DUAL LORENTZ UZAYINDA SPACELIKE ï TIMELIKE ĶNVOLÜTï EVOLÜT EĴ RĶLER ÜZERĶNE

SÜMEYYE GÜR

YÜKSEK LĶSANS TEZĶ

MATEMATĶK ANABĶLĶM DALI

T.C.

ORDU ÜNĶVERSĶTESĶ

FEN BĶLĶMLERĶ ENSTĶTÜSÜ

DUAL LORENTZ UZAYINDA SPACELIKE ï TIMELIKE

ĶNVOLÜT ï EVOLÜT EĴ RĶLER ÜZERĶNE

SÜMEYYE GÜR

YÜKSEK LĶSANS TEZĶ

MATEMATĶK ANABĶLĶM DALI

AKADEMĶK DANIķMAN

Yrd. Doç. Dr. Süleyman ķENYURT

ORDU ï 2010

T.C.
ORDU ÜNĶVERSĶTESĶ
FEN BĶLĶMLERĶ ENSTĶTÜSÜ

Bu çalēķma jürimiz tarafēndan ..../...../....... tarihinde yapēlan sēnav ile Matematik Anabilim Dalē'nda YÜKSEK LĶSANS tezi olarak kabul edilmiķtir.

Baķkan : Prof. Dr. Mustafa ÇALIķKAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Süleyman ķENYURT

Üye : Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN

ONAY :

Yukarēdaki imzalarēn adē geçen öĵretim üyelerine ait olduĵunu onaylarēm.

..../..../2010

Yrd. Doç. Dr. BeyhanTAķ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bu çalēĸma dört bölümden oluĸmaktadēr. Giriĸ bölümde çalēĸmanēn amacē ve konunun ele alēnma nedeni tartēĸēldē. Genel bilgiler bölümünde ise Öklid uzayē, Lorentz uzayē ve dual Lorentz uzayē ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Materyal ve Yöntem bölümünde IL^3, 3-boyutlu Lorentz uzayēnda involüt ï evolüt eĝrilerin eĝrilikleri, Frenet vektörleri arasēndaki iliĸkiler, Darboux vektörleri ve bu vektörler yönündeki birim vektörler arasēndaki baĝēntēlar verildi.

Bulgular bölümü çalēĸmamēzēn orijinal kēsmēnē oluĸturmaktadēr. Bu bölümde ID_1^3 dual Lorentz uzayēnda spacelike ï timelike dual involüt ï evolüt eĝrilerin dual eĝrilikleri, dual Frenet vektörleri arasēndaki iliĸkiler, dual Darboux vektörleri ve bu vektörler yönündeki birim dual vektörler ele alēnarak bazē bulgular elde edildi.

Anahtar Sözcükler: Dual Lorentz uzayē, dual involüt ï evolüt eĝriler.

ABSTRACT

This study consists of four basic chapters. In introduction, it is discussed aim of the study and why this study is taken into consideration. In general information part, the basic concept about Euclid space, Lorentz space and dual Lorentz space have been examined.

In material and method part, involute ï evolute curve couple, curvatures, relationship the between Frenet vectors, Darboux vectors and unit vectors direction of this vectors of involute ï evolute curves in IL^3 3-dimensional Lorentz space have been given.

The fourth chapter is the orijinal part of this study. In this chapter, dual curvatures, relationship the between Frenet vectors, dual Darboux vectors and unit dual vectors direction this vectors of spacelike ï timelike dual involute ï evolute curves in ID_1^3 dual Lorentz space have been investigated and some results have been found.

Key Words: Dual Lorentz space, dual involute ï evolute curve couple.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca beni her aşamada yönlendiren bilgi ve tecrübeleriyle yardımlarını esirgemeyen aynı zamanda danışmanlığımı yapan Saygıdeğer Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT'a, her türlü yardım ve önerileriyle varlığını ve desteğini hep arkamda hissettiğim Saygıdeğer Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN'e ve maddi, manevi her yönden daima yanımda olan Canım Aileme tüm içtenliğimle en derin saygı, en candan minnet ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sümeyye GÜR

İÇİNDEKİLER

1. Giriş é é é é é é é é é é ..é .1

2. Genel Bilgiler é é é é é é ....é é é é é é é é é é é é é é é é é é ...2

2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar..é é é ...é é é é é é é é é 2

2.2 E^3 Öklid Uzayında İnvolüt – Evolüt Eğriler é é .é é é é é é é é é é ...é 5

2.3 Lorentz Uzayında Temel Kavramlar é é ...é é é é é é é é é é é é é é ...8

2.4 Dual Uzayda Temel Kavramlar é ..é é é é é é é é é é é é é é é é é .16

3. Materyal ve Yöntem .é ..28

3.1 IL^3 Lorentz Uzayında Spacelike – Timelike İnvolüt – Evolüt Eğriler é é é .28

4. Bulgular é ...34

4.1 ID_1^3 Dual Lorentz Uzayında Spacelike – Timelike Dual İnvolüt – Evolüt Eğriler é ..é é é é é é é é é é 34

5. Tartışma é ..47

6. Sonuç ve Öneriler é ...48

7. Kaynaklar é ...49

8. Özgeçmiş é .51

ķEKĶLLER LĶSTESĶ

1. ķekil 2.1 Darboux Vektörüé é é é ...é é é é é é é é é é é é é é é é .5

2. ķekil 2.2 Ķnvolüt ï Evolüt Eĵ riler é é é .é é é é é é é é é é é é é é 6

3. ķekil 2.3 Dual Açıé é é é é ..é é é é é é é é é é é é é é é é é é ..19

1. GĶRĶŞ

Öklid uzayē, Lorentz uzayē ve dual uzay ile ilgili temel kavramlar birçok kaynakta mevcuttur. Bunlardan bazēlarē **Hacēsalihoĵlu**ô nun ***ñ**Diferensiyel Geometri**ò*** ve ñ*Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi**ò***, **Sabuncuoĵlu**ô nun ***ñ**Diferensiyel Geometri*, **Struik**ô un ***ñ**Lectures on Classical Differential Geometry**ò***, **Oôneill**ô in ***ñ**Semi Riemann Geometry**ò***, **Ratcliffe**ô in ***ñ**Foundations of Hyperbolic Manifolds**ò*** ve **Müler**ô in ***ñ**Kinematik Dersleri**ò*** isimli kitaplardēr.

Ķnvolüt ï evolüt eĵriler ile ilgili olarak, **Bilici**ô nin ***ñĶ**nvolüt **ï** Evolüt E**ĵ**rilerinin Küresel Göstergelerinin E**ĵ**rilikleri ve Tabii Liftleri**ò*** isimli yüksek lisans tezi ve ***ñ**Timelike veya Spacelike **Ķ**nvolüt **ï** Evolüt E**ĵ**ri Çiftleri Üzerine**ò*** isimli doktora tezi, **Turgut ve Esin**ô in **ñ***Involute **ï** Evolute Curve Couples of Higher Order in and Their Horizontal Lifts in* IR^n ò isimli makalesi, **Bükcü ve Karacan**ô ēn ***ñ**On The Involute and Evolute Curves of The Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space**ò*** ve ***ñ**On The Involute and Evolute Curves of The Timelike Curve in Minkowski 3-Space**ò*** isimli makaleleri bulunmaktadēr.

Bu çalēĸmada ise ID_1^3 dual Lorentz uzayēnda spacelike ï timelike dual involüt ï evolüt eĵrilerin Frenet çatēlarē arasēndaki baĵēntēlar, evolüt eĵrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasēndaki Φ dual açēsēna baĵlē olarak ifade edilmiĸ ve bu eĵrilerin dual eĵrilikleri, Darboux vektörleri ve bu vektörler yönündeki birim vektörler arasēndaki iliĸkiler bulunmuĸtur.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: $A \neq \emptyset$ bir cümle ve K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun.

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir:

A1) $\forall P,Q,R \in A$ için $f\left(P,Q\right)+f\left(Q,R\right)=f(P,R)$,

A2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f\left(P,Q\right)=\alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. Burada $P,Q \in A$ için $f\left(P,Q\right)=\overrightarrow{PQ}$ dir.

Tanım 2.1.2: A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to IR$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu fonksiyona **iç çarpım fonksiyonu** denir**:**

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$\forall X,Y,Z \in V$ ve $\forall a,b \in IR$ için

$$\langle aX+bY,Z\rangle = a\langle X,Z\rangle + b\langle Y,Z\rangle$$

$$\langle X,aY+bZ\rangle = a\langle X,Y\rangle + b\langle X,Z\rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$\forall X,Y \in V$ için $\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle$,

iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu;

$\forall X \in V$ için $\langle X,X\rangle > 0$,

$$\langle X,X\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Tanēm 2.1.3: IR^n standart reel afin uzay olsun.

$$\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \to IR \qquad \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ĸeklinde tanēmlē fonksiyon bir iç çarpēm fonksiyonudur. Bu iç çarpēma IR^n de **standart iç çarpēm** veya **Öklid iç çarpēmē** denir. Standart iç çarpēmēn tanēmlē olduĝu IR^n vektör uzayē ile birleĸen IR^n afin uzayēna ***n*ï boyutlu reel standart Öklid uzayē** denir ve $\boldsymbol{E^n}$ ile gösterilir.

Tanēm 2.1.4: $d : E^n \times E^n \to IR \qquad d\left(X, Y\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ ĸeklinde tanēmlē d fonksiyonuna E^n de **uzaklēk fonksiyonu**, $d\left(X, Y\right)$ reel sayēsēna da $X, Y \in E^n$ noktalarē arasēndaki **uzaklēk** denir.

Tanēm 2.1.5: $\alpha : I \subset IR \to E^n \qquad \alpha\left(t\right) = \left(\alpha_1\left(t\right), \alpha_2\left(t\right), ..., \alpha_n\left(t\right)\right)$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna $\boldsymbol{E^n}$ **de bir eĝri** denir.

Tanēm 2.1.6: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ diferansiyellenebilir bir eĝri olsun. $\left\|\alpha'\right\| : I \to IR$ ĸeklinde tanēmlē fonksiyona **skaler hēz fonksiyonu**, $\left\|\alpha'(t)\right\|$ reel sayēsēna α eĝrisinin $\alpha\left(t\right)$ noktasēndaki **skaler hēzē**, $\alpha'\left(t\right) = \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_t = \left(\frac{d\alpha_1\left(t\right)}{dt}, \frac{d\alpha_2\left(t\right)}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n\left(t\right)}{dt}\right)$ vektörüne de eĝrinin **hēz vektörü** denir.

Tanēm 2.1.7: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eĝri olsun. $\left\|\alpha'(s)\right\| = 1$ ise α eĝrisine **birim hēzlē eĝri** ve $s \in I$ parametresine de eĝrinin **yay parametresi** denir.

Tanēm 2.1.8: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ bir eĝri olsun. $\psi = \left\{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\right\}$ sistemi lineer baĝēmsēz ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\left\{\psi\right\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\left\{v_1\left(m\right), v_2\left(m\right), \ldots, v_r\left(m\right)\right\}$ ortonormal sistemine, α eĝrisin $m \in \alpha$ noktasēndaki **Serret-Frenet r-ayaklēsē** denir. Her bir v_i , $1 \le i \le r$, vektörüne **Serret-Frenet vektörü** adē verilir.

Özel olarak $n=3$ alınırsa

$$\begin{cases} t(s)=\alpha'(s), \\ n(s)=\dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \\ b(s)=t(s)\wedge n(s) \end{cases}$$

olur. Burada t, n ve b vektörlerine, sırasıyla, eğrinin **teğet, asli normal ve binormal vektörleri** denir.

Tanım 2.1.9: $\alpha : I \subset IR \to E^n$ eğrisinin, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{v_1(s), v_2(s), \ldots, v_r(s)\}$ olsun.

$$k_i : I \to IR \qquad k_i(s)=\left\langle v_i'(s)\ ,\ v_{i+1}(s)\right\rangle\ , \quad 1 \le i \le r \quad ,$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna α eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu**, $k_i(s) \in IR$ sayısına da $\alpha(s)$ noktasındaki **i-yinci eğriliği** denir.

Teorem 2.1.1: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ bir eğri, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t(s), n(s), b(s)\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. Eğrinin Frenet vektörleri ile bu vektörlerin türev vektörleri arasında;

$$\begin{cases} t' = k_1 n \\ n' = -k_1 t + k_2 b \\ b' = -k_2 n \end{cases}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu, 1983). Bu bağıntıya **Frenet formülleri** adı verilir.

Tanım 2.1.11: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet 3-ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında bir ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) ekseni**, bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektöre **Darboux vektörü** denir ve bu vektör

$$w = n \wedge n' = k_2 t + k_1 b$$

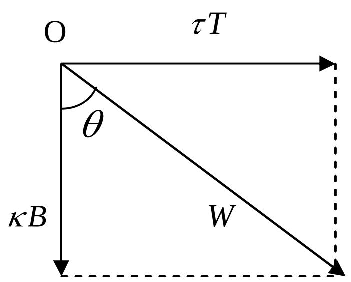
bağıntısı ile verilir. Burada b ile w arasındaki açı φ ile gösterilirse

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| \cos\varphi \\ k_2 = \|w\| \sin\varphi \end{cases}$$

olur. Darboux yönündeki birim vektör c ise;

$$c = \sin\varphi t + \cos\varphi b$$

şeklinde bulunur (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Darboux vektörü

2.2. E^3 Öklid Uzayında İnvolüt - Evolüt Eğriler

Tanım 2.2.1: $\alpha : I \subset IR \to E^3$ ve $\beta : I \subset IR \to E^3$ eğrileri verilsin. α eğrisinin teğet doğrultusu β eğrisinin teğet doğrultusuna dik oluyorsa β eğrisine α eğrisinin bir **involütü** veya β eğrisinin teğet doğrultusu α eğrisinin normal doğrultusu oluyorsa β eğrisine α eğrisinin bir **evolütü** denir. β eğrisi α nın involütü ise,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s) t(s), \quad \lambda \in IR,$$

α eğrisi β nın involütü ise,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s) n(s) + \mu(s) b(s), \quad \lambda, \mu \in IR$$

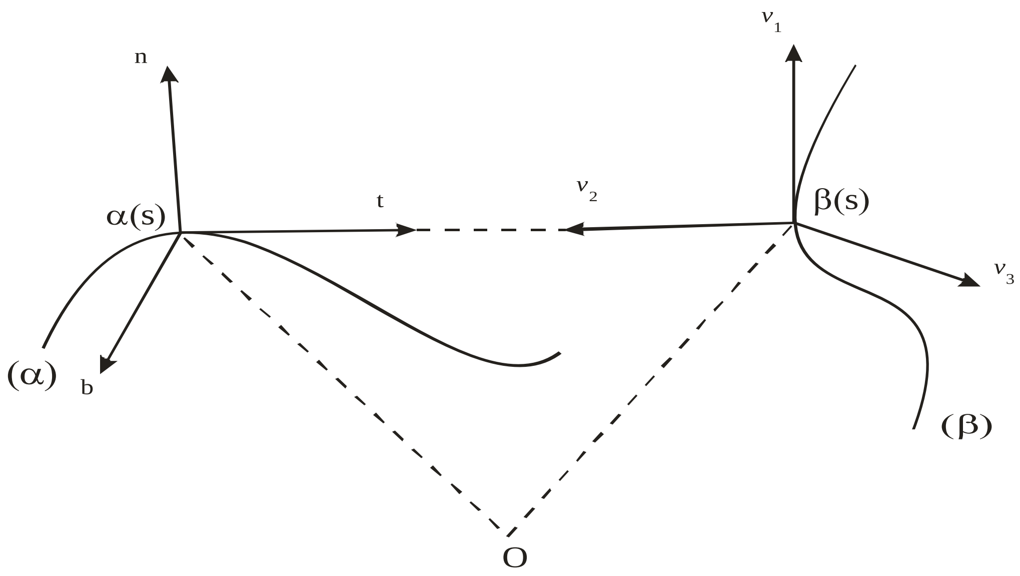
dir. Bu tanıma göre $\langle t, v_1 \rangle = 0$ olur. Bu eğriler **involüt - evolüt eğriler** olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.1: $\beta : I \subset IR \to E^3$ eğrisi $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin bir involütü , α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2 ve β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$, eğrilikleri p ve q olsun. Bu durumda $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\left(\alpha(s),\beta(s)\right) = |c-s|, \quad c = sbt, \quad \forall s \in I \tag{2.1}$$

dir.

İspat:



Şekil 2.2. İnvolüt – evolüt eğriler

β eğrisi α eğrisinin involütü olduğundan

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda t(s), \quad \lambda \in IR \tag{2.2}$$

yazılabilir. s ye göre türev alınırsa,

$$v_1 \frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')t + \lambda k_1 n \tag{2.3}$$

olur. Her iki taraf t ile iç çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$(1+\lambda') = 0 \Rightarrow \lambda' = -1 \Rightarrow \lambda = c - s, \; c = sbt$$

bulunur. İki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından, $\alpha(s)$ ile $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\left(\alpha(s),\beta(s)\right)=\left\|\beta(s)-\alpha(s)\right\|,$$

$$=\sqrt{\langle \lambda t,\lambda t\rangle},$$

$$=\left|c-s\right|,\quad c\in IR$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2: $\beta : I\subset IR\to E^3$ eğrisi, $\alpha : I\subset IR\to E^3$ eğrisinin involütü, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$, eğrilikleri p ve q olsun. Bu iki eğrinin eğrilikleri arasında;

$$p^2=\frac{\left(k_1^2+k_2^2\right)}{\left(c-s\right)^2 k_1^2}\quad, \tag{2.4}$$

$$q=\frac{k_1k_2'-k_1'k_2}{\left(c-s\right)k_1\left(k_1^2+k_2^2\right)} \tag{2.5}$$

bağıntıları vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.2.3: $\beta : I\subset IR\to E^3$ eğrisi $\alpha : I\subset IR\to E^3$ eğrisinin involütü, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$ olsun. α eğrisinin b binormal vektörü ile w Darboux vektörü arasındaki açı φ olmak üzere, bu eğrilerin Frenet vektörleri arasında;

$$\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\\ n\\ b\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

bağıntısı vardır (Bilici, 1999).

Teorem 2.2.4: $\beta : I \subset IR \to E^3$ eĝrisi $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eĝrisinin involütü, α eĝrisinin $\alpha(s)$ noktasēndaki Frenet 3-ayaklēsē $\{t,n,b\}$, Darboux vektörü w ve β eĝrisinin $\beta(s)$ noktasēndaki Frenet 3-ayaklēsē $\{v_1,v_2,v_3\}$, Darboux vektörü $\overline{w}$ olsun. w ile $\overline{w}$ arasēnda

$$\overline{w} = \frac{w+\varphi' n}{k_1(c-s)} \tag{2.7}$$

baĝēntēsē vardēr (Bilici, 1999).

Teorem 2.2.5: $\beta : I \subset IR \to E^3$ eĝrisi $\alpha : I \subset IR \to E^3$ eĝrisinin involütü, α eĝrisinin $\alpha(s)$ noktasēndaki Frenet 3-ayaklēsē $\{t,n,b\}$, w Darboux vektörü yönündeki birim vektör c ve β eĝrisinin $\beta(s)$ noktasēndaki Frenet 3-ayaklēsē $\{v_1,v_2,v_3\}$, $\overline{w}$ Darboux vektörü yönündeki birim vektör $\overline{c}$ olsun. c ile $\overline{c}$ arasēnda;

$$\overline{c} = \frac{\varphi' n + \sqrt{k_1^2+k_2^2}\,c}{\sqrt{\varphi'^2+k_1^2+k_2^2}} \tag{2.8}$$

baĝēntēsē vardēr (Bilici, 1999).

2.3. Lorentz Uzayēnda Temel Kavramlar

Tanēm 2.3.1: $\langle , \rangle : V \times V \to IR$ fonksiyonu aĸaĝēdaki aksiyomlarē saĝlarsa $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayē üzerinde **simetrik bilineer form** denir:

$\forall a,b \in IR$ ve $\forall u,v,w \in V$ için,

i) Bilineerlik Aksiyomu;

$$\langle au+bv, w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle$$

$$\langle au+bv, w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu;

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$$

(Oôneill, 1983).

Tanēm 2.3.2: $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow IR$ fonksiyonu V uzayē üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise simetrik bilineer forma **pozitif tanēmlē,**

ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise simetrik bilineer forma **negatif tanēmlē,**

iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise simetrik bilineer forma **yarē-pozitif tanēmlē,**

iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise simetrik bilineer forma **yarē-negatif tanēmlē,**

v) $\forall v \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0$ ise simetrik bilineer forma **non-dejenere** denir .

Tanēm 2.3.3: $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow IR$ fonksiyonu simetrik, bileener ve non-dejenere ise $\langle , \rangle$ ye V üzerinde bir **skalar çarpēm fonksiyonu**, V vektör uzayēna da **skalar çarpēm uzayē** denir (Oôneill).

Tanēm 2.3.4: $\langle , \rangle : IR^n \times IR^n \rightarrow IR$ $\quad \langle X, Y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$

fonksiyonu bir skalar çarpēm fonksiyonudur. Bu fonksiyona IR^n üzerinde **Lorentz metriĵi** denir.

Tanēm 2.3.5: IR^n üzerinde tanēmlē Lorentz metriĵi ile birlikte $\{IR^n, \langle , \rangle\}$ ikilisine ***n*-boyutlu Lorent uzayē** veya kēsaca **Lorentz uzayē** denir ve IL^n ile gösterilir.

Tanēm 2.3.6: $X \in IL^n$ vektörü için;

i) $\langle X, X \rangle > 0$ veya $X = 0$ ise X e **uzaysē (spacelike) vektör,**

ii) $\langle X, X \rangle < 0$ ise X e **zamansē (timelike) vektör vektör,**

iii) $\langle X, X \rangle = 0$ ise X e **ēekēksē (lightlike veya null) vektör** denir.

Tanēm 2.3.7: Lorentz uzayēnda bir X vektörünün **normu** $\|X\| = \sqrt{|\langle X, X \rangle|}$ ĸeklinde tanēmlanēr.

Teorem 2.3.1: $X \in IL^n$ için,

i) $\|X\| > 0$,

ii) $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür,

iii) X bir timelike vektör ise $\|X\|^2 = -\langle X, X \rangle$ dir,

iv) X bir spacelike vektör ise $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$ dir (Oǹeill, 1983).

Tanēm 2.3.8: $e = (1,0,\ldots,0,0)$ olmak üzere $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IL^n$ timelike vektörü; $\langle X, e \rangle < 0$ ise **future pointing (pozitif),** $\langle X, e \rangle > 0$ ise **past pointing (negatif)** olarak adlandērēlēr.

Teorem 2.3.2: $X, Y \in IL^n$ vektörleri için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere $\langle X, Y \rangle = 0$ olsun. X timelike vektör ise Y spacelike vektördür (Ratcliffe, 1994).

Tanēm 2.3.9: IL^3, 3-boyutlu Lorentz uzayēnda iki vektör X ve Y olsun.

$$\wedge : IL^3 \times IL^3 \to IL^3$$

$$(X,Y) \to X \wedge Y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

fonksiyonuna **vektörel çarpēm fonksiyonu,** $X \wedge Y$ vektörüne de X ile Y nin **vektörel çarpēmē** denir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

Teorem 2.3.3: IL^3, 3-boyutlu Lorentz uzayēnda iki vektör X ve Y olsun.

i) X ve Y spacelike vektör ise $X \wedge Y$ bir timelike vektördür,

ii) X ve Y timelike vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür,

iii) X spacelike ve Y timelike vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür,

iv) X ve Y null vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür,

v) X timelike ve Y null vektör ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür,

vi) X spacelike ve Y null vektör olmak üzere $\langle X, Y \rangle = 0$ ise $X \wedge Y$ bir null vektör, $\langle X, Y \rangle \neq 0$ ise $X \wedge Y$ bir spacelike vektördür (Turgut, 1995).

Teorem 2.3.4: $X, Y, Z \in IL^3$ olsun. Bu durumda;

i) $\langle X \wedge Y, Z \rangle = -\det(X, Y, Z)$,

ii) $(X \wedge Y) \wedge Z = -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X$,

iii) $\langle X \wedge Y, X \rangle = 0$ ve $\langle X \wedge Y, Y \rangle = 0$,

iv) $\langle X \wedge Y,\ X \wedge Y \rangle = -\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle + \langle X, Y \rangle^2$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 2.3.5: IL^n, n-boyutlu bir Lorentz uzayı olsun.

i) $X, Y \in IL^n$ pozitif (negatif) timelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$\langle X, Y \rangle \leq \|X\| \|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart X ve Y vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır. X ve Y pozitif (negatif) timelike vektörler ise

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cosh \varphi, \qquad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ sayısına **timelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı** denir.

ii) $X, Y \in IL^n$ spacelike vektörler olsun. Bu vektörlerin gerdiği düzlem spacelike ise

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\|$$

olur. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \varphi, \qquad \varphi = \eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \varphi \leq \pi$ reel sayısı vardır. Bu φ sayısına **spacelike vektörler arasındaki Lorentzian spacelike açı** denir.

iii) $X,Y \in IL^n$ spacelike vektörler olsunlar. Eğer X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem timelike ise,

$$\left|\langle X,Y\rangle\right| > \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cosh\varphi, \qquad \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ sayısına **spacelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı** denir.

iv) $X \in IL^n$ spacelike ve $Y \in IL^n$ timelike vektörler olsunlar. Bu durumda

$$\left|\langle X,Y\rangle\right| = \|X\|\|Y\|\sinh\varphi, \qquad \varphi = \eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ reel sayısı vardır. Bu φ sayısına **spacelike ve timelike iki vektör arasındaki Lorentzian timelike açı** denir (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.3.9: $\alpha : I \subset IR \to IL^n$ eğrisinin teğet vektörü t olsun.

i) $\langle t,t\rangle > 0$ ise α eğrisine **uzaysı (spacelike) eğri**,

ii) $\langle t,t\rangle < 0$ ise α eğrisine **zamansı (timelike) eğri**,

iii) $\langle t,t\rangle = 0$ ise α eğrisine **ışıksı (lightlike veya null) eğri** denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.3.10: $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ diferansiyellenebilir eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun.

i) ***U*** **timelike eğri bir ise;**

$$t \wedge n = -b \quad , \quad n \wedge b = t \quad , \quad b \wedge t = -n$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{cases} t' = k_1 n \\ n' = k_1 t - k_2 b \\ b' = k_2 n \end{cases} \tag{2.9}$$

(Woestijne, 1990) ve Darboux vektörü

$$w = k_2 t - k_1 b$$

şeklinde bulunur (Uğurlu, 1997).

ii) U spacelike binormalli spacelike bir eğri ise;

$$t \wedge n = -b \quad , \quad n \wedge b = -t \quad , \quad b \wedge t = n$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{cases} t' = k_1 n \\ n' = k_1 t + k_2 b \\ b' = k_2 n \end{cases} \tag{2.10}$$

(Woestijne, 1990) ve Darboux vektörü

$$w = -k_2 t + k_1 b$$

şeklinde bulunur (Uğurlu, 1997).

iii) U timelike binormalli spacelike bir eğri ise;

$$t \wedge n = b \quad , \quad n \wedge b = -t \quad , \quad b \wedge t = -n$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{cases} t' = k_1 n \\ n' = -k_1 t + k_2 b \\ b' = k_2 n \end{cases} \tag{2.11}$$

(Woestijne, 1990) ve Darboux vektörü

$$w = k_2 t - k_1 b$$

şeklinde bulunur (Uğurlu, 1997).

Tanım 2.3.11: $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2, Darboux vektörü de w olsun.

i) *U* timelike bir eğri ise,

$$\|w\| = \sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2\right|} \tag{2.12}$$

dir . Bu durumda

a) $|k_1| > |k_2|$ ise $\langle w,w \rangle > 0$ olacağından w spacelike vektör olur. b ile w vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve c vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| \cosh \varphi \\ k_2 = \|w\| \sinh \varphi \end{cases}, \qquad \|w\| = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \tag{2.13}$$

ve

$$c = \sinh \varphi t - \cosh \varphi b \tag{2.14}$$

şeklinde bulunur.

b) $|k_1| < |k_2|$ ise $\langle w,w \rangle < 0$ olacağından w timelike vektör olur. b ile w vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve c vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| \sinh \varphi \\ k_2 = \|w\| \cosh \varphi \end{cases}, \qquad \|w\| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \tag{2.15}$$

ve

$$c = \cosh \varphi t - \sinh \varphi b \tag{2.16}$$

şeklinde bulunur.

ii) *U* spacelike binormalli spacelike eğri ise,

$$\|w\| = \sqrt{\left|k_1^2 + k_2^2\right|} \tag{2.17}$$

dir. Burada $\langle w,w \rangle > 0$ olduğundan w spacelike vektör olur. b ile w arasındaki Lorentzian spacelike açı φ ile gösterilirse, eğrilikler ve c vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\|\cos\varphi \\ k_2 = \|w\|\sin\varphi \end{cases}, \qquad \|w\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \tag{2.18}$$

ve

$$c = -\sin\varphi t + \cos\varphi b \tag{2.19}$$

кeklinde bulunur.

iii) *U* timelike binormalli spacelike eĝri ise,

$$\|w\| = \sqrt{\left|k_2^2 - k_1^2\right|} \tag{2.20}$$

dir . Bu durumda

a) $|k_2| > |k_1|$ ise $\langle w, w\rangle > 0$ olacaĝēndan w spacelike vektör olur. b ile w arasēndaki Lorentzian timelike açē φ ile gösterilirse, eĝrilikler ve c vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\|\sinh\varphi \\ k_2 = \|w\|\cosh\varphi \end{cases}, \qquad \|w\| = \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \tag{2.21}$$

ve

$$c = \cosh\varphi t - \sinh\varphi b \tag{2.22}$$

кeklinde bulunur.

b) $|k_2| < |k_1|$ ise $\langle w, w\rangle < 0$ olacaĝēndan w timelike vektör olur. b ile w arasēndaki Lorentzian timelike açē φ ile gösterilirse, eĝrilikler ve c vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\|\cosh\varphi \\ k_2 = \|w\|\sinh\varphi \end{cases}, \qquad \|w\| = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \tag{2.23}$$

ve

$$c = \sinh\varphi t - \cosh\varphi b \tag{2.24}$$

кeklinde bulunur.

2.4. Dual Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.4.1: $ID=\left\{A=\left(a,a^{*}\right)\middle| a,a^{*}\in IR\right\}$ cümlesine **dual sayılar cümlesi** denir.

Tanım 2.4.2: ID cümlesi üzerinde **toplama, çarpma, ve eşitlik işlemleri**, sırasıyla,

$$\begin{aligned}&\oplus : ID\times ID\rightarrow ID\\ &\quad\left(A,B\right)\rightarrow A\oplus B=\left(a,a^{*}\right)\oplus\left(b,b^{*}\right)=\left(a+b,a^{*}+b^{*}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\odot : ID\times ID\rightarrow ID\\ &\quad\left(A,B\right)\rightarrow A\odot B=\left(a,a^{*}\right)\odot\left(b,b^{*}\right)=\left(ab,ab^{*}+a^{*}b\right)\end{aligned}$$

ve

$$A=B\Leftrightarrow a=b\ ,\ a^{*}=b^{*}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4.1: $\left(ID,\oplus,\odot\right)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.4.3: $0=\left(0,0\right)$ dual sayısına ID nin toplama işlemine göre **sıfır elemanı** denir.

Tanım 2.4.4: Dual sayılarda **bölme işlemi** $A=\left(a,a^{*}\right)\neq 0\in ID$ ve $B=\left(b,b^{*}\right)\in ID$ olmak üzere;

$$\frac{B}{A}=\left(\frac{b}{a},\frac{ab^{*}-a^{*}b}{a^{2}}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4.5: Bir $A=\left(a,a^{*}\right)\in ID$ dual sayısının **reel** ve **dual kısmı**

$$\mathrm{Re}\left(A\right)=a\ ,\ \ \mathrm{Du}\left(A\right)=a^{*}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.6: $\left(1,0\right)=1$ dual sayısına ID nin çarpma işlemine göre **birim elemanı** veya **reel birimi** denir.

Tanım 2.4.7: $(0,1)$ dual sayısına ID deki **dual birim** denir ve kısaca ε ile gösterilir.

Sonuç 2.4.1: Tanım 2.4.2 deki çarpma işlemi gereğince

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \odot \varepsilon = (0,1) \odot (0,1) = (0,0) = 0$$

olduğu görülür.

Teorem 2.4.2: $A = (a, a^*) \in ID$ sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir.

İspat: Tanım 2.4.2 gereğince $A = (a, a^*)$ için

$$A = (a,0) \oplus (0, a^*)$$
$$A = (a,0) \oplus (0,1).(a^*, 0)$$
$$A = a + \varepsilon a^*$$

olur.

Teorem 2.4.3: $A = (a, a^*) \in ID$, $\lambda \in IR$ ise, $\lambda \odot A = \lambda \odot (a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$ dır.

İspat:

$$\lambda \odot A = (\lambda, 0) \odot (a, a^*)$$
$$\lambda \odot A = (\lambda a, \lambda a^*).$$

Tanım 2.4.8: $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının **mutlak değeri** diye $|a|$ reel sayısına denir. O halde $|A| = |a + \varepsilon a^*| = |a|$ dir.

Tanım 2.4.9: $ID^3 = ID \times ID \times ID = \{ A = (A_1, A_2, A_3) \mid A_i \in ID, 1 \le i \le 3 \}$ cümlesi üzerinde **toplama ve skalar ile çarpma işlemleri** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$+ : ID^3 \times ID^3 \to ID^3$$
$$(A, B) \to A + B = (A_i) + (B_i) = (A_i + B_i),$$

$$\cdot : ID \times ID^3 \to ID^3$$
$$(\lambda, A) \to \lambda \cdot A = (\lambda A_i).$$

Teorem 2.4.4: $\left(ID^3,+,\cdot\right)$ üçlüsü ID dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. Bu modül kısaca ***ID*** **- Modül** şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.4.10: ID - Modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere **dual vektörler** denir.

Teorem 2.4.5: $\vec{a},\overrightarrow{a^*}\in IR^3$ olmak üzere ID - Modülde her bir $\vec{A}$ dual vektörü,

$$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat:

$$\vec{A}=\left(A_1,A_2,A_3\right),\ A_i=a_i+\varepsilon a_i^*\ ,\ 1\le i\le 3,\text{olduğundan}$$
$$\vec{A}=\left(a_1+\varepsilon a_1^*,a_2+\varepsilon a_2^*,a_3+\varepsilon a_3^*\right),$$
$$\vec{A}=\left(a_1+a_2+a_3\right)+\varepsilon\left(a_1^*+a_2^*+a_3^*\right)$$

yazılabilir. $a_i,a_i^*\in IR$ olduğundan $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\overrightarrow{a^*}=\left(a_1^*,a_2^*,a_3^*\right)$ alınabilir ve dolayısı ile $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ olur.

Tanım 2.4.11: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\in ID^3$ olsun.

$$\langle,\rangle: ID^3\times ID^3\to ID$$
$$(\vec{A}\ ,\vec{B})\to\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\right\rangle=\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle+\varepsilon\left(\left\langle\vec{a},\overrightarrow{b^*}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{a^*},\vec{b}\right\rangle\right)$$

fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu fonksiyona ID - Modül de bir **iç çarpım fonksiyonu** denir: $\forall\vec{A},\vec{B},\vec{C}\in ID^3,\ \alpha\in ID$ için;

$$I_1:\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{B},\vec{A}\right\rangle,$$
$$I_2:\left\langle\alpha\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{A},\alpha\vec{B}\right\rangle=\alpha\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle,$$
$$I_3:\left\langle\vec{A}+\vec{B},\vec{C}\right\rangle=\left\langle\vec{A},\vec{C}\right\rangle+\left\langle\vec{B},\vec{C}\right\rangle$$
$$\left\langle\vec{A},\vec{B}+\vec{C}\right\rangle=\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle+\left\langle\vec{A},\vec{C}\right\rangle,$$
$$I_4:\vec{A}=0\Rightarrow\left\langle\vec{A},\vec{A}\right\rangle=0.$$

Tanēm 2.4.12: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\vec{b^*}\in ID^3$ vektörlerinin **vektörel çarpēmē**

$$\wedge : ID^3\times ID^3\to ID^3$$
$$(\vec{A},\vec{B})\to\vec{A}\wedge\vec{B}=\left(\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}\right)\wedge\left(\vec{b}+\varepsilon\vec{b^*}\right)=\vec{a}\wedge\vec{b}+\varepsilon\left(\vec{a}\wedge\vec{b^*}+\vec{a^*}\wedge\vec{b}\right)$$

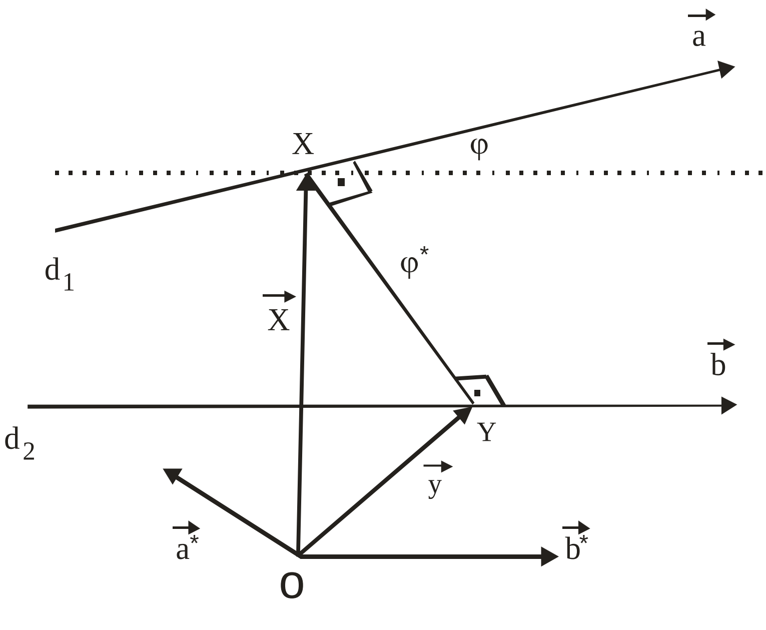
ĸeklinde tanēmlanēr.

Tanēm 2.4.13: $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}\in ID^3$ dual vektörünün **normu** $\left\|\vec{A}\right\|=\mathrm{a}+\varepsilon\mathrm{a}^*\in ID$ ĸeklinde bir dual sayēdēr. Burada

$$\mathrm{a}=\left\|\vec{a}\right\|,\quad \mathrm{a}^*=\frac{\left\langle\vec{a},\vec{a^*}\right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}\ ,\ \left\|\vec{a}\right\|\neq\vec{0}\,.$$

Tanēm 2.4.14: $\left\|\vec{A}\right\|=(1,0)$ ise $\vec{A}$ vektörüne **birim dual vektör** denir. $\vec{A}$ birim dual vektör ise $\left\|\vec{a}\right\|=1$, $\left\langle\vec{a},\vec{a^*}\right\rangle=0$.

Tanēm 2.4.15: $\Phi=\varphi+\varepsilon\ \varphi^*$ dual sayēsēna $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasēndaki **dual açē** denir. Burada φ eksenler arasēndaki reel açē, φ^* ise eksenler arasēndaki en kēsa uzaklēktēr (ķekil 2.3).



ķekil 2.3. Dual açē

Teorem 2.4.6: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ iki birim dual vektör olsun. Bu durumda

$$\left\langle \vec{A}, \vec{B} \right\rangle = \cos\left(\varphi + \varepsilon\varphi^*\right) = \cos\Phi$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4.16: Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine **dual matris** denir ve bu matris

$$A = \left[A_{ij}\right],\ A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*,\ 1 \le i, j \le 3$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.17: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*} \in ID^3$ olsun.

$$\langle , \rangle : ID^3 \times ID^3 \to ID$$
$$\left(\vec{A}, \vec{B}\right) \to \left\langle \vec{A}, \vec{B} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \varepsilon\left(\left\langle \vec{a}, \vec{b}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*, \vec{b} \right\rangle\right)$$

şeklinde tanımlı iç çarpıma **dual vektörler arasındaki Lorentz iç çarpımı** denir. Burada $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ şeklindedir.

Tanım 2.4.18: Üzerinde Lorentz iç çarpımı tanımlı ID^3 uzayına **dual Lorentz uzayı** denir ve bu uzay

$$ID_1^3 = \left\{ \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^* \,\middle|\, \vec{a}, \vec{a}^* \in IR_1^3 \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.4.19: $\vec{A} \in ID_1^3$ olsun.

i) $\left\langle \vec{A}, \vec{A} \right\rangle < 0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne **timelike (zamansı) vektör**,

ii) $\left\langle \vec{A}, \vec{A} \right\rangle > 0$ veya $\vec{A} = 0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne **spacelike (uzaysı) vektör**,

iii) $\left\langle \vec{A}, \vec{A} \right\rangle = 0$, $\vec{A} \neq 0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne **lightlike (null) (ışıksı) vektör** denir.

Tanım 2.4.20: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^{*} \in ID_1^3$ dual vektörünün **normu;**

$$\left\| \vec{A} \right\| = \sqrt{\left| \left\langle \vec{A}, \vec{A} \right\rangle \right|} = \left\| \vec{a} \right\| + \varepsilon \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^{*} \right\rangle}{\left\| \vec{a} \right\|} \ , \quad \left\| \vec{a} \right\| \neq 0$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4.21: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^{*}}, \quad \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^{*}} \in ID_1^3$ olsun.

$$\begin{aligned} \wedge : ID_1^3 \times ID_1^3 &\to ID_1^3 \\ \left(\vec{A}, \vec{B} \right) &\to \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon \left(\vec{a} \wedge \vec{b}^{*} + \vec{a}^{*} \wedge \vec{b} \right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı vektörel çarpıma **iki dual vektörün vektörel çarpımı** denir. Burada $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin vektörel çarpımı

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1 \right)$$

şeklindedir.

Lemma 2.4.1: $X, Y \in ID_1^3$ için $X \neq 0$ ve $Y \neq 0$ olmak üzere; $\langle X, Y \rangle = 0$ olsun. Eğer X timelike dual vektör ise, bu durumda Y spacelike dual vektördür (Ratcliffe, 1994).

Lemma 2.4.2: $X, Y \in ID_1^3$ pozitif (negatif) timelike vektörler olsun. Bu durumda $\langle X, Y \rangle \leq \|X\| \|Y\|$ eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart X ve Y dual vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır (Ratcliffe, 1994).

Lemma 2.4.3:

i) $X, Y \in ID_1^3$ pozitif (negatif) timelike vektörler olsun. Bu durumda

$$\langle X, Y \rangle \leq \|X\| \|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cosh \Phi \left(X, Y \right)$$

olacak şekilde bir tek negatif olmayan birim dual $\Phi(X,Y)$ sayısı vardır. X ve Y arasındaki bu dual sayıya **timelike dual vektörler arasındaki Lorentzian timelike dual açı** denir.

ii) $X,Y \in ID_1^3$ spacelike vektörler ve bu vektörlerin gerdiği düzlem spacelike olsun. Bu durumda

$$\left|\langle X,Y\rangle\right| \leq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cos\Phi(X,Y)$$

olacak şekilde $0 \leq \Phi \leq \pi$ birim dual $\Phi(X,Y)$ sayısı vardır. X ve Y arasındaki bu dual sayıya **spacelike dual vektörler arasındaki Lorentzian spacelike dual açı** denir.

iii) $X,Y \in ID_1^3$ spacelike vektörler ve bu vektörlerin gerdiği düzlem timelike olsun. Bu durumda

$$\left|\langle X,Y\rangle\right| \geq \|X\|\|Y\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\cosh\Phi(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek pozitif birim dual $\Phi(X,Y)$ sayısı vardır. X ve Y arasındaki bu dual sayıya **spacelike dual vektörler arasındaki Lorentzian timelike dual açı** denir.

iv) $X \in ID_1^3$ spacelike $Y \in ID_1^3$ pozitif timelike dual vektör olsun. Bu durumda

$$\langle X,Y\rangle = \|X\|\|Y\|\sinh\Phi(X,Y)$$

olacak şekilde bir tek negatif olmayan birim dual $\Phi(X,Y)$ sayısı vardır. X ve Y arasındaki bu dual sayıya **spacelike ve timelike dual iki vektör arasındaki Lorentzian timelike dual açı** denir (Ratcliffe, 1994).

Tanēm 2.4.22: $\tilde{\alpha}: I \to D_1^3$ $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + \varepsilon\alpha^*(t)$ dual eĝrisinin teĝet vektörü $T = t + \varepsilon t^*$ olsun.

i) $\langle T, T \rangle > 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eĝrisine **uzaysē (spacelike) dual eĝri**,

ii) $\langle T, T \rangle < 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eĝrisine **zamansē (timelike) dual eĝri**,

iii) $\langle T, T \rangle = 0$ ise $\tilde{\alpha}$ eĝrisine **ēĸēksē (lightlike veya null) dual eĝri** denir (Oĝneill, 1983).

Tanēm 2.4.23: $\tilde{\alpha}: I \to D_1^3$ diferansiyellenebilir dual eĝrisinin Frenet 3-ayaklēsē $\{T, N, B\}$, dual eĝrilikleri $\kappa = k_1 + \varepsilon k_1^*$ ve $\tau = k_2 + \varepsilon k_2^*$ olsun.

i) $\tilde{\alpha}$ **dual timelike birim hēzlē bir eĝri ise,**

$$T \wedge N = -B \ , \ N \wedge B = T \ , \ B \wedge T = -N \tag{2.25}$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

ve Darboux vektörü

$$W = \tau T - \kappa B \tag{2.27}$$

ĸeklinde bulunur. Burada dual eĝrilikler

$$\begin{cases} \kappa = k_1 + \varepsilon k_1^* = \sqrt{\langle T', T' \rangle}, \\ \tau = k_2 + \varepsilon k_2^* = \dfrac{\det(T, T', T'')}{\langle T', T' \rangle} \end{cases} \tag{2.28}$$

baĝēntēsēndan bulunur. (2.26) ifadesi reel ve dual bileĸenlerine ayrēlērsa,

$$\begin{cases} t' = k_1 n \\ n' = k_1 t - k_2 b \\ b' = k_2 n \\ \\ t^{*\prime} = k_1^* n + k_1 n^* \\ n^{*\prime} = k_1^* t - k_2^* n + k_1 t^* - k_2 n^* \\ b^{*\prime} = k_2^* n + k_2 n^* \end{cases} \tag{2.29}$$

olur. W Darboux vektörü ile B spacelike binormal birim dual vektörü arasēndaki Lorentzian timelike dual açē $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve W yönündeki birim dual vektör $C = c + \varepsilon c^*$ ile gösterilsin.

a) $|\kappa| > |\tau|$ ise W spacelike dual vektör olur. Bu durumda eĵrilikler ve C vektörü,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh\Phi \\ \tau = \|W\| \sinh\Phi \end{cases} , \quad \|W\| = \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} \tag{2.30}$$

ve

$$C = \sinh\Phi T - \cosh\Phi B \tag{2.31}$$

ĸeklinde bulunur. Bu denklem reel ve dual bileĸenlerine ayrēlērsa,

$$\begin{cases} c = \sinh\varphi t - \cosh b, \\ c^* = \sinh\varphi t^* - \cosh\varphi b^* + \varphi^* \left(\cosh\varphi t - \sinh\varphi b\right) \end{cases} \tag{2.32}$$

olur.

b) $|\kappa| < |\tau|$ ise W timelike dual vektör olur. Bu durumda eĵrilikler ve C vektörü,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh\Phi \\ \tau = \|W\| \cosh\Phi \end{cases} , \quad \|W\| = \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} \tag{2.33}$$

ve

$$C = \cosh\Phi T - \sinh\Phi B \tag{2.34}$$

ĸeklinde bulunur. Bu denklem reel ve dual bileĸenlerine ayrēlērsa,

$$\begin{cases} c = \cosh\varphi t - \sinh b, \\ c^* = \cosh\varphi t^* - \sinh\varphi b^* + \varphi^*\left(\sinh\varphi t - \cosh\varphi b\right) \end{cases} \tag{2.35}$$

olur.

ii) $\tilde{\alpha}$ spacelike binormalli dual spacelike birim hızlı bir eğri ise,

$$T \wedge N = -B \quad , \quad N \wedge B = -T \quad , \quad B \wedge T = N \tag{2.36}$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

ve Darboux vektörü

$$W = -\tau T + \kappa B \tag{2.38}$$

şeklinde bulunur. (2.37) ifadesi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} t' = k_1 n \\ n' = k_1 t + k_2 b \\ b' = k_2 n \\ \\ t^{*\prime} = k_1^* n + k_1 n^* \\ n^{*\prime} = k_1^* t + k_2^* n + k_1 t^* + k_2 n^* \\ b^{*\prime} = k_2^* n + k_2 n^* \end{cases} \tag{2.39}$$

olur. W Darboux vektörü ve B binormal birim vektörü spacelike vektörler ve bunların gerdiği düzlem de spacelike olduğundan bu vektörler arasındaki açı Lorentzian spacelike dual açıdır. Bu açı $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve W yönündeki birim dual vektör $C = c + \varepsilon c^*$ olsun. Bu durumda eğrilikler ve C vektörü,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\|\cos\Phi \\ \tau = \|W\|\sin\Phi \end{cases} \quad , \quad \|W\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \tag{2.40}$$

ve

$$C=-\sin\Phi T+\cos\Phi B \tag{2.41}$$

şeklinde bulunur. Bu denklem reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} c=-\sin\varphi t+\cos b, \\ c^{*}=-\sin\varphi t^{*}+\cos\varphi b^{*}-\varphi^{*}\left(\cos\varphi t+\sin\varphi b\right) \end{cases} \tag{2.42}$$

olur.

iii) $\tilde{\alpha}$ timelike binormalli dual spacelike birim hızlı bir eğri ise,

$$T\wedge N=B \;\;,\;\; N\wedge B=-T \;\;,\;\; B\wedge T=-N \tag{2.43}$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

ve Darboux vektörü

$$W=\tau T-\kappa B \tag{2.45}$$

şeklinde bulunur. (2.44) ifadesi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} t'=k_1 n \\ n'=-k_1 t+k_2 b \\ b'=k_2 n \\ \\ t^{*\prime}=k_1^{*} n+k_1 n^{*} \\ n^{*\prime}=-k_1^{*} t+k_2^{*} n-k_1 t^{*}+k_2 n^{*} \\ b^{*\prime}=k_2^{*} n+k_2 n^{*} \end{cases} \tag{2.46}$$

olur. W Darboux vektörü ve B timelike binormal birim dual vektörü arasındaki Lorentzian timelike dual açı $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^{*}$ ve W yönündeki birim dual vektör $C=c+\varepsilon c^{*}$ olsun.

a) $|\kappa| < |\tau|$ ise W spacelike dual vektör olur. Bu durumda eğrilikler ve C vektörü,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \sinh \Phi \\ \tau = \|W\| \cosh \Phi \end{cases} , \quad \|W\| = \sqrt{\tau^2 - \kappa^2} \tag{2.47}$$

ve

$$C = \cosh \Phi T - \sinh \Phi B \tag{2.48}$$

şeklinde bulunur. Bu denklem reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{cases} c = \cosh \varphi t - \sinh b, \\ c^* = \cosh \varphi t^* - \sinh \varphi b^* + \varphi^* \left(\sinh \varphi t - \cosh \varphi b \right) \end{cases} \tag{2.49}$$

olur.

b) $|\kappa| > |\tau|$ ise W timelike dual vektör olur. Bu durumda eğrilikler ve C vektörü,

$$\begin{cases} \kappa = \|W\| \cosh \Phi \\ \tau = \|W\| \sinh \Phi \end{cases} , \quad \|W\| = \sqrt{\kappa^2 - \tau^2} \tag{2.50}$$

ve

$$C = \sinh \Phi T - \cosh \Phi B \tag{2.51}$$

şeklinde bulunur. Bu denklem reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} c = \sinh \varphi t - \cosh b, \\ c^* = \sinh \varphi t^* - \cosh \varphi b^* + \varphi^* \left(\cosh \varphi t - \sinh \varphi b \right) \end{cases} \tag{2.52}$$

olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. IL^3 Lorentz Uzayında Spacelike - Timelike İnvolüt - Evolüt Eğriler

Tanım 3.1.1: $\alpha : I \to IL^3$ timelike bir eğri ve $\beta : I \to IL^3$ eğrisi α nın bir involütü olsun. β eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri veya timelike binormalli spacelike bir eğri olur. Bu durumdaki involüt - evolüt eğrilere **spacelike - timelike involüt - evolüt eğriler** adı verilir.

Bu tanıma göre α timelike eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$ ve β spacelike eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$ alınırsa

$$\begin{array}{lcl} \langle t,t\rangle = -1 & & \langle v_1,v_1\rangle = +1 \\ \langle n,n\rangle = +1 & \text{ve} & \langle v_2,v_2\rangle = \mp 1 = \varepsilon_0 \\ \langle b,b\rangle = +1 & & \langle v_3,v_3\rangle = \mp 1 = \varepsilon_0 \end{array} \tag{3.1}$$

olur.

Teorem 3.1.1 : $\beta : I \subset IR \to IL^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$ ise $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\left(\alpha(s),\beta(s)\right) = |c-s|, \quad c = sbt, \quad \forall s \in I\ . \tag{3.2}$$

İspat: β eğrisi α nın involütü olduğundan

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda t(s), \quad \lambda \in IR$$

yazılabilir. s ye göre türev alınır ve her iki taraf t ile iç çarpılırsa,

$$v_1 \frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')t + \lambda k_1 n,$$

$$\begin{array}{l} (1+\lambda') = 0, \\ \lambda = c - s, \ \ c = sbt \end{array}$$

bulunur. İki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından $\alpha(s)$ ile $\beta(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\left(\alpha(s),\beta(s)\right)=\left\|\beta(s)-\alpha(s)\right\|,$$

$$=\sqrt{\langle\lambda t,\lambda t\rangle},$$

$$=\left|c-s\right|,\ \ c\in IR$$

olur.

Teorem 3.1.2: $\beta: I\subset IR\to IL^3$ spacelike eğrisi, $\alpha: I\subset IR\to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$, eğriliği p olmak üzere;

$$p^2=\frac{\varepsilon_0\left(k_2^2-k_1^2\right)}{\left(c-s\right)^2k_1^2} \tag{3.3}$$

dir.

İspat: β spacelike eğrisi α timelike eğrisinin involütü olduğundan

$$\beta(s)=\alpha(s)+\lambda t(s),\quad \lambda=(c-s),\quad \alpha'=t\quad (c=sbt)$$

yazılır. İfadenin s ye göre türevi alınır ve (2.9) bağıntısı dikkate alınırsa

$$v_1=n$$

olur. Bu ifadenin türevi alınır ve her iki tarafı kendisiyle iç çarpılırsa,

$$p^2=\frac{\varepsilon_0(k_2^2-k_1^2)}{(c-s)^2k_1^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2: $\beta : I \subset IR \to IL^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, eğrilikleri k_1 ve k_2, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$, burulması q ise

$$q=\frac{k_1k_2'-k_1'k_2}{|c-s|\,k_1\left|k_1^2-k_2^2\right|} \tag{3.4}$$

dir.

İspat: (2.2) denkleminin s ye göre türevleri alınırsa,

$$\beta'=\lambda k_1 n,$$

$$\beta''=\lambda k_1^2 t+\left(\lambda k_1'-k_1\right)n-\lambda k_1k_2 b,$$

$$\beta'''=\left(-2k_1^2+3\lambda k_1k_1'\right)t+\left(\lambda k_1^3-2k_1'+\lambda k_1''-\lambda k_1k_2^2\right)n+\left(-2\lambda k_1'k_2+2k_1k_2-\lambda k_1k_2'\right)b$$

olur. Buradan

$$\beta'\wedge\beta''=\lambda^2k_1^2\left(-k_2t+k_1b\right), \tag{3.5}$$

$$\left\|\beta'\wedge\beta''\right\|^2=|\lambda|^4\,|k_1|^4\left|k_1^2-k_2^2\right| \tag{3.6}$$

ve

$$\det\left(\beta',\beta'',\beta'''\right)=\lambda^3k_1^3\left(k_1k_2'-k_1'k_2\right) \tag{3.7}$$

bulunur. $q=\dfrac{\det\left(\beta',\beta'',\beta'''\right)}{\left\|\beta'\wedge\beta''\right\|^2}$ ifadesinde (3.6) ve (3.7) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$q=\frac{k_1k_2'-k_1'k_2}{(c-s)\,k_1\left(k_1^2-k_2^2\right)}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.3: $\beta : I \subset IR \to IL^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$ olsun. α eğrisinin b binormal vektörü ile w Darboux vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ olmak üzere, $\{t,n,b\}$ ile $\{v_1,v_2,v_3\}$ arasında;

i) w spacelike ise,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

ii) w timelike ise,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

bağıntıları vardır.

İspat: : (2.2) denkleminden

$$\|\beta'\| = |\lambda k_1|$$

olur. $v_1 = \dfrac{\beta'}{\|\beta'\|}$ olduğundan

$$v_1 = \frac{\lambda k_1 n}{|\lambda k_1|} = \mp n$$

bulunur. Pozitif yönlendirme seçilerse

$$v_1 = n \tag{3.10}$$

olur. (3.5) eşitliğinin normu alınırsa

$$\left\|\beta' \wedge \beta''\right\| = \lambda^2 k_1^2 \sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2\right|}$$

$$= \lambda^2 k_1^2 \left\|w\right\|$$

bulunur. $v_3 = \dfrac{\beta' \wedge \beta''}{\left\|\beta' \wedge \beta''\right\|}$ olduğundan

$$v_3 = \frac{-k_2 t + k_1 b}{\left\|w\right\|} \tag{3.11}$$

olur. Bu vektör w vektörünün spacelike veya timelike olmasına göre değişir.

i) w spacelike vektör ise (2.13) bağıntısından,

$$v_3 = -\sinh\varphi t + \cosh\varphi b \tag{3.12}$$

olur. $v_2 = v_3 \wedge v_1$ olduğundan

$$v_2 = -\cosh\varphi t + \sinh\varphi b \tag{3.13}$$

bulunur. (3.10), (3.12) ve (3.13) denklemleri matris formunda ifade edilirse istenen elde edilir.

ii) w timelike vektör ise (2.15) bağıntısından,

$$v_3 = -\cosh\varphi t + \sinh\varphi b \tag{3.14}$$

olur. $v_2 = -\left(v_3 \wedge v_1\right)$ olduğundan

$$v_2 = \sinh\varphi t - \cosh\varphi b \tag{3.15}$$

bulunur. (3.10), (3.14) ve (3.15) denklemleri matris formunda ifade edilirse istenen olur.

Teorem 3.2.4: $\beta : I \subset IR \to IL^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, Darboux vektörü w ve β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$, Darboux vektörü $\bar{w}$ olsun. w ile $\bar{w}$ arasında,

i) w spacelike ise;

$$\bar{w}=\frac{1}{|c-s|k_1}\left(-\varphi' n-w\right), \tag{3.16}$$

ii) w timelike ise;

$$\bar{w}=\frac{1}{|c-s|k_1}\left(-\varphi' n+w\right) \tag{3.17}$$

bağıntıları vardır (Bilici, 2009).

Teorem 3.2.5: $\beta : I \subset IR \to IL^3$ spacelike eğrisi, $\alpha : I \subset IR \to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$, Darboux vektörü yönündeki birim vektör c, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{v_1,v_2,v_3\}$, Darboux vektörü yönündeki birim vektör $\bar{c}$ olsun. c ile $\bar{c}$ arasında,

i) w spacelike ise;

$$\bar{c}=-\frac{\varphi'}{\sqrt{\left|\varphi'^2+k_1^2-k_2^2\right|}}n-\frac{\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2\right|}}{\sqrt{\left|\varphi'^2+k_1^2-k_2^2\right|}}c, \tag{3.18}$$

ii) w timelike ise;

$$\bar{c}=-\frac{\varphi'}{\sqrt{\left|\varphi'^2+k_1^2-k_2^2\right|}}n+\frac{\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2\right|}}{\sqrt{\left|\varphi'^2+k_1^2-k_2^2\right|}}c \tag{3.19}$$

bağıntıları vardır (Bilici, 2009).

4. BULGULAR

4.1. ID_1^3 Dual Lorentz Uzayında Spacelike – Timelike Dual İnvolüt – Evolüt Eğriler

$\tilde{\alpha}: I \to ID_1^3$ timelike birim dual bir eğri ve $\tilde{\beta}: I \to ID_1^3$ eğrisi de $\tilde{\alpha}$ nın bir dual involütü olsun. Bu durumda $\tilde{\beta}$ dual eğrisi spacelike binormalli dual spacelike bir eğri veya timelike binormalli dual spacelike bir eğri olur. Bu durumdaki dual involüt – evolüt eğrilere **dual spacelike – timelike involüt – evolüt eğriler** adı verilir. $\tilde{\beta}$ dual eğrisi $\tilde{\alpha}$ nın dual involütü ise,

$$\tilde{\beta}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \tilde{\lambda}(s) T(s), \quad \lambda \in IR, \tag{4.1}$$

$\tilde{\alpha}$ dual eğrisi $\tilde{\beta}$ nın involütü ise,

$$\tilde{\beta}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \tilde{\lambda}(s) N(s) + \tilde{\mu}(s) B(s), \qquad \tilde{\lambda} = \lambda + \varepsilon\lambda^*, \tilde{\mu} = \mu + \varepsilon\mu^* \in ID .$$

Bu tanıma göre $\tilde{\alpha}$ eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ve $\tilde{\beta}$ eğrisinin $\tilde{\beta}(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$ alınırsa,

$$\begin{array}{lcl} \langle T,T\rangle = -1 & & \langle V_1,V_1\rangle = +1 \\ \langle N,N\rangle = +1 & \text{ve} & \langle V_2,V_2\rangle = \mp 1 \\ \langle B,B\rangle = +1 & & \langle V_3,V_3\rangle = \mp 1 \end{array} \tag{4.2}$$

olur.

Teorem 4.1.1: $\tilde{\beta}: I \to ID_1^3$ dual spacelike eğrisi, $\tilde{\alpha}: I \to ID_1^3$ dual timelike eğrisinin bir dual involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ dual eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ ve $\tilde{\beta}$ dual eğrisinin $\tilde{\beta}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$ olmak üzere, $\tilde{\alpha}(s)$ ve $\tilde{\beta}(s)$ noktaları arasındaki dual uzaklık

$$d\left(\tilde{\beta}(s), \tilde{\alpha}(s)\right) = |c_1 - s| - \varepsilon c_2, \quad c_1, c_2 = sbt, \quad \forall s \in I \tag{4.3}$$

dir.

İspat: $\tilde{\beta}(s)=\tilde{\alpha}(s)+\tilde{\lambda}(s)T(s)$ denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\tilde{\beta}}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds}=\frac{d\tilde{\alpha}}{ds}+\frac{d\tilde{\lambda}}{ds}T+\tilde{\lambda}\frac{dT}{ds},$$

$$V_1\cdot\frac{ds^*}{ds}=\left(1+\tilde{\lambda}'\right)T+\tilde{\lambda}\kappa N$$

olur. Bu ifadenin her iki taraf T ile iç çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\tilde{\lambda}'=-1$$

bulunur. $\tilde{\lambda}'=\lambda'+\varepsilon\lambda^{*\prime}$ olduğundan

$$\lambda'=-1 \quad \text{ve} \quad \lambda^{*\prime}=0$$

olur. Bu durumda

$$\lambda=c_1-s \quad \text{ve} \quad \lambda^*=c_2 \quad , \quad c_1,c_2=sbt \quad \text{ve} \quad \forall s\in I$$

dir. Buradan $\tilde{\lambda}$ dual sayısı

$$\tilde{\lambda}=\left(c_1-s\right)+\varepsilon c_2 \tag{4.4}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısından, $\tilde{\alpha}(s)$ ve $\tilde{\beta}(s)$ noktaları arasındaki dual uzaklık,

$$\begin{aligned}
d\left(\tilde{\alpha}(s),\tilde{\beta}(s)\right)&=\left\|\tilde{\beta}(s)-\tilde{\alpha}(s)\right\| \\
&=\left\|\tilde{\lambda}T(s)\right\| \\
&=\left\|\left(\lambda+\varepsilon\lambda^*\right)\left(t+\varepsilon t^*\right)\right\| \\
&=\left\|\lambda t+\varepsilon\left(\lambda^* t+\lambda t^*\right)\right\| \\
&=\left\|\lambda t\right\|+\varepsilon\frac{\left\langle \lambda t,\lambda^* t+\lambda t^*\right\rangle}{\left\|\lambda t\right\|} \\
&=\left|\lambda\right|+\varepsilon\frac{\lambda^2\left\langle t,t^*\right\rangle+\lambda\lambda^*\left\langle t,t\right\rangle}{\left|\lambda\right|}
\end{aligned}$$

$$= |\lambda| - \varepsilon \frac{\lambda \lambda^*}{|\lambda|}$$

$$= |\lambda| \mp \varepsilon \lambda^*$$
$$= |c_1 - s| \mp \varepsilon c_2$$

bulunur.

Teorem 4.1.2: $\tilde{\beta} : I \to ID_1^3$ dual spacelike eğrisi, $\tilde{\alpha} : I \to ID_1^3$ dual timelike eğrisinin bir dual involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ dual eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$, dual eğrilikleri κ ve τ , $\tilde{\beta}$ dual eğrisinin $\tilde{\beta}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$ ve dual eğriliği P ise,

$$P^2 = \mp \frac{\left(\tau^2 - \kappa^2\right)}{\tilde{\lambda}^2 \kappa^2} \tag{4.5}$$

dir.

İspat: (4.1) ifadesinin s ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\tilde{\beta}}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} + \frac{d\tilde{\lambda}}{ds} T + \tilde{\lambda} \frac{dT}{ds},$$

$$V_1 \frac{ds^*}{ds} = \tilde{\lambda} \kappa N$$

olur. Norm tanımından $\dfrac{ds^*}{ds} = \tilde{\lambda}\kappa$ ve

$$V_1 = N \tag{4.6}$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\frac{dV_1}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{dN}{ds}$$

ve (2.26) dan

$$PV_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}\kappa}\left(\kappa T - \tau B\right)$$

olur. Her iki taraf kendisiyle iç çarpılıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$P^2 = \mp \frac{\left(\tau^2 - \kappa^2\right)}{\tilde{\lambda}^2 \kappa^2}$$

elde edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa,

$$p^2 + 2\varepsilon pp^* = \frac{\mp\left(k_2^2 + 2\varepsilon k_2 k_2^* - k_1^2 - 2\varepsilon k_1 k_1^*\right)}{\left(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda\lambda^*\right)\left(k_1^2 + 2\varepsilon k_1 k_1^*\right)}$$

$$= \frac{\mp\left[\left(k_2^2 - k_1^2\right) + \varepsilon\left(2k_2 k_2^* - 2k_1 k_1^*\right)\right]}{\lambda^2 k_1^2 + \varepsilon\left(2\lambda^2 k_1 k_1^* + 2\lambda\lambda_1^* k_1^2\right)}$$

$$= \mp\frac{\left(k_2^2 - k_1^2\right)}{\lambda^2 k_1^2} \mp \varepsilon \frac{\left(2k_2 k_2^* - 2k_1 k_1^*\right)\lambda^2 k_1^2 - \left(2\lambda^2 k_1 k_1^* + 2\lambda\lambda^* k_1^2\right)\left(k_2^2 - k_1^2\right)}{\lambda^4 k_1^4}$$

$$= \mp\frac{\left(k_2^2 - k_1^2\right)}{\lambda^2 k_1^2} \mp \varepsilon\left[\frac{2k_2\left(k_1 k_2^* - k_1^* k_2\right)}{\lambda^2 k_1^3} - \frac{2\lambda^*\left(k_2^2 - k_1^2\right)}{\lambda^3 k_1^2}\right]$$

ve $\lambda = \left(c_1 - s\right)$, $\lambda^* = c_2$ eşitlikleri de dikkate alınırsa

$$\begin{cases} p^2 = \mp \dfrac{\left(k_2^2 - k_1^2\right)}{\left(c_1 - s\right)^2 k_1^2} \\[2ex] pp^* = \mp\left[\dfrac{k_2\left(k_1 k_2^* - k_1^* k_2\right)}{\left(c_1 - s\right)^2 k_1^3} - \dfrac{c_2\left(k_2^2 - k_1^2\right)}{\left(c_1 - s\right)^3 k_1^2}\right] \end{cases} \tag{4.7}$$

bulunur.

Teorem 4.1.3: $\tilde{\beta}: I \to ID_1^3$ dual spacelike eğrisi, $\tilde{\alpha}: I \to ID_1^3$ dual timelike eğrisinin bir dual involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ dual eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$, dual eğrilikleri κ ve τ, $\tilde{\beta}$ dual eğrisinin $\tilde{\beta}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$ ve dual burulması Q ise,

$$Q = \frac{\left(\kappa\tau' - \kappa'\tau\right)}{\left|\tilde{\lambda}\right|\kappa\left|\kappa^2 - \tau^2\right|} \tag{4.8}$$

dir.

İspat: (4.1) ifadesinin s ye göre türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}' &= \tilde{\lambda}\kappa N \\
\tilde{\beta}'' &= \tilde{\lambda}\kappa^2 T + \left(\tilde{\lambda}\kappa' - \kappa\right)N - \tilde{\lambda}\kappa\tau B \\
\tilde{\beta}''' &= \left(3\tilde{\lambda}\kappa\kappa' - 2\kappa^2\right)T + \left(\tilde{\lambda}\kappa^3 + \tilde{\lambda}\kappa\tau^2 - 2\kappa' + \tilde{\lambda}\kappa''\right)N + \left(2\kappa\tau - 2\tilde{\lambda}\kappa'\tau - \tilde{\lambda}\kappa\tau'\right)B
\end{aligned}$$

olur. $\tilde{\beta}'$ ile $\tilde{\beta}''$ vektörel çarpılırsa,

$$\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}'' = \tilde{\lambda}^2\kappa^2\left(-\tau T + \kappa B\right) \tag{4.9}$$

norm alınırsa,

$$\left\|\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''\right\|^2 = \tilde{\lambda}^4\kappa^4\left(\kappa^2 - \tau^2\right) \tag{4.10}$$

ve determinant hesaplanırsa,

$$\det\left(\tilde{\beta}', \tilde{\beta}'', \tilde{\beta}'''\right) = \tilde{\lambda}^3\kappa^3\left(\kappa\tau' - \kappa'\tau\right) \tag{4.11}$$

bulunur.

(4.10) ve (4.11) bağıntıları $Q = \dfrac{\det\left(\tilde{\beta}', \tilde{\beta}'', \tilde{\beta}'''\right)}{\left\|\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''\right\|^2}$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$Q=\frac{\left(\kappa\tau'-\kappa'\tau\right)}{\left|\tilde{\lambda}\right|\kappa\left|\kappa^{2}-\tau^{2}\right|}$$

elde edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa,

$$q+\varepsilon q^{*}=\frac{\left(k_{1}+\varepsilon k_{1}^{*}\right)\left(k_{2}'+\varepsilon k_{2}^{*\prime}\right)-\left(k_{1}'+\varepsilon k_{1}^{*\prime}\right)\left(k_{2}+\varepsilon k_{2}^{*}\right)}{\left|\lambda+\varepsilon\lambda^{*}\right|\left(k_{1}+\varepsilon k_{1}^{*}\right)\left|\left(k_{1}^{2}-k_{2}^{2}\right)+\varepsilon\left(2k_{1}k_{1}^{*}-2k_{2}k_{2}^{*}\right)\right|}$$

$$=\frac{\left(k_{1}k_{2}'-k_{1}'k_{2}\right)+\varepsilon\left(k_{1}k_{2}^{*\prime}-k_{1}'k_{2}^{*}+k_{1}^{*}k_{2}'-k_{1}^{*\prime}k_{2}\right)}{\left(\left|\lambda\right|k_{1}+\varepsilon\left|\lambda\right|k_{1}^{*}\right)\left|k_{1}^{2}-k_{2}^{2}\right|}$$

$$=\frac{k_{1}k_{2}'-k_{1}'k_{2}}{\left|\lambda\right|k_{1}\left|k_{1}^{2}-k_{2}^{2}\right|}+\varepsilon\left[\frac{k_{1}\left(k_{1}k_{2}^{*\prime}-k_{1}'k_{2}^{*}\right)+k_{2}\left(k_{1}^{*}k_{1}'-k_{1}^{*\prime}k_{1}\right)}{\left|\lambda\right|k_{1}^{2}\left|k_{1}^{2}-k_{2}^{2}\right|}\right]$$

ve $\lambda=\left(c_{1}-s\right)$ değeri de dikkate alınırsa,

$$\begin{cases} q=\dfrac{k_{1}k_{2}'-k_{1}'k_{2}}{\left|c_{1}-s\right|k_{1}\left|k_{1}^{2}-k_{2}^{2}\right|}, \\ \\ q^{*}=\dfrac{k_{1}\left(k_{1}k_{2}^{*\prime}-k_{1}'k_{2}^{*}\right)+k_{2}\left(k_{1}^{*}k_{1}'-k_{1}^{*\prime}k_{1}\right)}{\left|c_{1}-s\right|k_{1}^{2}\left|k_{1}^{2}-k_{2}^{2}\right|} \end{cases} \tag{4.12}$$

bulunur.

Teorem 4.1.4: $\tilde{\beta}:I\rightarrow ID_{1}^{3}$ dual spacelike eğrisi, $\tilde{\alpha}:I\rightarrow ID_{1}^{3}$ dual timelike eğrisinin bir dual involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ dual eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T,N,B\}$, $\tilde{\beta}$ dual eğrisinin $\tilde{\beta}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{V_{1},V_{2},V_{3}\}$ ile verilsin. $\tilde{\alpha}$ eğrisinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki Lorentzian dual timelike açı $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^{*}$ olmak üzere $\{T,N,B\}$ ile $\{V_{1},V_{2},V_{3}\}$ çatıları arasında,

i) W spacelike ise,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\Phi & 0 & \sinh\Phi \\ -\sinh\Phi & 0 & \cosh\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

ii) W timelike ise,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\Phi & 0 & -\cosh\Phi \\ -\cosh\Phi & 0 & \sinh\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $\tilde{\beta}' = \tilde{\lambda}\kappa N$ idi. Buradan norm alınırsa,

$$\left\|\tilde{\beta}'\right\| = \sqrt{\tilde{\lambda}^2\kappa^2 \left|\langle N, N\rangle\right|} = \sqrt{\tilde{\lambda}^2\kappa^2} = \tilde{\lambda}\kappa$$

olur. $V_1 = \dfrac{\tilde{\beta}'}{\left\|\tilde{\beta}'\right\|}$ eşitliğinden,

$$V_1 = N$$

bulunur. Diğer yandan (4.9) dan

$$\left\|\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''\right\| = \tilde{\lambda}^2\kappa^2 \left\|W\right\| \tag{4.15}$$

ve $V_3 = \dfrac{\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''}{\left\|\tilde{\beta}' \wedge \tilde{\beta}''\right\|}$ eşitliğinde (4.9) ve (4.15) bağıntıları yerine yazılırsa,

$$V_3 = \frac{-\tau T + \kappa B}{\left\|W\right\|}$$

bulunur. Bu vektör W vektörünün spacelike veya timelike olmasına göre değişir.

i) W spacelike vektör ise (2.30) bağıntısından

$$V_3 = -\sinh\Phi T + \cosh\Phi B \tag{4.16}$$

olur. $V_2 = -V_3 \wedge V_1$ olduğundan

$$V_2 = -\cosh \Phi T + \sinh \Phi B \tag{4.17}$$

bulunur. (4.6), (4.16) ve (4.17) bağıntıları matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh \Phi & 0 & \sinh \Phi \\ -\sinh \Phi & 0 & \cosh \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh \varphi & 0 & \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & 0 & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}, \\ \\ \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} = \varphi^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & 0 & \cosh \varphi \\ -\cosh \varphi & 0 & \sinh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh \varphi & 0 & \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & 0 & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^* \\ n^* \\ b^* \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.18}$$

bulunur.

ii) W timelike vektör ise (2.33) bağıntısından

$$V_3 = -\cosh \Phi T + \sinh \Phi B \tag{4.19}$$

olur. $V_2 = V_3 \wedge V_1$ denkleminden

$$V_2 = \sinh \Phi T - \cosh \Phi B \tag{4.20}$$

bulunur. (4.6), (4.19) ve (4.20) bağıntıları matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \Phi & 0 & -\cosh \Phi \\ -\cosh \Phi & 0 & \sinh \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}, \\ \\ \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} = \varphi^* \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cosh\varphi & 0 & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & -\cosh\varphi \\ -\cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^* \\ n^* \\ b^* \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.21}$$

bulunur.

Teorem 4.1.5: $\tilde{\beta}: I \to ID_1^3$ dual spacelike eğrisi, $\tilde{\alpha}: I \to ID_1^3$ dual timelike eğrisinin bir dual involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ dual eğrisinin $\tilde{\alpha}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$, Darboux vektörü W ve $\tilde{\beta}$ dual eğrisinin $\tilde{\beta}(s)$ dual noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3\}$, Darboux vektörü $\overline{W} = \overline{w} + \varepsilon \overline{w}^*$ olmak üzere;

i) W spacelike ise,

$$\overline{W} = \frac{-\Phi' N - W}{|\tilde{\lambda}|\kappa} \tag{4.22}$$

ii) W timelike ise,

$$\overline{W} = \frac{-\Phi' N + W}{|\tilde{\lambda}|\kappa} \tag{4.23}$$

dir.

İspat: i) $\tilde{\beta}$ dual eğrisi spacelike binormalli spacelike eğri ise Darboux vektörü (2.38) bağıntısından

$$\overline{W} = -QV_1 + PV_3$$

dir. Q, V_1, P ve V_3 ifadeleri yerine (4.5), (4.6), (4.8) ve (4.16) deki eşitlikleri yazılırsa

$$\overline{W} = \frac{1}{|\tilde{\lambda}|\kappa} \left(-\frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{|\kappa^2 - \tau^2|} N + \sqrt{|\tau^2 - \kappa^2|} \left(-\sinh\Phi T + \cosh\Phi B \right) \right)$$

olur. Burada (2.30) bağıntısından

$$\overline{W}=\frac{1}{\left|\tilde{\lambda}\right|\kappa}\left(-\frac{\kappa\tau'-\kappa'\tau}{\left|\kappa^{2}-\tau^{2}\right|}N-W\right),$$

$$\overline{W}=\frac{-\Phi' N-W}{\left|\tilde{\lambda}\right|\kappa}$$

elde edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa ve $\lambda = c_1 - s$ değeri de dikkate alınırsa,

$$\begin{cases} \overline{w}=\dfrac{-\varphi' n-w}{\left|c_1-s\right|k_1}, \\ \\ \overline{w}^{*}=\dfrac{-\varphi' n^{*}-\varphi^{*\prime} n-w^{*}}{\left|c_1-s\right|k_1}+\dfrac{k_1^{*}\left(\varphi' n+w\right)}{\left|c_1-s\right|k_1^{2}} \end{cases} \tag{4.24}$$

bulunur.

ii) $\tilde{\beta}$ dual eğrisi timelike binormalli spacelike eğri ise Darboux vektörü (2.45) den

$$\overline{W}=QV_1-PV_3$$

dir. Q, V_1, P ve V_3 ifadeleri yerine (4.5), (4.6), (4.8) ve (4.19) daki eşitlikleri yazılırsa

$$\overline{W}=\frac{1}{\left|\tilde{\lambda}\right|\kappa}\left(\frac{\kappa\tau'-\kappa'\tau}{\left|\kappa^{2}-\tau^{2}\right|}N-\sqrt{\left|\tau^{2}-\kappa^{2}\right|}\left(-\cosh\Phi T+\sinh\Phi B\right)\right)$$

olur. Burada (2.33) bağıntısından

$$\overline{W}=\frac{1}{\left|\tilde{\lambda}\right|\kappa}\left(\frac{\kappa\tau'-\kappa'\tau}{\left|\kappa^{2}-\tau^{2}\right|}N+W\right),$$

$$\overline{W}=\frac{-\Phi' N+W}{\left|\tilde{\lambda}\right|\kappa}$$

elde edilir. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa ve $\lambda = c_1 - s$ değeri de dikkate alınırsa,

$$\begin{cases} \overline{w} = \dfrac{-\varphi' n + w}{|c_1 - s| k_1}, \\ \\ \overline{w}^* = \dfrac{-\varphi' n^* - \varphi^{*\prime} n + w^*}{|c_1 - s| k_1} + \dfrac{k_1^* (\varphi' n - w)}{|c_1 - s| k_1^2} \end{cases} \tag{4.25}$$

bulunur.

Teorem 4.1.6: $\tilde{\beta} : I \to ID_1^3$ dual spacelike eğrisi, $\tilde{\alpha} : I \to ID_1^3$ dual timelike eğrisinin bir dual involütü olsun. $\tilde{\alpha}$ dual eğrisinin W yönündeki birim vektör C ve $\tilde{\beta}$ dual eğrisinin $\overline{W}$ yönündeki birim vektör $\overline{C} = \overline{c} + \varepsilon \overline{c}^*$ olmak üzere;

i) W spacelike ise,

$$\overline{C} = \frac{-\Phi' N - \sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}\, C}{\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2 + \Phi'^2|}} \tag{4.26}$$

ii) W timelike ise,

$$\overline{C} = \frac{-\Phi' N + \sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}\, C}{\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2 + \Phi'^2|}}. \tag{4.27}$$

İspat : $\overline{W}$ yönündeki birim dual vektör

$$\overline{C} = \frac{\overline{W}}{\left\| \overline{W} \right\|} \tag{4.28}$$

dir.

i) $\overline{C}$ ifadesinde $\overline{W}$ vektörü yerine (4.22) deki eşiti yazılırsa,

$$\overline{C} = \frac{-\Phi' N - W}{\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2 + \Phi'^2|}},$$

$$\overline{C} = \frac{-\Phi' N - \sqrt{|\kappa^2 - \tau^2|}\, C}{\sqrt{|\kappa^2 - \tau^2 + \Phi'^2|}}$$

bulunur. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa,

$$\bar{c}+\varepsilon\bar{c}^{*}=\frac{-\left(\varphi'+\varepsilon\varphi^{*\prime}\right)\left(n+\varepsilon n^{*}\right)-\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2\right|}\left(c+\varepsilon c^{*}\right)}{\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2+\varphi'^2\right|}}$$

veya

$$\begin{cases}\bar{c}=-\dfrac{\varphi' n+\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2\right|}c}{\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2+\varphi'^2\right|}}, \\ \\ \bar{c}^{*}=-\dfrac{\varphi' n^{*}+\varphi^{*\prime} n+\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2\right|}c^{*}}{\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2+\varphi'^2\right|}}\end{cases} \tag{4.29}$$

elde edilir.

ii) $\overline{C}$ ifadesinde $\overline{W}$ vektörü yerine (4.23) deki eşiti yazılırsa,

$$\overline{C}=\frac{-\Phi' N+W}{\sqrt{\left|\kappa^2-\tau^2+\Phi'^2\right|}},$$

$$\overline{C}=\frac{-\Phi' N+\sqrt{\left|\kappa^2-\tau^2\right|}C}{\sqrt{\left|\kappa^2-\tau^2+\Phi'^2\right|}}$$

bulunur. Bu ifade reel ve dual bileşenlere ayrılırsa,

$$\bar{c}+\varepsilon\bar{c}^{*}=\frac{-\left(\varphi'+\varepsilon\varphi^{*\prime}\right)\left(n+\varepsilon n^{*}\right)+\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2\right|}\left(c+\varepsilon c^{*}\right)}{\sqrt{\left|k_1^2-k_2^2+\varphi'^2\right|}}$$

veya

$$\begin{cases} \overline{c} = \dfrac{-\varphi' n + \sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2\right|}\, c}{\sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2 + \varphi'^2\right|}}, \\ \\ \overline{c}^* = \dfrac{-\varphi' n^* - \varphi^{*\prime} n + \sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2\right|}\, c^*}{\sqrt{\left|k_1^2 - k_2^2 + \varphi'^2\right|}} \end{cases} \tag{4.30}$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada **Bilici**'nin "*Timelike veya Spacelike İnvolüt – Evolüt Eğri Çiftleri Üzerine*" isimli doktora tezi esas alınarak ID_1^3 dual Lorentz uzayında evolütü timelike birim dual eğri olan involüt – evolüt eğrilere **dual spacelike – timelike involut evolüt eğriler** adı verildi.

Bu eğrilerin $\tilde{\alpha}(s)$ ve $\tilde{\beta}(s)$ dual noktaları arasındaki dual uzaklık bulundu. Dual Frenet çatıları arasındaki bağıntılar, evolüt eğrinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^{*}$ Lorentzian timelike (spacelike) dual açısına bağlı olarak hesaplandı.

Ayrıca eğrilerin dual eğrilikleri, Darboux vektörleri ve bu vektörler yönündeki birim dual vektörler arasındaki bağıntılar bulundu.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

ID_1^3 dual Lorentz uzayında evolütü spacelike binormalli spacelike dual eğri olan **dual timelike – spacelike involut evolüt eğriler** ve evolütü timelike binormalli spacelike dual eğri olan **dual spacelike – spacelike involut evolüt** eğriler tanımlanabilir.

Bu eğrilerin $\tilde{\alpha}(s)$ ve $\tilde{\beta}(s)$ noktaları arasındaki dual uzaklığı, Dual Frenet çatıları arasındaki bağıntılar evolüt eğrinin B binormal vektörü ile W Darboux vektörü arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ Lorentzian timelike (spacelike) dual açısına bağlı olarak hesap edilebilir. Dual eğrilikler ve burulmalar, Darboux vektörleri ve bu vektörler yönündeki birim dual vektörler arasındaki bağıntılar bulunabilir.

Benzer çalışmalar farklı uzaylarda da yapılabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Akutagawa, K., and Nishikawa, S. 1990. *The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space,* Töhoko Math., J. 42, 67-82.

[2] Bilici, M., 1999. *Ķvolüt-Evolüt Eĵ rilerinin Küresel Göstergelerinin Eĵ rilikleri ve Tabii Liftleri, Yüksek Lisans Tezi*, Ondokuz Mayēs Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun,49s.

[3] Bilici, M., 2009. *Timelike veya Spacelike Ķvolüt ï Evolüt Eĵ ri Çiftleri Üzerine, Doktora Tezi*, Ondokuz Mayēs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 20-61.

[4] Bükcü, B. Karacan, M.K., 2007. *On The Involute and Evolute Curves of The Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space,* Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 2, no. 5, 221-232.

[5] Bükcü, B. Karacan, M.K., 2007. *On The Involute and Evolute Curves of The Timelike Curve in Minkowski 3-Space*, Demonstratio Math. 40, no.3, 721-732.

[6] Hacēsalihoĵ lu, H.H., 1983. *Diferensiyel Geometri,* Ķnönü Üniversitesi Fen ï Edebiyat Fakültesi Yayēnlarē, Mat. No:2, Malatya.

[7] Hacēsalihoĵ lu, H.H., 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi,* Gazi Üniversitesi Fen ï Edebiyat Fakültesi Yayēnlarē, Mat. No. 2, Ankara, 40s.

[8] Oĉneill, B., 1983. *Semi Riemann Geometry,* Academic Press, New york, London, 486p.

[9] Müler, H.R., 1963. *Kinematik Dersleri,* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayēnlarē, Mat.27 Ankara, 292p.

[10] Ratcliffe, J. G., 1994. *Foundations of Hyperbolic Manifolds,* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 736p.

[11] Sabuncuoĵ lu, A., 2004. *Diferansiyel Geometri,* Nobel Yayēn Daĵ ētēmē, Ankara.

[12] Struik J. Dirk., 1988. *Lectures on Classical Differential Geometry,* Second Edition Addision Wesley, Dover, (1988).

[13] Turgut, A., 1995. *3-Boyutlu Minkowski Uzayēnda Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler,* Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 96p.

[14] Turgut, A. and Esin, E., 1992. *Involute ï Evolute Curve Couples of Higher Order in and Their Horizontal Lifts in* IR^n , Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A 1 Math. Statist, Vol. 41, No.1-2, 125-130.

[15] Turgut, M., 2008. *On the Invariants of Time-like Dual Curves,* Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 37 (2) (2008), 129 ï 133.

[16] Uĵurlu, H.H., 1997. *On The Geometry of Timelike Surfaces,* Commun. Fac. Sci. Ank. Series A1 V.46.pp. 211-223.

[17] Yücesan, A., Çöken. A. C. and Ayyıldız N., 2002. *On the dual Darboux Rotation Axis of the Timelike Dual Space Curve,* Balkan Journal of Geometry and Its App. Vol.7, No.2, pp. 137-142.

[18] Woestijne, V.D.I. 1990. Minimal Surfaces of The 3-dimensional Minkowski Space. Proc. Congres ñGéométrie différentielle et applicationsò Avignon (30 May 1988), Word Scientific Publishing. Singapore. 344-369.

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Sümeyye GÜR

Doğum Yeri **:** Maçka

Doğum Tarihi **:** 21.06.1987

Medeni Hali **:** Bekar

Bildiği Yabancı Dil **:** İngilizce

Eğitim Durumu

Lise **:** Tomarza Çok Programlı Lisesi - 2004

Lisans **:** O.M.Ü Ordu Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü - 2008

Yüksek Lisans **:** Ordu Üniversitesi, Matematik Bölümü - 2010

İletişim Bilgileri

Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Perşembe/ORDU

sumeyyegur17@hotmail.com