{\lambda_n} \to 0 \qquad n \to \infty \text{ iken}$$

yazılabilir, yani $x_k \to 0(s_\lambda)$ dir. Diğer yandan

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} |\ x_k - 0| \to \infty \qquad (n \to \infty\,)$$

olup $x_k \nrightarrow 0[V,\lambda]$ dır.

(ii) $x_k \to L(s_\lambda)$ ve $x \in \ell_\infty$ olduğunu kabul edelim, yani her k için

$$|\ x_k - L| \leq M$$

olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|\ x_k - L| = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k - L|\geq\varepsilon}}|\ x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k - L|<\varepsilon}}|\ x_k - L|$$

$$\leq \frac{M}{\lambda_n}|\{k \in I_n\colon |\ x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon$$

olduğu görülür ki bu ise $x_k \to L[V,\lambda]$ anlamına gelir. Öte yandan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - L) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}(x_k - L) + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}(x_k - L)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}|x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L|$$

yazılabilir. Bu yüzden $x_k \to L[V,\lambda]$ olduğundan $x_k \to L(C,1)$ olacaktır.

(iii) nin ispatı (i) ve (ii) den açıktır.

$\lambda_n/_n$ ifadesi 1 ile sınırlı olduğundan her λ için $s_\lambda \subseteq st$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 5.1.3:

$$st \subseteq s_\lambda \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} inf\,\frac{\lambda_n}{n} > 0 \qquad (5.1)$$

dır.

İspat. Verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n\colon |\ x_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n\colon |\ x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

sağlanır. Bu nedenle

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n\colon |\ x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{n}|\{k \in I_n\colon |\ x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\geq \frac{\lambda_n}{n}.\frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n\colon |\ x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $n \to \infty$ iken limit alınır ve (3.1) ifadesi kullanılırsa

$x_k \to L(st) \Rightarrow x_k \to L(s_\lambda)$

olacağı görülür. Tersine olarak $\lim_{n\to\infty} inf \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\frac{\lambda_n(j)}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir $\left(n(j)\right)_{j=1}^{\infty}$ dizisi seçebiliriz. Bir $x = (x_i)$ dizisi

$$x_i = \begin{cases} 1\,, & i \in I_{n(j)}\,, \quad j = 1,2,\dots, \\ 0\,, & d.d \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $x \in [C,1]$ ve dolayısıyla $x \in st$ dir. Fakat $x \notin [V,\lambda]$ ve buradan da $x \notin s_\lambda$ dır. Bunun sonucu olarak (5.1) zorunludur.

5.2 $C[a,b]$ de Pozitif Lineer Operatörler Dizisinin λ-İstatistiksel Yakınsaklığı

$[a,b]$ üzerinde tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C[a,b]$ idi. Bu durumda $f \in C[a,b]$ olmak üzere $\|f\|_\infty \coloneqq sup_{a\le x\le b}|f(x)|$ normu ile $C[a,b]$ bir Banach uzayıdır. $L_n: C[a,b] \to C[a,b]$ olsun.

Teorem 5.2.1: $L_n: C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin aşağıdaki şartları sağlayan bir dizisi olsun:

$$st_\lambda - lim\|L_n(1,x) - 1\|_B = 0 \tag{5.2}$$

$$st_\lambda - lim\|L_n(t,x) - x\|_B = 0 \tag{5.3}$$

$$st_\lambda - lim\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B = 0 \tag{5.4}$$

Bu takdirde tüm reel eksende sınırlı herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$st_\lambda - lim\|L_n(f,x) - f(x)\|_B = 0$$

olur.

İspat. $f \in C[a,b]$ ve f tüm reel eksen üzerinde sınırlı olduğundan

$$|f(x)| \leq M, \quad -\infty < x < \infty$$

dır. Bu nedenle

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M, \quad -\infty < t, x < \infty \tag{5.5}$$

yazılabilir. Ayrıca $f \in C[a,b]$ olduğundan f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde süreklidir, yani

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{her } |t - x| \leq \delta \tag{5.6}$$

dir. Buradan hareketle

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \tfrac{2M}{\delta^2}(t - x)^2, \quad \text{her } |t - x| \leq \delta \tag{5.7}$$

olur. Bu ise

$$-\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2 < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2$$

anlamına gelir. O halde $L_n(f;x)$ lineer ve monoton olduğundan $L_n(1;x)$ i bu son eşitsizliğe uygulayabiliriz. Böylece

$$L_n(1;x)\left(-\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2\right) < L_n(1;x)\big(f(t) - f(x)\big) < L_n(1;x)\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2\right)$$

elde edilir. Öte yandan x bir sabit olduğundan $f(x)$ de sabit bir sayıdır. Böylece

$$\begin{aligned} -\varepsilon L_n(1;x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n((t - x)^2;x) &< L_n(f;x) - f(x)L_n(1;x) \\ &< \varepsilon L_n(1;x) + \tfrac{2M}{\delta^2} L_n((t - x)^2;x) \end{aligned} \tag{5.8}$$

olduğu görülür. Fakat

$$\begin{aligned} L_n(f;x) - f(x) &= L_n(f;x) - f(x)L_n(1;x) + f(x)L_n(1;x) - f(x) \\ &= [L_n(f;x) - f(x)L_n(1;x)] + f(x)[L_n(1;x) - 1] \end{aligned} \tag{5.9}$$

dır. (5.8) ve (5.9) ifadelerini kullanarak

$$L_n(f;x) - f(x) = \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2;x) + f(x)(L_n(1;x) - 1) \tag{5.10}$$

bulunur. Şimdi $L_n((t-x)^2;x)$ i hesaplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} L_n((t-x)^2;x) &= L_n(t^2 - 2tx + x^2;x) \\ &= L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x) \\ &= [L_n(t^2;x) - x^2] - 2x[L_n(t;x) - x] + x^2[L_n(1;x) - 1] \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (5.10) u kullanarak

$$\begin{aligned} L_n(f;x) - f(x) &< \varepsilon L_n(1;x) \\ &+ \frac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x) - x^2] - 2x[L_n(t;x) - x] + x^2[L_n(1;x) - 1]\} \\ &+ f(x)(L_n(1;x) - 1) \\ &= \varepsilon[L_n(1;x) - 1] + \varepsilon \\ &+ \frac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x) - x^2] - 2x[L_n(t;x) - x] + x^2[L_n(1;x) - 1]\} \\ &+ f(x)(L_n(1;x) - 1) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde ederiz. ε keyfi olduğundan

$$\begin{aligned} &\|L_n(f,x) - f(x)\|_B \\ &\leq \left(\varepsilon + \frac{2Mb^2}{\delta^2} + M\right)\|L_n(1,x) - 1\|_B + \frac{4Mb}{\delta^2}\|L_n(t,x) - x\|_B \\ &+ \frac{2M}{\delta^2}\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \\ &\leq K(\|L_n(1,x) - 1\|_B + \|L_n(t,x) - x\|_B + \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B) \end{aligned} \tag{5.11}$$

yazabiliriz. Burada

$$K = max\left(\varepsilon + \frac{2Mb^2}{\delta^2} + M, \frac{4Mb}{\delta^2}\right)$$

şeklindedir. $\varepsilon' > 0$ için

$$D = \left\{ n \in I_m : \|L_n(1,x) - 1\|_B + \|L_n(t,x) - x\|_B + \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{K} \right\},$$

$$D_1 = \left\{ n \in I_m : \|L_n(1,x) - 1\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ n \in I_m : \|L_n(t,x) - x\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ n \in I_m : \|L_n(t^2,x) - x^2\|_B \geq \frac{\varepsilon'}{3K} \right\}$$

olsun. Bu durumda $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olup $\delta_\lambda(D) \leq \delta_\lambda(D_1) + \delta_\lambda(D_2) + \delta_\lambda(D_3)$ olacaktır. Böylece (5.2), (5.3) ve (5.4) şartlarını kullanarak

$$st_\lambda - lim\|L_n(f,x) - f(x)\|_B = 0$$

yazılabilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 5.2.1: (5.11) eşitsizliğinde $n \to \infty$ olması durumunda klasik Korovkin teoremi elde edilir.

Aşağıda Teorem 5.2.1 in şartlarını sağladığı halde Korovkin teoreminin şartlarını sağlamayan bir pozitif lineer operatörler dizisi örneği verilmiştir.

Örnek 5.2.1: Klasik Bernstein polinomların

$$B_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}; 0 \leq x \leq 1,$$

dizisini ele alalım. (P_n) dizisi $P_n: C[0,1] \to B[0,1]$, $P_n(f,x) = (1+z_n)B_n(f,x)$ ile tanımlansın. Burada (z_n) dizisi

$$z_n := \begin{cases} k, & n - \left[\sqrt{\lambda_n}\right] + 1 \leq k \leq n \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

şeklindedir. Bu takdirde

$$B_n(1,x) = 1,\ B_n(t,x) = x \text{ ve } \quad B_n(t^2,x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

ve (P_n) dizisi (5.2), (5.3) ve (5.4) şartlarını sağlar. Böylece

$$st_\lambda - lim\|P_n(f,x) - f(x)\|_B = 0$$

olacaktır. Diğer taraftan $B_n(f,0) = f(0)$ olduğundan $P_n(f,0) = (1+z_n)f(0)$ olur ve böylece

$$\|P_n(f,x) - f(x)\|_B \geq |P_n(f,0) - f(0)| = z_n|f(0)|$$

yazılabilir. $\lim_n sup_{n\to\infty} z_n$ mevcut olmadığından (P_n) dizisi klasik Korovkin teoreminin şartlarını sağlamaz.

Şimdi $L_p[a,b]$ üzerinde tanımlanan pozitif lineer operatörler dizisi için λ-istatistiksel yakınsaklık aracılığıyla bir Korovkin tipi teorem verilecektir.

Teorem 5.2.2: (L_n) dizisi $L_n: L_p[a,b] \to L_p[a,b]$ ile tanılanan pozitif lineer operatörler dizisi olmak üzere $\{\|L_n\|\}$ dizisi düzgün sınırlı olsun. Ayrıca

$$st_\lambda - \lim_n \|L_n(t^v,x) - x^v\|_{L_p} = 0, \quad v = 0,1,2, \tag{5.12}$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde herhangi bir $f \in L_p[a,b]$ için

$$st_\lambda - \lim_n \|L_n(f,x) - f(x)\|_{L_p} = 0$$

dır.

İspat. (5.10) bağıntısından $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n \in K_v$ ve $n > n_v$, $v = 0,1,2$ için

$$\|L_n(t^v,x) - x^v\|_{L_p} < \varepsilon \tag{5.13}$$

olacak şekilde 1 yoğunluklu K_v , $v = 0,1,2,$ alt kümeleri ve $n_v(\varepsilon)$, $v = 0,1,2,$ sayıları vardır. $\delta(K_0 \cap K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan (5.11) eşitsizliği $n \in K \coloneqq K_0 \cap K_1 \cap K_2$ ve $n > max\{n_0, n_{1,}n_2\}$ için sağlanır.

Hipoteze göre $\|L_n\|_{L_p \to L_p} \leq M,\ n = 1,2,...$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. Öte yandan $C[a,b]$, $L_p[a,b]$ de yoğun olduğundan $f \in L_p[a,b]$ için

$\|f - g\|_{L_p} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $g \in C[a,b]$ fonksiyonu vardır. Bu nedenle

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_{L_p} \leq \|L_n(f-g,x)\|_{L_p} + \|L_n(g,x) - g(x)\|_{L_p} + \|f-g\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon(1+M) + \|L_n(g,x) - g(x)\|_{L_p} \tag{5.14}$$

elde edilir. g fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğundan her $x \in [a,b]$ ve bir C sabiti için $|g(x)| \leq C$ elde edilir. Böylece

$$\|L_n(g,x) - g(x)\|_{L_p} \leq \|L_n(|g(t) - g(x)|, x)\|_{L_p} + C\|L_n(1,x) - 1\|_{L_p}$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla $g \in C[a,b]$ olduğundan $\|L_n(t^v, x) - x^v\|_{L_p} < \varepsilon$ eşitsizliğindeki her $t, x \in [a,b]$ için H ve δ pozitif sabitler olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon + 2H\delta^{-2}(t-x)^2$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\|L_n(|g(t) - g(x)|, x)\|_{L_p} &\leq \varepsilon\|L_n(1,x)\|_{L_p} + \|L_n((t-x)^2, x)\|_{L_p} \\ &\leq \varepsilon\left(\|L_n(1,x) - 1\|_{L_p} + 1\right) + \|L_n(t^2,x) - x^2\|_{L_p} + 2b\|L_n(t,x) - x\|_{L_p} \\ &\quad + b^2\|L_n(1,x) - 1\|_{L_p} \qquad (5.15)\end{aligned}$$

elde edilir. $\|L_n(t^v, x) - x^v\|_{L_p} < \varepsilon$ dan $n \in K$ ve $n > max\{n_0, n_{1,} n_2\}$ için (5.15) eşitsizliğinin son terimi istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu yüzden (5.14) bağıntısına göre

$$st_\lambda - \lim_n \|L_n(f,x) - f(x)\|_{L_p} = 0,$$

olduğu görülür.■

Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2.3: $L_n: C[a,b] \to C[a,b]$ Teorem 5.2.1 in (5.3) ve (5.4) şartlarını ve

$$\lim_n \|L_n(1,x) - 1\|_B = 0 \qquad (5.2')$$

şartını sağlayan Pozitif lineer operatörleri verilmiş olsun. Bu takdirde herhangi bir $f \in C[a,b]$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{n \in I_n} \|L_n(f,x) - f(x)\|_B = 0$$

dır.

İspat. (5.2') şartından bir $M > 0$ sabiti ve her $n = 1,2,3, \dots$ için $\|L_n(1,x)\|_B \leq M'$ yazılabilir. Böylece $f \in C[a,b]$ için

$$\|L_n(f,x) - f(x)\|_B \leq \|f\|_B \|L_n(1,x)\|_B + \|f\|_B \leq M(M'+1) \tag{5.16}$$

elde edilir. Teorem 5.2.1 e göre (5.2') koşulu (5.2) koşulunu sağladığından

$$st_\lambda - \lim \|L_n(f,x) - f(x)\|_B = 0 \tag{5.17}$$

elde edilir. (5.16) ve (5.17) bağıntıları birlikte istenen sonucu verir. Bu da ispatı tamamlar.

5.3 λ –İstatistiksel Yakınsaklık Mertebesi

Bu kısımda pozitif lineer operatörler dizisinin λ –İstatistiksel yakınsaklık mertebesi ile ilgileneceğiz.

Tanım 5.3.1: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{(\lambda_n)^{1-\beta}} |\{n \in I_n : |x_n - L| > \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_n)$ sayı dizisi L sayısına $0 < \beta < 1$ dereceden λ –İstatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$$x_n - L = (st_\lambda) - o\left(n^{-\beta}\right), \qquad k \to \infty \text{ için}$$

gösterimi kullanılır.

Teorem 5.3.1: $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

$$\|L_n(1,x) - 1\|_B = st_\lambda - o\left(n^{-\beta_1}\right)$$

$$\|L_n(t,x) - x\|_B = st_\lambda - o\left(n^{-\beta_2}\right)$$

$$\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B = st_\lambda - o\left(n^{-\beta_3}\right)$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde $\beta = min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ olmak üzere herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$\|L_n(f,x) - f(x)\|_B = st_\lambda - o(n^{-\beta})$, $n \to \infty$ için

dır.

İspat. (5.10) eşitsizliği

$$\frac{\|L_n(f,x) - f(x)\|_B}{(\lambda_k)^{1-\beta}}$$

$$\leq \left(\varepsilon + \frac{2Mb^2}{\delta^2} + M\right) \frac{\|L_n(1,x) - 1\|_B}{(\lambda_k)^{1-\beta_1}} \left(\frac{(\lambda_k)^{1-\beta_1}}{(\lambda_k)^{1-\beta}}\right)$$
$$+ \frac{4Mb}{\delta^2} \frac{\|L_n(t,x) - x\|_B}{(\lambda_k)^{1-\beta}} \left(\frac{(\lambda_k)^{1-\beta_2}}{(\lambda_k)^{1-\beta}}\right)$$
$$+ \frac{2M}{\delta^2} \frac{\|L_n(t^2,x) - x^2\|_B}{(\lambda_k)^{1-\beta}} \left(\frac{(\lambda_k)^{1-\beta_3}}{(\lambda_k)^{1-\beta}}\right)$$

olarak tekrar yazılabilir. Böylece $\beta = min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ alındığında

$\|L_n(f,x) - f(x)\|_B = st_\lambda - o(n^{-\beta})$, $n \to \infty$ için

dır. Bu da ispatı tamamlar.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Korovkin tipi yaklaşım teoremlerinin klasik yakınsaklıktan λ –istatistiksel yakınsaklığa taşınması ve λ –istatistiksel yakınsaklık mertebesi yoluyla klasik yakınsaklığa dönüştürülmesi amaçlanmıştır. Bunun için ise pozitif lineer operatörler, istatistiksel yakınsaklık, λ –istatistiksel yakınsaklık, λ –istatistiksel yakınsaklık mertebesi gibi kavramlar tanıtılmıştır. λ –istatistiksel yakınsaklığa geçmeden önce ise Korovkin teoremlerinin klasik sonuçlarına yer verilmiş ve son olarak λ –istatistiksel yakınsaklık mertebesi hesaplanmıştır.

Günümüzde birçok yakınsama çeşidi bulunmaktadır. Bu çalışmadan yola çıkarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri farklı yakınsaklık çeşitlerine uyarlanabilir.

7. KAYNAKLAR

Bohman, H., 1952. On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Math. 2, 43–46.

Buck, R.C., 1953. Generalized asymptotic density. American J. Math. 75, 335–346.

Connor, J., 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences. Analysis, 8, 47–63.

Connor, J., 1989. On Strong Matrix Summability with Respect to a Modulus and Statistical Convergence. Canad. Math. Bull, 32, 194–198.

Demirci, K., İstatistiksel yakınsaklık, 1992. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü 73s.

Edely, O.H.H., Mohiuddine, S.A., and Noman Abdullah K., 2010. Korovkin type approximation theorems obtained through generalized statistical convergence. Applied Mathematics Letters. 23, 1382–1387

Fast, H., 1951. Sur la Convergence Statistique. Colloq. Math. 2, 241–244.

Freedman A. R., and Sember J. J., 1981. Densities and Summability. Pasific J. Math. 95, 293–305.

Fridy, J. A., 1985. On Statistical Convergence. Analysis, 5, 301–313.

Fridy, J.A., and Miller, H.I.A., 1991. Matrix characterization of statisticalconvergence. Analysis, 11, 59–66.

Fridy, J. A., and Orhan C., 1993. Lacunary Statistical Convergence. Pasific J. Math. 160, 43–51.

Gadjiev, A.D., and Orhan, C., 2002. Some approximation theorems via Statistical convergence. Journal of mathematics. 32, 129–138.

Hacıyev, A., ve Hacısalihoğlu, H., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü. Yayınları, 100s, Ankara.

Kolk, E., 1991. The Statistical Convergence, in Banach Spaces. Acta Et Comment Tartuensis, 928, 41–52.

Korovkin, P.P., 1960. Linear operators and Theory of Approximation. Hindustan Publ. Co. Delhi.

Leindler, L., 1965. Uber die de la Vallee-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16, 375–387.

Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press.

Maddox, I.J., 1974. Steinhaus type theorems for summability matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 45, 209–213.

Maddox, I. J., 1978. A new type of convergence. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 83, 61–64.

Mursaleen, M., 2000. λ-statistical convergence Mathematica Slovaca, Vol. 50, No. 1, 111—115.

Niven, I., and Zuckerman, H.S., 1980. An introduction to the theory of numbers. 4, New York, John Wiley & Sons.

Salat, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca 30, 139–150.

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly. 66, 361–375.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yasemin Park

Doğum Yeri : Korgan

Doğum Tarihi : 22.10.1987

Medeni Hali : Bekâr

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Korgan Lisesi,(2000–2004)

Lisans : Niğde Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, (2005–2009)

Yüksek Lisans : Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, (2009-2011)

İletişim Bilgileri: Tepe Mah. Mehmet Biçim Sok. No:75 Korgan/Ordu

e-mail: yasmin-prk@hotmail.com