T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUTROSOPHİC TOPOLOJİK UZAYLAR

Cemil KURU

Bu tez,

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans

derecesi için hazırlanmıştır

ORDU 2016

TEZ ONAYI

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Cemil KURU tarafından hazırlanan ve Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ danışmanlığında yürütülen "Neutrosophic Topolojik Uzaylar " adlı bu tez, jürimiz tarafından 18 / 12 / 2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ

Başkan	:	Yrd. Doç.Kerim BEKAR Matematik, Giresun Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Yıldıray ÇELİK Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

08../02./2018... tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 15/02/2018.. tarih ve 2018.. / 96. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitü Müdürü

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Cemil KURU

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

NEUTROSOPHİC TOPOLOJİK UZAYLAR
Cemil KURU
Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2016
Yüksek Lisans Tezi, ... sayfa

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Serkan KARATAŞ

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde bulanık küme, sezgisel bulanık küme ve neutrosophic küme üzerinde yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir ve çalışmalar arasındaki farklılıklar incelenmiştir. İkinci bölümde ise bulanık küme, sezgisel bulanık küme ve Neutrosophic küme tanımları verilmiştir. Ayrıca neutrosophic küme üzerinde küme işlemleri ve bazı uygulamalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise bu çalışmanın temel amacı olan neutrosophic topolojik uzay kavramı ve neutrosophic topolojik uzaylarda bir kümenin içi, kapanışı, dışı ve sınırı tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde bu kavramın ortaya çıkış nedenleri ve konu üzerine yapılabilecek çalışmalar tartışılmıştır. Konunun ele alınış amacı ve gelişim sürecinden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık küme, sezgisel bulanık küme, neutrosophic küme, neutrosophic topolojik uzay.

ABSTRACT

NEUTROSOPHIC TOPOLOGICAL SPACES

Cemil KURU
Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2016
MSc. Thesis, ... page

Supervisor: Asst. Prof. Serkan KARATAŞ

This thesis consists of four parts. In the introduction of this thesis has been mentioned from made studies over fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and neutrosophic sets and examined from the differences between studies. In the second section, it have given defintions of fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and neutrosophic sets. Also, in this section, we give some set operations on sets and applications.

In the third section, which is main purpose of this study, we introduce concept of neutrosophic topological space and a set of interior, closure, exterior and frontier in neutrosophic topological spaces. In the fourth section, reasons for the emergence of these concepts and the studies planned to be done on these concepts have been discussed. It have been mentioned from the primary reason for this issue research and development process.

Keywords: Fuzzy set, intuitionistic fuzzy set, neutrosophic set, neutrosophic topological space.

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarım boyunca her zaman bilgi ve deneyimleriyle yolumu açan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ'a en samimi duygularım ile teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. Selahattin MADEN ve tüm Matematik Bölümü öğretim üyelerine en içten şükranlarımı sunuyorum.

Çalışmam boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babama, anneme, kardeşime ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

μ_A	:	A neutrosophic kümesinin üyelik fonksiyonu
σ_A	:	A neutrosophic kümesinin üye olamama fonksiyonu
ν_A	:	A neutrosophic kümesinin belirsizlik fonksiyonu
$\mathcal{N}(X)$	:	X kümesi üzerinde tanımlı tüm neutrosophic kümerlerin kümesi
$\leq$	:	Küçük eşit
$\geq$	:	Büyük eşit
$\bigvee$	:	supremum
$\bigwedge$	:	infimum
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
$\Leftrightarrow$	:	Gerek ve yeter şart
$\tilde{\emptyset}$	:	Neutrosophic boş küme
$\tilde{X}$	:	Neutrosophic evrensel küme
$A \sqcap B$	:	A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic kesişimi
$A \sqcup B$	:	A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic birleşimi
$A \sqsubseteq B$	:	B neutrosophic kümesi, A neutrosophic kümesini neutrosophic kapsar
A^c	:	A neutrosophic kümesinin tümleyeni
τ	:	Neutrosophic topoloji
$\mathrm{int}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic içi
$\mathrm{cl}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic kapanışı
$\mathrm{ext}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic dışı
$\mathrm{fr}(A)$	:	A neutrosophic kümesinin neutrosophic sınırı

1. GİRİŞ

Klasik küme teorisi, bulanık küme teorisi ve olasılık teorisi gibi bazı bilim dallarında karşılaşılan, her bilim dalının kendine özgü karmaşık sorunlarda klasik matematik yöntemleri ile cevap alınamamaktadır. Ekonomi, mühendislik ve çevre bilimi gibi bir çok saha, çalışmalarını sürdürebilmeleri için, dilbilimsel değerleri ve belirsizlikleri matematiksel olarak modellemeye ihtiyaç duyarlar. İlk kez 1967'de Zadeh [11] tarafından tanımlanan bulanık küme kavramı bu amaçla ortaya atılmıştır. Bir bulanık küme, evrensel kümedeki elemanlara $[0, 1]$ aralığından üyelik derecesi atayan bir fonksiyondur.

Atanassov [1] 1986'da bulanık küme kavramından yola çıkarak sezgisel bulanık küme kavramını, bulanık kümenin bir genellemesi olarak tanımlamıştır.

Bulanık küme ve sezgisel bulanık küme teorilerinde bir elemanın üye olup, üye olmama gibi değerleri üzerinde durulmuştur. Bunlara ek olarak bir elemanın belirsizlik durumu üzerinde durulmuştur. Buradan yola çıkarak Smarandache [10] 2008' de neutrosophic küme kavramının tanımını ve neutrosophic kümeler üzerinde bazı uygulamalar içeren çalışmasını yayımladı. Neutrosophic küme kavramıyla beraber, boş neutrosophic küme evresel neutrosophic küme ve neutrosophic küme işlemleri belirsizlik derecesine göre yapılan yorumlar neticesinde farklı şekillerde tanımlandı.

Neutrosophic kümeler konusunda bir çok yazarın makalesi mevcuttur. Örneğin; Broumi ve Smarandache [2–4] sezgisel bulanık kümeler ve neutrosophic kümeleri birleştirerek sezgisel neutrosophic kümeler adlı kavramı ortaya atmışlardır. Ayrıca, Salama ve Al-Blowi [9], genelleştirilmiş netrosophic küemeler üzerinde çalışmışlardır.

Lupiáñez, [5] 2008'deki çalışmasında neutrosophic küme kavramı yardımıyla neutrosophic topolojiyi tanımladı. Çalışmasında kullandığı küme işlemlerinde tümleyen kavramı De Morgan kuralı açısından işe yarar bir konumda değildir.

Bu nedenle neutrosophic küme işlemleri (alt küme, eşitlik, kesişim, birleşim, tümleyen, neutrosophic boş küme ve neutrosophic evrensel küme) bu çalışmada tekrar ele alarak yeniden tanımlamıştır. Tanımlanan tümleyen kavramı sayesinde De Morgan kuralı Neutrosophic kümeler için de anlamlı bir hale gelmiştir.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, yeniden düzenlenen bu tanımlar neticesinde neutrosophic topolojik uzay kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca Lupiáñez [5–8]'in çalışmasında var olmayan neutrosophic kümenin içi, kapanışı, dışı ve sınırı gibi topolojide hayati öneme sahip kavramlar tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Son olarak, dördüncü bölümde neutrosophic topolojik uzaylardaki çalışılabilecek diğer konular tartışılarak çalışma tamamlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bulanık Kümeler

Tanım 2.1.1 [11] $X \neq \emptyset$ olsun.

$$\mu : X \to [0,1]$$

fonksiyonuna bulanık küme denir.

$$\mu = \Big\{ \big(x, \mu(x)\big) : x \in X, \;\; \mu(x) \in [0,1] \Big\}$$

şeklinde tanımlanır. X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık kümelerin kümesi I^X $\big(I = [0,1]\big)$ veya $F(X)$ ile gösterilir.

2.2 Sezgisel Bulanık Kümeler

Tanım 2.2.1 [1] Bir A sezgisel bulanık kümesi boştan farklı bir X kümesi üzerinde

$$A = \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\mu_A : X \to [0,1]$ ve $\sigma_A : X \to [0,1]$ tanımlı ve her $x \in X$ için

$$0 \leq \mu_A(x) + \sigma_A(x) \leq 1$$

şartını sağlayan fonksiyonlardır. μ_A ve σ_A foksiyonlarına için sırasıyla üyelik ve üye olmayan fonksiyonlar denir.

2.3 Neutrosophic Kümeler

Tanım 2.3.1 [10] Bir A neutrosophic kümesi boştan farklı bir X kümesi üzerinde

$$A = \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan μ_A, σ_A, ν_A X' den $]^{-}0, 1^{+}[$ tanımlı ve her $x \in X$ için

$$0 \leq \mu_A(x) + \sigma_A(x) + \nu_A(x) \leq 3^{+}$$

şartını sağlayan fonksiyonlardır. X kümesi üzerinde tanımlı tüm neutrosophic kümelerin kümesi $\mathcal{N}(X)$ ile gösterilir. Standart olmayan aralıklar uygulamalarda çok elverişli olmadığından tezin kalan kısmında $[0,1]$ aralığını kullanılacaktır..

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

fonksiyonuna üyelik fonksiyonu,

$$\sigma_A : X \to [0,1]$$

fonksiyonuna üye olmama fonksiyonu ve

$$\nu_A : X \to [0,1]$$

fonksiyonuna belirsizlik fonksiyonu denir.

Tanım 2.3.2 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\sigma_A(x) \geq \sigma_B(x)$ ve $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ oluyorsa A'ya, B'nin neutrosophic alt kümesi denir ve $A \sqsubseteq B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.3 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. $A \sqsubseteq B$ ve $B \sqsubseteq A$ ise A ve B kümelerine neutrosophic eşit kümeler denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.4 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic birleşimi $A \sqcup B$ gösterilir ve

$$A \sqcup B = \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.5 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A ve B neutrosophic kümelerinin neutrosophic kesişimi $A \sqcap B$ gösterilir ve

$$A \sqcap B = \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \sigma_A(x) \vee \sigma_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x) \big\rangle : x \in X \Big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.6 $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümelerin bir ailesi verilsin. Bu ailenin Neutrosophic birleşimi ve kesişimini

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i \in I} A_i &= \Big\{ \big\langle x, \bigvee_{i \in I} \mu_{A_i}(x), \bigwedge_{i \in I} \sigma_{A_i}(x) \bigwedge_{i \in I} \nu_{A_i}(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \\ \bigsqcap_{i \in I} A_i &= \Big\{ \big\langle x, \bigwedge_{i \in I} \mu_{A_i}(x), \bigvee_{i \in I} \sigma_{A_i}(x), \bigvee_{i \in I} \nu_{A_i}(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.7 $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic tümleyeni A^c ile gösterilir ve

$$A^c = \big\{ \langle x, \nu_A(x), 1 - \sigma_A(x), \mu_A(x) \rangle : \; x \in X \big\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.8 $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = 0$ ve $\sigma_A(x) = \nu_A(x) = 1$ ise A'ya neutrosophic boş küme denir ve $\tilde{\emptyset}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.9 $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ ve $\sigma_A(x) = \nu_A(x) = 0$ ise A'ya neutrosophic evrensel küme denir ve $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.1 $X = \{x, y, z\}$ olsun. $A, B, C \in \mathcal{N}(X)$ kümeleri

$$\begin{aligned}
A &= \big\{\langle x, 0.1, 0.2, 0.3\rangle, \langle y, 0.5, 0.7, 0.6\rangle, \langle z, 0.6, 0.7, 0.8\rangle\big\} \\
B &= \big\{\langle x, 0.9, 0.2, 0.1\rangle, \langle y, 0.5, 0.4, 0.5\rangle, \langle z, 0.7, 0.6, 0.5\rangle\big\} \\
C &= \big\{\langle x, 0.7, 0.3, 0.2\rangle, \langle y, 0.6, 0.4, 0.3\rangle, \langle z, 0.9, 0.6, 0.1\rangle\big\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

i. Aşağıdaki eşitsizliklerden $A \sqsubseteq B$ olduğu görülür.

$$\begin{array}{lll}
\mu_A(x) \le \mu_B(x), & \sigma_A(x) \ge \sigma_B(x), & \nu_A(x) \ge \nu_B(x) \\
\mu_A(y) \le \mu_B(y), & \sigma_A(y) \ge \sigma_B(y), & \nu_A(y) \ge \nu_B(y) \\
\mu_A(z) \le \mu_B(z), & \sigma_A(z) \ge \sigma_B(z), & \nu_A(z) \ge \nu_B(z)
\end{array}$$

ii. B ve C'nin neutrosophic birleşimi

$$\begin{aligned}
B \sqcup C &= \Big\{\big\langle x, (0.9 \vee 0.7), (0.2 \wedge 0.3), (0.1 \wedge 0.2)\big\rangle, \\
&\quad \big\langle y, (0.5 \vee 0.6), (0.4 \wedge 0.4), (0.5 \wedge 0.3)\big\rangle, \\
&\quad \big\langle z, (0.7 \vee 0.9), (0.6 \wedge 0.6), (0.5 \wedge 0.1)\big\rangle\Big\} \\
&= \Big\{\langle x, 0.9, 0.2, 0.1, \rangle, \langle y, 0.6, 0.4, 0.3\rangle, \langle z, 0.9, 0.6, 0.1\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

olur.

iii. B ve C'nin neutrosophic kesişimi

$$\begin{aligned}
A \sqcap C &= \Big\{\big\langle x, (0.1 \wedge 0.7), (0.2 \vee 0.3), (0.3 \vee 0.2)\big\rangle, \\
&\quad \big\langle y, (0.5 \wedge 0.6), (0.7 \vee 0.4), (0.6 \vee 0.3)\big\rangle, \\
&\quad \big\langle z, (0.6 \wedge 0.9), (0.7 \vee 0.6), (0.8 \vee 0.1)\big\rangle\Big\} \\
&= \Big\{\langle x, 0.1, 0.3, 0.3, \rangle, \langle y, 0.5, 0.7, 0.6\rangle, \langle z, 0.6, 0.7, 0.8\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

olur.

iv. C'nin neutrosophic tümleyeni de

$$\begin{aligned} C^c &= \left\{\langle x, 0.7, 0.3, 0.2\rangle, \langle y, 0.6, 0.4, 0.3\rangle, \langle z, 0.9, 0.6, 0.1\rangle\right\}^c \\ &= \left\{\langle x, 0.2, 1-0.3, 0.7\rangle, \langle y, 0.3, 1-0.4, 0.6\rangle, \langle z, 0.1, 1-0.6, 0.9\rangle\right\} \\ &= \left\{\langle x, 0.2, 0.7, 0.7\rangle, \langle y, 0.3, 0.6, 0.6\rangle, \langle z, 0.1, 0.4, 0.9\rangle\right\} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.3.1 $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $(A \sqcap A) = A$ ve $(A \sqcup A) = A$

ii. $(A \sqcap B) = (B \sqcap A)$ ve $(A \sqcup B) = (B \sqcup A)$

iii. $(A \sqcap \tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ ve $(A \sqcap \tilde{X}) = A$

iv. $(A \sqcup \tilde{\emptyset}) = A$ ve $(A \sqcup \tilde{X}) = \tilde{X}$

v. $A \sqcap (B \sqcap C) = (A \sqcap B) \sqcap C$ ve $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$

vi. $A \sqcup (B \sqcap C) = (A \sqcup B) \sqcap (A \sqcup C)$ ve $A \sqcap (B \sqcup C) = (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap C)$

vii. $(A^c)^c = A$

İspat.

i. $A \in \mathcal{N}(X)$ olmak üzere neutrosophic kesişim ve neutrosophic birleşim tanımından;

$$\begin{aligned} (A \sqcap A) &= \Big\{\Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \wedge \mu_A(x)\Big), \Big(\sigma_A(x) \vee \sigma_A(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_A(x) \vee \nu_A(x)\Big)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\Big\langle \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (A \sqcup A) &= \Big\{\Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \vee \mu_A(x)\Big), \Big(\sigma_A(x) \wedge \sigma_A(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_A(x) \wedge \nu_A(x)\Big)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\Big\langle \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= A \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olmak üzere neutrosophic kesişim ve neutrosophic birleşim tanımından;

$$\begin{aligned}(A \sqcap B) &= \Big\{\Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\Big), \Big(\sigma_A(x) \vee \sigma_B(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_A(x) \vee \nu_B(x)\Big)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\Big\langle x, \Big(\mu_B(x) \wedge \mu_A(x)\Big), \Big(\sigma_B(x) \vee \sigma_A(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_B(x) \vee \nu_A(x)\Big)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= (B \sqcap A)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(A \sqcup B) &= \Big\{\Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \vee \mu_B(x)\Big), \Big(\sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_A(x) \wedge \nu_B(x)\Big)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\Big\langle x, \Big(\mu_B(x) \vee \mu_A(x)\Big), \Big(\sigma_B(x) \wedge \sigma_A(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_B(x) \wedge \nu_A(x)\Big)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= (B \sqcup A)\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}(A \sqcap \tilde{\emptyset}) &= \Big\{\Big\langle x, (\mu_A(x) \wedge 0), (\sigma_A(x) \vee 1), (\nu_A(x) \vee 1)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\Big\langle x, 0, 1, 1\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \tilde{\emptyset}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(A \sqcap \tilde{X}) &= \Big\{\Big\langle x, (\mu_A(x) \wedge 1), (\sigma_A(x) \vee 0), (\nu_A(x) \vee 0)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\Big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= A\end{aligned}$$

elde edilir.

iv. $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}(A \sqcup \tilde{\emptyset}) &= \Big\{\Big\langle x, (\mu_A(x) \vee 0), (\sigma_A(x) \wedge 1), (\nu_A(x) \wedge 1)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\Big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\Big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= A\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(A \sqcup \tilde{X}) &= \Big\{\big\langle x, (\mu_A(x) \vee 1), (\sigma_A(x) \wedge 0), (\nu_A(x) \wedge 0)\big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \Big\{\big\langle x, 1, 0, 0\big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= \tilde{X}\end{aligned}$$

elde edilir.

v. $A, B, C \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}A \sqcap (B \sqcap C) &= \Big\{\big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\big\rangle : x \in X\Big\} \sqcap \\ &\quad \Bigg\{\Bigg\langle x, \Big(\mu_B(x) \wedge \mu_C(x)\Big), \Big(\sigma_B(x) \vee \sigma_C(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_B(x) \vee \nu_C(x)\Big)\Bigg\rangle : x \in X\Bigg\} \\ &= \Bigg\{\Bigg\langle x, \bigwedge\Big(\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\Big), \bigvee\Big(\sigma_A(x), \sigma_B(x), \sigma_C(x)\Big), \\ &\quad \bigvee\Big(\nu_A(x), \nu_B(x), \nu_C(x)\Big)\Bigg\rangle : x \in X\Bigg\} \\ &= \Bigg\{\Bigg\langle x, \Big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\Big), \Big(\sigma_A(x) \vee \sigma_B(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_A(x) \vee \nu_B(x)\Big)\Bigg\rangle : x \in X\Bigg\} \sqcap \\ &\quad \Big\{\big\langle x, \mu_C(x), \sigma_C(x), \nu_C(x)\big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= (A \sqcap B) \sqcap C\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}A \sqcup (B \sqcup C) &= \Big\{\big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x)\big\rangle : x \in X\Big\} \sqcup \\ &\quad \Bigg\{\Bigg\langle x, \Big(\mu_B(x) \vee \mu_C(x)\Big), \Big(\sigma_B(x) \wedge \sigma_C(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_B(x) \wedge \nu_C(x)\Big)\Bigg\rangle : x \in X\Bigg\} \\ &= \Bigg\{\Big\langle x, \bigvee\Big(\mu_A(x), \mu_B(x), \mu_C(x)\Big), \bigwedge\Big(\sigma_A(x), \sigma_B(x), \sigma_C(x)\Big), \\ &\quad \bigwedge\Big(\nu_A(x), \nu_B(x), \nu_C(x)\Big)\Big\rangle : x \in X\Bigg\} \\ &= \Bigg\{\Bigg\langle x, \Big(\mu_A(x) \vee \mu_B(x)\Big), \Big(\sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x)\Big), \\ &\quad \Big(\nu_A(x) \wedge \nu_B(x)\Big)\Bigg\rangle : x \in X\Bigg\} \sqcup \\ &\quad \Big\{\big\langle x, \mu_C(x), \sigma_C(x), \nu_C(x)\big\rangle : x \in X\Big\} \\ &= (A \sqcup B) \sqcup C\end{aligned}$$

elde edilir.

vi. $A, B, C \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A \sqcup (B \sqcap C) &= \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \sqcup \\
&\quad \Big\{ \Big\langle x, \Big(\mu_B(x) \wedge \mu_C(x) \Big), \Big(\sigma_B(x) \vee \sigma_C(x) \Big), \\
&\quad \Big(\nu_B(x) \vee \nu_C(x) \Big) \Big\rangle : x \in X \Big\} \\
&= \Big\{ \Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \vee \mu_B(x) \Big), \Big(\sigma_A(x) \wedge \sigma_B(x), \\
&\quad \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) \Big) \Big\} \sqcap \\
&\quad \Big\{ \Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \vee \mu_C(x) \Big), \Big(\sigma_A(x) \vee \sigma_C(x) \Big), \\
&\quad \Big(\nu_A(x) \wedge \nu_C(x) \Big) \Big\rangle : x \in X \Big\} \\
&= (A \sqcup B) \sqcap (A \sqcup C)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A \sqcap (B \sqcup C) &= \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \sqcap \\
&\quad \Big\{ \Big\langle x, \Big(\mu_B(x) \vee \mu_C(x) \Big), \Big(\sigma_B(x) \wedge \sigma_C(x) \Big), \\
&\quad \Big(\nu_B(x) \wedge \nu_C(x) \Big) \Big\rangle : x \in X \Big\} \\
&= \Big\{ \Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \Big), \Big(\sigma_A(x) \vee \sigma_B(x), \\
&\quad \nu_A(x) \vee \nu_B(x) \Big) \Big\} \sqcup \\
&\quad \Big\{ \Big\langle x, \Big(\mu_A(x) \wedge \mu_C(x) \Big), \Big(\sigma_A(x) \vee \sigma_C(x) \Big), \\
&\quad \Big(\nu_A(x) \vee \nu_C(x) \Big) \Big\rangle : x \in X \Big\} \\
&= (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap C)
\end{aligned}$$

elde edilir.

vii. $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
(A^c)^c &= \Big\{ \big\{ \big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x) \big\rangle : x \in X \big\}^c \Big\}^c \\
&= \Big\{ \big\langle x, \nu_A(x), 1 - \sigma_A(x), \mu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\}^c \\
&= \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x), 1 - (1 - \sigma_A(x)), \nu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \\
&= \Big\{ \big\langle x, \mu_A(x), \sigma_A(x), \nu_A(x) \big\rangle : x \in X \Big\} \\
&= A
\end{aligned}$$

oarak bulunur.

Teorem 2.3.2 $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}(X)$ neutrosophic küme ailesi olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigsqcap_{i \in I} A_i^c$

ii. $\left(\bigsqcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigsqcup_{i \in I} A_i^c$

İspat.

i. $\{A_i : i \in I\}$ bir neutrosophic küme ailesi olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right)^c &= \left\{ \left\langle x, \bigvee_{i \in I} \mu_{A_i}(x), \bigwedge_{i \in I} \sigma_{A_i}(x), \bigwedge_{i \in I} \nu_{A_i}(x) \right\rangle : x \in X \right\}^c \\
&= \left\{ \left\langle x, \bigwedge_{i \in I} \nu_{A_i}(x), 1 - \bigwedge_{i \in I} \sigma_{A_i}(x), \bigvee_{i \in I} \mu_{A_i}(x) \right\rangle : x \in X \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bigsqcap_{i \in I} A_i^c &= \left\{ \left\langle x, \bigwedge_{i \in I} \nu_{A_i}(x), \bigvee_{i \in I} 1 - \sigma_{A_i}(x), \bigvee_{i \in I} \mu_{A_i}(x) \right\rangle : x \in X \right\} \\
&= \left\{ \left\langle x, \bigwedge_{i \in I} \nu_{A_i}(x), 1 - \bigwedge_{i \in I} \sigma_{A_i}(x), \bigvee_{i \in I} \mu_{A_i}(x) \right\rangle : x \in X \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$\left(\bigsqcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigsqcap_{i \in I} A_i^c$$

olur.

ii. $\{A_i : i \in I\}$ bir neutrosophic küme ailesi olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^c &= \left\{\left\langle x, \bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x), \bigvee_{i\in I}\sigma_{A_i}(x), \bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}(x)\right\rangle : x \in X\right\}^c \\ &= \left\{\left\langle x, \bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}(x), 1-\bigvee_{i\in I}\sigma_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x)\right\rangle : x \in X\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bigsqcup_{i\in I} A_i^c &= \left\{\left\langle x, \bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}1-\sigma_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x)\right\rangle : x \in X\right\} \\ &= \left\{\left\langle x, \bigwedge_{i\in I}\nu_{A_i}(x), 1-\bigvee_{i\in I}\sigma_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x)\right\rangle : x \in X\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right)^c = \prod_{i\in I} A_i^c$$

olur.

Teorem 2.3.3 $B \in \mathcal{N}(X)$ ve $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki iddialar doğrudur.

i. $B \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \bigsqcup_{i\in I}(B \sqcap A_i)$

ii. $B \sqcup \left(\prod_{i\in i} A_i\right) = \prod_{i\in I}(B \sqcup A_i)$

İspat.

i. $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{N}(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}B \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) &= B \sqcap \left\{\left\langle x, \bigvee_{i\in I}\mu_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}\sigma_{A_i}(x), \bigwedge_{i\in I}\nu_{A_i}(x)\right\rangle : x \in X\right\} \\ &= \Bigg\{\Bigg\langle x, \left(\mu_B(x) \wedge (\bigvee_{i\in I}\mu_{A_i}(x))\right), \left(\sigma_B(x) \vee (\bigwedge_{i\in I}\sigma_{A_i}(x))\right), \\ &\qquad \left(\nu_B(x) \vee (\bigwedge_{i\in I}\nu_{A_i}(x))\right)\Bigg\rangle : x \in X\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Bigg\{\Bigg\langle x, \bigvee_{i\in I}\left(\mu_B(x) \wedge \mu_{A_i}(x)\right), \bigwedge_{i\in I}\left(\sigma_B(x) \vee \sigma_{A_i}(x)\right), \\ &\qquad \bigwedge_{i\in I}\left(\nu_B(x) \vee \nu_{A_i}(x)\right)\Bigg\rangle : x \in X\Bigg\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_{i\in I}\big(B\sqcap A_i\big) &= \bigsqcup_{i\in I}\Big\{\Big\langle x,\Big(\mu_B(x)\wedge\mu_{A_i}(x)\Big),\Big(\sigma_B(x)\vee\sigma_{A_i}(x)\Big) \\
&\quad \Big(\nu_B(x)\vee\nu_{A_i}(x)\Big)\Big\rangle : x\in X\Big\} \\
&= \Big\{\Big\langle x,\bigvee_{i\in I}\Big(\mu_B(x)\wedge\mu_{A_i}(x)\Big),\bigwedge_{i\in I}\Big(\sigma_B(x)\vee\sigma_{A_i}(x)\Big) \\
&\quad \bigwedge_{i\in I}\Big(\nu_B(x)\vee\nu_{A_i}(x)\Big)\Big\rangle : x\in X\Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$B\sqcap\Big(\bigsqcup_{i\in I}A_i\Big)=\bigsqcup_{i\in I}\big(B\sqcap A_i\big)$$

olur.

ii. $\{A_i : i\in I\}\subseteq\mathcal{N}(X)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
B\sqcup\Big(\bigsqcap_{i\in I}A_i\Big) &= B\sqcup\Big\{\Big\langle x,\bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x),\bigvee_{i\in I}\sigma_{A_i}(x),\bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}(x)\Big\rangle : x\in X\Big\} \\
&= \Big\{\Big\langle x,\Big(\mu_B(x)\vee(\bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x))\Big),\Big(\sigma_B(x)\wedge(\bigvee_{i\in I}\sigma_{A_i}(x))\Big), \\
&\quad \Big(\nu_B(x)\wedge(\bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}(x))\Big)\Big\rangle : x\in X\Big\} \\
&= \Big\{\Big\langle x,\bigwedge_{i\in I}\big(\mu_B(x)\vee\mu_{A_i}(x)\big),\bigvee_{i\in I}\big(\sigma_B(x)\wedge\sigma_{A_i}(x)\big), \\
&\quad \bigvee_{i\in I}\big(\nu_B(x)\wedge\nu_{A_i}(x)\big)\Big\rangle : x\in X\Big\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bigsqcap_{i\in I}\big(B\sqcup A_i\big) &= \bigsqcap_{i\in I}\Big\{\Big\langle x,\Big(\mu_B(x)\vee\mu_{A_i}(x)\Big),\Big(\sigma_B(x)\wedge\sigma_{A_i}(x)\Big) \\
&\quad \Big(\nu_B(x)\wedge\nu_{A_i}(x)\Big)\Big\rangle : x\in X\Big\} \\
&= \Big\{\Big\langle x,\bigwedge_{i\in I}\Big(\mu_B(x)\vee\mu_{A_i}(x)\Big),\bigvee_{i\in I}\Big(\sigma_B(x)\wedge\sigma_{A_i}(x)\Big) \\
&\quad \bigvee_{i\in I}\Big(\nu_B(x)\wedge\nu_{A_i}(x)\Big)\Big\rangle : x\in X\Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$B\sqcup\Big(\bigsqcap_{i\in i}A_i\Big)=\bigsqcap_{i\in I}\big(B\sqcup A_i\big)$$

olur.

3. NEUTROSOPHİC TOPOLOJİK UZAYLAR

3.1 Neutrosophic Topolojik Uzay

Tanım 3.1.1 $\tau \subseteq \mathcal{N}(X)$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu aileye X üzerinde neutrosophic topoloji denir.

i. $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$

ii. Her $A, B \in \tau$ için $A \sqcap B \in \tau$

iii. Her $\{A_i : i \in I\} \subseteq \tau$ için $\bigsqcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Eğer τ ailesi X kümesi üzerinde bir neutrosophic topoloji ise (X, τ) ikilisine bir neutrosophic topolojik uzay denir.

Örnek 3.1.1 X boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}\}$$

ve

$$\sigma = \mathcal{N}(X)$$

neutrosophic küme aileleri X üzerinde birer neutrosophic topolojidirler.

Tanım 3.1.2 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ise, τ ailesine ait kümelere neutrosophic açık küme denir.

Tanım 3.1.3 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Eğer $A^c \in \tau$ ise A kümesine bu uzayda neutrosophic kapalıdır denir.

3.2 Neutrosophic Topolojik Uzaylarda Bir Kümenin İçi, Kapanışı, Dışı ve Sınırı

Tanım 3.2.1 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic içi

$$\operatorname{int}(A) = \bigsqcup_{\substack{G \in \tau \\ G \sqsubseteq A}} G$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.1 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\text{int}(A) \sqsubseteq A$

ii. $\text{int}(A)$ kümesi, neutrosophic açık bir kümedir.

iii. $\text{int}(A)$ kümesi, A kümesinin neutrosophic kapsadığı en büyük neutrosophic açık kümedir.

iv. A kümesinin bir neutrosophic açık küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = \text{int}(A)$ olmasıdır.

İspat.

i. Tanım 3.2.1 ile

$$\text{int}(A) \sqsubseteq A$$

olduğu açıktır.

ii. Neutrosophic topoloji tanımından; neutrosophic açık kümelerin keyfi sayıda elemanların neutrosophic birleşimi neutrosophic açık küme olup, $\text{int}(A)$ neutrosophic açık kümedir.

iii. Neutrosophic iç tanımı

$$\text{int}(A) = \bigsqcup_{\substack{G\in\tau \\ G\sqsubseteq A}} G$$

gereğince A kümesinin neutrosophic kapsadığı bütün neutrosophic açık neutrosophic alt kümeler, $\text{int}(A)$ kümesinin birer neutrosophic alt kümeleridir. *ii.* gereği $\text{int}(A)$ kümesi, neutrosophic açık kümedir. Dolayısıyla $\text{int}(A)$ kümesi, A kümesinin neutrosophic kapsadığı en büyük neutrosophic açık kümedir.

iv. $(\Rightarrow:)$ A kümesi neutrosophic açık bir küme olsun. Bu takdirde $A \in \tau$'dur. Neutrosophic iç tanımı

$$\text{int}(A) = \bigsqcup_{\substack{G\in\tau \\ G\sqsubseteq A}} G$$

gereğince $A \sqsubseteq \text{int}(A)$ ve *i.* ile $\text{int}(A) \sqsubseteq A$ olduğundan $A = \text{int}(A)$ olur.

$(:\Leftarrow)$ $A = \text{int}(A)$ olsun. *ii.* gereği A kümesi, neutrosophic açık kümedir.

Teorem 3.2.2 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\text{int}(\tilde{X}) = \tilde{X}$ ve $\text{int}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$

ii. $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$

iii. $A \sqsubseteq B$ ise $\text{int}(A) \sqsubseteq \text{int}(B)$

iv. $\text{int}(A) \sqcap \text{int}(B) = \text{int}(A \sqcap B)$

v. $\text{int}(A) \sqcup \text{int}(B) \sqsubseteq \text{int}(A \sqcup B)$

İspat.

i. $\tilde{X}$ ve $\tilde{\emptyset}$ kümeleri neutrosophic açık küme olduğundan $\tilde{X}$ kümesinin neutrosophic kapsadığı en büyük neutrosophic açık neutrosophic alt kümesi $\text{int}(\tilde{X})$ kümesi ve $\tilde{\emptyset}$ kümesinin neutrosophic kapsadığı en büyük neutrosophic açık neutrosophic alt kümesi $\text{int}(\tilde{\emptyset})$ kümesidir. O halde

$$\tilde{X} = \text{int}(\tilde{X}) \text{ ve } \tilde{\emptyset} = \text{int}(\tilde{\emptyset})$$

olur.

ii. $\text{int}(A) = B$ olsun. Teorem 3.2.1 *ii.* gereği B kümesi neutrosophic açık kümedir. Teorem 3.2.1 *iv.* gereğince $\text{int}(B) = B$ bulunur. B kümesi yerine $\text{int}(A)$ alınırsa, buradan $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ elde edilir.

iii. $A \sqsubseteq B$ olsun. Teorem 3.2.1 *i.* gereği $\text{int}(A) \sqsubseteq A$ olur. Hipotez gereği $\text{int}(A) \sqsubseteq B$ olur. $\text{int}(A)$ kümesi, B kümesinin neutrosophic kapsadığı herhangi bir neutrosophic açık küme ve teorem 3.2.1 *iii.* gereğince, $\text{int}(B)$ kümeside B kümesinin neutrosophic kapsadığı en büyük neutrosophic açık küme olduğundan,

$$\text{int}(A) \sqsubseteq \text{int}(B) \sqsubseteq B$$

bulunur. Buradan

$$\text{int}(A) \sqsubseteq \text{int}(B)$$

olur.

iv. $A \sqcap B \sqsubseteq A$ ve $A \sqcap B \sqsubseteq B$ neutrosophic kapsamalarından ve *iii.* gereğince

$$\text{int}(A \sqcap B) \sqsubseteq \text{int}(A) \text{ ve } \text{int}(A \sqcap B) \sqsubseteq \text{int}(B)$$

bulunur. Neutrosophic kesişim işleminden,

$$\operatorname{int}(A \sqcap B) \sqsubseteq \operatorname{int}(A) \sqcap \operatorname{int}(B)$$

elde edilir ve teorem 3.2.1 *ii.* gereği $\operatorname{int}(A)$ ve $\operatorname{int}(B)$ kümeleri neutrosophic açık kümelerdir. Neutrosophic açık kümelerin sayılabilir neutrosophic birleşimi neutrosophic açık küme olacağından

$$\operatorname{int}(A) \sqcap \operatorname{int}(B)$$

neutrosophic açık kümedir. Teorem 3.2.1 *iii.* gereği $\operatorname{int}(A \sqcap B)$ kümesi, $A \sqcap B$ kümesinin neutrosophic kapsadığı en büyük neutrosophic açık küme olduğundan,

$$\operatorname{int}(A) \sqcap \operatorname{int}(B) \sqsubseteq \operatorname{int}(A \sqcap B)$$

elde edilir. Böylece

$$\operatorname{int}(A \sqcap B) \sqsubseteq \operatorname{int}(A) \sqcap \operatorname{int}(B)$$

ve

$$\operatorname{int}(A) \sqcap \operatorname{int}(B) \sqsubseteq \operatorname{int}(A \sqcap B)$$

ifadelerinden

$$\operatorname{int}(A) \sqcap \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A \sqcap B)$$

bulunur.

Uyarı 3.2.1 Teorem 3.2.2 *iv.* gereğince

$$\operatorname{int}(A) \sqcup \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A \sqcup B)$$

olmak zorunda değildir. $X = \{a, b\}$ olmak üzere, $A, B, C \in \mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned}
A &= \big\{\langle a, 0.5, 0.6, 0.7\rangle, \langle b, 0.1, 0.4, 0.9\rangle\big\} \\
B &= \big\{\langle a, 0.8, 0.6, 0.2\rangle, \langle b, 0.4, 0.5, 0.9\rangle\big\} \\
C &= \big\{\langle a, 0.9, 0.7, 0.8\rangle, \langle b, 0.1, 0.3, 0.5\rangle\big\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor.

$$\tau = \big\{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, A\big\}$$

neutrosophic küme ailesi X üzerinde bir neutrosophic topolojidir.

$$\text{int}(B) = \tilde{\emptyset}$$

$$\text{int}(C) = \tilde{\emptyset}$$

$$\text{int}(B \sqcup C) = A$$

bulunur. Bu durumda

$$\text{int}(A) \sqcup \text{int}(C) \sqsubseteq \text{int}(A \sqcup C)$$

olur.

Tanım 3.2.2 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic kapanışı

$$\text{cl}(A) = \bigsqcap_{\substack{K^c \in \tau \\ A \sqsubseteq K}} K$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.3 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $A \sqsubseteq \text{cl}(A)$

ii. $\text{cl}(A)$ kümesi, neutrosophic kapalı bir kümedir.

iii. $\text{cl}(A)$ kümesi, A kümesinin neutrosophic kapsayan en küçük neutrosophic kapalı kümedir.

iv. A kümesinin bir neutrosophic kapalı küme olması için gerekli ve yeterli koşul $A = \text{cl}(A)$ olmasıdır.

İspat.

i. Tanım 3.2.2 ile $A \sqsubseteq \text{cl}(A)$ olduğu açıktır.

ii. Neutrosophic topoloji tanımınından, neutrosophic kapalı kümelerin keyfi sayıda elemanların neutrosophic kesişimi neutrosophic kapalı küme olup, $\text{cl}(A)$ neutrosophic kapalı kümedir.

iii. Neutrosophic kapanış tanımı

$$\mathrm{cl}(A) = \bigsqcap_{\substack{K^c \in \tau \\ A \sqsubseteq K}} K$$

gereğince cl(A), A kümesini neutrosophic kapsayan bütün neutrosophic kapalı kümelerin bir neutrosophic alt kümesidir. *ii.* gereği cl(A) kümesi, neutrosophic kapalı kümedir Dolayısıyla cl(A) kümesi, A kümesini neutrosophic kapsayan en küçük neutrosophic kapalı kümedir.

iv. ($\Rightarrow$:) A kümesi neutrosophic kapalı bir küme olsun. Bu takdirde $A^c \in \tau$'dur. Neutrosophic kapanış tanımı

$$\mathrm{cl}(A) = \bigsqcap_{\substack{K^c \in \tau \\ A \sqsubseteq K}} K$$

gereğince $\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq A$ ve *i.* gereği $A \sqsubseteq \mathrm{cl}(A)$ olduğundan $A = \mathrm{cl}(A)$ olur.

(:$\Leftarrow$) $A = \mathrm{cl}(A)$ olsun. *ii.* gereği A kümesi, neutrosophic kapalı kümedir.

Teorem 3.2.4 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $(\mathrm{cl}(A))^c = \mathrm{int}(A^c)$

ii. $(\mathrm{int}(A))^c = \mathrm{cl}(A^c)$

İspat.

i. Tanım 3.2.2 ile

$$\begin{aligned}(\mathrm{cl}(A))^c &= \Bigg(\bigsqcap_{\substack{A \sqsubseteq K \\ K^c \in \tau}} K\Bigg)^c \\ &= \bigsqcup_{\substack{K^c \sqsubseteq A^c \\ K \in \tau}} K^c \\ &= \bigsqcup_{\substack{G \sqsubseteq A^c \\ G \in \tau}} G\end{aligned}$$

ve

$$\mathrm{int}(A^c) = \bigsqcup_{\substack{G \sqsubseteq A^c \\ G \in \tau}} G$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafları birbirine eşit olduğundan sol taraflarıda birbirlerine eşittir. Dolayısıyla;

$$(\mathrm{cl}(A))^c = \mathrm{int}(A^c)$$

olur.

ii. *i.* de A yerine A^c yazılırsa

$$\mathrm{int}((A^c)^c) = (\mathrm{cl}(A^c))^c$$

olur. Buradan $\mathrm{int}(A) = (\mathrm{cl}(A^c))^c$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının tümleyeni alınırsa $(\mathrm{int}(A))^c = \mathrm{cl}(A^c)$ olarak bulunur.

Teorem 3.2.5 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X}$ ve $\mathrm{cl}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$

ii. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$

iii. $A \sqsubseteq B$ ise $\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$

iv. $\mathrm{cl}(A \sqcup B) = \mathrm{cl}(A) \sqcup \mathrm{cl}(B)$

v. $\mathrm{cl}(A \sqcap B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A) \sqcap \mathrm{cl}(B)$

İspat.

i. $\tilde{X}$ ve $\tilde{\emptyset}$ kümeleri hem neutrosophic kapalı hem neutosophic açık küme olduklarından Teorem 3.2.3 *iv.* gereğince

$$\mathrm{cl}(\tilde{X}) = \tilde{X} \text{ ve } \mathrm{cl}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$$

olur.

ii. $\mathrm{cl}(A) = B$ olsun. Teorem 3.2.3 *ii.* gereği B neutrosophic kapalı bir kümedir. Teorem 3.2.3 *iv.* gereğince $\mathrm{cl}(B) = B$ bulunur. B kümesi yerine $\mathrm{cl}(A)$ alınırsa

$$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$$

elde edilir.

iii. $A \sqsubseteq B$ olsun. Teorem 3.2.3 *i.* gereği $A \sqsubseteq \mathrm{cl}(A)$ ve $B \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$ olur. Hipotez gereği $A \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$ olur. $\mathrm{cl}(B)$ kümesi, A kümesi neutrosophic kapsayan herhangi bir neutrosophic kapalı küme ve Teorem 3.2.3 *iii.* gereği, $\mathrm{cl}(A)$ kümeside A kümesini neutrosophic kapsayan en küçük neutrosophic kapalı küme olduğundan,

$$A \sqsubseteq \mathrm{cl}(A) \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$$

bulunur. Buradan

$$\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$$

olur.

iv. $A \sqsubseteq (A \sqcup B)$ ve $B \sqsubseteq (A \sqcup B)$ neutrosophic kapsamalarından ve *iii.* gereği

$$\mathrm{cl}(A) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A \sqcup B) \ \text{ ve } \ \mathrm{cl}(B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A \sqcup B)$$

bulunur. Neutrosophic birleşim işleminden

$$\mathrm{cl}(A) \sqcup \mathrm{cl}(B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A \sqcup B)$$

elde edilir ve Teorem 3.2.3 *ii.* gereği $\mathrm{cl}(A)$ ve $\mathrm{cl}(B)$ kümeleri neutrosophic kapalı kümelerdir. Neutrosophic kapalı kümelerin sayılabilir neutrosophic birleşimi neutrosophic kapalı küme olacağından

$$\mathrm{cl}(A) \sqcup \mathrm{cl}(B)$$

bir neutrosophic kapalı kümedir. Teorem 3.2.3 *ii.* gereği $\mathrm{cl}(A \sqcup B)$ kümesi, $A \sqcup B$ kümesini neutrosophic kapsayan en küçük neutrosophic kapalı küme olduğundan

$$\mathrm{cl}(A \sqcup B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A) \sqcup \mathrm{cl}(B)$$

elde edilir. $\mathrm{cl}(A \sqcup B) = \mathrm{cl}(A) \sqcup \mathrm{cl}(B)$ olur.

v. $(A \sqcap B) \sqsubseteq A$ ve $(A \sqcap B) \sqsubseteq B$ neutrosophic kapsamalarından ve *iii.* gereğince

$$\mathrm{cl}(A \sqcap B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A) \ \text{ ve } \ \mathrm{cl}(A \sqcap B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(B)$$

bulunur. Neutrosophic kesişim işleminden

$$\mathrm{cl}(A \sqcap B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A) \sqcap \mathrm{cl}(B)$$

elde edilir.

Uyarı 3.2.2 Teorem 3.2.5 *v.* gereği

$$\mathrm{cl}(A \sqcap B) = \mathrm{cl}(A) \sqcap \mathrm{cl}(B)$$

olmak zorunda değildir. $X = \{a, b\}$ olmak üzere $A, B \in \mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned} A &= \big\{\langle a, 0.5, 0.5, 0.5\rangle, \langle b, 0.4, 0.4, 0.4\rangle\big\} \\ B &= \big\{\langle a, 0.6, 0.6, 0.6\rangle, \langle b, 0.3, 0.3, 0.3\rangle\big\}. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor.

$$\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, A, B, A \sqcap B, A \sqcup B\}$$

neutrosophic küme ailesi X üzerinde bir neutrosophic topolojidir. Bu neutrosophic topolojik uzayın neutrosophic kapalı kümeler ailesi

$$\{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A^c, B^c, (A \sqcap B)^c, (A \sqcup B)^c\}$$

ve

$$\begin{aligned}
A^c &= \big\{\langle a, 0.5, 0.5, 0.5\rangle, \langle b, 0.4, 0.6, 0.4\rangle\big\} \\
B^c &= \big\{\langle a, 0.6, 0.4, 0.6\rangle, \langle b, 0.3, 0.7, 0.3\rangle\big\} \\
(A \sqcap B)^c &= \big\{\langle a, 0.6, 0.4, 0.5\rangle, \langle b, 0.4, 0.6, 0.4\rangle\big\} \\
(A \sqcup B)^c &= \big\{\langle a, 0.5, 0.5, 0.6\rangle, \langle b, 0.3, 0.7, 0.4\rangle\big\}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathrm{cl}(A) = \tilde{X}$$

$$\mathrm{cl}(B) = \tilde{X}$$

$$\mathrm{cl}(A \sqcap B) = \bigsqcap_{\substack{C^c \in \tau \\ A \sqcup B \sqsubseteq C}} C = (A \sqcup B)^c$$

ve

$$\mathrm{cl}(A \sqcap B) \sqsubseteq \mathrm{cl}(A) \sqcap \mathrm{cl}(B)$$

olur.

Örnek 3.2.1 $X = \{a, b\}$ olmak üzere $A, B, C \in \mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned}
A &= \big\{\langle a, 0.4, 0.2, 0.2\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.6\rangle\big\} \\
B &= \big\{\langle a, 0.4, 0.5, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.5\rangle\big\} \\
C &= \big\{\langle a, 0.5, 0.3, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.5\rangle\big\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor.

$$\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, A, B, A \sqcap B, A \sqcup B\}$$

neutrosophic küme ailesi X üzerinde bir neutrosophic topolojidir. Bu neutrosophic topolojik uzayın neutrosophic kapalı kümeler ailesi

$$\{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A^c, B^c, (A \sqcap B)^c, (A \sqcup B)^c\}$$

ve

$$\begin{aligned}
A^c &= \{\langle a, 0.2, 0.8, 0.4\rangle, \langle b, 0.6, 0.6, 0.5\rangle\} \\
B^c &= \{\langle a, 0.3, 0.5, 0.4\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.5\rangle\} \\
(A \sqcap B)^c &= \{\langle a, 0.3, 0.5, 0.4\rangle, \langle b, 0.6, 0.4, 0.5\rangle\} \\
(A \sqcup B)^c &= \{\langle a, 0.2, 0.8, 0.4\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.5\rangle\}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\mathrm{cl}(C) = \bigsqcap_{\substack{D^c \in \tau \\ C \sqsubseteq D}} D = \tilde{X}$$

ve

$$\mathrm{int}(C) = \bigsqcup_{\substack{E \in \tau \\ E \sqsubseteq C}} E = B$$

olur.

Tanım 3.2.3 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic dışı;

$$\mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(A^c)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.6 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A, B \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\mathrm{ext}(A \sqcup B) = \mathrm{ext}(A) \sqcap \mathrm{ext}(B)$

ii. $\mathrm{ext}(A) \sqcup \mathrm{ext}(B) \sqsubseteq \mathrm{ext}(A \sqcap B)$

İspat.

i. Tanım 3.2.3 ve Teorem 3.2.2 *v.* gereğince

$$\begin{aligned}
\mathrm{ext}(A \sqcup B) &= \mathrm{int}((A \sqcup B)^c) \\
&= \mathrm{int}(A^c \sqcap B^c) \\
&= \mathrm{int}(A^c) \sqcap \mathrm{int}(B^c) \\
&= \mathrm{ext}(A) \sqcap \mathrm{ext}(B)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathrm{ext}(A \sqcup B) = \mathrm{ext}(A) \sqcap \mathrm{ext}(B)$$

olur.

ii. Tanım 3.2.3 ve Teorem 3.2.2 *iv.* gereğince

$$\begin{aligned}\mathrm{ext}(A)\sqcup\mathrm{ext}(B) &= \mathrm{int}(A^c)\sqcup\mathrm{int}(B^c)\\ &\sqsubseteq \mathrm{int}(A^c\sqcup B^c)\\ &= \mathrm{int}((A\sqcap B)^c)\\ &= \mathrm{ext}(A\sqcap B)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathrm{ext}(A)\sqcup\mathrm{ext}(B)\sqsubseteq\mathrm{ext}(A\sqcap B)$$

olur.

Örnek 3.2.2 $\tilde{X}=\{a,b,c\}$ olmak üzere $A,B,C\in\mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned}A &= \big\{\langle a,0.4,0.6,0.4\rangle,\langle b,0.5,0.4,0.6\rangle,\langle c,0.4,0.4,0.7\rangle\big\}\\ B &= \big\{\langle a,0.4,0.5,0.3\rangle,\langle b,0.5,0.6,0.5\rangle,\langle c,0.5,0.4,0.8\rangle\big\}\\ C &= \big\{\langle a,0.5,0.3,0.3\rangle,\langle b,0.5,0.4,0.5\rangle,\langle c,0.6,0.3,0.5\rangle\big\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor.

$$\tau=\{\tilde{\emptyset},\tilde{X},A,B,A\sqcap B,A\sqcup B\}$$

neutrosophic küme ailesi X üzerinde bir neutrosophic topolojidir. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\mathrm{ext}(C) &= \mathrm{int}(C^c)\\ &= \mathrm{int}\Big(\big\{\langle a,0.5,0.3,0.3\rangle,\langle b,0.5,0.4,0.5\rangle,\langle c,0.6,0.3,0.5\rangle\big\}^c\Big)\\ &= \mathrm{int}\Big(\big\{\langle a,0.3,0.7,0.5\rangle,\langle b,0.5,0.6,0.5\rangle,\langle c,0.5,0.7,0.6\rangle\big\}\Big)\\ &= \tilde{\emptyset}\end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.2.4 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A\in\mathcal{N}(X)$ olsun. A'nın neutrosophic sınırı

$$\mathrm{fr}(A)=\mathrm{cl}(A)\sqcap(\mathrm{int}(A))^c$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.7 (X,τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A\in\mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\mathrm{fr}(\tilde{\emptyset})=\tilde{\emptyset}$

ii. $\text{fr}(A^c) = \text{fr}(A)$

iii. $\text{fr}(A) = \text{cl}(A) \sqcap \text{cl}(A^c)$

iv. $\text{fr}(\text{fr}(A)) \sqsubseteq \text{fr}(A)$

İspat.

i. Teorem 3.2.5 *i.* gereği $\text{cl}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ ve Teorem 3.2.2 *i.* gereği $\text{int}(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ olduğundan bu durumda neutrosophic sınır tanımından

$$\text{fr}(\tilde{\emptyset}) = \text{cl}(\tilde{\emptyset}) \sqcap (\text{int}(\tilde{\emptyset}))^c = \tilde{\emptyset} \sqcap \tilde{\emptyset}^c = \tilde{\emptyset} \sqcap \tilde{X} = \tilde{\emptyset}$$

olur.

ii. Tanım 3.2.4 de A yerine A^c alınırsa

$$\text{fr}(A^c) = \text{cl}(A^c) \sqcap (\text{int}(A^c))^c$$

elde edilir. Teorem 3.2.4 *i.* ve *ii.* gereği

$$\begin{aligned} (\text{cl}(A))^c &= \text{int}(A^c) \\ (\text{int}(A))^c &= \text{cl}(A^c) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \text{fr}(A^c) &= \text{cl}(A^c) \sqcap (\text{int}(A^c))^c \\ &= (\text{int}(A))^c \sqcap ((\text{cl}(A))^c)^c \\ &= (\text{int}(A))^c \sqcap \text{cl}(A) \\ &= \text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c \\ &= \text{fr}(A) \end{aligned}$$

bulunur.

iii. Tanım 3.2.4

$$\text{fr}(A) = \text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c$$

eşitliği ve Teorem 3.2.4 *ii.* gereğince

$$\begin{aligned} \text{fr}(A) &= \text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c \\ &= \text{cl}(A) \sqcap \text{cl}(A^c) \end{aligned}$$

olur.

iv. $\mathrm{fr}(A)$ kümesi neutrosophic kapalı olup ve *iii.* gereğince

$$\begin{aligned}\mathrm{fr}(\mathrm{fr}(A)) &= \mathrm{cl}(\mathrm{fr}(A)) \sqcap \mathrm{cl}((\mathrm{fr}(A))^c) \\ &\sqsubseteq \mathrm{cl}(\mathrm{fr}(A)) \\ &= \mathrm{fr}(A)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.2.8 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun.

i. A kümesinin neutrosophic açık olması için gerekli ve yeterli koşul $A \sqcap \mathrm{fr}(A) = \tilde{\emptyset}$ olmasıdır.

ii. A kümesinin neutrosophic kapalı küme olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathrm{fr}(A) \sqsubseteq A$ olmasıdır.

iii. $\mathrm{fr}(\mathrm{int}(A)) \sqsubseteq \mathrm{fr}(A)$

İspat.

i. $(\Rightarrow:)$ A neutrosophic açık küme olduğundan Teorem 3.2.1 *iv.* gereğince $A = \mathrm{int}(A)$ olur. Tanım 3.2.4 gereğince

$$\mathrm{fr}(A) = \mathrm{cl}(A) \sqcap (\mathrm{int}(A))^c$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mathrm{fr}(A) \sqcap \mathrm{int}(A) &= \mathrm{cl}(A) \sqcap (\mathrm{int}(A))^c \sqcap \mathrm{int}(A) \\ &= \mathrm{cl}(A) \sqcap A^c \sqcap A \\ &= \tilde{\emptyset}\end{aligned}$$

olur.

$(:\Leftarrow)$ $A \sqcap \mathrm{fr}(A) = \tilde{\emptyset}$ olsun. Buradan

$$A \sqcap \mathrm{cl}(A) \sqcap (\mathrm{int}(A))^c = \tilde{\emptyset}$$

ve Teorem 3.2.3 *i.* gereğince

$$A \sqcap (\mathrm{int}(A))^c = \tilde{\emptyset}$$

bulunur. Buradan A is a neutrosophic açık küme olur.

ii. ($\Rightarrow$:) A kümesi neutrosophic kapalı bir küme olsun. Teorem 3.2.3 *iv.* gereğince $A = \text{cl}(A)$ olup Tanım 3.2.4 ile

$$\begin{aligned}\text{fr}(A) &= \text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c \\ &= A \sqcap (\text{int}(A))^c \\ &\sqsubseteq A\end{aligned}$$

olur.

($:\Leftarrow$) $\text{fr}(A) \sqsubseteq A$ olsun. Teorem 3.2.1 *i.* gereği $\text{int}(A) \sqsubseteq A$ olup,

$$\text{fr}(A) \sqcup \text{int}(A) \sqsubseteq A$$

bulunur. $\text{fr}(A) \sqcup \text{int}(A) = \text{cl}(A)$ olduğundan, $\text{cl}(A) \sqsubseteq A$ olur. Teorem 3.2.3 *i.* gereğince, $A \sqsubseteq \text{cl}(A)$ olup böylece $A = \text{cl}(A)$ elde edilir. O halde A kümesi bir neutrosophic kapalı kümedir.

iii. Tanım 3.2.4 ile

$$\begin{aligned}\text{fr}(\text{int}(A)) &= \text{cl}(\text{int}(A)) \sqcap (\text{int}(\text{int}(A)))^c \\ &= \text{cl}(\text{int}(A)) \sqcap (\text{int}(A))^c \\ &\sqsubseteq \text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c \\ &= \text{fr}(A)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.2.9 (X, τ) bir neutrosophic topolojik uzay ve $A \in \mathcal{N}(X)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $(\text{fr}(A))^c = \text{ext}(A) \sqcup \text{int}(A)$

ii. $\text{cl}(A) = \text{int}(A) \sqcup \text{fr}(A)$

İspat.

i. Tanım 3.2.4, Teorem 3.2.4 ve Teorem 2.3.2 ile

$$\begin{aligned}(\text{fr}(A))^c &= (\text{cl}(A) \sqcap (\text{int}(A))^c)^c \\ &= (\text{cl}(A))^c \sqcup ((\text{int}(A))^c)^c \\ &= \text{int}(A^c) \sqcup \text{int}(A) \\ &= \text{ext}(A) \sqcup \text{int}(A)\end{aligned}$$

bulnur. Dolayısıyla

$$(\mathrm{fr}(A))^c = \mathrm{ext}(A) \sqcup \mathrm{int}(A)$$

olur.

ii. Tanım 3.2.4 gereğince

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}(A) \sqcup \mathrm{fr}(A) &= \mathrm{int}(A) \sqcup (\mathrm{cl}(A) \sqcap (\mathrm{int}(A))^c) \\
&= (\mathrm{int}(A) \sqcup \mathrm{cl}(A)) \sqcap (\mathrm{int}(A) \sqcup (\mathrm{int}(A))^c) \\
&= \mathrm{cl}(A) \sqcap (\mathrm{int}(A) \sqcup (\mathrm{int}(A))^c) \\
&= \mathrm{cl}(A) \sqcap \tilde{X} \\
&= \mathrm{cl}(A)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathrm{cl}(A) = \mathrm{int}(A) \sqcup \mathrm{fr}(A)$$

olur.

Örnek 3.2.3 $\tilde{X} = \{a, b\}$ olmak üzere, $A, B, C \in \mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned}
A &= \big\{\langle a, 0.4, 0.6, 0.4\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.6\rangle\big\} \\
B &= \big\{\langle a, 0.4, 0.5, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.5\rangle\big\} \\
C &= \big\{\langle a, 0.5, 0.3, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.5\rangle\big\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor.

$$\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, A, B, A \sqcap B, A \sqcup B\}$$

neutrosophic küme ailesi X üzerinde bir neutrosophic topolojidir. Bu neutrosophic topolojik uzayın neutrosophic kapalı kümelerinin ailesi

$$\{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, A^c, B^c, (A \sqcap B)^c, (A \sqcup B)^c\}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
A^c &= \big\{\langle a, 0.4, 0.4, 0.4\rangle, \langle b, 0.6, 0.6, 0.5\rangle\big\} \\
B^c &= \big\{\langle a, 0.3, 0.5, 0.4\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.5\rangle\big\} \\
(A \sqcap B)^c &= \big\{\langle a, 0.4, 0.4, 0.4\rangle, \langle b, 0.6, 0.4, 0.5\rangle\big\} \\
(A \sqcup B)^c &= \big\{\langle a, 0.3, 0.5, 0.4\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.5\rangle\big\} \\
\mathrm{cl}(C) &= \bigsqcap_{\substack{D^c \in \tau \\ C \sqsubseteq D}} D = \tilde{X}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(C) &= A \sqcup B \\ &= \big\{\langle a, 0.4, 0.6, 0.4\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.6\rangle\big\} \sqcup \\ &\quad \big\{\langle a, 0.4, 0.5, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.5\rangle\big\} \\ &= \big\{\langle a, 0.4, 0.5, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.5\rangle\big\}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathrm{fr}(C) &= \mathrm{cl}(C) \sqcap (\mathrm{int}(C))^c \\ &= \tilde{X} \sqcap (A \sqcup B)^c \\ &= (A \sqcup B)^c\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3 Neutrosophic Alt Uzay

Tanım 3.3.1 (X, τ) neutrosophic topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Bu durumda Y üzerindeki $\tau_Y = \{U \sqcap Y : U \in \tau\}$ neutrosophic topolojisine neutrosophic alt uzay topolojisi denir.

$$\tilde{Y} = \begin{cases} \tilde{X}, & x \in Y \\ \tilde{\emptyset}, & x \in X \setminus Y \end{cases}$$

(Y, τ_Y) neutrosophic uzayınada (X, τ) neutrosophic uzayının bir neutrosophic alt uzayı denir.

Örnek 3.3.1 $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere $A, B \in \mathcal{N}(X)$ neutrosophic kümeleri

$$\begin{aligned}A &= \big\{\langle a, 0.4, 0.2, 0.2\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.6\rangle, \langle c, 0.2, 0.5, 0.7\rangle\big\} \\ B &= \big\{\langle a, 0.4, 0.5, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.5\rangle, \langle c, 0.3, 0.7, 0.8\rangle\big\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyor.

$$\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, A, B, A \sqcap B, A \sqcup B\}$$

ve $Y = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki neutrosophic alt uzay topolojisi ve

$$\tilde{Y} = \big\{\langle a, 1, 0, 0\rangle, \langle b, 1, 0, 0\rangle, \langle c, 0, 1, 1\rangle\big\}$$

şeklinde tanımlanıyor.

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y} \sqcap \tilde{\emptyset} &= \tilde{\emptyset} \\
\tilde{Y} \sqcap \tilde{X} &= \tilde{Y} \\
C &= \tilde{Y} \sqcap A = \big\{\langle a, 0.4, 0.2, 0.2\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.6\rangle\big\} \\
M &= \tilde{Y} \sqcap B = \big\{\langle a, 0.4, 0.5, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.5\rangle\big\} \\
L &= \tilde{Y} \sqcap (A \sqcap B) = \big\{\langle a, 0.4, 0.5, 0.3\rangle, \langle b, 0.5, 0.6, 0.6\rangle\big\} \\
K &= \tilde{Y} \sqcap (A \sqcup B) = \big\{\langle a, 0.4, 0.2, 0.2\rangle, \langle b, 0.5, 0.4, 0.5\rangle\big\}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\tau_Y = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{Y}, C, M, L, K\}$$

olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada sezgisel bulanık kümelerde ve sezgisel bulanık kümelerde yer almayan bir elemanın belirsiz üyelik durumunu dikkate alınarak öncelikle neutrosophic küme kavramı verilmiştir. Daha sonra neutrosophic kümelerde topolojik uzay ele alınarak neutrosophic topolojik uzay kavramını ve buna ait bazı özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca Klasik topolojik uzaylardaki bir kümenin içi, kapanışı, dışı ve sınırı kavramlarından yola çıkılarak neutrosophic topolojik uzaylar ve neutrosophic topolojik uzaylarda bir kümenin içi, kapanışı, dışı ve sınırı kavramları ele alınarak bunlara ait özellikler incelenmiştir. İleriki çalışmalarda neutrosophic topolojik uzaylarda süreklilik, neutrosophic topolojik uzaylarda yakısaklık, neutrosophic topolojik uzaylarda ayırma aksiyomları, neutrosophic topolojik uzaylarda kompaktlık, neutrosophic topolojik uzaylarda bağlantılılık gibi konular hakkında çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Atanassov, K. 1986. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, (20): 87-96.

[2] Broumi, S., Smarandache, F. 2013. Intuitionistic neutrosophic soft set. Journal of Information and Computing Science, 8(2): 130-140.

[3] Broumi, S., Smarandache, F. 2013. More on intuitionistic neutrosophic soft set. Computer Science and Information Technology, 1(4):257-268.

[4] Broumi S., Generalized neutrosophic soft set, arXiv:1305.2724.

[5] Lupiáñez, F. G. 2008. On neutrosophic topology. The International Journal of Systems and Cybernetics, 37(6):797-800.

[6] Lupiáñez, F. G. 2009. Interval neutrosophic sets and topology. The International Journal of Systems and Cybernetics, 38(3/4):621-624.

[7] Lupiáñez, F. G. 2009. On various neutrosophic topologies. The International Journal of Systems and Cybernetics, 38(6): 1009-1013.

[8] Lupiáñez, F. G. 2010. On neutrosophic paraconsistent topology. The International Journal of Systems and Cybernetics, 39(4): 598-601.

[9] Salama, A., AL-Blowi, S. 2012. Generalized neutrosophic set and generalized neutrosophic topological spaces. Computer Science and Engineering, 2(7): 129-132.

[10] Smarandache, F. 2005. Neutrosophic set - a generalization of the intuitionistic fuzzy set. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 24(3): 287-297.

[11] Zadeh, L. 1965. Fuzzy Sets, Inform. and Control, (8): 338-353.

DİZİN

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	**:**	Cemil KURU
Doğum Yeri	**:**	Bartın
Doğum Tarihi	**:**	19.05.1990
Yabancı Dili	**:**	İngilizce
E-mail	**:**	cemilkuru@outlook.com

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2009-2014