T.C.
ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER

BARIŞ ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORDU 2017

TEZ ONAY

Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Barış ÇELİK tarafından hazırlanan ve Doç. Dr. Erhan SET danışmanlığında yürütülen "Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri İçin Eşitsizlikler" adlı bu tez, jürimiz tarafından 15 / 12/ 2017 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erhan SET

Başkan	:	Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR Matematik, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi	İmza : A. Akdemir
Üye	:	Doç. Dr. Selahattin MADEN Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :
Üye	:	Doç. Dr. Erhan SET Matematik, Ordu Üniversitesi	İmza :

ONAY:

20 / 12 / 2017 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21 / 12 / 2017 tarih ve 2017 / 574 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

T.C. ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ 1923

Enstitü Müdürü
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Sami GÜLER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Barış ÇELİK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Barış ÇELİK

Ordu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2017
Yüksek Lisans Tezi, 49s.

Danışman: Doç. Dr. Erhan SET

Bu tezde konveks ve s-konveks fonksiyonlar için literatürdeki bazı Hermite-Hadamard tipli ve Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler incelenerek genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla bu eşitsizliklerin yeni genelleştirmeleri elde edilmiştir. Birinci bölüm kesirli analiz ve eşitsizlik tarihi ile ilgili bazı bilgiler içermektedir. İkinci bölümde, bazı temel kavramlara, konveks fonksiyonlara, s-konveks fonksiyonlara, literatürde iyi bilinen bazı eşitsizliklere ve özel fonksiyonlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Riemann-Liouville kesirli integrallerine, literatürdeki mevcut lemmalar yardımıyla elde edilmiş Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizliklere ve farklı iki konveks fonksiyonun çarpımı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklere yer verilmiştir. Tezin bulgularını oluşturan dördüncü bölümde ise, ilk olarak genelleştirilmiş kesirli integraller hakkında bilgiler verilmiştir. Daha sonra bu integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler ve farklı iki konveks fonksiyonun çarpımı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği, Konveks fonksiyon, Riemann-Liouville kesirli integral operatörü, s-konveks fonksiyon.

ABSTRACT

INEQUALITIES FOR GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS

Barış ÇELİK

Ordu University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics, 2017
MSc. Thesis, 49p.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erhan SET

In this thesis, some Hermite-Hadamard type and Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities well known in the literature are investigated for convex and s-convex functions and new generalizations of these inequalities are obtained by using generalized fractional integrals. The first chapter contains some information on fractional analysis and history of inequality. In the second chapter, some basic concepts of analysis, convex functions, s-convex functions, some inequalities such as Hölder inequality and Power-mean inequality and special functions are given. In the third chapter, Riemann-Liouville fractional integrals, Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities obtained by using the existing lemmas in the literature and Hermite-Hadamard type inequalities for the product of two different convex functions are given. In the fourth chapter, which constitutes the findings of the thesis, firstly, generalized fractional integrals are presented. Then Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for convex functions and Hermite-Hadamard type inequalities for the product of two different convex functions were obtained by means of these integrals.

Key Words: Convex function, s- convex function, Generalized fractional integral, Hermite-Hadamard inequality, Hermite-Hadamard-Fejér inequality, Riemann-Liouville fractional integral.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bilgisini, emeğini ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok saygıdeğer danışman hocam,

Doç. Dr. Erhan SET' e

şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini eksik etmeyen Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle yanımda olan ve ideallerimi gerçekleştirmemi sağlayan değerli aileme yürekten teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışması Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir. Proje No: BY-1716

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil No **Sayfa**

SİMGELER ve KISALTMALAR

B	:	Beta fonksiyonu
Γ	:	Gamma fonksiyonu
K_s^1	:	Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
K_s^2	:	İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon Sınıfı
f'	:	f Fonksiyonun Birinci Mertebeden Türevi
I	:	Reel Sayılar Kümesinde Bir Aralık
I°	:	I' nın içi
$\mathrm{J}_{\mathrm{a}^+}^{\alpha}$	:	α. Dereceden Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$\mathrm{J}_{\mathrm{b}^-}^{\alpha}$	:	α. Dereceden Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegral
$\mathrm{L}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$	:	$[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonlar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda.\alpha+;w}^{\sigma}\varphi$	:	Sol Taraflı Genelleştirilmiş İntegral Operatörü
$\mathcal{J}_{\rho,\lambda.b-;w}^{\sigma}\varphi$	:	Sağ Taraflı Genelleştirilmiş İntegral Operatörü

1. GİRİŞ

Kesirli analiz 300 yıldan bu yana var olan fakat bilim ve mühendislik çevrelerinde çok popüler olmayan, yeni yeni popüler olmaya başlamış bir konudur. Dolayısıyla bu konuyu bilim ve mühendisliğin popüler konusu haline getirmek, temel doğayı anlamaya ve daha iyi tanımlamaya başka bir boyut kazandıracaktır. Belki de kesirli analiz, doğayı anlama şeklidir ve bundan dolayı doğa ile bu dilde konuşmak daha da verimli olacaktır. Son 300 yıl boyunca bu konu matematikçiler tarafından çalışılmakta ve son yıllarda da mühendislik, bilim ve ekonomi gibi alanlarda ilgi çekmektedir. Gelecek yıllarda bu konu üzerine birçok uygulama görülecektir. Belki de kesirli analiz 21. yüzyılın en önemli analiz konusu olacaktır.

L'Hospital, 30 Eylül 1695'te Leibniz'e yazdığı bir mektuptaki yazısında n-inci dereceden türev için kullandığı $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ notasyonunda $n = \frac{1}{2}$ için sonucun ne olacağını sormuştur. Leibniz'in cevabı "Bir gün faydalı sonuçlar çıkacak olan açık bir paradokstur" şeklinde olmuştur. Bu sözler üzerine kesirli analiz kavramı ortaya çıkmış ve aradan geçen 300 yıl boyunca yapılan çalışmaların en az yarısının doğru olduğu kanıtlanarak birçok uygulama verilmiştir. Bununla birlikte bu uygulamalar ve kesirli hesabı çevreleyen matematiksel arka plan paradoks olmaktan uzaktır.

1941 yılına kadar N.H. Abel, J. Liouville, B. Riemann, J. Hadamard, G.H. Hardy, H. Weyl, A. Erdelyi ve H. Kober gibi matematikçiler kesirli integral ve türev kavramları üzerine yapılan araştırmalara öncülük etmiş bilim insanlarından bazılarıdır. Bu alanda 1974 yılında Bertram Ross tarafından organize edilen, Connecticut'daki New Haven Üniversitesi'nde yapılan ve 94 matematikçinin katıldığı ilk uluslararası konferanstan sonra kesirli analiz hızlı bir gelişme göstermiştir. Daha sonra Adam Mc Bride, Garry Roach, Katsuyuki Nishimoto, Peter Rusev, Ivan Dimovski, Virginia Kiryakova gibi araştırmacılar tarafından bu konu üzerinde konferanslar düzenlenmiştir. K.B. Oldham ve J. Spanier, S.G. Samko, A.A. Kilbas ve O.I. Marichev, V.S. Kiryakova, K.S. Miller ve B. Ross, B. Rubin gibi bilim insanlarının yalnızca kesirli analiz üzerine yazılmış kitaplarının yanı sıra H.T. Davis, A. Zygmund, M.M. Dzherbashyan, I.N. Sneddon, P.L. Butzer ve R.J. Nessel, P.L. Butzer ve W. Trebels, G.O. Okikiolu, S. Fenyö ve H.W. Stolle, H.M. Srivastava ve H.L. Manocha, R. Gorenflo ve S. Vessella gibi bilim insanlarının yazmış oldukları kitaplarda bölüm olarak kesirli analiz yer almaktadır. Özellikle kesirli analiz üzerine yayın yapan bilimsel dergiler de literatürde bulunmaktadır.

Konveks fonksiyonlar yardımıyla oldukça hızlı bir gelişme gösteren ve geniş çaplı bir araştırma kitlesine sahip olan eşitsizlikler teorisine kesirli türev ve kesirli integral kavramları son yıllarda bir ivme katmıştır. Özellikle Sarıkaya ve arkadaşları tarafından 2011 yılında yapılan ve 2013 yılında yayınlanan "Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities" başlıklı çalışma birçok araştırmacının kesirli integraller yardımıyla yeni eşitsizlikler elde etmesine öncülük etmiştir. Kesirli integrallerin Riemann-Liouville, Weyl, Hadamard, Katugampola ve conformable gibi bilinen birçok formu vardır. Son zamanlarda da ilk olarak Raina tarafından tanıtılan ve daha sonra Agarwal, Luo ve Raina tarafından geliştirilen yeni bir genelleştirilmiş kesirli integral operatörü tanıtılmıştır.

Bu tezin amacı Raina, Luo ve Agarwal tarafından tanıtılan kesirli integral operatöründen faydalanarak literatürde Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla elde edilmiş bazı Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér tipli integral eşitsizliklerinin yeni genelleştirmelerini sunmaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde ihtiyaç duyulacak olan bilgilere yer verilmiştir.

2.1 Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar) f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I' da iki nokta olsun. Bu durumda

i) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

ii) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

iii) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

iv) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır [1].

Tanım 2.1.2 (Süreklilik) $x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir [3].

Tanım 2.1.3 (Mutlak Süreklilik) $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ $[a, b]$' nin ayrık açık alt aralıklarının bir koleksiyonu olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \delta$$

olduğunda

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f' ye $[a, b]$ üzerinde mutlak süreklidir denir [5].

Tanım 2.1.4 (Lipschitz Şartı) $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, I' da Lipschitz şartını sağlıyor denir [3].

Tanım 2.1.5 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f' de (a, b)' den $\mathbb{R}$' ye bir fonksiyon olsun. $t, x \in (a, b)$ olmak üzere

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

sonlu limiti varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$ (veya $Df(x)$ ya da $\frac{df(x)}{dx}$) ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir ve

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

veya $t = x + h$ dersek, $t \to x \Leftrightarrow h \to 0$ olacağından

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dir. Eğer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $x \in (a, b)$ olmak üzere

$$\lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \ ve \ \lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

limitleri varsa, bu limitlere sırası ile f' nin x noktasında sağ ve sol türevi denir ve $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu sırasıyla sağdan ve soldan türevlenebilirdir denir ve

$$f'_+(x) = \lim_{t \to x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \ ve \ f'_-(x) = \lim_{t \to x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

veya

$$f'_+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ ve \ f'_- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dir [14].

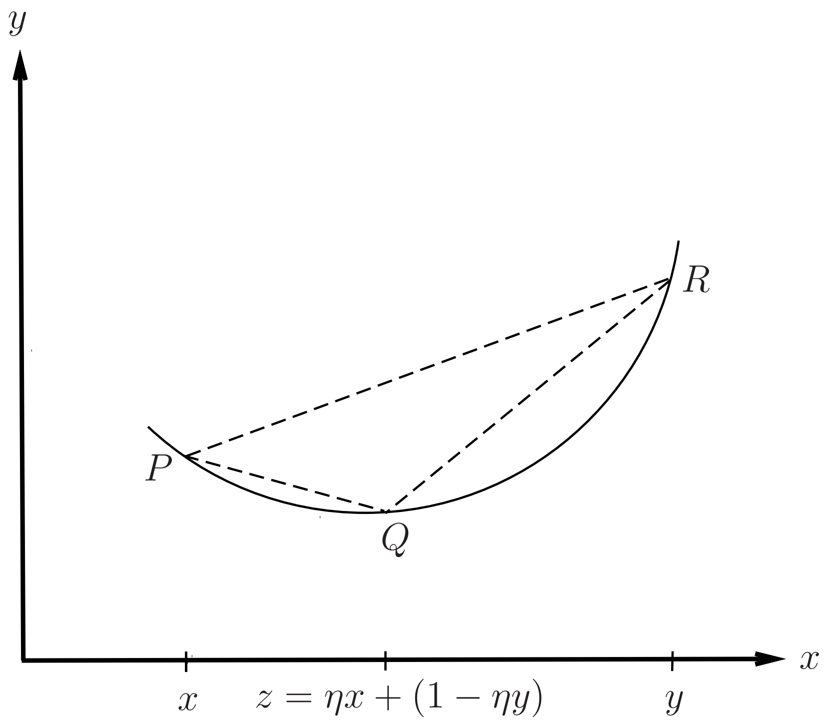
2.2 Konveks Fonksiyonlar ve Özellikleri

Konveks fonksiyonlar ile ilgili çalışmalar reel değişkenli reel değerli fonksiyonların içeriğinde başlamıştır. Dolayısıyla literatürde bu konu üzerine elde edilen birçok yeni sonuç bulunmaktadır ve bu sonuçlar oldukça anlaşılır ve basit ispatlara sahip olup sıradan ve önemsiz değildirler. Bu sonuçlar önemli uygulamalara ve aynı zamanda çeşitli genelleştirmelere sahiptirler.

Her $x, y \in I$ ve $\eta \in [0, 1]$ için $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\eta x + (1 - \eta)y) \leq \eta f(x) + (1 - \eta)f(y) \tag{2.2.1}$$

şartını sağlıyorsa f' ye I üzerinde konveks fonksiyon denir. Burada I, $\mathbb{R}$' deki açık, yarı-açık veya kapalı, sonlu veya sonsuz bir aralıktır. Eğer (2.2.1) eşitsizliği $x \neq y$ için kesin ise f' ye kesin konveks fonksiyon denir. Öte yandan, $-f : I \to \mathbb{R}$ konveks ise, $f : I \to \mathbb{R}$ konkavdır. Geometrik olarak (2.2.1) eşitsizliği, P, Q ve R, f' nin grafiği üzerinde herhangi üç nokta ve Q, P ile R arasında bir nokta olmak üzere Q noktasının, PR kirişinin altında veya üzerinde olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.1: Konveks fonksiyon

Aşağıdaki gibi konveks fonksiyonlara basit örnekler verilebilir.

i) $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2,$

ii) $g : [-\pi, 0] \to \mathbb{R},\ \ g(x) = \sin x,$

iii) $h : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R},\ \ h(x) = |x|.$

Bu fonksiyonlardan ilk ikisi kesin konvekstir fakat üçüncüsü kesin konveks değildir.

Ayrıca $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = mx + b$ formunda ise f' ye I üzerinde afindir denir. Herhangi bir afin fonksiyon konvekstir fakat kesin konveks değildir.

Konveks fonksiyonlar sınırlılık, süreklilik, diferansiyellenebilirlik gibi bir çok önemli özelliğe sahiptirler. Bu özelliklerden bazıları aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.2.1 $f : I \to \mathbb{R}$' ye bir konveks fonksiyon ise f, I içinde (I°) bulunan her $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde Lipschitz şartını sağlar. Dolayısıyla f, I°' de süreklidir ve $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir.

Teorem 2.2.2 $f : I \to \mathbb{R}$' ye konveks (kesin konveks) ise, $f'_{-}(x)$ ve $f'_{+}(x)$ vardır ve I°' de artandır (kesin artandır).

Teorem 2.2.3 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart her $x \in (a, b)$ için

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ artan (kesin artan) fonksiyonunun ve $c \in (a, b)$ noktasının var olmasıdır.

Teorem 2.2.4 f, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f' nin konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart f' nin artan (kesin artan) olmasıdır.

Teorem 2.2.5 f, (a, b) aralığında iki kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon yani f'', (a, b) üzerinde var olsun. Bu taktirde f' nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır. Eğer $f''(x) > 0$ ise f kesin konvekstir.

Teorem 2.2.6 $f : I \to \mathbb{R}$ ve $g : I \to \mathbb{R}$ konveks ve $\alpha \geq 0$ ise $f + g$ ve αf' de I üzerinde konvekstir.

Teorem 2.2.7 $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f(I) \subseteq J$ olsun. f konveks fonksiyon ve g' de konveks ve artan bir fonksiyon ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da I' da konvekstir.

Teorem 2.2.8 $f, g : I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, azalan (artan) ve konveks fonksiyonlar ise $h(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonu da bu özelliklere sahiptir.

Tanım 2.2.1 (Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0, 1]$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.2.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f' ye birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.2.2 (İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyon) $\alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}^+$ için $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{2.2.3}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f' ye ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu ikinci anlamda s-konkav olarak adlandırılır [4, 10].

Yukarıda verilen her iki s-konveks fonksiyon tanımlarında $s = 1$ olarak alınırsa bilinen konveks fonksiyon tanımı elde edilir.

Teorem 2.2.9 $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ise f, $[0, \infty)$ aralığında negatif değildir [10].

Teorem 2.2.10 $f \in K_s^2$ olsun. $\forall u, v \in \mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}^+ = [0, \infty))$, $\forall \alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere (2.2.2) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $f(0) = 0$ olmasıdır [10].

Teorem 2.2.11

i. $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_s^1$ sınıfına ait bir fonksiyondur,

ii. $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_{s_2}^2$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_{s_1}^2$ sınıfına ait bir fonksiyondur,

iii. $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_{s_2}^1$ sınıfına ait bir fonksiyon ve $f(0) \leq 0$ ise $f \in K_{s_1}^1$ sınıfına ait bir fonksiyondur [10].

2.3 Konveks Fonksiyonlar için Eşitsizlikler

Teorem 2.3.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, her a, $b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2.3.1}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir [4].

Teorem 2.3.2 (Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir, negatif olmayan ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx \tag{2.3.2}$$

eşitsizliği geçerlidir [9].

Dragomir ve Fitzpatrick 1999' da "The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense" başlığı altında yayınlanan makalelerinde ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki teoreme yer vermişlerdir.

Teorem 2.3.3 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyon, $s\in(0,1)$, $a,b\in[0,\infty)$ ve $a<b$ olsun. $f\in L[a,b]$ ise

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{2.3.3}$$

eşitsizligi geçerlidir ve bu eşitsizliğe s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Eğer (2.3.3) eşitsizliğinde s=1 alınırsa (2.3.1) eşitsizliği elde edilir [8].

2.4 Hölder Eşitsizliği ve İlgili Eşitsizlikler

Teorem 2.4.1 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx\le\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.4.1 (Power-Mean Eşitsizliği) $q\ge1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx\le\left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.4.2 (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği) f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

2.5 Gamma ve Beta Fonksiyonları

Tanım 2.5.1 n pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde ifade edilen $\Gamma(n)$ gösterimine Gamma fonksiyonu denir [18]. Gamma fonksiyonun önemli özelliğinden biri $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

olmasıdır.

Tanım 2.5.2 Γ, Euler Gamma fonksiyonu olmak üzere

$$B(\alpha, \beta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt & \alpha > 0 \\ \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & \left(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+\right) \end{cases}$$

fonksiyonu Beta fonksiyonudur [21, Bölüm 1.1].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegraller için Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Eşitsizlikler

Tanım 3.1.1 $[a,b]\,(-\infty < a < b < \infty)$, reel eksen üzerinde sonlu bir aralık ve $f \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda,

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \quad x < b$$

integrallerine sırasıyla $\alpha > 0$ için α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri denir [12]. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

ve

$$J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$$

dir.

Sarıkaya ve arkadaşları kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $0 \leq a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Eğer f, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ ise kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

Bu tez boyunca $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için $\|g\|_{\infty} = \sup_{t \in [a,b]} |g(t)|$ olsun.

Lemma 3.1.1 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir, $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonkiyon ve $a < b$ ise bu takdirde $\alpha > 0$ olmak üzere

$$J_{a+}^{\alpha} g(b) = J_{b-}^{\alpha} g(a) = \frac{1}{2}\left[J_{a+}^{\alpha} g(b) + J_{b-}^{\alpha} g(a)\right]$$

eşitliği geçerlidir [11].

Kesirli integraller için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 3.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] &\leq \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Lemma 3.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right] \\ = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left[\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds - \int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s)\,ds\right] f'(t)\,dt \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

eşitliği geçerlidir [11].

Teorem 3.1.3 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha} g(b) + J_{b^-}^{\alpha} g(a)\right] - \left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right| \\ \leq &\frac{(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Teorem 3.1.4 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha}g(b)+J_{b^-}^{\alpha}g(a)\right]-\left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right|\\ \leq\ &\frac{2(b-a)^{\alpha+1}\|g\|_{\infty}}{(b-a)^{1/q}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \qquad (3.1.4)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Lemma 3.1.3 $0<\alpha\leq 1$ ve $0\leq a\leq b$ olmak üzere

$$|a^{\alpha}-b^{\alpha}|\leq(b-a)^{\alpha}$$

eşitsizliği geçerlidir [16, 22].

Teorem 3.1.5 $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $q>1$ ve $\alpha>0$ olmak üzere $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise kesirli integraller için

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[J_{a^+}^{\alpha}g(b)+J_{b^-}^{\alpha}g(a)\right]-\left[J_{a^+}^{\alpha}(fg)(b)+J_{b^-}^{\alpha}(fg)(a)\right]\right|\\ \leq\ &\frac{2^{1/p}\|g\|_{\infty}(b-a)^{\alpha+1}}{(\alpha p+1)^{1/p}\Gamma(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha p}}\right)^{1/p}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{1/q} \qquad (3.1.5)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Set ve arkadaşları aşağıdaki lemmayı kullanarak (2.3.2) eşitsizliğininin sol tarafı ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir.

Lemma 3.1.4 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir fonksiyon, $a<b$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer $f',g\in L[a,b]$ ise kesirli integraller için

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^{\alpha}g(a)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha}g(b)\right]-\left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^{\alpha}(fg)(a)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha}(fg)(b)\right]\\ =\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b k(t)f'(t)\,dt \qquad (3.1.6)\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$k(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}g(s)\,ds, & t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]\\ \displaystyle\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}g(s)\,ds, & t\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]\end{cases}$$

dir [20].

Teorem 3.1.6 $f : I \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} g(b)\right] \right. \\ &\left. - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} (fg)(b)\right] \right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \left(|f'(a)| + |f'(b)|\right) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Teorem 3.1.7 $f : I \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $q \geq 1$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} g(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} g(b)\right] \right. \\ &\left. - \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} (fg)(a) + J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} (fg)(b)\right] \right| \\ \leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\ & \times \left\{ \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} \left[(\alpha+3)|f'(a)|^q + (\alpha+1)|f'(b)|^q\right]^{1/q} \right. \\ & \left. + \|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \left[(\alpha+1)|f'(a)|^q + (\alpha+3)|f'(b)|^q\right]^{1/q} \right\} \\ \leq\ & \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g\|_{[a,b],\infty}}{2^{\alpha+1+\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)^{\frac{1}{q}}\Gamma(\alpha+1)} \\ & \times \left\{ \left((\alpha+3)|f'(a)|^q + (\alpha+1)|f'(b)|^q\right)^{1/q} \right. \\ & \left. + \left((\alpha+1)|f'(a)|^q + (\alpha+3)|f'(b)|^q\right)^{1/q} \right\} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Teorem 3.1.8 $f : I \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}g\left(a\right)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}g\left(b\right)\right]\right.\\
&\left.-\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}}\left(fg\right)\left(a\right)+J^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}}\left(fg\right)\left(b\right)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{\left\|g\right\|_{\infty}\left(b-a\right)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1+\frac{2}{q}}\left(\alpha p+1\right)^{\frac{1}{p}}\Gamma\left(\alpha+1\right)} \qquad (3.1.9)\\
&\times\left[\left(3\left|f'\left(a\right)\right|^{q}+\left|f'\left(b\right)\right|^{q}\right)^{1/q}+\left(\left|f'\left(a\right)\right|^{q}+3\left|f'\left(b\right)\right|^{q}\right)^{1/q}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

3.2 Konveks Fonksiyonların Çarpımı için Hermite–Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Chen, iki konveks fonksiyonun çarpımı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri aşağıdaki gibi elde etmiştir.

Teorem 3.2.1 f ve g reel değerli, negatif olmayan, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyonlar ve $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^{+}}f(b)g(b)+J^{\alpha}_{b^{-}}f(a)g(a)\right]\\
\leq\;&\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}-\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)M(a,b)+\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}N(a,b) \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$M(a,b):=f(a)g(a)+f(b)g(b)\quad ve\quad N(a,b):=f(a)g(b)+f(b)g(a) \qquad (3.2.2)$$

şeklindedir [6].

Teorem 3.2.2 f ve g reel değerli, negatif olmayan, $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyonlar ve $\alpha\in\mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
\leq\;&\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{a^{+}}f(b)g(b)+J^{\alpha}_{b^{-}}f(a)g(a)\right] \qquad (3.2.3)\\
&+M(a,b)\frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+N(a,b)\left(\frac{\alpha}{\alpha+2}-\frac{\alpha}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ (3.2.2)' deki gibidir [6].

Chen ve Wu farklı iki konveks fonksiyonun çarpımı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.3 $a < b$, $a, b \in [0, \infty)$ olmak üzere $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ tanımlı fonksiyonlar ve f, $g \in L[a, b]$ olsun. Ayrıca $[a, b]$ üzerinde f konveks ve $s \in (0, 1]$ için g, s-konveks olsun. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve $M(a, b)$ ile $N(a, b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)g(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)\right] \\ \leq\ & \left(\frac{1}{\alpha+s+1} + B(\alpha, s+2)\right) M(a, b) \\ & + \left(B(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)}\right) N(a, b) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

İspat. f ve g' nin tanımlarından, $\eta \in [0, 1]$ için

$$f(\eta a + (1-\eta)b) \leq \eta f(a) + (1-\eta) f(b) \tag{3.2.5}$$

ve

$$g(\eta a + (1-\eta)b) \leq \eta^s g(a) + (1-\eta)^s g(b) \tag{3.2.6}$$

yazılır. Burada her bir terimin negatif olmadığı gözönüne alınarak (3.2.5) ve (3.2.6) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa $\eta \in [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned} & f(\eta a + (1-\eta)b) g(\eta a + (1-\eta)b) \\ & \leq \eta^{s+1} f(a)g(a) + (1-\eta)^{s+1} f(b)g(b) + \eta(1-\eta)^s f(a)g(b) + (1-\eta)\eta^s f(b)g(a) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & f((1-\eta)a + \eta b) g((1-\eta)a + \eta b) \\ & \leq (1-\eta)^{s+1} f(a)g(a) + \eta^{s+1} f(b)g(b) + (1-\eta)\eta^s f(a)g(b) + \eta(1-\eta)^s f(b)g(a) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

yazılır. (3.2.7) ve (3.2.8) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & f(\eta a + (1-\eta)b) g(\eta a + (1-\eta)b) + f((1-\eta)a + \eta b) g((1-\eta)a + \eta b) \\ & \quad \leq \left\{\eta^{s+1} + (1-\eta)^{s+1}\right\} M(a, b) + \left\{\eta(1-\eta)^s + (1-\eta)\eta^s\right\} N(a, b) \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. (3.2.9) eşitsizliğinin her iki tarafı $\eta^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ üzerinde η' ye göre integre edilirse

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \eta^{\alpha-1} f(\eta a+(1-\eta)b) g(\eta a+(1-\eta)b) d\eta \\
& +\int_0^1 \eta^{\alpha-1} f((1-\eta)a+\eta b) g((1-\eta)a+\eta b) d\eta \\
= & \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)g(u)\frac{du}{a-b}+\int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)g(v)\frac{dv}{b-a} \\
= & \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)g(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)\right] \\
\leq & M(a,b)\int_0^1 \eta^{\alpha-1}(\eta^{s+1}+(1-\eta)^{s+1})d\eta \\
& +N(a,b)\int_0^1 \eta^{\alpha-1}(\eta(1-\eta)^s+(1-\eta)\eta^s)d\eta \\
= & \left(\frac{1}{\alpha+s+1}+B(\alpha,s+2)\right)M(a,b) \\
& +\left(B(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)}\right)N(a,b)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)g(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)\right] \\
\leq & \left(\frac{1}{\alpha+s+1}+B(\alpha,s+2)\right)M(a,b) \\
& +\left(B(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)}\right)N(a,b)
\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4 $a<b$, $a,b\in[0,\infty)$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ tanımlı fonksiyonlar ve f, g, $fg\in L[a,b]$ olsun. Ayrıca f ve g, $[a,b]$ üzerinde sırasıyla s_1, $s_2\in(0,1]$ için s_1-konveks ve s_2-konveks fonksiyonlar olsun. Bu taktirde $\alpha\in\mathbb{R}^+$ ve $M(a,b)$ ile $N(a,b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)g(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)\right] \\
\leq & \left\{\frac{1}{\alpha+s_1+s_2}+B(\alpha,s_1+s_2+1)\right\}M(a,b) \\
& +\left\{B(\alpha+s_1,s_2+1)+B(\alpha+s_2,s_1+1)\right\}N(a,b) \qquad (3.2.10)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

İspat. f ve g' nin tanımlarından, $\eta \in [0,1]$ için

$$f(\eta a+(1-\eta)b) \leq \eta^{s_1} f(a)+(1-\eta)^{s_1} f(b) \tag{3.2.11}$$

ve

$$g(\eta a+(1-\eta)b) \leq \eta^{s_2} g(a)+(1-\eta)^{s_2} g(b) \tag{3.2.12}$$

yazılır. Burada her bir terimin negatif olmadığı gözönüne alınarak (3.2.11) ve (3.2.12) taraf tarafa çarpılırsa $\eta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} & f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b) \\ \leq\ & \eta^{s_1+s_2} f(a)g(a)+(1-\eta)^{s_1+s_2} f(b)g(b) \\ & +\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2} f(a)g(b)+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2} f(b)g(a) \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b) \\ \leq\ & (1-\eta)^{s_1+s_2} f(a)g(a)+\eta^{s_1+s_2} f(b)g(b) \\ & +(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2} f(a)g(b)+\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2} f(b)g(a) \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

yazılır. (3.2.13) ve (3.2.14) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)+f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b) \\ \leq\ & \left(\eta^{s_1+s_2}+(1-\eta)^{s_1+s_2}\right)[f(a)g(a)+f(b)g(b)] \\ & +(\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2}+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2})[f(a)g(b)+f(b)g(a)] \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

elde edilir. (3.2.15) eşitsizliğinin her iki tarafı $\eta^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ üzerinde η' ye göre integre edilirse

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \eta^{\alpha-1} f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)d\eta \\ & +\int_0^1 \eta^{\alpha-1} f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b)d\eta \\ =\ & \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)g(u)\frac{du}{a-b}+\int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)g(v)\frac{dv}{b-a} \\ =\ & \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}\left[J_{a+}^\alpha f(b)g(b)+J_{b-}^\alpha f(a)g(a)\right] \\ \leq\ & [f(a)g(a)+f(b)g(b)]\int_0^1 \eta^{\alpha-1}\left(\eta^{s_1+s_2}+(1-\eta)^{s_1+s_2}\right)d\eta \\ & +[f(a)g(b)+f(b)g(a)]\int_0^1 \eta^{\alpha-1}(\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2}+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2})d\eta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \left(\frac{1}{\alpha+s_1+s_2}+B(\alpha,s_1+s_2+1)\right)M(a,b)\\
& +\left(B(\alpha+s_1,s_2+1)+B(\alpha+s_2,s_1+1)N(a,b)\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. Buradan

$$
\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)g(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)g(a)\right]\\
\leq & \left(\frac{1}{\alpha+s_1+s_2}+B(\alpha,s_1+s_2+1)\right)M(a,b)\\
& +\left(B(\alpha+s_1,s_2+1)+B(\alpha+s_2,s_1+1)N(a,b)\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.5 $a<b$, $a,b\in[0,\infty)$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ tanımlı fonksiyonlar ve $fg\in L[a,b]$ olsun. Ayrıca $[a,b]$ üzerinde f konveks ve $s\in(0,1]$ için g, s-konveks olsun. $\alpha\in\mathbb{R}^+$ ve $M(a,b)$ ile $N(a,b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& 2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
\leq & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)g(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)g(a)\right]\\
& +\frac{\alpha}{2}M(a,b)\left\{B(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)}\right\}\\
& +\frac{\alpha}{2}N(a,b)\left\{B(\alpha,s+2)+\frac{1}{\alpha+s+1}\right\}, \qquad (3.2.16)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

İspat.

$$
\frac{a+b}{2}=\frac{(1-\eta)a+\eta b}{2}+\frac{\eta a+(1-\eta)b}{2}
$$

yazılabilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
= & f\left(\frac{\eta a+(1-\eta)b}{2}+\frac{(1-\eta)a+\eta b}{2}\right)g\left(\frac{\eta a+(1-\eta)b}{2}+\frac{(1-\eta)a+\eta b}{2}\right)\\
\leq & \frac{1}{2^{s+1}}\left[f(\eta a+(1-\eta)b)+f((1-\eta)a+\eta b)\right]\left[g(\eta a+(1-\eta)b)+g((1-\eta)a+\eta b)\right]\\
= & \frac{1}{2^{s+1}}\Big[f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)+f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b)\\
& +f(\eta a+(1-\eta)b)g((1-\eta)a+\eta b)+f((1-\eta)a+\eta b)g(\eta a+(1-\eta)b)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2^{s+1}}\left[f(\eta a+(1-\eta)b)g((1-\eta)a+\eta b)+f((1-\eta)a+\eta b)g(\eta a+(1-\eta)b)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2^{s+1}}\Bigg\{[\eta f(a)+(1-\eta)f(b)]\left[(1-\eta)^s g(a)+\eta^s g(b)\right] \\
&\quad +[(1-\eta)f(a)+\eta f(b)]\left[\eta^s g(a)+(1-\eta)^s g(b)\right]\Bigg\} \\
&= \frac{1}{2^{s+1}}\left[f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)+f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2^{s+1}}\Big[\left(\eta(1-\eta)^s+(1-\eta)\eta^s\right)M(a,b)+\left((1-\eta)^{s+1}+\eta^{s+1}\right)N(a,b)\Big] \qquad (3.2.17)
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada (3.2.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $\eta^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ üzerinde η' ye göre integre edilirse

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \eta^{\alpha-1}d\eta \\
\le\; & \frac{1}{2^{s+1}}\left[\int_0^1 \eta^{\alpha-1}f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)d\eta\right. \\
& \left.+\int_0^1 \eta^{\alpha-1}f((1-\eta)a+\eta b)+g((1-\eta)a+\eta b)d\eta\right] \\
& +\frac{1}{2^{s+1}}\left\{M(a,b)\int_0^1 \eta^{\alpha-1}[\eta(1-\eta)^s+(1-\eta)\eta^s]d\eta\right. \\
& \left.+N(a,b)\int_0^1 \eta^{\alpha-1}[(1-\eta)^{s+1}+\eta^{s+1}]d\eta\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
\le\; & \frac{1}{2^{s+1}}\left[\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha}J_{a^+}^{\alpha}f(b)g(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)g(a)\right] \\
& +\frac{1}{2^{s+1}}\left\{M(a,b)\int_0^1 \eta^{\alpha-1}[\eta(1-\eta)^s+(1-\eta)\eta^s]d\eta\right. \\
& \left.+N(a,b)\int_0^1 \eta^{\alpha-1}[(1-\eta)^{s+1}+\eta^{s+1}]d\eta\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
\int_0^1 \eta^{\alpha-1}[\eta(1-\eta)^s+(1-\eta)\eta^s]d\eta = B(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)}
$$

ve

$$
\int_0^1 \eta^{\alpha-1}[(1-\eta)^{s+1}+\eta^{s+1}]d\eta = B(\alpha,s+2)+\frac{1}{\alpha+s+1}
$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned}
2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq\ & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b)g(b)+J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)\right] \\
& +\frac{1}{2}M(a,b)\left(B(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)}\right) \\
& +\frac{1}{2}N(a,b)\left(B(\alpha,s+2)+\frac{1}{\alpha+s+1}\right)
\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

4. BULGULAR

Bu bölümde ilk olarak Riemann-Liouville kesirli integralin bir genelleştirmesi olan ve Raina tarafından tanımlanan, genelleştirilmiş kesirli integral operatörü tanıtılarak, bu operatör yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizliklerin yeni genelleştirmeleri verilecektir.

4.1 Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatör

$\sigma(k)(k \in \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere,

$$\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}(x) = \mathcal{F}^{\sigma(0),\sigma(1),\ldots}_{\rho,\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k + \lambda)} x^k \quad (\rho, \lambda > 0; x \in \mathbb{R}), \tag{4.1.1}$$

şeklinde verilen fonksiyonların yeni bir sınıfı Raina [17] tarafından tanımlanmıştır. Bu fonksiyon yardımıyla, [17]' de Raina ve [2]' de Agarwal ve arkadaşları, $\lambda, \rho > 0$, $w \in \mathbb{R}$ ve $\sigma(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi\right)(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x > a), \tag{4.1.2}$$

$$\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}\varphi\right)(x) = \int_x^b (t-x)^{\lambda-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[w(t-x)^{\rho}]\varphi(t)dt \qquad (x < b), \tag{4.1.3}$$

sol ve sağ taraflı kesirli integral operatörlerini tanımlamışlardır. Burada kolayca anlaşılacağı gibi

$$\mathfrak{M} := \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}] < \infty$$

ise $\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi(x)$ ve $\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}\varphi(x)$, $L(a,b)$ üzerinde sınırlı integral operatörlerdir. Gerçekten,

$$||\varphi||_p := \left(\int_a^b |\varphi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olmak üzere $\varphi \in L(a,b)$ için

$$||\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}\varphi(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda}||\varphi||_1$$

ve

$$||\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}\varphi(x)||_1 \leq \mathfrak{M}(b-a)^{\lambda}||\varphi||_1$$

dir.

Yukarıda tanımı verilen genelleştirilmiş kesirli integral operatörü için, $\sigma(k)$' nın özel seçimlerinde bir çok kesirli integral operatörü elde edilir. Örneğin (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerinde $\lambda = \alpha$, $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ seçilirse α- mertebeli klasik Riemann-Liouville kesirli integrali elde edilir.

Yaldız ve Sarıkaya genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

Teorem 4.1.1 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $0 < a < b$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere kesirli integral operatörleri için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2(b-a)^{\lambda}\,\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[w(b-a)^{\rho}]}\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,a+;w}f(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b-;w}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir [23].

Genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 4.1.2 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon, $0 < a < b$ ve $\alpha > 0$ olsun. $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik ise kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g\right)(b) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g\right)(a)\right] \\
\leq\; & \left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)\right) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)\right)(a)\right] \\
\leq\; & \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[\left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g\right)(b) + \left(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g\right)(a)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [24].

4.2 Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller için Hermite–Hadamard–Fejér Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.2.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a<b$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f', $g\in L[a,b]$ ise kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}g(a)\right] \\
& -\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}(fg)(a)\right] \\
= & \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt \\
& +\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. (4.2.1) eşitliğinin sağ tarafı gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt \\
&\quad +\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt \\
&= I_1+I_2
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

yazılıp I_1 ve I_2 integralleri ayrı ayrı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f(t)dt\Bigg|_a^{\frac{a+b}{2}} \\
&\quad -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(t-a)^{\rho}]g(t)f(t)dt \\
&= \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(t-a)^{\rho}](fg)(t)dt \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}g(a)-\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}(fg)(a)
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left(\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right) f(t)dt\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b} \\
&\quad - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-t)^{\rho}]g(t)f(t)dt \\
&= \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-t)^{\rho}](fg)(t)dt \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}g(b) - \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}(fg)(b)
\end{aligned} \tag{4.2.4}
$$

elde edilir. Burada (4.2.3) ve (4.2.4) eşitlikleri, (4.2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, (4.2.1) eşitliği elde edilir ve böylece istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1 Eğer Lemma 4.2.1' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.2.1) eşitliği (3.1.6) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.2.1 $f : I \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise, $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
&\Bigg| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}g(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}g(a)\right] \\
&\quad - \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}(fg)(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}(fg)(a)\right]\Bigg| \\
&\leq (b-a)^{\alpha+1}||g||_{[a,b],\infty}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)
\end{aligned} \tag{4.2.5}
$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$
\sigma_1(k) := \sigma(k)\frac{1}{2^{\alpha+\rho k+1}(\alpha+\rho k+1)}
$$

dir.

İspat. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan $t \in [a,b]$ için

$$
|f'(t)| = \left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b\right)\right| \leq \frac{b-t}{b-a}|f'(a)| + \frac{t-a}{b-a}|f'(b)|
$$

yazılır. Lemma 4.2.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\Bigg| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}g(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}g(a)\right] \\
&\quad - \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}(fg)(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}(fg)(a)\right]\Bigg|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| \int_a^t (s-a)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}] g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
& + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left| \int_b^t (b-s)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}] g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
\leq\ & \frac{||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\int_a^t (s-a)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} (s-a)^{\rho k} \right) ds \right) \\
& \times \left[(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)| \right] dt \\
& + \frac{||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left| \int_b^t (b-s)^{\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} (b-s)^{\rho k} \right) ds \right| \\
& \times \left[(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)| \right] dt \\
=\ & \frac{||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_a^t (s-a)^{\alpha+\rho k-1} ds \right) \\
& \times \left[(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)| \right] dt \\
& + \frac{||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left| \int_b^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1} ds \right| \\
& \times \left[(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)| \right] dt \\
=\ & \frac{||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{b-a} \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha+\rho k} \left[(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)| \right] dt \right) \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \\
& + \frac{||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{b-a} \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha+\rho k} \left[(b-t)|f'(a)| + (t-a)|f'(b)| \right] dt \right) \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \\
=\ & \frac{||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{b-a} \\
& \times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left[\left(\frac{(\alpha+\rho k+3)(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)} \right) |f'(a)| \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+2)} \right) |f'(b)| \right] \right\} \\
& + \frac{||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{b-a} \\
& \times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left[\left(\frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+2)} \right) |f'(a)| \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{(\alpha+\rho k+3)(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)} \right) |f'(b)| \right] \right\} \\
\leq\ & \frac{||g||_{[a,b],\infty}}{b-a} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+1}(\alpha+\rho k+1)} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right) \right\} \\
=\ & ||g||_{[a,b],\infty} (b-a)^{\alpha+1} \mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha+1}[w(b-a)^{\rho}] (|f'(a)| + |f'(b)|)
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha+\rho k+1} dt = \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)^{\alpha+\rho k+1} dt = \frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+2)}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)^{\alpha+\rho k}(b-t)dt &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t)^{\alpha+\rho k}(t-a)dt \\ &= \frac{(\alpha+\rho k+3)(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)}\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2 Eğer Teorem 4.2.1' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.2.5) eşitsizliği (3.1.7) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.2 $f : I \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a < b$ ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ise, $q \geq 1$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w} g(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w} g(a)\right] \right. \\ &\left. - \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w} (fg)(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w} (fg)(a)\right] \right| \\ \leq\ & ||g||_{[a,b],\infty}(b-a)^{\alpha+1}\left(\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]\right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times\left\{ \left[\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(a)|^q + \mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\left. + \left[\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(a)|^q + \mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \right\}\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\sigma_1(k) := \sigma(k)\frac{1}{(\alpha+\rho k+1)2^{\alpha+\rho k+1}},$$

$$\sigma_2(k) := \sigma(k)\frac{\alpha+\rho k+3}{(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)2^{\alpha+\rho k+2}}$$

ve

$$\sigma_3(k) := \sigma(k)\frac{1}{(\alpha+\rho k+2)2^{\alpha+\rho k+2}}$$

dır.

İspat. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan $t\in[a,b]$ için

$$|f'(t)|^q=\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q\le\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|^q+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|^q$$

yazılır. Lemma 4.2.1, Power-Mean eşitsizliği ve $|f'|^q$' nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}g(a)\right]\right.\\
&\left.-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}(fg)(a)\right]\right|\\
\le\;&\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}]g(s)ds\right||f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right||f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
\le\;&||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha+\rho k-1}ds\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\left|\int_a^t (s-a)^{\alpha+\rho k-1}ds\right||f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\left|\int_b^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right||f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
\le\;&\left((b-a)^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\frac{(b-a)^{\rho k}}{(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k+1)2^{\alpha+\rho k+1}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\\
&\times\left\{\frac{||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k)}\right.\right.\\
&\left.\times\left[(t-a)^{\alpha+\rho k}(b-t)|f'(a)|^q+(t-a)^{\alpha+\rho k+1}|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\frac{||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k)}\right.\\
&\left.\left.\times\left[(b-t)^{\alpha+\rho k+1}|f'(a)|^q+(b-t)^{\alpha+\rho k}(t-a)|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left((b-a)^{\alpha+1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha+1}[w(b-a)^{\rho}]\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left\{\frac{||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k)}\right.\right.\right. \\
&\quad\times\left.\left.\left[\frac{(\alpha+\rho k+3)(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)}|f'(a)|^q+\frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+2)}|f'(b)|^q\right]\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad+\frac{||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k)}\right.\right. \\
&\quad\times\left.\left.\left.\left[\frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+2)}|f'(a)|^q+\frac{(\alpha+\rho k+3)(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)}|f'(b)|^q\right]\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \\
&\leq ||g||_{[a,b],\infty}\left((b-a)^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left((b-a)^{\alpha+1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad\times\left\{\left[\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(a)|^q+\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad+\left.\left[\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(a)|^q+\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}]|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha+\rho k-1}ds\right|dt &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right|dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+1}}{2^{\alpha+\rho k+1}(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k+1)}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha+\rho k}(b-t)dt &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-t)^{\alpha+\rho k}(t-a)dt \\
&= \frac{(\alpha+\rho k+3)(b-a)^{\alpha+\rho k+2}}{2^{\alpha+\rho k+2}(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)}
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.3 Eğer Teorem 4.2.2' de $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse, (4.2.6) eşitsizliği (3.1.8) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.3 $f: I\to\mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f'\in L[a,b]$, $a<b$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ise, $q>1$ ve

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}g(a)\right]\right. \\
&\left.-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\ &\frac{(b-a)^{\alpha+1}||g||_{[a,b]\infty}}{2^{\frac{3}{q}}}(\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}])^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left\{[3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}+[|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}\right\}
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\sigma_1(k):=\sigma(k)\frac{1}{2^{\alpha+\rho k+\frac{1}{p}}(\alpha p+\rho kp+1)^{\frac{1}{p}}}$$

dir.

İspat. Lemma 4.2.1, Hölder eşitsizliği ve $|f'|^{q}$' nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}g(a)\right]\right. \\
&\left.-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,\frac{a+b}{2}-;w}(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\ &\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt\right| \\
\leq\ &\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right||f'(t)|dt \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right||f'(t)|dt \\
=\ &\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t(s-a)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k(s-a)^{\rho k}}{\Gamma(\alpha+\rho k)}g(s)ds\right||f'(t)|dt \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_b^t(b-s)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k(b-s)^{\rho k}}{\Gamma(\alpha+\rho k)}g(s)ds\right||f'(t)|dt \\
=\ &\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\int_a^t(s-a)^{\alpha+\rho k-1}g(s)ds\right||f'(t)|dt \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\int_b^t(b-s)^{\alpha+\rho k-1}g(s)ds\right||f'(t)|dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left| \int_a^t (s-a)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds \right| \right) |f'(t)| dt \\
&\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left| \int_b^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds \right| \right) |f'(t)| dt \\
&\leq ||g||_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| \int_a^t (s-a)^{\alpha+\rho k-1} ds \right| |f'(t)| dt \right) \\
&\quad + ||g||_{[\frac{a+b}{2},b],\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| \int_b^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1} ds \right| |f'(t)| dt \right) \\
&\leq ||g||_{[a,b],\infty} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| \int_a^t (s-a)^{\alpha+\rho k-1} ds \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| \int_b^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1} ds \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
&= ||g||_{[a,b],\infty} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| \frac{(s-a)^{\alpha+\rho k}}{(\alpha+\rho k)} \Big|_a^t \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| \frac{(b-s)^{\alpha+\rho k}}{(\alpha+\rho k)} \Big|_b^t \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
&= ||g||_{[a,b],\infty} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{(t-a)^{(\alpha+\rho k)p}}{(\alpha+\rho k)^p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{(b-t)^{(\alpha+\rho k)p}}{(\alpha+\rho k)^p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
&= ||g||_{[a,b],\infty} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left(\frac{(t-a)^{\alpha p+\rho kp+1}}{\alpha p+\rho kp+1} \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left(-\frac{(b-t)^{\alpha p+\rho kp+1}}{\alpha p+\rho kp+1} \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
&= ||g||_{[a,b],\infty} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left(\frac{(b-a)^{\alpha p+\rho kp+1}}{2^{\alpha p+\rho kp+1}(\alpha p+\rho kp+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left(\frac{(b-a)^{\alpha p+\rho kp+1}}{2^{\alpha p+\rho kp+1}(\alpha p+\rho kp+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
&= ||g||_{[a,b],\infty} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left(\frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+\frac{1}{p}}}{2^{\alpha+\rho k+\frac{1}{p}}(\alpha p+\rho kp+1)^{\frac{1}{p}}} \right) \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \left(\frac{(b-a)^{\alpha+\rho k+\frac{1}{p}}}{2^{\alpha+\rho k+\frac{1}{p}}(\alpha p+\rho kp+1)^{\frac{1}{p}}} \right) \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \\
&= ||g||_{[a,b],\infty} (b-a)^{\alpha+1} \mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha+1}[|w|(b-a)^{\rho}] \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[(b-t)|f'(a)|^q + (t-a)|f'(b)|^q\right] dt \\ &= (b-a)\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |f'(t)|^q dt &\leq \frac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left[(b-t)|f'(a)|^q + (t-a)|f'(b)|^q\right] dt \\ &= (b-a)\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8}.\end{aligned}$$

olduğu kullanılmıştır. Böylece (4.2.7) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Sonuç 4.2.4 Eğer Teorem 4.2.3' da $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.2.7) eşitsizliği (3.1.9) eşitsizliğine indirgenir.

Lemma 4.2.2 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir, $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonkiyon ve $a < b$ ise bu takdirde $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b) = \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. g, $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $g\left(a+b-x\right) = g\left(x\right)$ dir. Buradan, aşağıdaki integralde $x = tb + (1-t)a$ değişken değişikliği yapılarak

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b) &= \int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-x)^{\rho}]g(x)dx \\ &= \int_a^b (t-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(t-a)^{\rho}]g(a+b-t)dt \\ &= \int_a^b (t-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(t-a)^{\rho}]g(t)dt \\ &= \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.2.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L\left[a,b\right]$ olsun. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\right]\\
=&\int_a^b\left[\int_a^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds-\int_t^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right]f'(t)dt
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\int_a^b\left[\int_a^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds-\int_t^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right]f'(t)dt$$

integralini hesaplamak yeterlidir. Bunun için

$$\begin{aligned}
K &= \int_a^b\left[\int_a^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right.\\
&\quad\left.-\int_t^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right]f'(t)dt\\
&= \int_a^b\left(\int_a^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt\\
&\quad+\int_a^b\left(-\int_t^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f'(t)dt\\
&= K_1+K_2
\end{aligned}$$

olarak yazalım. Buradan Lemma 4.2.2 kullanılarak kısmi integrasyon ile

$$\begin{aligned}
&K_1\\
=&\left(\int_a^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right)f(t)\Big|_a^b-\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-t)^{\rho}]g(t)f(t)dt\\
=&\left(\int_a^b(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right)f(b)-\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-t)^{\rho}](fg)(t)dt\\
=&f(b)\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)-\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)\\
=&\frac{f(b)}{2}\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)
\end{aligned}$$

bulunur ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&K_2\\
=&\left(-\int_t^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f(t)\Big|_a^b-\int_a^b(t-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(t-a)^{\rho}]g(t)f(t)dt\\
=&\left(\int_a^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right)f(a)-\int_a^b(t-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(t-a)^{\rho}](fg)(t)dt\\
=&f(a)\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)-\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\\
=&\frac{f(a)}{2}\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$= \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\right]$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.4 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\right]\right| \\ \leq\ & ||g||_{\infty}(b-a)^{\alpha+1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}[|w|(b-a)^{\rho}]\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right] \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\sigma_1(k) := \sigma(k)\frac{1}{(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha+\rho k}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 4.2.3' den

$$\begin{aligned} &\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\right]\right| \\ \leq\ & \int_a^b\left|\int_a^t(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds-\int_t^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right||f'(t)|dt \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

yazılır. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan $t \in [a,b]$ olmak üzere

$$|f'(t)| = \left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right| \leq \frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)| \tag{4.2.10}$$

dir ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} \int_t^b(s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds &= \int_a^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(a+b-s)ds \\ &= \int_a^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds \end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^t (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds - \int_t^b (s-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}]g(s)ds\right| \\
= &\left|\int_t^{a+b-t} (b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right| \\
\leq &\begin{cases} \int_t^{a+b-t}\left|(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds, & t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right] \\ \\ \int_{a+b-t}^{t}\left|(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds, & t\in\left[\frac{a+b}{2},b\right] \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.2.11}
$$

olur. Böylece (4.2.9), (4.2.10) ve (4.2.11)' den

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\ &\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_t^{a+b-t}\left|(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds\right)\left(\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|\right)dt \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_{a+b-t}^{t}\left|(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds\right)\left(\frac{b-t}{b-a}|f'(a)|+\frac{t-a}{b-a}|f'(b)|\right)dt \\
\leq\ &\frac{||g||_{\infty}}{b-a}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)}(b-s)^{\rho k}ds\right)\right)\right. \\
&\times\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(\int_{a+b-t}^{t}(b-s)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)}(b-s)^{\rho k}ds\right)\right) \\
&\left.\times\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt\right\} \\
=\ &\frac{||g||_{\infty}}{b-a}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)}\right. \\
&\times\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{a+b-t}^{t}(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)} \\
&\left.\times\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt\right\} \\
=\ &\frac{||g||_{\infty}}{b-a}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha+1)}\left[(b-t)^{\alpha+\rho k}-(t-a)^{\alpha+\rho k}\right]\right. \\
&\times\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt \\
&+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha+1)}\left[(t-a)^{\alpha+\rho k}-(b-t)^{\alpha+\rho k}\right] \\
&\left.\times\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{||g||_\infty}{b-a}\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha+\rho k}-(t-a)^{\alpha+\rho k}\right]\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt\right) \\
& \times\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha+1)} \\
& +\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha+\rho k}-(b-t)^{\alpha+\rho k}\right]\left[(b-t)|f'(a)|+(t-a)|f'(b)|\right]dt\right) \\
& \times\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha+1)}\Bigg\} \qquad (4.2.12)
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada

$$
\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha+\rho k}-(t-a)^{\alpha+\rho k}\right](b-t)dt \qquad (4.2.13) \\
= \quad & \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha+\rho k}-(b-t)^{\alpha+\rho k}\right](t-a)dt \\
= \quad & \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+\rho k+2}\frac{1}{(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)}\left[(2^{\alpha+\rho k+2}-1)(\alpha+\rho k+1)-(\alpha+\rho k+3)\right]
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[(b-t)^{\alpha+\rho k}-(t-a)^{\alpha+\rho k}\right](t-a)dt \qquad (4.2.14) \\
= \quad & \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left[(t-a)^{\alpha+\rho k}-(b-t)^{\alpha+\rho k}\right](b-t)dt \\
= \quad & \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+\rho k+2}\frac{1}{(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)}\left[(2^{\alpha+\rho k+2})-2(\alpha+\rho k+2)\right]
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülebilir. (4.2.13) ve (4.2.14), (4.2.12)' de yerine yazılırsa istenilen eşitsizlik elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.2.5 Teorem 4.2.4' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.2.8) eşitsizliği, Teorem 3.1.3' deki (3.1.3) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.5 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ olmak üzere kesirli integraller için

$$
\begin{aligned}
& \left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\right]\right| \\
\leq \quad & \frac{2||g||_\infty(b-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}[|w|(b-a)^{\rho}]\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\sigma_1(k) := \sigma(k)\frac{1}{(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha+\rho k}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 4.2.3, Hölder eşitsizliği, (4.2.11) eşitsizliği ve $|f'|^q$' nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left|\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}g(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}g(a)\right]-\left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w}(fg)(b)+\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w}(fg)(a)\right]\right| \\
\leq\; & \left(\int_a^b\left|\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left(\int_a^b\left|\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)ds\right||f'(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\; & \left[\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds\right)dt\right. \\
& \left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(\int_{a+b-t}^t\left|(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left[\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_t^{a+b-t}\left|(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds\right)|f'(t)|^q dt\right. \\
& \left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(\int_{a+b-t}^t\left|(b-s)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}]g(s)\right|ds\right)|f'(t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\; & \frac{||g||_\infty}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left\{\int_a^{\frac{a+b}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)}\left(\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)dt\right. \qquad (4.2.16) \\
& \left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)}\left(\int_{a+b-t}^t(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)dt\right\}^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)}\left(\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)\left[(b-t)|f'(a)|^q+(t-a)|f'(b)|^q\right]dt\right. \\
& \left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\rho k+\alpha)}\left(\int_{a+b-t}^t(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)\left[(b-t)|f'(a)|^q+(t-a)|f'(b)|^q\right]dt\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_t^{a+b-t}(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(\int_{a+b-t}^t(b-s)^{\alpha+\rho k-1}ds\right)dt \\
=\; & \frac{2(b-a)^{\alpha+\rho k+1}}{(\alpha+\rho k)(\alpha+\rho k+1)}\left[1-\frac{1}{2^{\alpha+\rho k}}\right] \qquad (4.2.17)
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.17), (4.2.16)' de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.6 Teorem 4.2.5' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.2.15) eşitsizliği, Teorem 3.1.4' deki (3.1.4) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.6 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I°' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\frac{a+b}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon ise $\alpha > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ olmak üzere kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w} g(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w} g(a) \right] - \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w} (fg)(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w} (fg)(a) \right] \right| \\
\leq \; & ||g||_{\infty} (b-a)^{\alpha+1} \mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}[|w|(b-a)^{\rho}] \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.18)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\sigma_1(k) := \sigma(k) \frac{1}{\alpha+\rho k} \left[\frac{2}{(\alpha+\rho k)p+1} \left(1 - \frac{1}{2^{(\alpha+\rho k)p}} \right) \right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 4.2.3, Hölder eşitsizliği, (4.2.11) eşitsizliği ve $|f'|^q$' nin konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w} g(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w} g(a) \right] - \left[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w} (fg)(b) + \mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w} (fg)(a) \right] \right| \\
= \; & \left| \int_a^b \left(\int_a^t (b-s)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}] g(s) ds - \int_t^b (s-a)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}] g(s) ds \right) f'(t) dt \right| \\
\leq \; & \int_a^b \left| \int_a^t (b-s)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-s)^{\rho}] g(s) ds - \int_t^b (s-a)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(s-a)^{\rho}] g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
= \; & \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \int_a^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) w^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \int_t^b (s-a)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
\leq \; & \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) |w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left| \int_a^t (b-s)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds - \int_t^b (s-a)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
= \; & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) |w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \int_a^b \left| \int_t^{a+b-t} (b-s)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds \right| |f'(t)| dt \\
\leq \; & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k) |w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k)} \left(\int_a^b \left| \int_t^{a+b-t} (b-s)^{\alpha+\rho k-1} g(s) ds \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ ||g||_\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \\
&\times \left\{ \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[(b-t)^{\alpha+\rho k} - (t-a)^{\alpha+\rho k} \right]^p dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left[(t-a)^{\alpha+\rho k} - (b-t)^{\alpha+\rho k} \right]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\times \left. \left(\int_a^b \left(\frac{b-t}{b-a} |f'(a)|^q + \frac{t-a}{b-a} |f'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \ ||g||_\infty (b-a)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)|w|^k (b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\alpha+\rho k+1)} \\
&\times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\alpha+\rho k} - t^{\alpha+\rho k} \right]^p dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{\alpha+\rho k} - (1-t)^{\alpha+\rho k} \right]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\times \left. \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&\leq \ ||g||_\infty (b-a)^{\alpha+1} \left(\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}[|w|(b-a)^\rho] \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{1}{2^{(\alpha+\rho k)p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

yazılır ki burada

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{(\alpha+\rho k)p} - t^{(\alpha+\rho k)p} \right] dt &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{(\alpha+\rho k)p} - (1-t)^{(\alpha+\rho k)p} \right] dt \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+\rho k)p+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+\rho k)p+1}}{(\alpha+\rho k)p+1}
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülür. Daha sonra $A \geq B \geq 0$ ve $q \geq 1$ iken

$$
(A-B)^q \leq A^q - B^q,
$$

olduğundan $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için

$$
[(1-t)^{\alpha+\rho k} - t^{\alpha+\rho k}]^p \leq (1-t)^{(\alpha+\rho)p} - t^{(\alpha+\rho)p}
$$

ve $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$
[t^{\alpha+\rho k} - (1-t)^{\alpha+\rho k}]^p \leq t^{(\alpha+\rho)p} - (1-t)^{(\alpha+\rho)p}
$$

olduğu gözönüne alınmalıdır. Böylece (4.2.18) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.7 Teorem 4.2.6' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.2.18) eşitsizliği, Teorem 3.1.5' deki (3.1.5) eşitsizliğine indirgenir.

4.3 Genelleştirilmiş Kesirli İntegralleri İçeren Farklı Konveks Fonksiyonların Çarpımı için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk olarak (4.1.2) ve (4.1.3)' daki kesirli integral operatörlerini içeren konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik verilecektir.

Teorem 4.3.1 $a < b$, $a, b \in [0, \infty)$ olmak üzere $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ tanımlı fonksiyonlar ve f, $g \in L[a, b]$ olsun. Ayrıca $[a, b]$ üzerinde f konveks ve $s \in (0, 1]$ için g, s-konveks olsun. $\alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$ ve $M(a, b)$ ile $N(a, b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^\alpha}\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w})(fg(b)) + (\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w})(fg(a))\right] \\
&\quad \le M(a,b)\,\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}\left[w(b-a)^\rho\right] + N(a,b)\,\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha}\left[w(b-a)^\rho\right]
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\sigma_1(k) := \sigma(k)\left(\frac{1}{\alpha+\rho k+s+1} + B(\alpha+\rho k, s+2)\right)$$

ve

$$\sigma_2(k) := \sigma(k)\left(B(\alpha+\rho k+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+\rho k+s)(\alpha+\rho k+s+1)}\right)$$

dır.

İspat. f ve g' nin tanımlarından, $\eta \in [0, 1]$ için

$$f(\eta a + (1-\eta)b) \le \eta f(a) + (1-\eta) f(b) \tag{4.3.2}$$

ve

$$g(\eta a + (1-\eta)b) \le \eta^s g(a) + (1-\eta)^s g(b) \tag{4.3.3}$$

yazılır. Burada her bir terimin negatif olmadığı gözönüne alınarak (4.3.2) ve (4.3.3) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa $\eta \in [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned}
&f(\eta a + (1-\eta)b)g(\eta a + (1-\eta)b) \\
&\le \eta^{s+1} f(a)g(a) + (1-\eta)^{s+1} f(b)g(b) + \eta(1-\eta)^s f(a)g(b) + (1-\eta)\eta^s f(b)g(a)
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}&f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b)\\&\leq(1-\eta)^{s+1}f(a)g(a)+\eta^{s+1}f(b)g(b)+(1-\eta)\eta^{s}f(a)g(b)+\eta(1-\eta)^{s}f(b)g(a)\end{aligned}\tag{4.3.5}$$

yazılır. (4.3.4) ve (4.3.5) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}&f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)+f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b)\\&\quad\leq\left\{\eta^{s+1}+(1-\eta)^{s+1}\right\}M(a,b)+\left\{\eta(1-\eta)^{s}+(1-\eta)\eta^{s}\right\}N(a,b),\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

elde edilir. (4.3.6) eşitsizliğinin her iki tarafı $\eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]$ ile çarpılıp $[0,1]$ üzerinde η' ye göre integre edilirse

$$\mathcal{L}_1(\alpha,\sigma,\rho,w)+\mathcal{L}_2(\alpha,\sigma,\rho,w)\leq\mathcal{R}_1(\alpha,\sigma,\rho,w,s)+\mathcal{R}_2(\alpha,\sigma,\rho,w,s)\tag{4.3.7}$$

elde edilir ki burada

$$\mathcal{L}_1(\alpha,\sigma,\rho,w):=\int_0^1\eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)\,d\eta,$$

$$\mathcal{L}_2(\alpha,\sigma,\rho,w):=\int_0^1\eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b)\,d\eta,$$

$$\mathcal{R}_1(\alpha,\sigma,\rho,w,s):=M(a,b)\int_0^1\eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]\left\{\eta^{s+1}+(1-\eta)^{s+1}\right\}d\eta,$$

$$\mathcal{R}_2(\alpha,\sigma,\rho,w,s):=N(a,b)\int_0^1\eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]\left\{\eta(1-\eta)^{s}+(1-\eta)\eta^{s}\right\}d\eta$$

şeklindedir. $\mathcal{L}_1(\alpha,\sigma,\rho,w)$ ve $\mathcal{L}_2(\alpha,\sigma,\rho,w)$' de sırasıyla $u=\eta a+(1-\eta)b$ ve $v=(1-\eta)a+\eta b$ değişken değişiklikleri yapılarak, (4.1.2) ve (4.1.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_1(\alpha,\sigma,\rho,w)+\mathcal{L}_2(\alpha,\sigma,\rho,w)\\&=\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\int_a^b(b-u)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}\left[w(b-u)^{\rho}\right]f(u)g(u)\,du\\&\quad+\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\int_a^b(v-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}\left[w(v-a)^{\rho}\right]f(v)g(v)\,dv\\&=\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w})(fg(b))+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w})(fg(a))\right\}\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

elde edilir. (4.1.1) kullanılarak

$$\mathcal{R}_1(\alpha,\sigma,\rho,w,s)=M(a,b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\int_0^1\eta^{\alpha+\rho k-1}\left\{\eta^{s+1}+(1-\eta)^{s+1}\right\}d\eta$$

yazılır. Tanım 2.5.2' den

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \eta^{\alpha+\rho k-1}\left\{\eta^{s+1}+(1-\eta)^{s+1}\right\} d\eta \\
&\quad= \frac{1}{\alpha+\rho k+s+1}+\int_0^1 \eta^{\alpha+\rho k-1}(1-\eta)^{s+1}\, d\eta \\
&\quad= \frac{1}{\alpha+\rho k+s+1}+B(\alpha+\rho k, s+2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.1.1)' e göre

$$\mathcal{R}_1(\alpha,\sigma,\rho,w,s)=M(a,b)\,\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}\left[w(b-a)^{\rho}\right] \tag{4.3.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{R}_2(\alpha,\sigma,\rho,w,s)=N(a,b)\,\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha}\left[w(b-a)^{\rho}\right] \tag{4.3.10}$$

bulunur. (4.3.7)' de (4.3.8), (4.3.9) ve (4.3.10) yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1 Teorem 4.3.1'de $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ seçilirse, (4.3.1) eşitsizliği (3.2.4) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.3.2 $a<b$, $a,b\in[0,\infty)$ olmak üzere $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ tanımlı fonksiyonlar ve f, g, $fg\in L[a,b]$ olsun. Ayrıca f ve g, $[a,b]$ üzerinde sırasıyla s_1, $s_2\in(0,1]$ için s_1-konveks ve s_2-konveks fonksiyonlar olsun. Bu taktirde $\alpha,\rho\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}_0^+$ ve $M(a,b)$ ile $N(a,b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w})(fg(b))+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w})(fg(a))\right\} \\
&\quad\le M(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_3}_{\rho,\alpha}\left[w(b-a)^{\rho}\right]+N(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_4}_{\rho,\alpha}\left[w(b-a)^{\rho}\right],
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada

$$\sigma_3(k):=\sigma(k)\left\{\frac{1}{\alpha+\rho k+s_1+s_2}+B(\alpha+\rho k, s_1+s_2+1)\right\}$$

ve

$$\sigma_4(k):=\sigma(k)\left\{B(\alpha+\rho k+s_1, s_2+1)+B(\alpha+\rho k+s_2, s_1+1)\right\}$$

şeklindedir.

İspat. f ve g' nin tanımlarından, $\eta \in [0,1]$ için

$$f(\eta a+(1-\eta)b) \leq \eta^{s_1} f(a)+(1-\eta)^{s_1} f(b) \tag{4.3.12}$$

ve

$$g(\eta a+(1-\eta)b) \leq \eta^{s_2} g(a)+(1-\eta)^{s_2} g(b) \tag{4.3.13}$$

yazılır. Burada her bir terimin negatif olmadığı gözönüne alınarak (4.3.12) ve (4.3.13) taraf tarafa çarpılırsa $\eta \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b) \ \leq \ & \eta^{s_1+s_2} f(a)g(a)+(1-\eta)^{s_1+s_2} f(b)g(b) \\ & +\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2} f(a)g(b)+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2} f(b)g(a) \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b) \ \leq \ & (1-\eta)^{s_1+s_2} f(a)g(a)+\eta^{s_1+s_2} f(b)g(b) \\ & +(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2} f(a)g(b)+\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2} f(b)g(a) \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

yazılır. (4.3.14) ve (4.3.15) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)+f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b) \\ \leq \ & \left(\eta^{s_1+s_2}+(1-\eta)^{s_1+s_2}\right)[f(a)g(a)+f(b)g(b)] \\ & +(\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2}+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2})[f(a)g(b)+f(b)g(a)] \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

elde edilir. (4.3.16) eşitsizliğinin her iki tarafı $\eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]$ ile çarpılıp $[0,1]$ üzerinde η' ye göre integre edilirse

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]f(\eta a+(1-\eta)b)g(\eta a+(1-\eta)b)d\eta \\ & +\int_0^1 \eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]f((1-\eta)a+\eta b)g((1-\eta)a+\eta b)d\eta \\ = \ & \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}\left[w(b-u)^{\rho}\right] f(u)g(u)\frac{du}{a-b} \\ & +\int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} \mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}\left[w(v-a)^{\rho}\right] f(v)g(v)\frac{dv}{b-a} \\ = \ & \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w})(fg(b))+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w})(fg(a))\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq [f(a)g(a)+f(b)g(b)]\int_0^1 \eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}]\left(\eta^{s_1+s_2}+(1-\eta)^{s_1+s_2}\right)d\eta\\
&\quad +[f(a)g(b)+f(b)g(a)]\int_0^1 \eta^{\alpha-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}\eta^{\rho}](\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2}+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2})d\eta\\
&= M(a,b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\int_0^1 \eta^{\alpha+\rho k-1}\left(\eta^{s_1+s_2}+(1-\eta)^{s_1+s_2}\right)d\eta\\
&\quad +N(a,b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma(k)w^k(b-a)^{\rho k}}{\Gamma(\alpha+\rho k)}\int_0^1 \eta^{\alpha+\rho k-1}(\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2}+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2})d\eta\\
&= M(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}]+N(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\int_0^1 \eta^{\alpha+\rho k-1}\left(\eta^{s_1+s_2}+(1-\eta)^{s_1+s_2}\right)d\eta=\frac{1}{\alpha+\rho k+s_1+s_2}+B(\alpha+\rho k,s_1+s_2+1)
$$

ve

$$
\int_0^1 \eta^{\alpha+\rho k-1}(\eta^{s_1}(1-\eta)^{s_2}+(1-\eta)^{s_1}\eta^{s_2})d\eta=B(\alpha+\rho k+s_1,s_2+1)+B(\alpha+\rho k+s_2,s_1+1)
$$

dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left[(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w})(fg(b))+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w})(fg(a))\right]\\
\leq\ & M(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}]+N(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}].
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1 Teorem 4.3.2' nin şartları altında $s_1=s_2=1$ olarak alınırsa $\alpha,\rho\in\mathbb{R}^+$, $w\in\mathbb{R}^+_0$ ve $M(a,b)$ ile $N(a,b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left\{(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,a+;w})(fg(b))+(\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\alpha,b-;w})(fg(a))\right\}\\
&\quad\leq M(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_5}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}]+N(a,b)\mathcal{F}^{\sigma_6}_{\rho,\alpha}[w(b-a)^{\rho}]
\end{aligned}
\tag{4.3.17}
$$

eşitsizliği elde edilir ki burada

$$
\sigma_5(k):=\sigma(k)\left(\frac{2}{\alpha+\rho k+2}-\frac{2}{\alpha+\rho k+1}+\frac{1}{\alpha+\rho k}\right),
$$

$$
\sigma_6(k):=\frac{2\,\sigma(k)}{(\alpha+\rho k+1)(\alpha+\rho k+2)}
$$

şeklindedir.

Sonuç 4.3.2 Teorem 4.3.2' de $\sigma(0)=1$ ve $w=0$ olarak seçilirse, (4.3.11) eşitsizliği

(3.2.10) eşitsizliğine indirgenir. Sonuç 4.3.1' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.3.17) eşitsizliği (3.2.1) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.3.3 $a < b$, $a, b \in [0, \infty)$ olmak üzere $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ tanımlı fonksiyonlar ve $fg \in L[a, b]$ olsun. Ayrıca $[a, b]$ üzerinde f konveks ve $s \in (0, 1]$ için g, s-konveks olsun. $\alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$ ve $M(a, b)$ ile $N(a, b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned} & 2^{s+1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_7}[w(b-a)^\rho] \\ & \leq \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left\{ (\mathcal{J}_{\rho,\alpha,a+;w}^{\sigma})(fg(b)) + (\mathcal{J}_{\rho,\alpha,b-;w}^{\sigma})(fg(a)) \right\} \\ & \quad + M(a, b) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_2}[w(b-a)^\rho] + N(a, b) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_1}[w(b-a)^\rho] \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada σ_1 ve σ_2 Teorem 4.3.1 gibidir ve

$$\sigma_7(k) := \frac{\sigma(k)}{\alpha + \rho k}$$

şeklindedir.

İspat. (3.2.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $\eta^{\alpha-1}\mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho\eta^\rho]$ ile çarpılıp $[0, 1]$ üzerinde η' ye göre integre edilirse

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho] \\ \leq \; & \frac{1}{2^{s+1}} \left[\int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho] f(\eta a + (1-\eta)b) g(\eta a + (1-\eta)b) d\eta \right. \\ & \left. + \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho] f((1-\eta)a + \eta b) + g((1-\eta)a + \eta b) d\eta \right] \\ & + \frac{1}{2^{s+1}} \left\{ M(a, b) \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho][\eta(1-\eta)^s + (1-\eta)\eta^s] d\eta \right. \\ & \left. + N(a, b) \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho][(1-\eta)^{s+1} + \eta^{s+1}] d\eta \right\} \\ = \; & \frac{1}{2^{s+1}} \left[\int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}\left[w(b-u)^\rho\right] f(u) g(u) \frac{du}{a-b} \right. \\ & \left. + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}\left[w(v-a)^\rho\right] f(v) g(v) \frac{dv}{b-a} \right] \\ & + \frac{1}{2^{s+1}} \left\{ M(a, b) \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho][\eta(1-\eta)^s + (1-\eta)\eta^s] d\eta \right. \\ & \left. + N(a, b) \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho][(1-\eta)^{s+1} + \eta^{s+1}] d\eta \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_7}[w(b-a)^\rho] \\
\leq\ & \frac{1}{2^{s+1}} \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[(\mathcal{J}_{\rho,\alpha,a+;w}^{\sigma})(fg(b)) + (\mathcal{J}_{\rho,\alpha,b-;w}^{\sigma})(fg(a)) \right] \\
& + \frac{1}{2^{s+1}} \left\{ M(a,b) \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho][\eta(1-\eta)^s + (1-\eta)\eta^s] d\eta \right. \\
& \left. + N(a,b) \int_0^1 \eta^{\alpha-1} \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma}[w(b-a)^\rho \eta^\rho][(1-\eta)^{s+1} + \eta^{s+1}] d\eta \right\}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \eta^{\alpha-1}[\eta(1-\eta)^s + (1-\eta)\eta^s] d\eta \\
=\ & B(\alpha+\rho k+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+\rho k+s)(\alpha+\rho k+s+1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^1 \eta^{\alpha-1}[(1-\eta)^{s+1} + \eta^{s+1}] d\eta = B(\alpha+\rho k, s+2) + \frac{1}{\alpha+\rho k+s+1}$$

olduğu ve (4.1.1) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& 2^{s+1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_7}[w(b-a)^\rho] \\
\leq\ & \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[(\mathcal{J}_{\rho,\alpha,a+;w}^{\sigma})(fg(b)) + (\mathcal{J}_{\rho,\alpha,b-;w}^{\sigma})(fg(a)) \right] \\
& + M(a,b) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_1}[w(b-a)^\rho] + N(a,b) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_2}[w(b-a)^\rho]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2 Teorem 4.3.3' nin şartları altında $s = 1$ olarak alınırsa $\alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{R}_0^+$, $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ (3.2.2)' deki gibi olmak üzere

$$\begin{aligned}
& 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_7}\left[w(b-a)^\rho\right] \\
& \leq \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left\{ (\mathcal{J}_{\rho,\alpha,a+;w}^{\sigma})(fg(b)) + (\mathcal{J}_{\rho,\alpha,b-;w}^{\sigma})(fg(a)) \right\} \\
& \quad + M(a,b) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_6}\left[w(b-a)^\rho\right] + N(a,b) \mathcal{F}_{\rho,\alpha}^{\sigma_5}\left[w(b-a)^\rho\right],
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

eşitsizliği elde edilir ki burada σ_5 ve σ_6 Sonuç 4.3.1' deki gibi ve σ_7 Teorem 4.3.3' deki gibidir.

Sonuç 4.3.3 Teorem 4.3.3' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.3.18) eşitsizliği (3.2.16) eşitsizliğine indirgenir. Sonuç 4.3.2' de $\sigma(0) = 1$ ve $w = 0$ olarak seçilirse, (4.3.19) eşitsizliği (3.2.3) eşitsizliğine indirgenir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Çalışmanın ana bölümünü oluşturan dördüncü bölümde, ilk olarak konveks fonksiyonlar için Hölder ve power mean eşitsizlikleri kullanılarak genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren yeni Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler ve genelleştirmeler elde edilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş kesirli integralleri içeren konveks ve s-konveks fonksiyonların çarpımı için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Bulunan sonuçların bazı özel halleri literatürde mevcut önceki çalışmalarda verilen sonuçları kapsamaktadır. Elde edilen bu yeni sonuçlar üç farklı makale olarak hazırlanmıştır. Bu makalelerden birincisi "On Generalization of Fejér type Inequalities via Fractional Integral Operator" başlıklı çalışma altında "International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (ICANAS 2017)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup "Filomat" isimli SCI-Expanded kapsamlı dergide yayına kabul edilmiş, ikincisi "On Generalizations Related to The Left Side of Fejér's Inequality via Fractional Integral Operator" başlıklı çalışma altında "International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup "Miskolc Mathematical Notes" isimli SCI-Expanded kapsamlı dergide yayına kabul edilmiştir. Son olarak genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla iki fonksiyonun çarpımı için elde edilen yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler "New Hermite-Hadamard Type Inequalities for Product of Different Convex Functions Involving Certain Fractional Integral Operators" başlıklı çalışma altında "International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME 2017)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuş olup "Journal of Mathematics and Computer Science (JMCS)" isimli ESCI kapsamlı dergide yayına kabul edilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlarda kullanılan genelleştirilmiş kesirli integral operatörü yardımıyla Riemann-Liouville kesirli integralleri için literatürde var olan Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejér, Ostrowski, Grüss, Simpson tipli sonuçların yeni genelleştirmeleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R.A., Essex, C. 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario.

[2] Agarwal, R.P., Luo, M.-J., Raina, R.K. 2016. On Ostrowski type inequalities. Fasciculi Mathematici, 204: 5–27.

[3] Bayraktar, M. 2010. Analiz, ISBN: 978-605-395-412-5.

[4] Breckner, W.W. 1978. Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen. Publications de l'Institut Mathématique, 23: 13-20.

[5] Carter, M., van Brunt, B. 2000. The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. Springer-Verlag, 228, New York.

[6] Chen, F. 2014. A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions via Riemann-Liouville fractional integrals. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 33: 299–306.

[7] Chen, F., Wu, S. 2016. Several complementary inequalities to inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 9: 705–716.

[8] Dragomir S.S., Fitzpatrick S. 1999. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Mathematica, 32(4): 687–696.

[9] Fejér L. 1906. Uber die Fourierreihen, II, Math. Naturwiss Anz. Ungar. Akad. Wiss, Hungarian, 24, 369-390.

[10] Hudzik H., Maligranda L. 1994. Some remarks on s-convex functions. Aequationes Mathematicae, 48: 100–111.

[11] İşcan, İ. 2015. Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for convex functions via fractional integrals. Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica, 60(3): 355–366.

[12] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Volume 204. North-Holland Mathematics Studies, ISBN:0444518320.

[13] Mitrinović, D.S, Pečarić, J.E., Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.

[14] Musayev, B., Alp, M., Ekincioğlu, İ, Mustafa, N. 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I. Seçkin Yayıncılık, Ankara.

[15] Orlicz W. 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 9, 157-162.

[16] Prudnicov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. 1981. Integrals and Series of Elementary Functions, Nauka, Moscow.

[17] Raina, R.K. 2005. On generalized Wright's hypergeometric functions and fractional calculus operators. East Asian Mathematical Journal, 21(2): 191–203.

[18] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers.

[19] Sarıkaya M.Z., Set E., Yaldız H., Başak N. 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, 57(9): 2403-2407.

[20] Set E., İşcan İ., Sarıkaya, M.Z., Özdemir M.E. 2015. On New Inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér Type for Convex Functions via Fractional Integrals. Applied Mathematics and Computation, 259: 875-881.

[21] Srivastava, H.M., Choi, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

[22] Wang J., Zhu C., Zhou Y., 2013. New generalized Hermite-Hadamard type inequalities and applications to special means. Journal of Inequalities and Applications, 2013(325): 1-15.

[23] Yaldız, H., Sarıkaya, M.Z. On the Hermite-Hadamard type inequalities for fractional integral operator, ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/321874897.

[24] Yaldız, H. On the Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for fractional integral operator, ResearchGate, https://www.researchgate.net/publication/321874987.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Barış ÇELİK
Doğum Yeri	:	Şişli / İSTANBUL
Doğum Tarihi	:	15.08.1992
Yabancı Dil	:	İngilizce
E-Posta	:	bariscelik15@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2015, Ordu Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2017, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Eserler

1. Set E., Çelik B., "Fractional Hermite Hadamard Type Inequalities for Quasi-Convex Functions", Ordu Univ. J. Sci. Tech., 6(1), 137-149 (2016).
2. Set E., Çelik B., "Certain Hermite-Hadamard type inequalities associated with conformable fractional integral operators", Creat. Math. Inform., 26(3), 321-330 (2017).
3. Set E., Çelik B., Akdemir A.O., "Some New Hermite-Hadamard Type Inequalities for Quasi-Convex Functions via Fractional Integral Operator", AIP Conference Proceedings, 1833, 020021-1-020021-4 (2017).
4. Set E., Çelik B., "Generalized Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for $m-$convex and $(\alpha, m)-$convex functions", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 67(1), 351-362 (2018).
5. Set E., Choi, J., Çelik B., "Certain Hermite-Hadamard type inequalities involving generalized fractional integral operators", RACSAM, (2017). DOI: 10.1007/s13398-017-0444-1.