**T. C.**

**ORDU ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN GRÜSS EŞİTSİZLİKLERİ

**FİLİZ ÖZATA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ORDU 2020**

## TEZ ONAY

**Filiz ÖZATA** tarafından hazırlanan **"KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN GRÜSS EŞİTSİZLİKLERİ"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 24.01.2020 tarihinde yapılmış ve jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman
Prof. Dr. Erhan SET

| Jüri Üyeleri | İmza |
|---|---|
| Üye<br>Prof. Dr. Erhan SET<br>Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi | ........................................ |
| Üye<br>Doç. Dr. Mehmet KORKMAZ<br>Matematik Bölümü, Ordu Üniversitesi | ........................................ |
| Üye<br>Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN<br>Matematik Bölümü, Giresun Üniversitesi | ........................................ |

28 / 01 / 2020 tarihinde enstitüye teslim edilen bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 30 / 01 / 2020 tarih ve 2020 / 41 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Selahattin MADEN

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**FİLİZ ÖZATA**

**Bu çalışma Ordu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğünün B-1909 numaralı projesi ile desteklenmiştir.**

**ÖZET**

**KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN GRÜSS EŞİTSİZLİKLERİ**
**FİLİZ ÖZATA**
**ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ, 54 SAYFA**

**(TEZ DANIŞMANI: Prof. Dr. ERHAN SET)**

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş niteliğinde olup bu bölümde Grüss eşitsizliğinin ve kesirli integrallerin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verir. İkinci bölümde Grüss eşitsizliği ve ispatı, Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Gamma ve Beta fonksiyonları ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde farklı türden kesirli integraller ve bu kesirli integraller yardımıyla elde edilen bazı Grüss tipli eşitsizliklere yer verlmiştir. Dördüncü bölümde ise genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü için yeni Grüss tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son bölümde ise bazı sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Grüss eşitsizliği, farklı türden kesirli integral operatörleri, genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü.

# ABSTRACT

**GRÜSS INEQUALITIES FOR FRACTIONAL INTEGRALS**

**FİLİZ ÖZATA**

**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**MATHEMATICS**

**MASTER THESIS, 54 PAGES**

**(SUPERVISOR: Prof. Dr. ERHAN SET)**

This thesis consists of five chapters. The first chapter is an introductory and provides information on the historical development of Grüss inequality and fractional integrals. In the second chapter, basic definitions and theorems related to Grüss inequality and proof, Cauchy-Schwarz inequality, Gamma and Beta functions are given. Different kinds of fractional integrals and some Grüss type inequalities obtained with the help of these fractional integrals consist of in the third chapter. In the fourth chapter, new Grüss type inequalities are obtained for the extended generalized fractional integral operator. In the last chapter, some result and recommendations are given.



**Keywords:** Grüss inequality, different type of factional integrals, the extended generalized fractional integral operators.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca yüksek bilgi ve tecrübeleriyle iyi bir yol gösterici olan, her zaman anlayışla yaklaşan, tez konumun belirlenmesi, çalışmanın yürütülmesi ve yazımı süresince gösterdiği her türlü destekten dolayı başta çok kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan SET'e ve tez yazım aşamasında desteklerini ve fikirlerini esirgemeyen arkadaşlarım Sevdenur DEMİRBAŞ, Barış ÇELİK ve Emrullah Aykan ALAN'a teşekkür ederim.

Aynı zamanda, manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim annem, babam ve eşim Ferhat ÖZATA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

**İÇİNDEKİLER**

## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | : | Karmaşık sayılar kümesi |
| $\boldsymbol{\Gamma}$ | : | Gama fonksiyonu |
| $\boldsymbol{\Gamma_k}$ | : | k-gama fonksiyonu |
| $\boldsymbol{B}$ | : | Beta fonksiyonu |
| $\boldsymbol{B_p(x,y)}$ | : | Genişletilmiş beta fonksiyonu |
| $\boldsymbol{Re(\alpha)}$ | : | α kompleks sayısının reel kısmı |
| **L[a,b]** | : | [a,b] aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi |
| $\boldsymbol{J_{a+}^{\alpha}}$ | : | α. dereceden sol Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{J_{b-}^{\alpha}}$ | : | α. dereceden sağ Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{I_h^{\alpha}}$ | : | *h(x)*-Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{h'}$ | : | *h* fonksiyonunun birinci mertebeden türevi |
| $\boldsymbol{I^{\alpha,k}}$ | : | Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{{}_2F_1(.,.;.;.)}$ | : | Gauss hipergeometrik fonksiyonu |
| $\boldsymbol{I_x^{\alpha,\beta,\eta,\mu}}$ | : | Gauss hipergeometrik kesirli integrali |
| $\boldsymbol{{}_HD_{1,x}^{-\alpha}}$ | : | Hadamard kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}}$ | : | Saigo kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{(a)_n}$ | : | Pochhammer sembolü |
| $\boldsymbol{(x)_{nk}}$ | : | Pochhammer k-sembolü |
| $\boldsymbol{{}_kJ_a^{\alpha}}$ | : | k-Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{I_{a.k}^{\alpha,r}}$ | : | Genelleştirilmiş k-Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{{}^{\rho}I_{a+,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}}$ | : | Genelleştirilmiş sol Katugampola kesirli integrali |
| $\boldsymbol{{}^{\rho}I_{b-,\eta,\kappa}^{\alpha,\beta}}$ | : | Genelleştirilmiş sağ Katugampola kesirli integrali |
| $\boldsymbol{\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a+;\omega}^{\sigma}}$ | : | Genelleştirilmiş kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{I_{\alpha}^{a}}$ | : | Sol taraflı uyumlu kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{{}^{b}I_{\alpha}}$ | : | Sağ taraflı uyumlu kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{{}_{a}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}}$ | : | Sol taraflı yeni uyumlu kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{{}^{\beta}\mathfrak{J}_{b}^{\alpha}}$ | : | Sağ taraflı yeni uyumlu kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{\epsilon(\alpha,\beta,\rho,\lambda)}$ | : | Prabhakar tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{\epsilon_{a+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}}$ | : | Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{\epsilon_{\alpha,\beta,p,\omega,a+}^{\gamma,\delta,q}}$ | : | Salim ve Faraj tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{\epsilon_{a+,\rho,\sigma}^{\omega,\delta,q,c}}$ | : | Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü |
| $\boldsymbol{\epsilon_{a+,\rho,\sigma,\tau}^{\omega,\delta,q,r,c}}$ | : | Genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü |

# 1. GİRİŞ

Kesirli analizin başlangıcı, 30 Eylül 1695 tarihinde L'Hospital tarafından sorulan basit ama ilginç bir soruyla başlamaktadır. Bir gün Leibniz, mektubunda $f(x) = x$ fonksiyonun n'inci mertebeden türevini $\frac{D^n x}{Dx^n}$ sembolü ile göstermiş ve L'Hospital meraklı bir biçimde $n = \frac{1}{2}$ olması halinde elde edilecek sonucun ne olacağını sormuştur. Leibniz'in bu soruya cevabı ise kesirli hesaplamaları içeren sayısız çalışmalarda görüleceği üzere "Bir paradoks gibi bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır" şeklinde olmuştur. Gerçekten de kesirli analiz üzerine aradan geçen 300 yılı aşkın süre boyunca birçok matematikçi tarafından çalışmalar yapılmıştır ve son yıllarda da bu konu mühendislik, bilim ve ekonomi gibi alanlarda ilgi çekmektedir. Belki de kesirli analiz 21. yüzyılın en önemli analiz konusu olacaktır. Literatürde günümüze kadar Riemann-Liouville, k-Riemann-Liouville, Hipergeometrik, Gauss Hipergeometrik, Saigo, Hadamard, Katugampola, Uyumlu ve Raina tarafından tanımlanan genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri gibi birçok kesirli integral operatörü tanımlanmış, bu operatörler arasındaki ilişkiler verilmiştir ve bu türden operatörler tanımlanmaya da devam etmektedir. Örneğin son zamanlarda Andric, Farid ve Pecaric tarafından genişletilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri tanıtılmıştır. Kesirli analiz içerisinde önemli bir yere sahip olan bu kesirli integral kavramları sayesinde literatürde Riemann integralleri için var olan sonuçların birçok yeni genelleştirmesi, genişlemesi ve yeni versiyonları elde edilmiştir. İlk olarak 2010 yılında Dahmani ve arkadaşları tarafından yapılan "Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf, New Generalizations of Grüss Inequality using Riemann-Liouville fractional integrals, Bull. Math. Anal. Appl., 2(3) (2010), 93-99." başlıklı çalışmada Riemann-Liouville kesirli integralleri için Grüss eşitsizliğinin genelleştirmesi elde edilmiş ve bu çalışma bu konu üzerine birçok yeni çalışmanın yapılmasına öncülük etmiştir. Daha sonraki yıllarda S. Mubeen ve S. Iqbal [27] genelleştirilmiş Riemann-Liouville $k$-kesirli integralleri kullanarak, E. Kaçar ve H. Yıldırım [17] Katugampola kesirli integrallerini kullanarak, V. L. Chinchane ve D. B. Pachpatte [7, 8] Hadamard ve Saigo kesirli integrallerini kullanarak, S. L. Kalla ve A. Rao [18] Hipergeometrik kesirli integralleri kullanarak, J. Choi ve S. D. Purohit [9] Gauss Hipergeometrik kesirli integralleri kullanarak, T. Tunç, F. Usta, H. Budak ve M. Z. Sarıkaya [46] Raina tarafından tanımlanan genelleştirilmiş kesirli integral operatörleri kullanarak, İ. Mumcu ve E. Set [28] uyumlu kesirli integralleri kullanarak, A. Akkurt, S. Kılınç, H. Yıldırım [3] genelleştirilmiş Gauss Hipergeometrik kesirli integralleri kullanarak Grüss ve Grüss tipli eşitsizliklerin yeni genelleştirmelerini elde etmişlerdir.

Matematiğin birçok alanında kullanılan kesirli analizin kullanıldığı en önemli teorilerden bir tanesi de eşitsizlikler teorisidir. Eşitsizlikler teorisi son yılların matematiğin en popüler araştırma alanlarından bir tanesi olup Hölder, Minkowski, Hermite-Hadamard, Young eşitsizlikleri ve daha bir çok önemli eşitsizlik matematiğin farklı alanlarında oldukça sık kullanılmaktadır. Örneğin konveks fonksiyonlar üzerine elde edilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin birçoğunun ispatında Hölder eşitsizliği kullanılmaktadır. Eşitsizlikler teorisi içerisinde önemli bir yer tutan eşitsizliklerden bir tanesi de Grüss eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik 1935 yılında G. Grüss tarafından elde edilmiş olup iki sınırlı fonksiyonun çarpımlarının integrali ile integrallerinin çarpımı arasındaki tahmini verir. Bu eşitsizlik birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu araştırmacılar tarafından bu eşitsizliğin genelleştirmeleri, genişletilmesi ve farklı versiyonları elde edilmiştir. Son yıllarda da farklı türden kesirli integraller kullanılarak Grüss eşitsizliğinin yeni genelleştirmeleri elde edilmiştir.

Bu tezin amacı ilk olarak literatürde kesirli integraller yardımıyla elde edilmiş Grüss ve Grüss tipli bazı eşitsizlikleri konu sınıflandırmasına göre bir arada sunmak daha sonra Andric ve arkadaşları tarafından tanıtılan kesirli integral operatöründen faydalanarak yeni genelleştirmiş ve genişletilmiş Grüss ve Grüss tipli integral eşitsizlikleri elde etmektir. Böylece kesirli integraller için Grüss ve Grüss tipli eşitsizlikler bir arada sunulmuş olacaktır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak olan tanımlar, teoremler, bazı iyi bilinen eşitsizlikler ve temel özellikler ile gerekli olan ispatlar verilecektir.

## 2.1 Genel Kavramlar

**Teorem 2.1.1 (Grüss Eşitsizliği)** $f,\ g\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Her $x \in [a,b]$, $m, M, n, N\ \in \mathbb{R}$ için

$$m \leq f(x) \leq M,\ \ n \leq g(x) \leq N \tag{2.1.1}$$

şartları altında

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \left( \int_a^b f(x)dx \right) \left( \int_a^b g(x)dx \right) \right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n) \tag{2.1.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Literatürde bu eşitsizlik Grüss Eşitsizliği olarak bilinir [14].

**İspat.** İlk olarak,

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \tag{2.1.3}$$

tanımlaması yapılır. Korkine eşitliği [23] yardımıyla (2.1.3) ifadesi çift katlı integraller cinsinden

$$T(f,g) = \frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dxdy$$

şeklinde yazılabilir. Burada çift katlı integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$T^2(f,g) \leq T(f,f)T(g,g) \tag{2.1.4}$$

olduğu kolayca görülür. Şimdi $T(f,f) \geq 0$ ve $T(g,g) \geq 0$ olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$A(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

integralinin aritmetik ortalamasını göz önüne alalım. Aritmetik ve quadratik ortalama arasındaki ilişkiden yararlanarak

$$\begin{aligned} T(f,f) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)dx - \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right)^2 \\ &= A(f^2) - A^2(f) \geq 0 \end{aligned}$$

olduğu gösterilir. Benzer şekilde $T(g,g) \geq 0$ olduğu gösterilebilir.

Ayrıca

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (M-f(x))(f(x)-m)dx = MA(f) - Mm - A(f^2) + mA(f)$$

olarak yazılırsa

$$T(f,f) = (M-A(f))(A(f)-m) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (M-f(x))(f(x)-m)dx \tag{2.1.5}$$

olduğu kolayca görülür. Burada $(M-f(x))(f(x)-m) \geq 0$ olduğundan (2.1.5) ifadesinden

$$T(f,f) \leq (M-A(f))(A(f)-m) \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği yazılır.

Benzer şekilde

$$T(g,g) \geq (N-A(g))(A(g)-n) \tag{2.1.7}$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.1.6) ve (2.1.7) eşitsizlikleri (2.1.4) ifadesinde gözönüne alındığında

$$T^2(f,g) \leq (M-A(f))(A(f)-m)(N-A(g))(A(g)-n)$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak aritmetik ortalama ve geometrik ortalama arasındaki ilişkiyi kullanarak

$$(M-A(f))(A(f)-m) \leq \frac{1}{4}(M-m)^2$$

ve

$$(N-A(g))(A(g)-n) \leq \frac{1}{4}(N-n)^2$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu iki eşitsizlik yardımıyla,

$$T^2(f,g) \leq \frac{1}{16}(M-m)^2(N-n)^2$$

olur. Buradan,

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.1.2 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)** $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2dx\right) \tag{2.1.8}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $f$ ve $g$'nin lineer bağımlı fonksiyonlar olmasıdır [24].

**İspat.** $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\int_a^b (tf(x) + g(x))^2 \, dx \geq 0$$

yani

$$t^2 \int_a^b f(x)^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g(x)^2 dx \geq 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan (2.1.8) eşitsizliğinin doğruluğu kolayca görülebilir.

**Tanım 2.1.1 (Gama Fonksiyonu):**
$z \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu veya Euler-Gama fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $Re(z) > 0$ için yakınsaktır. Gama fonksiyonunun en temel özelliği

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

eşitliğidir. Ayrıca bu özellik yardımıyla $\Gamma(1) = 1$ elde edilir. Buradan

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = (2 - 1)! = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = (3 - 1)! = 2,$$

ve $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım yöntemiyle

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$$

eşitliğine ulaşılır [19].

**Tanım 2.1.2 (Beta Fonksiyonu):**
$\Gamma(\alpha)$, Euler-Gama fonksiyonu ve $\mathbb{Z}_0^-$ pozitif olmayan tamsayılar kümesi olsun. O halde

$$B(\alpha, \beta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \, dt & (Re(\alpha) > 0;\ Re(\beta) > 0) \\[2ex] \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} & (\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-) \end{cases}$$

fonksiyonuna beta fonksiyonu denir [43]. Ayrıca $B_p(x, y)$, genişletilmiş Beta fonksiyonudur.

$$B_p(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} e^{-\frac{p}{t(1-t)}} dt \quad (\alpha, \beta, p > 0)$$

Burada $Re(p) > 0$'dır.

# 3. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Bu bölümde kesirli integraller ve bu integraller yardımıyla elde edilen Grüss tipli bazı eşitsizlikler verilecektir.

## 3.1 Kesirli İntegraller Yardımıyla Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.1 ($L_p[a,b]$ uzayı)**: $[a,b]$ aralığında tanımlı ve $p \geq 1$ için

$$\|f\|_p := \left[\int_a^b |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahip tüm reel değerli Lebesque anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi $L_p[a,b]$ ile gösterilir. Burada

$$\|f\|_\infty := \texttt{esssup}_{s\in[a,b]}|f(s)| < \infty$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $L_1[a,b]$ uzayı

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx < \infty$$

normuna sahip fonksiyonlar uzayıdır. Tez boyunca $L_1[a,b]$ uzayı $L[a,b]$ ile gösterilecektir [5].

### 3.1.1 Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.2** $f \in L[a,b]$ ve $\alpha > 0$ olsun. $\alpha$. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a \tag{3.1.1}$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanır ve burada $\Gamma(\alpha)$, Gama fonksiyonudur. Ayrıca $J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x)$ dir. $\alpha = 1$ durumunda kesirli integral klasik integrale indirgenir [35].

Dahmani ve arkadaşları, 2010 yılında Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Lemma 3.1.1** $f$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha f^2(t)-(J^\alpha f(t))^2 &= \left(M\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-J^\alpha f(t)\right)\left(J^\alpha f(t)-m\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\ &\quad -\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha(M-f(t))(f(t)-m) \qquad (3.1.3)\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [11].

**Teorem 3.1.1** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında

$$m\le f(x)\le M,\ p\le g(x)\le P;\quad m,M,p,P\in\mathbb{R} \qquad (3.1.4)$$

şartlarını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$ için

$$\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha fg(t)-J^\alpha f(t)J^\alpha g(t)\right|\le\left(\frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^2(M-m)(P-p) \qquad (3.1.5)$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

**Lemma 3.1.2** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için

$$\begin{aligned}&\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta fg(t)+\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J^\alpha fg(t)-J^\alpha f(t)J^\beta g(t)-J^\beta f(t)J^\alpha g(t)\right)^2\\ \le&\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta f^2(t)+\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J^\alpha f^2(t)-2J^\alpha f(t)J^\beta g(t)\right)\\ &\times\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta g^2(t)+\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J^\alpha g^2(t)-2J^\alpha g(t)J^\beta f(t)\right) \qquad (3.1.6)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

**Lemma 3.1.3** $f$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için

$$\begin{aligned}&\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta f^2(t)+\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J^\alpha f^2(t)-2J^\alpha f(t)J^\beta f(t) \qquad (3.1.7)\\ =&\left(M\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-J^\alpha f(t)\right)\left(J^\beta f(t)-m\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\ &+\left(M\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}-J^\beta f(t)\right)\left(J^\alpha f(t)-m\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\ &-\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta(M-f(t))(f(t)-m)-\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J^\alpha(M-f(t))(f(t)-m)\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [11].

**Teorem 3.1.2** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta fg(t)+\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J^\alpha fg(t)-J^\alpha f(t)J^\beta g(t)-J^\beta f(t)J^\alpha g(t)\right)^2\\
\leq\ &\left[\left(M\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-J^\alpha f(t)\right)\left(J^\beta f(t)-m\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.\left(J^\alpha f(t)-m\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}-J^\beta f(t)\right)\right]\\
&\times\left[\left(P\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}-J^\alpha g(t)\right)\left(J^\beta g(t)-p\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left(J^\alpha g(t)-p\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(P\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}-J^\beta g(t)\right)\right]
\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

eşitsizliği geçerlidir [11].

Tariboon ve arkadaşları, 2014 yılında Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.3** $f$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon ve $\forall t\in[0,\infty)$ için

$$\varphi_1(t)\leq f(t)\leq\varphi_2(t)\tag{3.1.9}$$

olsun. Bu takdirde $t>0$, $\alpha,\beta>0$ için

$$J^\beta\varphi_1(t)J^\alpha f(t)+J^\alpha\varphi_2(t)J^\beta f(t)\geq J^\alpha\varphi_2(t)J^\beta\varphi_1(t)+J^\alpha f(t)J^\beta f(t)\tag{3.1.10}$$

eşitsizliği geçerlidir [44].

**Teorem 3.1.4** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon ve $\varphi_1$, $\varphi_2$ de (3.1.9) şartını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Ayrıca $\psi_1$, $\psi_2$ ise $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ve $\forall t\in[0,\infty)$ için

$$\psi_1(t)\leq g(t)\leq\psi_2(t)\tag{3.1.11}$$

olsun. Bu takdirde $t>0$, $\alpha,\beta>0$ için

$$\begin{aligned}
&(a)\quad J^\beta\psi_1(t)J^\alpha f(t)+J^\alpha\varphi_2(t)J^\beta g(t)\geq J^\beta\psi_1(t)J^\alpha\varphi_2(t)+J^\alpha f(t)J^\beta g(t),\\
&(b)\quad J^\beta\varphi_1(t)J^\alpha g(t)+J^\alpha\psi_2(t)J^\beta f(t)\geq J^\beta\varphi_1(t)J^\alpha\psi_2(t)+J^\beta f(t)J^\alpha g(t),\\
&(c)\quad J^\alpha\varphi_2(t)J^\beta\psi_2(t)+J^\alpha f(t)J^\beta g(t)\geq J^\alpha\varphi_2(t)J^\beta g(t)+J^\beta\psi_2(t)J^\alpha f(t),\\
&(d)\quad J^\alpha\varphi_1(t)J^\beta\psi_1(t)+J^\alpha f(t)J^\beta g(t)\geq J^\alpha\varphi_1(t)J^\beta g(t)+J^\beta\psi_1(t)J^\alpha f(t)
\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [44].

**Lemma 3.1.4** $f$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve $\varphi_1$, $\varphi_2$ $[0,\infty)$ aralığında (3.1.9) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde $t>0$, $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}f^2(t)-\left(J^{\alpha}f(t)\right)^2 &= \left(J^{\alpha}\varphi_2(t)-J^{\alpha}f(t)\right)\left(J^{\alpha}f(t)-J^{\alpha}\varphi_1(t)\right)\\ &\quad -\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}\left(\left(\varphi_2(t)-f(t)\right)\left(f(t)-\varphi_1(t)\right)\right)\\ &\quad +\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}\varphi_1 f(t)-J^{\alpha}\varphi_1(t)J^{\alpha}f(t)\\ &\quad +\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}\varphi_2 f(t)-J^{\alpha}\varphi_2(t)J^{\alpha}f(t)\\ &\quad +J^{\alpha}\varphi_1(t)J^{\alpha}\varphi_2(t)-\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}\varphi_1\varphi_2(t) \qquad (3.1.13)\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir [44].

**Teorem 3.1.5** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ ve $\psi_2$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$ için

$$\left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}fg(t)-J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)\right|\leq\sqrt{T(f,\varphi_1,\varphi_2)T(g,\psi_1,\psi_2)} \qquad (3.1.14)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $T(u,v,w)$

$$\begin{aligned}T(u,v,w) &= \left(J^{\alpha}w(t)-J^{\alpha}u(t)\right)\left(J^{\alpha}u(t)-J^{\alpha}v(t)\right)+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}vu(t)-J^{\alpha}v(t)J^{\alpha}u(t)\\ &\quad +\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}wu(t)-J^{\alpha}w(t)J^{\alpha}u(t)+J^{\alpha}v(t)J^{\alpha}w(t)-\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}vw(t)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [44].

### 3.1.2 $k$-Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

Diaz ve Pariguan, [12]'da klasik gama ve beta fonksiyonları ve Pochhammer sembolünün genelleştirmesi olan $k$-gama ve $k$-beta fonksiyonlarını ve Pochhammer $k$-sembolünü aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:
$k$-gama fonksiyonu

$$\Gamma_k(\alpha)=\lim_{k\to\infty}\frac{n!k^n(nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}},\ \ (k>0)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(x)_{n,k}$ faktöriyel fonksiyon için Pochhammer $k$-sembolüdür ve $x\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{N}^+$ olmak üzere $(x)_{n,k}=x(x+k)(x+2k)...(x+(n-1)k$ şeklinde tanımlanır. $k$-gama fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır:

**1.** $\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$.

**2.** $(x)_{n,k} = \dfrac{\Gamma_k(x+nk)}{\Gamma_k(x)}$.

**3.** $\Gamma_k(k) = 1$.

**4.** $\Gamma_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$ için logaritmik konvekstir.

**5.** $a \in \mathbb{R}$ için $\Gamma_k(x) = a^{\frac{x}{k}} \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}a} dt$'dir.

**6.** $\frac{1}{\Gamma_k(x)} = xk^{-\frac{x}{k}} e^{\frac{x}{k}\gamma} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{x}{nk}\right)\right) e^{-\frac{x}{nk}}$'dır. Burada $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+...+\frac{1}{n} - \log(n))$'dir.

**7.** $\Gamma_k(x)\Gamma_k(k-x) = \dfrac{\pi}{sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)}$.

Son olarak $B_k(x,y) = \dfrac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}$ formülüyle verilmiş ve bu fonksiyonun aşağıdaki özellikleri tanıtılmıştır:

**1.** $B_k(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}(1+t^k)^{-\frac{x+y}{k}} dt$.

**2.** $B_k(x,y) = \frac{1}{k} \displaystyle\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1} dt$.

**3.** $B_k(x,y) = \frac{1}{k} B\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right)$.

**4.** $B_k(x,y) = \frac{(x+y)}{xy} \displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} \frac{nk(nk+x+y)}{(nk+x)(nk+y)}$.

Daha sonra yukarıdaki tanımları göz önünde bulundurarak Mubeen ve Habibullah $k$-Riemann-Liouville kesirli integralini

$$_kJ_a^\alpha[f(t)] = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)dt; \quad \alpha > 0, \; x > a$$

şeklinde tanımlamışlardır [26].

Set ve arkadaşları, 2015 yılında $k$-Riemann-Liouville kesirli integralini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.6** $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında (3.1.4) şartlarını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon ve $p$, $[a,b]$ aralığında pozitif bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t > 0$, $k > 0$, $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left|\left({}_kJ_a^\alpha[p(t)]\right)\left({}_kJ_a^\alpha[pfg(t)]\right) - \left({}_kJ_a^\alpha[pf(t)]\right)\left({}_kJ_a^\alpha[pg(t)]\right)\right| \\ \leq \; & \frac{\left({}_kJ_a^\alpha[p(t)]\right)^2}{4}(M-m)(P-p) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

**Teorem 3.1.7** $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında (3.1.4) şartlarını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon ve $p$ $[a,b]$ aralığında pozitif bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $k>0$, $\alpha>0$ ve $\beta>0$ için

$$\begin{aligned}
&\Big\{\big({}_kJ_a^{\alpha}[p(t)]\big)\big({}_kJ_a^{\beta}[pfg(t)]\big)+\big({}_kJ_a^{\beta}[p(t)]\big)\big({}_kJ_a^{\alpha}[pfg(t)]\big)\\
&-\big({}_kJ_a^{\alpha}[pf(t)]\big)\big({}_kJ_a^{\beta}[pg(t)]\big)-\big({}_kJ_a^{\beta}[pf(t)]\big)\big({}_kJ_a^{\alpha}[pg(t)]\big)\Big\}^2\\
\leq\ &\Big\{\big[M\big({}_kJ_a^{\alpha}[p(t)]\big)-\big({}_kJ_a^{\alpha}[pf(t)]\big)\big]\big[\big({}_kJ_a^{\beta}[pf(t)]\big)-m\big({}_kJ_a^{\beta}[p(t)]\big)\big]\\
&+\big[\big({}_kJ_a^{\alpha}[pf(t)]\big)-m\big({}_kJ_a^{\alpha}[p(t)]\big)\big]\big[M\big({}_kJ_a^{\beta}[p(t)]\big)-\big({}_kJ_a^{\beta}[pf(t)]\big)\big]\Big\}\\
&\times\Big\{\big[P\big({}_kJ_a^{\alpha}[p(t)]\big)-\big({}_kJ_a^{\alpha}[pg(t)]\big)\big]\big[\big({}_kJ_a^{\beta}[pg(t)]\big)-p\big({}_kJ_a^{\beta}[p(t)]\big)\big]\\
&+\big[\big({}_kJ_a^{\alpha}[pg(t)]\big)-p\big({}_kJ_a^{\alpha}[p(t)]\big)\big]\big[P\big({}_kJ_a^{\beta}[p(t)]\big)-\big({}_kJ_a^{\beta}[pg(t)]\big)\big]\Big\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

Tariboon ve arkadaşları, 2016 yılında $k$-Riemann-Liouville kesirli integralini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.8** $f$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun ve (3.1.9) şartı sağlansın. Bu takdirde $t>0$, $\alpha,\beta>0$ ve $k>0$ için

$${}_kJ^{\beta}\varphi_1(t){}_kJ^{\alpha}f(t)+{}_kJ^{\alpha}\varphi_2(t){}_kJ^{\beta}f(t)\geq{}_kJ^{\alpha}\varphi_2(t){}_kJ^{\beta}\varphi_1(t)+{}_kJ^{\alpha}f(t){}_kJ^{\beta}f(t)$$

eşitsizliği geçerlidir [45].

**Teorem 3.1.9** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde $t>0$, $\alpha,\beta>0$ ve $k>0$ için

$$\begin{aligned}
&(a)\quad {}_kJ^{\beta}\psi_1(t){}_kJ^{\alpha}f(t)+{}_kJ^{\alpha}\varphi_2(t){}_kJ^{\beta}g(t)\geq{}_kJ^{\beta}\psi_1(t){}_kJ^{\alpha}\varphi_2(t)+{}_kJ^{\alpha}f(t){}_kJ^{\beta}g(t),\\
&(b)\quad {}_kJ^{\beta}\varphi_1(t){}_kJ^{\alpha}g(t)+{}_kJ^{\alpha}\psi_2(t){}_kJ^{\beta}f(t)\geq{}_kJ^{\beta}\varphi_1(t){}_kJ^{\alpha}\psi_2(t)+{}_kJ^{\beta}f(t){}_kJ^{\alpha}g(t),\\
&(c)\quad {}_kJ^{\alpha}\varphi_2(t){}_kJ^{\beta}\psi_2(t)+{}_kJ^{\alpha}f(t){}_kJ^{\beta}g(t)\geq{}_kJ^{\alpha}\varphi_2(t){}_kJ^{\beta}g(t)+{}_kJ^{\beta}\psi_2(t){}_kJ^{\alpha}f(t),\\
&(d)\quad {}_kJ^{\alpha}\varphi_1(t){}_kJ^{\beta}\psi_1(t)+{}_kJ^{\alpha}f(t){}_kJ^{\beta}g(t)\geq{}_kJ^{\alpha}\varphi_1(t){}_kJ^{\beta}g(t)+{}_kJ^{\beta}\psi_1(t){}_kJ^{\alpha}f(t)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [45].

**Teorem 3.1.10** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ ve $\psi_2$, $[0,\infty)$ aralığında dört integrallenebilen fonksiyon olmak üzere (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$ ve $k>0$ için

$$\left|\frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}fg(t)-{}_kJ^{\alpha}f(t){}_kJ^{\alpha}g(t)\right|\leq\sqrt{T(f,\varphi_1,\varphi_2)T(g,\psi_1,\psi_2)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $T(u,v,w)$

$$\begin{aligned} T(u,v,w) &= \left({}_kJ^{\alpha}w(t) - {}_kJ^{\alpha}u(t)\right)\left({}_kJ^{\alpha}u(t) - {}_kJ^{\alpha}v(t)\right) \\ &\quad + \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}vu(t) - {}_kJ^{\alpha}v(t){}_kJ^{\alpha}u(t) + \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}wu(t) \\ &\quad - {}_kJ^{\alpha}w(t){}_kJ^{\alpha}u(t) + {}_kJ^{\alpha}v(t){}_kJ^{\alpha}w(t) - \frac{t^{\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}{}_kJ^{\alpha}vw(t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [45].

### 3.1.3 $(k,r)$-Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

Sarıkaya ve arkadaşları $(k,r)$-Riemann-Liouville kesirli integralini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

**Tanım 3.1.3** $f$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $k>0$ ve $r\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ olmak üzere bir $f$ fonksiyonunun $\alpha$. mertebeden $(k,r)$-Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_{a,k}^{\alpha,r}f(t) = \frac{(r+1)^{1-\frac{\alpha}{k}}}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^t \left(t^{r+1}-x^{r+1}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}x^r f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Gamma_k$, $k$-gamma fonksiyonudur [36].

Mubeen ve arkadaşları, 2016 yılında $(k,r)$-Riemann-Liouville kesirli integralini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.11** $k>0$ için $f\in L_{1,r}[a,b]$ ve $r\geq 0$, $\alpha,\beta>0$ olsun. $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, (3.1.9) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$I_{a,k}^{\beta,r}\varphi_1(t)I_{a,k}^{\alpha,r}f(t) + I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_2(t)I_{a,k}^{\beta,r}f(t) \geq I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_2(t)I_{a,k}^{\beta,r}\varphi_1(t) + I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)I_{a,k}^{\beta,r}f(t)$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

**Teorem 3.1.12** $k>0$ için $f\in L_{1,r}[a,b]$ olsun. Her $t\in[a,b]$ ve $m,M\in\mathbb{R}$ için $m\leq f(t)\leq M$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $r\geq 0$, $\alpha,\beta>0$ için

$$\begin{aligned} & M\frac{(r+1)^{\frac{-\alpha}{k}}t^{(r+1)\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}I_{a,k}^{\beta,r}f(t) + m\frac{(r+1)^{\frac{-\beta}{k}}t^{(r+1)\frac{\beta}{k}}}{\Gamma_k(\beta+k)}I_{a,k}^{\alpha,r}f(t) \\ \geq\; & mM\frac{(r+1)^{\frac{-(\alpha+\beta)}{k}}t^{(r+1)\left(\frac{\alpha+\beta}{k}\right)}}{\Gamma_k(\alpha+k)\Gamma_k(\beta+k)} + I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)I_{a,k}^{\beta,r}f(t) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

**Teorem 3.1.13** $k>0$ için $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon ve $r\geq 0$, $\alpha,\beta>0$ olsun. $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ ve $\psi_2$ $[a,b]$ aralığında (3.1.9) ve (3.1.11) şartlarını sağlayan dört integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\begin{array}{ll}
(a) & I_{a,k}^{\beta,r}\psi_1(t)I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)+I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_2(t)I_{a,k}^{\beta,r}g(t)\geq I_{a,k}^{\beta,r}\psi_1(t)I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_2(t)+I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)I_{a,k}^{\beta,r}g(t),\\
(b) & I_{a,k}^{\beta,r}\varphi_1(t)I_{a,k}^{\alpha,r}g(t)+I_{a,k}^{\alpha,r}\psi_2(t)I_{a,k}^{\beta,r}f(t)\geq I_{a,k}^{\beta,r}\varphi_1(t)I_{a,k}^{\alpha,r}\psi_2(t)+I_{a,k}^{\alpha,r}g(t)I_{a,k}^{\beta,r}f(t),\\
(c) & I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_2(t)I_{a,k}^{\beta,r}\psi_2(t)+I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)I_{a,k}^{\beta,r}g(t)\geq I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_2(t)I_{a,k}^{\beta,r}g(t)+I_{a,k}^{\beta,r}\psi_2(t)I_{a,k}^{\alpha,r}f(t),\\
(d) & I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_1(t)I_{a,k}^{\beta,r}\psi_1(t)+I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)I_{a,k}^{\beta,r}g(t)\geq I_{a,k}^{\alpha,r}\varphi_1(t)I_{a,k}^{\beta,r}g(t)+I_{a,k}^{\beta,r}\psi_1(t)I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)
\end{array}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [27].

**Teorem 3.1.14** $k>0$ için $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ ve $\psi_2$ $[a,b]$ aralığında (3.1.9) ve (3.1.11) şartlarını sağlayan dört integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t\in[a,b]$, $r\geq 0$ ve $\alpha>0$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(r+1)^{\frac{-\alpha}{k}}t^{(r+1)\frac{\alpha}{k}}}{\Gamma_k(\alpha+k)}I_{a,k}^{\alpha,r}(f(t)g(t))-I_{a,k}^{\alpha,r}f(t)I_{a,k}^{\alpha,r}g(t)\right|\\
\leq\ &\sqrt{S_k^r(f,\varphi_1,\varphi_2)S_k^r(g,\psi_1,\psi_2)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

### 3.1.4 $h(x)$-Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.4**

$$L_{p,k}(a,b)=\left\{f:||f||_{L_{p,k}(a,b)}=\left(\int_a^b|f(t)|^pt^kdt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,1\leq p<\infty,k\geq 0\right\}$$

ise $f(t)$ fonksiyonu $L_{p,k}(a,b)$ uzayındadır denir. $k=0$ seçilirse $L_p(a,b)$ uzayına indirgenir $[20,47]$.

**Tanım 3.1.5** $f\in L[0,\infty)$, $h(x)$, $[0,\infty)$ üzerinde pozitif, monoton artan bir fonksiyon, $h'(x)$ türevi $[0,\infty)$'da sürekli ve $h(0)=0$ olsun. $[0,\infty)$ aralığında tanımlı ve $1\leq p<\infty$ için

$$||f||_{X_h^p}=\left(\int_0^\infty|f(t)|^ph'(t)d(t)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

normuna sahip böyle reel değerli Lebesque ölçülebilir $f$ fonksiyonlarının uzayı $X_h^p[0,\infty)$ ile gösterilir. Ayrıca $p=\infty$ için

$$||f||_{X_h^\infty}=\texttt{esssup}_{0\leq t<\infty}[h'(t)f(t)]$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $h(x) = x$ olarak alınırsa $X_h^p[0,\infty)$ uzayı $L_{p,k}[0,\infty)$ uzayı ile çakışır [16].

**Tanım 3.1.6** $f \in X_h^p(0,\infty)$, $h(x)$ $[0,\infty)$ aralığında artan, pozitif monoton fonksiyon ve aynı zamanda $h'(x)$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $h(0) = 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali başka bir $h(x)$ fonksiyonuna göre

$$I_h^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (h(t) - h(x))^{\alpha-1} f(x) h'(x) dx$$

şeklinde tanımlanır [16, 20, 47].

Kaçar ve arkadaşları, 2018 yılında $h(x)$-Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.15** $f$,$h$ ve $h'$, Tanım 3.1.6 'deki şartları sağlayan fonksiyonlar olsun. $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.9) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon ve $t > 0$, $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$I_h^\beta \varphi_1(t) I_h^\alpha f(t) + I_h^\alpha \varphi_2(t) I_h^\beta f(t) \geq I_h^\alpha \varphi_2(t) I_h^\beta \varphi_1(t) + I_h^\alpha f(t) I_h^\beta f(t)$$

eşitsizliği geçerlidir [16].

**Teorem 3.1.16** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon, $h(x)$ ve $h'(x)$ Tanım 3.1.6 'deki şartları sağlayan fonksiyonlar ve $t > 0$, $\alpha, \beta > 0$ olsun. (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
&(a) \quad I_h^\beta \psi_1(t) I_h^\alpha f(t) + I_h^\alpha \varphi_2(t) I_h^\beta g(t) \geq I_h^\beta \psi_1(t) I_h^\alpha \varphi_2(t) + I_h^\alpha f(t) I_h^\beta g(t),\\
&(b) \quad I_h^\beta \varphi_1(t) I_h^\alpha g(t) + I_h^\alpha \psi_2(t) I_h^\beta f(t) \geq I_h^\beta \varphi_1(t) I_h^\alpha \psi_2(t) + I_h^\beta f(t) I_h^\alpha g(t),\\
&(c) \quad I_h^\alpha \varphi_2(t) I_h^\beta \psi_2(t) + I_h^\alpha f(t) I_h^\beta g(t) \geq I_h^\alpha \varphi_2(t) I_h^\beta g(t) + I_h^\beta \psi_2(t) I_h^\alpha f(t),\\
&(d) \quad I_h^\alpha \varphi_1(t) I_h^\beta \psi_1(t) + I_h^\alpha f(t) I_h^\beta g(t) \geq I_h^\alpha \varphi_1(t) I_h^\beta g(t) + I_h^\beta \psi_1(t) I_h^\alpha f(t)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [16].

**Teorem 3.1.17** $f, g, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ ve $\psi_2$ $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ve $h(x)$, $h'(x)$ Tanım 3.1.6 'deki şartları sağlayan fonksiyonlar olsun. Ayrıca $[0,\infty)$ aralığında (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde her $t > 0$, $\alpha > 0$ için

$$\left| \frac{h^\alpha(t)}{\Gamma(\alpha+1)} I_h^\alpha (f(t)g(t)) - I_h^\alpha f(t) I_h^\alpha g(t) \right| \leq \sqrt{T(f, \varphi_1, \varphi_2) T(g, \psi_1, \psi_2)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $T(u,v,w)$

$$\begin{aligned} T(u,v,w) &= \left(I_h^{\alpha}w(t)-I_h^{\alpha}u(t)\right)\left(I_h^{\alpha}u(t)-I_h^{\alpha}v(t)\right)+\frac{h^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}h(v(t)u(t)) \\ &\quad -I_h^{\alpha}v(t)I_h^{\alpha}u(t)+\frac{h^{\alpha(t)}}{\Gamma(\alpha+1)}I_h^{\alpha}(w(t)u(t))-I_h^{\alpha}w(t)I_h^{\alpha}u(t) \\ &\quad +I_h^{\alpha}v(t)I_h^{\alpha}w(t)-\frac{h^{\alpha}(t)}{\Gamma(\alpha+1)}I_h^{\alpha}(v(t)w(t)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [16].

### 3.1.5 Katugampola Kesirli İntegralleri İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.7** $[a,b]$ reel eksen üzerinde sınırlı bir aralık, $f\in L[a,b]$ ve $a<x$ olsun. $\alpha>0$ ve $k\neq -1$ olmak üzere Katugampola kesirli integrali

$$I^{\alpha,k}f(x)=\frac{(k+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(x^{k+1}-t^{k+1}\right)^{\alpha-1}t^k f(t)dt,$$

$$I^{0,k}f(x)=f(x)$$

şeklinde tanımlanır [20].

Kaçar ve arkadaşları, 2015 yılında Katugampola kesirli integrallerini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.18** $f\in L[0,\infty)$ ve $k\geq 0$, $t>0$, $\alpha,\beta\geq 0$ olsun. $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.9) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$I^{\beta,k}\varphi_1(t)I^{\alpha,k}f(t)+I^{\alpha,k}\varphi_2(t)I^{\beta,k}f(t)\geq I^{\alpha,k}\varphi_2(t)I^{\beta,k}\varphi_1(t)+I^{\beta,k}f(t)I^{\beta,k}f(t)$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

**Teorem 3.1.19** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon ve $k\geq 0$, $t>0$, $\alpha,\beta>0$ olsun. (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned} &(a) \quad I^{\beta,k}\psi_1(t)I^{\alpha,k}f(t)+I^{\alpha,k}\varphi_2(t)I^{\beta,k}g(t)\geq I^{\beta,k}\psi_1(t)I^{\alpha,k}\varphi_2(t)+I^{\alpha,k}f(t)I^{\beta,k}g(t), \\ &(b) \quad I^{\beta,k}\varphi_1(t)I^{\alpha,k}g(t)+I^{\alpha,k}\psi_2(t)I^{\beta,k}f(t)\geq I^{\beta,k}\varphi_1(t)I^{\alpha,k}\psi_2(t)+I^{\beta,k}f(t)I^{\alpha,k}g(t), \\ &(c) \quad I^{\alpha,k}\varphi_2(t)I^{\beta,k}\psi_2(t)+I^{\alpha,k}f(t)I^{\beta,k}g(t)\geq I^{\alpha,k}\varphi_2(t)I^{\beta,k}g(t)+I^{\beta,k}\psi_2(t)I^{\alpha,k}f(t), \\ &(d) \quad I^{\alpha,k}\varphi_1(t)I^{\beta,k}\psi_1(t)+I^{\alpha,k}f(t)I^{\beta,k}g(t)\geq I^{\alpha,k}\varphi_1(t)I^{\beta,k}g(t)+I^{\beta,k}\psi_1(t)I^{\alpha}f(t) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [17].

**Teorem 3.1.20** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon ve $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ ve $\psi_2$ $[0,\infty)$ aralığında (3.1.9) ve (3.1.11) şartlarını sağlayan integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde her $t>0$, $k\geq 0$, $\alpha>0$ için

$$\left|\frac{t^{\alpha(k+1)}(k+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha,k}(f(t)g(t)) - I^{\alpha,k}f(t)I^{\alpha,k}g(t)\right| \leq \sqrt{T(f,\varphi_1,\varphi_2)T(g,\psi_1,\psi_2)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $T(u,v,w)$

$$\begin{aligned} T(u,v,w) &= \left(I^{\alpha,k}w(t) - I^{\alpha,k}u(t)\right)\left(I^{\alpha,k}u(t) - I^{\alpha,k}v(t)\right) \\ &+\frac{(k+1)^{1-\alpha}t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha,k}(v(t)u(t)) - I^{\alpha,k}v(t)I^{\alpha,k}u(t) \\ &+\frac{(k+1)^{1-\alpha}t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha,k}(w(t)u(t)) - I^{\alpha,k}w(t)I^{\alpha,k}u(t) \\ &+I^{\alpha,k}v(t)I^{\alpha,k}w(t) - \frac{(k+1)^{1-\alpha}t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha,k}(v(t)w(t)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [17].

### 3.1.6 Genelleştirilmiş Katugampola Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.8** $(a,b)$ aralığındaki $\|\varphi\|_{X_c^p} < \infty$ şartını sağlayan kompleks değerli Lebesque ölçülebilir $\varphi$ dönüşümlerinin uzayı $X_c^p(a,b)$ $(c\in\mathbb{R}\ 1\leq p\leq\infty)$ olsun. Burada

$$\|\varphi\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |x^c\varphi(x)|^p \frac{dx}{x}\right)^{1/p} \quad (1\leq p<\infty)$$

ve

$$\|\varphi\|_{X_c^p} = \texttt{esssup}_{x\in(a,b)}[x^c|\varphi(x)|].$$

şeklinde tanımlıdır.

$c=1/p$ $(1\leq p<\infty)$ için $X_c^p$ uzayı

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty \quad (1\leq p<\infty)$$

$$\|f\|_\infty = \texttt{esssup}_{a\leq t\leq b}|f(t)|$$

normları ile klasik $L_p(a,b)$ uzayına dönüşür [21].

**Tanım 3.1.9** $0\leq a<x<b\leq\infty$, $\varphi\in X_c^p(a,b)$, $\alpha>0$ ve $\beta,\rho,\eta,\kappa\in\mathbb{R}$ olsun. $\varphi$ fonksiyonunun sol ve sağ taraflı kesirli integralleri

$${}^\rho I^{\alpha,\beta}_{a+,\eta,\kappa}\varphi(x) = \frac{\rho^{1-\beta}x^\kappa}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\tau^{\rho(\eta+1)-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}\varphi(\tau)d\tau$$

ve

$$ {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{b-,\eta,\kappa}\varphi(x) = \frac{\rho^{1-\beta}x^{\rho\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\tau^{\kappa+\rho-1}}{(\tau^{\rho}-x^{\rho})^{1-\alpha}}\varphi(\tau)d\tau $$

şeklinde tanımlanır [22].

Sousa ve arkadaşları, 2017 yılında genelleştirilmiş Katugampola kesirli integralini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

Ayrıca $\alpha > 0$, $x > 0$ ve $\beta, \rho, \eta, \kappa \in \mathbb{R}$ olmak üzere gelişimi ve gösterimi kolaylaştırmak için

$$ \Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta) = \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\alpha+1)}\rho^{-\beta}x^{\kappa+\rho(\eta+\alpha)} $$

fonksiyonunu tanımlanmışlardır.

**Teorem 3.1.21** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde her $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $\alpha > 0$, $\rho > 0$ ve $\eta \geq 0$ için

$$ \begin{aligned} & \left| \Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta)\ {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} fg(x) - {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} f(x)\ {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} g(x) \right| \\ \leq\ & \left( \Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta) \right)^2 (M-m)(P-p) \end{aligned} $$

eşitsizliği geçerlidir [41].

**Teorem 3.1.22** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde her $\beta, \kappa \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ ve $\eta \geq 0$ için

$$ \begin{aligned} & \Big( \Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta)\ {}^{\rho}I^{\gamma,\beta}_{\eta,\kappa} fg(x) + \Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\gamma,\eta)\ {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} fg(x) \\ & - {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} f(x)\ {}^{\rho}I^{\gamma,\beta}_{\eta,\kappa} g(x) - {}^{\rho}I^{\gamma,\beta}_{\eta,\kappa} f(x)\ {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} g(x) \Big)^2 \\ \leq\ & \Big[ \big( M\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta) - {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} f(x) \big) \big( {}^{\rho}I^{\gamma,\beta}_{\eta,\kappa} f(x) - m\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\gamma,\eta) \big) \\ & + \big( {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} f(x) - m\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta) \big) \big( M\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\gamma,\eta) - {}^{\rho}I^{\gamma,\beta}_{\eta,\kappa} f(x) \big) \Big] \\ & \times \Big[ \big( P\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta) - {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} g(x) \big) \big( {}^{\rho}I^{\gamma,\beta}_{\eta,\kappa} g(x) - p\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\gamma,\eta) \big) \\ & + \big( {}^{\rho}I^{\alpha,\beta}_{\eta,\kappa} g(x) - p\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\alpha,\eta) \big) \big( P\Lambda^{\rho,\beta}_{x,\kappa}(\gamma,\eta) - {}^{\rho}I^{\gamma,\beta}_{\eta,\kappa} g(x) \big) \Big] \end{aligned} $$

eşitsizliği geçerlidir [41].

### 3.1.7 Hadamard Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.10** $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun $\alpha$. mertebeden Hadamard kesirli integrali, her $x > 1$ için

$$ {}_{H}D^{-\alpha}_{1,x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^x \ln\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t} $$

şeklinde tanımlanır [6].

Chinchane ve arkadaşları, 2014 yılında Hadamard kesirli integralini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.23** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olmak üzere

$$\left|\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D_{1,x}^{-\alpha}fg(t) -{}_{H} D_{1,x}^{-\alpha}f(t){}_{H}D_{1,x}^{-\alpha}g(t)\right| \leq \left(\frac{(\ln t)^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2}(M-m)(P-p)$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

**Teorem 3.1.24** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D_{1,t}^{-\alpha}fg(t) + \frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}{}_{H}D_{1,t}^{-\beta}fg(t)\right.\\
&\left. -{}_{H}D_{1,t}^{-\alpha}f(t){}_{H}D_{1,t}^{-\beta}g(t) - {}_{H}D_{1,t}^{-\beta}f(t){}_{H}D_{1,t}^{-\alpha}g(t)\right)^{2}\\
\leq\ &\left[\left(M\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_{H}D_{1,t}^{-\alpha}f(t)\right)\left({}_{H}D_{1,t}^{-\beta}f(t) - m\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left({}_{H}D_{1,t}^{-\alpha}f(t) - m\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(M\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - {}_{H}D_{1,t}^{-\beta}f(t)\right)\right]\\
&\times\left[\left(P\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - {}_{H}D_{1,t}^{-\alpha}g(t)\right)\left({}_{H}D_{1,t}^{-\beta}g(t) - p\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\right.\\
&\left.+\left({}_{H}D_{1,t}^{-\alpha}g(t) - p\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\left(P\frac{(\ln t)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - {}_{H}D_{1,t}^{-\beta}g(t)\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [7].

### 3.1.8 Hipergeometrik Kesirli İntegraller İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.11** $C_{\lambda}$ uzayı, $C[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonların kümesi, $f_1 \in C[0,\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $p>\lambda$ olmak üzere $x>0$ için $f(x)=x^{p}f_{1}(x)$ formunda temsil edilebilen tüm $f(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır [13].

Kalla ve Rao, 2011 yılında bu $C_{\lambda}$ uzayında Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile ilgili olan aşağıdaki kesirli integrali tanımlamışlar ve bu kesirli integral yardımıyla Grüss tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir:

**Tanım 3.1.12** $f \in C_\lambda$ olsun. $\alpha > max\{0, -(\eta+1)\}$, $\eta - \beta > -1$, $\beta < 1$ için $K^{\alpha,\beta,\eta} f$ kesirli integrali

$$(K^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\eta+1)}{\Gamma(\eta-\beta+1)} x^{\beta} (I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$$

şeklinde tanımlanır [18]. Burada $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f$, $\alpha$. mertebeden sağ taraflı Gauss hipergeometrik kesirli integrali olup $\alpha > 0$, $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(0, \infty)$ aralığında reel değerli sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır [33].

**Teorem 3.1.25** $f, g \in C_\lambda$, $[0, \infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlasın. Bu takdirde her $x > 0$; $\alpha > max\{0, -(\eta+1)\}$; $\eta - \beta > -1$; $\beta < 1$ için

$$\left| K^{\alpha,\beta,\eta} fg(x) - K^{\alpha,\beta,\eta} f(x) K^{\alpha,\beta,\eta} g(x) \right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(P-p)$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

**Teorem 3.1.26** $f$ ve $g$, $[0, \infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$K^{\alpha,\beta,\eta} fg(x) \geq K^{\alpha,\beta,\eta} f(x) K^{\alpha,\beta,\eta} g(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [18].

Curiel ve Galué, [10]'da Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile ilgili bir kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

**Tanım 3.1.13** $\alpha > 0$, $\delta > -1$ ve $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde reel değerli sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için $\alpha$. mertebeden $I_x^{\alpha,\beta,\eta,\delta}$ genelleştirilmiş kesirli integrali

$$I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} f(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta-2\delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\delta} (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\beta+\delta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada ${}_2F_1(\cdot)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu olup

$${}_2F_1(a, b; c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde ve $(a)_n$ Pochhammer sembolü olup $n \in \mathbb{N}$ için

$$(a)_n = a(a+1)...(a+n-1); \quad (a)_0 = 1$$

şeklinde tanımlanır.Ayrıca $\mathbb{N}$ pozitif tam sayı kümesini gösterir.

Wang ve arkadaşları, 2014 yılında $C_\lambda$ uzayında Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile ilgili olan aşağıdaki kesirli integral operatörünü tanımlamışlar ve bu operatörü kullanarak Grüss tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

**Tanım 3.1.14** $f \in C_\lambda$ olsun. $\alpha > max\{0, -(\delta+\eta+1)\}$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\beta < 1$ ve $\delta > -1$ için $K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} f$ kesirli integrali

$$(K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} f)(x) = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\delta+\eta+1)}{\Gamma(\eta-\beta+1)\Gamma(\delta+1)} x^{\beta+\delta} (I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} f)(x)$$

şeklinde tanımlanır [48]. Burada $I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}$, Tanım 3.1.13'de verilen Gauss hipergeometrik kesirli integralidir.

**Teorem 3.1.27** $f, g \in C_\lambda$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında tanımlı, integrallenebilen ve $[0, \infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu takdirde her $x \in [0, \infty)$; $\alpha > 0$, $\delta > -1$ ve $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ için $\alpha + \beta + \delta \geq 0$ ve $\eta \leq 0$ olmak üzere

$$\left| K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} fg(x) - K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} f(x) K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} g(x) \right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(P-p)$$

eşitsizliği geçerlidir [48].

**Teorem 3.1.28** $f$ ve $g$, $[0, \infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Bu takdirde her $x \in [0, \infty)$; $\alpha > 0$, $\delta > -1$ ve $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ için $\alpha + \beta + \delta \geq 0$ ve $\eta \leq 0$ olmak üzere

$$K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} fg(x) \geq K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} f(x) K_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta} g(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [48].

Choi ve arkadaşları, 2015 yılında Tanım 3.1.13'de verilen Gauss hipergeometrik fonksiyonunu içeren kesirli integraller için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.29** $f$ ve $g$, $[0, \infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon, $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ ve $\psi_2$ $[0, \infty)$ aralığında (3.1.9) ve (3.1.11) şartlarını sağlayan dört integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde $t > 0$, $\alpha > max\{0, -\beta-\mu\}$, $\mu > -1$, $\beta < 1$ ve $\beta - 1 < \eta < 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\beta+\eta)t^{-\beta-\mu}}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha+\eta} I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu} f(t)g(t) - I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu} f(t) I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu} g(t) \right| \\ \leq \ & \sqrt{T(f,\varphi_1,\varphi_2)T(g,\psi_1,\psi_2)} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} T(u,v,w) &= (I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}w(t) - I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}u(t))(I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}u(t) - I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}v(t)) \\ &+\frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\beta+\eta)t^{-\beta-\mu}}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha+\eta}I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}v(t)u(t) \\ &-I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}v(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}u(t) \\ &+\frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\beta+\eta)t^{-\beta-\mu}}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha+\eta}I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}w(t)u(t) \\ &-I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}w(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}u(t) + I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}v(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\delta}w(t) \\ &-\frac{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\beta+\eta)t^{-\beta-\mu}}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\mu+\alpha+\eta}I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}v(t)w(t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Akkurt ve arkadaşları, 2016 yılında Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile ilişkili kesirli integral operatörünü tanımlamış ve bu kesirli integral operatörü için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Tanım 3.1.15** $f \in X_h^1$ olsun. $\alpha > max\{0, -(\delta+\eta+1)\}$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\beta < 1$ ve $\delta > -1$ için $K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}f$ kesirli integrali

$$(K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}f)(x) = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\delta+\eta+1)}{\Gamma(\eta-\beta+1)\Gamma(\delta+1)}h(x)^{\beta+\delta}(I_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}f)(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $I_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}f$, $\alpha$. mertebeden genelleştirilmiş Gauss hipergeometrik kesirli integrali olup $\alpha > 0$, $\delta > -1$, $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ ve $h(x)$, $(0, x]$ üzerinde artan, sürekli türeve sahip pozitif monoton bir fonksiyon olmak üzere reel değerli sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} I_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}\{f(x)\} &= \frac{h(x)^{-\alpha-\beta-2\delta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x h(t)^\delta(h(x)-h(t))^{\alpha-1} \\ &\times \left({}_2F_1\left(\alpha+\beta+\delta, -\eta; \alpha; 1-\frac{h(t)}{h(x)}\right)\right)h'(t)f(t)dt \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [3].

**Teorem 3.1.30** $f, g \in X_h^1$ $[a, b]$ aralığında tanımlı, integrallenebilen ve $[0, \infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu takdirde her $x \in [0, \infty)$; $\alpha > 0$, $\delta > -1$ ve $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ için $\alpha + \beta + \delta \geq 0$ ve $\eta \leq 0$ olmak üzere

$$\left|K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}fg(x) - K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}f(x)K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}g(x)\right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(P-p)$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

**Teorem 3.1.31** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. Bu takdirde her $x\in[0,\infty)$; $\alpha>0$, $\delta>-1$ ve $\beta,\eta\in\mathbb{R}$ için $\alpha+\beta+\delta\geq 0$ ve $\eta\leq 0$ olmak üzere

$$K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}fg(x)\geq K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}f(x)K_{h(t)}^{\alpha,\beta,\eta,\delta}g(x)$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

Saxena ve arkadaşları, 2016 yılında Tanım 3.1.13 ile verilen hipergeometrik kesirli integral operatörü yardımıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.32** $f$, $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun ve (3.1.9) şartı sağlansın. Bu takdirde $\alpha>max\{0,-\beta-\mu\}$, $\gamma>max\{0,-\delta-\nu\}$, $\mu,\nu>-1$, $\beta,\delta<1$, $\beta-1<\eta<0$ ve $\delta-1<\zeta<0$ olmak üzere $t>0$ için

$$\begin{aligned}&I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\varphi_1(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\varphi_2(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}f(t)\\ \geq\ &I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\varphi_2(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\varphi_1(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}f(t)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [37].

**Teorem 3.1.33** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ ve $\psi_2$, $[0,\infty)$ aralığında dört integrallenebilen fonksiyon olmak üzere (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde $t>0$, $\alpha>max\{0,-\beta-\mu\}$, $\gamma>max\{0,-\delta-\nu\}$, $\mu,\nu>-1$, $\beta,\delta<1$, $\beta-1<\eta<0$ ve $\delta-1<\zeta<0$ için

$$\begin{aligned}(a)\quad &I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\psi_1(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\varphi_2(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}g(t)\\ \geq\ &I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\varphi_2(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\psi_1(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}g(t),\\ (b)\quad &I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\varphi_1(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}g(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\psi_2(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}f(t)\\ \geq\ &I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\psi_2(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\varphi_1(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}g(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}f(t),\\ (c)\quad &I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\varphi_2(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\psi_2(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}g(t)\\ \geq\ &I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\varphi_2(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}g(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\psi_2(t),\\ (d)\quad &I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\varphi_1(t)I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\psi_1(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}g(t)\\ \geq\ &I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}\varphi_1(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}g(t)+I_t^{\alpha,\beta,\eta,\mu}f(t)I_t^{\gamma,\delta,\zeta,\nu}\psi_1(t)\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [37].

### 3.1.9 Saigo Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.16** $\alpha > 0$ ve $\beta, \eta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde reel değerli sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu için $\alpha$. mertebeden $I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}$ Saigo kesirli integrali

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} f(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada ${}_2F_1(\cdot)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonudur [33].

Chinchane ve arkadaşları, 2014 yılında Saigo kesirli integralini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.34** $u$ ve $v$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon, $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ ve $\psi_2$ $[0,\infty)$ aralığında (3.1.9) ve (3.1.11) şartlarını sağlayan dört integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $x > 0$, $\alpha > max\{0, -\beta\}$, $\beta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[uv(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[v(x)] \right| \\ \leq & \sqrt{T(u, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) T(v, \psi_1(x), \psi_2(x))} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} T(a,b,c) = & \left( I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[c(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)] \right) \left( I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[b(x)] \right) \\ & + \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[ba(x)] \\ & - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[b(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)] \\ & + \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[ca(x)] \\ & - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[c(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[b(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[c(x)] \\ & + \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[bc(x)] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [8].

**Teorem 3.1.35** $u$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun ve (3.1.9) şartı sağlansın. Bu takdirde her $x > 0$, $\alpha > max\{0, -\beta\}$, $\psi > max\{0, -\phi\}$, $\beta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\phi < 1$, $\phi - 1 < \zeta < 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[\Phi_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[\Phi_2(x)] I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[f(x)] \\ \geq & I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[\Phi_2(x)] I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[\Phi_1(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[f(x)] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

Wang ve arkadaşları, 2014 yılında Saigo kesirli integralini içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.36** $f$, $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun ve (3.1.9) şartı sağlansın. Bu takdirde $\alpha > max\{0,-\beta\}$, $\beta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\gamma > max\{0,-\delta\}$, $\delta < 1$ ve $\delta - 1 < \zeta < 0$ olmak üzere $t > 0$ için

$$I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\varphi_1(t)I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi_2(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}f(t) \geq I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi_2(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\varphi_1(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}f(t)$$

eşitsizliği geçerlidir [49].

**Teorem 3.1.37** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ ve $\psi_2$ dört integrallenebilen fonksiyon olmak (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde $t > 0$, $\alpha > max\{0,-\beta\}$, $\beta < 1$, $\beta - 1 < \eta < 0$, $\gamma > max\{0,-\delta\}$, $\delta < 1$ ve $\delta - 1 < \zeta < 0$ için

$$\begin{aligned}
(a) \qquad & I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\psi_1(t)I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi_2(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}g(t) \\
\geq \quad & I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi_2(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\psi_1(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}g(t), \\
(b) \qquad & I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\varphi_1(t)I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}g(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\psi_2(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}f(t) \\
\geq \quad & I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\psi_2(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\varphi_1(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}g(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}f(t), \\
(c) \qquad & I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\varphi_2(t)I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\psi_2(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}g(t) \\
\geq \quad & I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi_2(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}g(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\psi_2(t), \\
(d) \qquad & I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\varphi_1(t)I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\psi_1(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}g(t) \\
\geq \quad & I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi_1(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}g(t) + I_{0,t}^{\alpha,\beta,\eta}f(t)I_{0,t}^{\gamma,\delta,\zeta}\psi_1(t)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir [49].

### 3.1.10 Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.17** $\sigma(k)$ $(k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere,

$$\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}(x) = \mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma(0),\sigma(1),\ldots}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\Gamma(\rho k + \lambda)} x^k, \quad (\rho, \lambda > 0; x \in \mathbb{R})$$

şeklinde verilen fonksiyonların yeni bir sınıfı Raina [32] tarafından tanımlanmıştır. Bu fonksiyon yardımıyla, [32]'de Raina ve [2]'de Agarwal ve arkadaşları, $\lambda, \rho > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ ve $\sigma(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\mathcal{J}_{\rho,\lambda,a^+;\omega}^{\sigma}\varphi(x) = \int_a^x (x-t)^{\lambda-1}\mathcal{F}_{\rho,\lambda}^{\sigma}[\omega(x-t)^{\rho}]\varphi(t)dt, \qquad x > a$$

$$\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,b^-;\omega}\varphi(x)=\int_x^b (t-x)^{\lambda-1}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda}[\omega(t-x)^{\rho}]\varphi(t)dt, \qquad x<b$$

sol ve sağ taraflı kesirli integral operatörlerini tanımlamışlardır.

Tunç ve arkadaşları, 2017 yılında genelleştirilmiş kesirli integrali içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.38** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu takdirde $\sigma(k)$ $(k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere her $t,\rho,\lambda>0$ ve $\omega\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
&\left|t^{\lambda}\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega t^{\rho}]\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0+;\omega}(fg)(t)-[\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0+;\omega}(f)(t)][\mathcal{J}^{\sigma}_{\rho,\lambda,0+;\omega}(g)(t)]\right|\\
\leq\;& \frac{1}{4}t^{2\lambda}\left[\mathcal{F}^{\sigma}_{\rho,\lambda+1}[\omega t^{\rho}]\right]^2(M-m)(P-p)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [46].

**Teorem 3.1.39** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu takdirde $\sigma_1(k)$, $\sigma_2(k)$ $(k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})$ pozitif reel sayıların sınırlı dizileri olmak üzere her $t>0$, $\rho_1,\rho_2>0$, $\lambda_1,\lambda_2>0$ ve $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
&\Big[t^{\lambda_2}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2+1}[\omega_2 t^{\rho_2}]\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0+;\omega_1}(fg)(t)+t^{\lambda_1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1+1}[\omega_1 t^{\rho_1}]\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0+;\omega_2}(fg)(t)\\
&-\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0+;\omega_1}(f)(t)\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0+;\omega_2}(g)(t)-\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0+;\omega_2}(f)(t)\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0+;\omega_1}(g)(t)\Big]^2\\
\leq\;&\Big[\left(Mt^{\lambda_1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1+1}[\omega_1 t^{\rho_1}]-\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0+;\omega_1}(f)(t)\right)\left(\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0+;\omega_2}(f)(t)-mt^{\lambda_2}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2+1}[\omega_2 t^{\rho_2}]\right)\\
&+\left(Mt^{\lambda_2}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2+1}[\omega_2 t^{\rho_2}]-\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0+;\omega_2}(f)(t)\right)\left(\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0+;\omega_1}(f)(t)-mt^{\lambda_1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1+1}[\omega_1 t^{\rho_1}]\right)\Big]\\
&\times\Big[\left(Pt^{\lambda_1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1+1}[\omega_1 t^{\rho_1}]-\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0+;\omega_1}(g)(t)\right)\left(\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0+;\omega_2}(g)(t)-pt^{\lambda_2}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2+1}[\omega_2 t^{\rho_2}]\right)\\
&+\left(Pt^{\lambda_2}\mathcal{F}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2+1}[\omega_2 t^{\rho_2}]-\mathcal{J}^{\sigma_2}_{\rho_2,\lambda_2,0+;\omega_2}(g)(t)\right)\left(\mathcal{J}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1,0+;\omega_1}(g)(t)-pt^{\lambda_1}\mathcal{F}^{\sigma_1}_{\rho_1,\lambda_1+1}[\omega_1 t^{\rho_1}]\right)\Big]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [46].

### 3.1.11 Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.18** $\alpha\in(n,n+1]$, $n=0,1,2,...$ ve $\beta=\alpha-n$ olsun. Bir $f$ fonksiyonunun sol uyumlu kesirli integrali

$$(I^a_{\alpha}f)(t)=\frac{1}{n!}\int_a^t (t-x)^n(x-a)^{\beta-1}f(x)dx$$

ve sağ uyumlu kesirli integrali

$$({}^bI_{\alpha}f)(t)=\frac{1}{n!}\int_t^b (x-t)^n(b-x)^{\beta-1}f(x)dx$$

şeklinde tanımlanır [1].

Mumcu ve Set, 2017 yılında uyumlu kesirli integral operatörünü içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.40** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha\in(n,n+1]$, $n=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)I_\alpha(fg)(t)-(I_\alpha f(t))(I_\alpha g(t))\right|\\ \leq\;&\left(\frac{t^\alpha}{2n!}B(n+1,\alpha-n)\right)^2(M-m)(P-p)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

**Teorem 3.1.41** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha\in(n,n+1]$ ve $\beta\in(k,k+1]$, $n,k=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned}&\left(\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta fg)(t)+\frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_\alpha fg)(t)\right.\\ &\left.-(I_\alpha f)(t)(I_\beta g)(t)-(I_\beta f)(t)(I_\alpha^g)(t)\right)^2\\ \leq\;&\left(\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta f^2)(t)\frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_\alpha f^2)(t)-2(I_\alpha f)(t)(I_\beta f)(t)\right)\\ &\times\left(\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta g^2)(t)\frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_\alpha g^2)(t)-2(I_\alpha g)(t)(I_\beta g)(t)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

**Teorem 3.1.42** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha\in(n,n+1]$ ve $\beta\in(k,k+1]$, $n,k=0,1,2,...$ için

$$\begin{aligned}&\left(\frac{t^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)(I_\beta fg)(t)+\frac{t^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)(I_\alpha fg)(t)\right.\\ &\left.-(I_\alpha f)(t)(I_\beta g)(t)-(I_\beta f)(t)(I_\alpha^g)(t)\right)^2\\ \leq\;&\left[\left(\frac{Mt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)-(I_\alpha f)(t)\right)\left((I_\beta f)(t)-\frac{mt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)\right)\right.\\ &\left.+\left((I_\alpha f)(t)-\frac{mt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)\right)\left(\frac{Mt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)-(I_\beta f)(t)\right)\right]\\ &\times\left[\left(\frac{Pt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)-(I_\alpha g)(t)\right)\left((I_\beta g)(t)-\frac{pt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)\right)\right.\\ &\left.+\left((I_\alpha g)(t)-\frac{pt^\alpha}{n!}B(n+1,\alpha-n)\right)\left(\frac{Pt^\beta}{k!}B(k+1,\beta-k)-(I_\beta g)(t)\right)\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [28].

### 3.1.12 Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

**Tanım 3.1.19** $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere bir $f$ fonksiyonunun sol ve sağ taraflı yeni uyumlu kesirli integral operatörü sırasıyla

$$
{}_{a}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{a}^{x} \left( \frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}} dt \tag{3.1.15}
$$

ve

$$
{}^{\beta}\mathfrak{J}_{b}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{x}^{b} \left( \frac{(b-x)^{\alpha} - (b-t)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(b-t)^{1-\alpha}} dt
$$

şeklinde tanımlanır [15].

(3.1.15)'de $a = 0$ alınırsa

$$
{}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{x} \left( \frac{x^{\alpha} - t^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} dt
$$

olur [39].

Set ve arkadaşları, 2018 yılında yeni uyumlu kesirli integral operatörünü içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.43** $f$ ve $g$, $[0, \infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $\alpha, \beta > 0$ için

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{t^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}} \, {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(fg)(t) - {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(f)(t) \, {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(g)(t) \right| \\
\leq & \left( \frac{t^{\alpha\beta}}{2\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}} \right)^{2} (M-m)(P-p)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır [39].

**Teorem 3.1.44** $f$ ve $g$, $[0, \infty)$ aralığında (3.1.4) şartını sağlayan iki integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $\alpha, \beta, \tau > 0$ için

$$
\begin{aligned}
& \left( \frac{t^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}} \, {}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}(fg)(t) + \frac{t^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^{\tau}} \, {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(fg)(t) \right. \\
& \left. - \, {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(f)(t) \, {}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}(g)(t) - {}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}(f)(t) \, {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(g)(t) \right)^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \left[\left(\frac{Mt^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}} - {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(f)(t)\right)\left({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}(f)(t) - \frac{mt^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^{\tau}}\right)\right.\\
& \left.+\left(\frac{Mt^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^{\tau}} - {}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}(f)(t)\right)\left({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(f)(t) - \frac{mt^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}\right)\right]\\
& \times\left[\left(\frac{Pt^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}} - {}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(g)(t)\right)\left({}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}(g)(t) - \frac{pt^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^{\tau}}\right)\right.\\
& \left.+\left(\frac{Pt^{\alpha\tau}}{\Gamma(\tau+1)\alpha^{\tau}} - {}^{\tau}\mathfrak{J}^{\alpha}(g)(t)\right)\left({}^{\beta}\mathfrak{J}^{\alpha}(g)(t) - \frac{pt^{\alpha\beta}}{\Gamma(\beta+1)\alpha^{\beta}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

Rahman ve arkadaşları, 2018 yılında yeni uyumlu kesirli integral operatörünü içeren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

**Teorem 3.1.45** $f$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. (3.1.9) şartı sağlansın. Bu takdirde $t>0$, $\alpha,\beta>0$ için

$$
{}^{\beta}J^{\mu}\varphi_1(t)^{\alpha}J^{\mu}f(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_2(t)^{\beta}J^{\mu}f(t) \geq {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_2(t)^{\beta}J^{\mu}\varphi_1(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}f(t)^{\beta}J^{\mu}f(t)
$$

eşitsizliği geçerlidir [31].

**Teorem 3.1.46** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde $t>0$, $\alpha,\beta>0$ için

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad {}^{\beta}J^{\mu}\psi_1(t)^{\alpha}J^{\mu}f(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_2(t)^{\beta}J^{\mu}g(t) \geq {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_2(t)^{\beta}J^{\mu}\psi_1(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}f(t)^{\beta}J^{\mu}g(t),\\
&(b) \quad {}^{\beta}J^{\mu}\varphi_1(t)^{\alpha}J^{\mu}g(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}\psi_2(t)^{\beta}J^{\mu}f(t) \geq {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_1(t)^{\beta}J^{\mu}\psi_2(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}f(t)^{\beta}J^{\mu}g(t),\\
&(c) \quad {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_2(t)^{\beta}J^{\mu}\psi_2(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}f(t)^{\beta}J^{\mu}g(t) \geq {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_2(t)^{\beta}J^{\mu}g(t) + {}^{\beta}J^{\mu}\psi_2(t)^{\alpha}J^{\mu}f(t),\\
&(d) \quad {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_1(t)^{\beta}J^{\mu}\psi_1(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}f(t)^{\beta}J^{\mu}g(t) \geq {}^{\alpha}J^{\mu}\varphi_1(t)^{\beta}J^{\mu}g(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}f(t)^{\beta}J^{\mu}\psi_1(t)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri geçerlidir [31].

**Teorem 3.1.47** $f$, $g$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ ve $\psi_2$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun, (3.1.9) ve (3.1.11) şartları sağlansın. Bu takdirde her $t>0$, $\alpha>0$ için

$$
\left|\frac{t^{\mu\alpha}}{\mu^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{}^{\alpha}J^{\mu}fg(t) - {}^{\alpha}J^{\mu}f(t)^{\alpha}J^{\mu}g(t)\right| \leq \sqrt{T(f,\varphi_1,\varphi_2)T(g,\psi_1,\psi_2)}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $T(u,v,w)$

$$
\begin{aligned}
T(u,v,w) \quad = \quad & \left({}^{\alpha}J^{\mu}w(t) - {}^{\alpha}J^{\mu}u(t)\right)\left({}^{\alpha}J^{\mu}u(t) - {}^{\alpha}J^{\mu}v(t)\right)\\
& +\frac{t^{\mu\alpha}}{\mu^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{}^{\alpha}J^{\mu}vu(t) - {}^{\alpha}J^{\mu}v(t)^{\alpha}J^{\mu}u(t) + \frac{t^{\mu\alpha}}{\mu^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{}^{\alpha}J^{\mu}wu(t)\\
& -{}^{\alpha}J^{\mu}w(t)^{\alpha}J^{\mu}u(t) + {}^{\alpha}J^{\mu}v(t)^{\alpha}J^{\mu}w(t) - \frac{t^{\mu\alpha}}{\mu^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{}^{\alpha}J^{\mu}vw(t)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır [31].

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

## 4.1 Genişletilmiş Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörü İçin Grüss Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

**Tanım 4.1.1** $E_\alpha(z)$ ile ifade edilen temel Mittag-Leffler fonksiyonu $Re(\alpha) > 0$ için Mittag-Leffler tarafından,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}$$

şeklinde tanımlanır [25].

**Tanım 4.1.2** $\alpha, \beta, \rho, \lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $\epsilon(\alpha, \beta, \rho, \lambda)$ kesirli integral operatörü Prabhakar tarafından,

$$\epsilon(\alpha, \beta, \rho, \lambda)f(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E^{\rho}_{\alpha,\beta} \lambda (x-t)^\alpha f(t)dt, \quad a < x < b \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlanır[29]. Burada

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho)_n z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta) n!} \tag{4.1.2}$$

ve $\Gamma$, gama fonksiyonudur.

**Tanım 4.1.3** $z, \beta, \gamma, \omega, \kappa \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > max\{0, Re(\kappa) - 1\}$; $min\{Re(\beta), Re(\kappa)\} > 0$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $\epsilon^{\omega;\gamma,\kappa}_{a^+;\alpha,\beta}\varphi$ kesirli integral operatörü Srivastava ve Tomowski tarafından,

$$(\epsilon^{\omega;\gamma,\kappa}_{a^+;\alpha,\beta}\varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}[\omega(x-t)^\alpha]\varphi(t)dt \quad (x > a) \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanır[42]. Burada $E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonu,

$$E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!} \tag{4.1.4}$$

şeklindedir[42].

Özel olarak $\kappa = q\,(q \in (0,1) \cup \mathbb{N})$ ve $min\{Re(\beta), Re(\gamma)\} > 0$ alınırsa, Shukla ve Prajapati tarafından tanımlanan,

$$E^{\gamma,q}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{qn}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!} \tag{4.1.5}$$

fonksiyonu elde edilir[40]. Burada $(\gamma)_{qn}$,

$$(\gamma)_{qn} = \frac{\Gamma(\gamma + qn)}{\Gamma(\gamma)}$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş Pochhammer sembolünü gösterir ve $\Gamma$, gama fonksiyonudur.

**Tanım 4.1.4** $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $min\{Re(\alpha),\ Re(\beta),\ Re(\gamma),\ Re(\delta)\} > 0$, $p, q > 0$, $q \leq Re(\alpha) + p$, $f \in L[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ olsun. $\epsilon^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p,\omega,a^+}$ kesirli integral operatörü Salim ve Faraj tarafından,

$$(\epsilon^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p,\omega,a^+} f)(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(\omega(x-t)^{\alpha}) f(t)dt \tag{4.1.6}$$

şeklinde tanımlanır[34]. Burada

$$E^{\gamma,\delta,q}_{\alpha,\beta,p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{qn}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{(\delta)_{pn}} \tag{4.1.7}$$

şeklinde olup $(\gamma)_{qn}$ genelleştirilmiş Pochhammer sembolünü gösterir ve $\Gamma$, gama fonksiyonudur.

**Tanım 4.1.5** $p \geq 0$, $q > 0$, $\omega, \delta, \lambda, \sigma, c, \rho \in \mathbb{C}$, $Re(c) > 0$, $Re(\rho) > 0$, $Re(\sigma) > 0$, $Re(\delta) > 0$ $f \in L[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ olsun. $(\epsilon^{\omega,\delta,q,c}_{a^+,\rho,\sigma} f)$ kesirli integral operatörü Rahman ve arkadaşları tarafından,

$$(\epsilon^{\omega,\delta,q,c}_{a^+,\rho,\sigma} f)(x) = \int_a^x (x-\tau)^{\sigma-1} E^{\delta,q,c}_{p,\sigma}(\omega(x-\tau)^{\rho}; p) f(\tau)d\tau \tag{4.1.8}$$

şeklinde tanımlanır[30]. Burada $E^{\delta,q,c}_{\rho,\sigma}(z;p)$ fonksiyonu,

$$E^{\delta,q,c}_{\rho,\sigma}(z;p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(\delta + nq, c - \delta)}{B(\delta, c-\delta)} \frac{(c)_{nq}}{\Gamma(\rho n + \sigma)} \frac{z^n}{n!} \tag{4.1.9}$$

şeklindedir. Burada $B$, beta fonksiyonu, $B_p$, genişletilmiş beta fonksiyonu, $(\gamma)_{qn}$, genelleştirilmiş Pochhammer sembolü ve $\Gamma$, gama fonksiyonudur.

Mittag-Leffler fonksiyonunun daha genişletilmiş ve genelleştirilmiş versiyonu literatürde aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**Tanım 4.1.6** $\rho, \sigma, \tau, \delta, c \in \mathbb{C}$, $Re(\rho), Re(\sigma), Re(\tau) > 0, Re(c), Re(\delta), > 0$ ile $p \geq 0$, $r > 0$ ve $0 < q \leq r + Re(\rho)$ olsun. $E^{\delta,r,q,c}_{\rho,\sigma,\tau}(z;p)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E^{\delta,r,q,c}_{\rho,\sigma,\tau}(z;p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_p(\delta + nq, c - \delta)}{B(\delta, c-\delta)} \frac{(c)_{nq}}{\Gamma(\rho n + \sigma)} \frac{z^n}{(\tau)_{nr}}. \tag{4.1.10}$$

şeklinde tanımlanır [4]. Burada $B$, beta fonksiyonu, $B_p$, genişletilmiş beta fonksiyonu, $(c)_{nq}$, genelleştirilmiş Pochhammer sembolü, ve $\Gamma$, gama fonksiyonudur.

**Sonuç 4.1.1** (4.1.10)'da verilen Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonların bir genellemesidir:

(i) $p = 0$ alınırsa, (4.1.10) Salim ve Faraj tarafından tanımlanan (4.1.7) fonksiyonuna indirgenir.

(ii) $\tau = r = 1$ alınırsa, (4.1.10) Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan (4.1.9) fonksiyonuna indirgenir.

(iii) $p = 0$ ve $\tau = r = 1$ alınırsa, (4.1.10) Shukla ve Prajapati tarafından tanımlanan (4.1.5) fonksiyonuna indirgenir(Ayrıca bkz.[42]).

(iv) $p = 0$ ve $\tau = r = q = 1$ alınırsa, (4.1.10) Prabhakar tarafından tanımlanan (4.1.2) fonksiyonuna indirgenir.

**Teorem 4.1.1** (4.1.10)'deki seri $q < r + Re(\rho)$ olması koşuluyla $z$'nin tüm değerleri için mutlak yakınsaktır. Ayrıca, $q = r + Re(\rho)$ ise, $|z| < \frac{r^r \Re(\rho)^{Re(\rho)}}{q^q}$ için $E^{\delta,q,r,c}_{\rho,\sigma,\tau}(z;p)$ yakınsaktır[4].

Genişletilmiş genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla elde edilen $\epsilon^{\omega,\delta,q,r,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau} f$ kesirli integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

**Tanım 4.1.7** $\omega, \rho, \sigma, \tau, \delta, c \in \mathbb{C}$, $Re(\rho)$, $Re(\sigma)$, $Re(\tau) > 0$, $Re(c)\, Re(\delta) > 0$ ile $p \geq 0$, $q > 0$ ve $0 < r \leq q + Re(\rho)$, $f \in L[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ olsun. $\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau} f$ genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörü,

$$\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau} f\right)(x;p) = \int_a^x (x-t)^{\sigma-1} E^{\delta,r,q,c}_{\rho,\sigma,\tau}(\omega(x-t)^{\rho};p) f(t)dt \tag{4.1.11}$$

şeklinde tanımlanır[4].

**Sonuç 4.1.2** (4.1.11)'de verilen kesirli integral operatörü aşağıdaki kesirli integral operatörlerinin bir genellemesidir:

(i) $p = 0$ alınırsa, (4.1.11) Salim ve Faraj tarafından tanımlanan (4.1.6) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(ii) $\tau = q = 1$ alınırsa, (4.1.11) Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan (4.1.8) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(iii) $p = 0$ ve $\tau = q = 1$ alınırsa, (4.1.11) Srivastava ve Tomovski tarafından tanımlanan (4.1.3) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(iv) $p = 0$ ve $\tau = r = q = 1$ alınırsa, (4.1.11) Prabhakar tarafından tanımlanan (4.1.1) kesirli integral operatörüne indirgenir.

(v) $p = \omega = 0$ alınırsa, $I^{\sigma}_{a+}$ sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integraline indirgenir.

Bu operatör ile ilgili şu özelliği verebiliriz:

**Teorem 4.1.2** $\omega, \rho, \sigma, \tau, \delta, c \in \mathbb{C}$, $Re(\rho)$, $Re(\sigma)$, $Re(\tau) > 0$, $Re(c) > Re(\delta) > 0$, $p \geq 0$, $0 < r \leq q + Re(\rho)$ ile $f \in L[a,b]$, $x \in [a,b]$ olsun. $\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau}$ kesirli integral operatörü $L[a,b]$ üzerinde sınırlı ve

$$||\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{a^+,\rho,\sigma,\tau} f||_1 \leq C||f||_1$$

eşitsizliği geçerlidir[4].
Burada $C$ $(0 < C < \infty)$ sabiti aşağıda verildiği gibidir.

$$C = (b-a)^{Re(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|B_p(\delta + nr, c-\delta)|}{|B(\delta, c-\delta)|} \frac{|(c)_{nr}|}{\big(Re(\rho)n + Re(\sigma)\big)|\Gamma(\rho n + \sigma)|} \frac{|\omega(b-a)^{Re(\rho)}|^n}{|(\tau)_{nq}|}.$$

Bu bölümde yukarıda verilen tanım ve teoremlerden hareketle, genişletilmiş genelleştirilmiş kesirli integral operatörünü kullanarak Grüss ve Grüss tipli eşitsizliklerin yeni genelleştirmeleri elde edilmiştir.

**Lemma 4.1.1** $f$, $[0, \infty)$ aralığında

$$m \leq f(x) \leq M \tag{4.1.12}$$

şartı altında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned} & (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau} 1)(t;p) \Big( (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau} f)(t;p) \Big)^2 \\ = & \Big( M(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau} 1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau} f)(t;p) \Big) \Big( (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau} f)(t;p) - m(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau} 1)(t;p) \Big) \\ & -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau} 1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau} [M-f][f-m])(t;p) \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** $f$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen ve (4.1.12) şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Herhangi $s,l\in[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} & (M-f(l))\,(f(s)-m)+(M-f(s))\,(f(l)-m) \\ & -(M-f(s))\,(f(s)-m)-(M-f(l))\,(f(l)-m) \\ = \; & f^2(s)+f^2(l)-2f(s)f(l) \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

eşitliği yazılır. (4.1.14) eşitliği $(t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)$ ile çarpılıp $[0,t]$ üzerinde $x$'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & (M-f(l))\left(\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)f(s)ds\right. \\ & \left.-m\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)ds\right) \\ & +\left(M\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)ds\right. \\ & \left.-\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)f(s)ds\right)(f(l)-m) \\ & -\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)\,(M-f(s))\,(f(s)-M)\,ds \\ & -(M-f(l))\,(f(l)-m)\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)ds \\ = \; & \int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)f^2(s)ds+f^2(l)\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)ds \\ & -2f(l)\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)f(s)ds \end{aligned}$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile,

$$\begin{aligned} & (M-f(l))\left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)-m(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)\right) \\ & +\left(M(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)-(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)\right)(f(l)-m) \\ & -(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[M-f][f-m])(t;p)-(M-f(l))\,(f(l)-m)\,(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p) \\ = \; & (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f^2)(t;p)+f^2(l)(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)-2f(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

yazılır. Şimdi (4.1.15) eşitliği $(t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)$ ile çarpılıp $[0,t]$ üzerinde $x$'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(M\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl-\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)f(l)dl\right) \\ & \times\left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)-m(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)\right) \\ & +\left(\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)f(l)dl-m\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times\Big(M(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t;p)\Big)\\
& -\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[M-f][f-m])(t;p)\\
& -\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)\,(M-f(l))\,(f(l)-m)\,dl(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\\
= & \int_0^t (t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2)(t;p)\\
& +\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)f^2(l)dl(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\\
& -\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)f(l)dl2(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t;p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile

$$
\begin{aligned}
& \Big(M(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t;p)\Big)\Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t;p)-m(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\Big)\\
& +\Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t;p)-m(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\Big)\\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[M-f][f-m])(t;p)\\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[M-f][f-m])(t;p)\\
= & (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2)(t;p)+(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\\
& -2(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t;p) \qquad (4.1.16)
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Sonuç 4.1.3** Lemma 4.1.1'de $p=\omega=0$ alalım. Bu takdirde Lemma 3.1.1'deki eşitlik elde edilir.

**Teorem 4.1.3** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen ve

$$
m\le f(x)\le M,\ k\le g(x)\le K;\ m,M,k,K\in\mathbb{R},\ x\in[a,b]. \qquad (4.1.17)
$$

şartını sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$
\begin{aligned}
& \left|\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}fg\right)(t;p)-\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g\right)(t;p)\right|\\
\le & \left(\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\right)^2(M-m)(K-k) \qquad (4.1.18)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** $f$ ve $g$, Teorem 4.1.3 deki şartları sağlayan iki fonksiyon olsun.

$$
H(s,l)=(f(s)-f(l))\,(g(s)-g(l))\,;\ s,l\in(0,t),\ t>0 \qquad (4.1.19)
$$

eşitliğini tanımlayalım. (4.1.19) eşitliği $(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)$; $s,l\in(0,t)$ ile çarpılıp $(0,t)$ üzerinde $s$ ve $l$'ye göre çift katlı integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)H(s,l)dsdl\\
=\;& 2\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}fg\right)(t;p)\\
&-2\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g\right)(t;p)
\end{aligned}\tag{4.1.20}$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)H(s,l)dsdl\\
=\;&\int_0^t\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}\\
&\times E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)\left(f(s)-f(l)\right)\left(g(s)-g(l)\right)dsdl\\
\leq\;&\left[\int_0^t\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}\right.\\
&\left.\times E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)\left(f(s)-f(l)\right)^2dsdl\right]^{1/2}\\
&\times\left[\int_0^t\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}\right.\\
&\left.\times E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)\left(g(s)-g(l)\right)^2dsdl\right]^{1/2}\\
=\;&\left[\int_0^t\left(\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)f^2(s)ds\right.\right.\\
&-2\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)f(s)f(l)ds\\
&\left.\left.+\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)f^2(l)ds\right)(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\right]^{1/2}\\
&\times\left[\int_0^t\left(\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)g^2(s)ds\right.\right.\\
&-2\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)g(s)g(l)ds\\
&\left.\left.+\int_0^t(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)g^2(l)ds\right)(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\right]^{1/2}\\
=\;&\left[\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2\right)(t;p)\int_0^t(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\right.\\
&-2\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)\int_0^t(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)f(l)dl
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)f^2(l)dl\Bigg]^{1/2} \\
&\times\Bigg[\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g^2\right)(t;p)\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl \\
&-2\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)g(l)dl \\
&+\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\int_0^t (t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)g^2(l)dl\Bigg]^{1/2} \\
= &\left[2\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f^2\right)(t;p)-2\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)^2\right]^{1/2} \\
&\times\left[2\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g^2\right)(t;p)-2\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}fg\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right]^2 \\
\leq &\left[\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f^2\right)(t;p)-\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)^2\right] \\
&\times\left[\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g^2\right)(t;p)-\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right)^2\right] \qquad (4.1.21)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

$$(M-f(x))\,(f(x)-m)\geq 0 \ ve \ (K-g(x))\,(g(x)-k)\geq 0$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[M-f][f-m]\right)(t;p)\geq 0, \\
\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[K-g][g-k]\right)(t;p)\geq 0
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri yazılır. Lemma 4.1.1'den

$$
\begin{aligned}
&\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f^2\right)(t;p)-\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)^2 \\
\leq &\left(M\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right) \\
&\times\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right) \qquad (4.1.22)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g^2\right)(t;p)-\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right)^2 \\
\leq &\left(K\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right) \\
&\times\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)-k\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right) \qquad (4.1.23)
\end{aligned}
$$

yazılır. (4.1.21), (4.1.22) ve (4.1.23) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}fg\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right]^2 \\
\leq & \left(M\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right) \\
& \times\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right) \\
& \times\left(K\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right) \\
& \times\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)-k\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right) \qquad (4.1.24)
\end{aligned}$$

elde edilir. $4rs \leq (r+s)^2$ $r,s \in \mathbb{R}$ temel eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& 4\left(M\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right) \\
\leq & \left(\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)(M-m)\right)^2 \qquad (4.1.25)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& 4\left(K\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)-k\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right) \\
\leq & \left(\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)(K-k)\right)^2 \qquad (4.1.26)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.1.24), (4.1.25) ve (4.1.26) eşitsizliklerinden istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.1.4** (4.1.18) eşitsizliğinde parametrelerin farklı seçenekleri için

(i) $p = 0$ alınırsa [34]'de tanımlanan Salim-Faraj kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(ii) $\tau = q = 1$ alınırsa [30]'de Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\tau = q = 1$ alınırsa [42]'da tanımlanan Srivastava-Tomovski kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\tau = r = q = 1$ alınırsa [29]'de tanımlanan Prabhakar kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.5** (4.1.18) eşitsizliğinde $p = \omega = 0$ alınırsa (3.1.5)'deki Riemann-Liouville için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Lemma 4.1.2** $f$ ve $g$ $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned}
&\Big[\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}fg\right)(t;p)+\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}fg\right)(t;p)\\
&-\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g\right)(t;p)-\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g\right)(t;p)\Big]^2\\
\leq\ &\Big[\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f^2\right)(t;p)+\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2\right)(t;p)\\
&-2\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f\right)(t;p)\Big]\\
&\times\Big[\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g^2\right)(t;p)+\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g^2\right)(t;p)\\
&-2\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g\right)(t;p)\Big] \qquad (4.1.27)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** Teorem 4.1.3 deki benzer yöntem kullanılarak (4.1.19) eşitliğinin her tarafı $(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\theta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)$; $s,l\in(0,t)$ çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $s$ ve $l$'ye göre çift katlı integrali alınır, ardından Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.1.6** (4.1.27) eşitsizliğinde $p=\omega=0$ alınırsa (3.1.6) eşitsizliği elde edilir.

**Lemma 4.1.3** $f$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen (4.1.12) şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned}
&\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f^2\right)(t;p)+\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2\right)(t;p)\\
&-2\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f\right)(t;p)\\
=\ &\left(M\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)-\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1\right)(t;p)\right)\\
&+\left(M\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1\right)(t;p)-\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\right)\\
&-\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}[M-f][f-m]\right)(t;p)\\
&-\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1\right)(t;p)\left(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[M-f][f-m]\right)(t;p) \qquad (4.1.28)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** (4.1.15) eşitliği $(t-l)^{\theta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}(\omega(t-l)^{\alpha};p)$; $l\in(0,t)$ ile çarpılır ve $[0,t]$ üzerinde

$x$'e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right)\int_{0}^{t}(M-f(l))(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\\
&+\left(M\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)\int_{0}^{t}(f(l)-m)(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\\
&-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[M-f][f-m]\right)(t;p)\int_{0}^{t}(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\\
&-\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\int_{0}^{t}(M-f(l))(f(l)-m)(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\\
=\;&\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f^{2}\right)(t;p)\int_{0}^{t}(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\\
&+\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\int_{0}^{t}f^{2}(l)(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl\\
&-2\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\int_{0}^{t}f(l)(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)dl
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.1.7** Lemma 4.1.3 'de $p=\omega=0$ alalım. Bu takdirde (3.1.7) eşitliği elde edilir.

**Teorem 4.1.4** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned}
&\Big[\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}fg\right)(t;p)+\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}fg\right)(t;p)\\
&-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g\right)(t;p)\Big]^{2} \qquad (4.1.29)\\
\leq\;&\Big[\left(M\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right)\\
&+\left(M\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-m\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right)\Big]\\
&\times\Big[\left(K\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-k\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right)\\
&+\left(K\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)-\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)\right)\left(\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f\right)(t;p)-k\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\right)\Big]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** $(M-f(x))\,(f(x)-m)\geq 0$ ve $(K-g(x))\,(g(x)-k)\geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&-\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[M-f][f-m]\right)(t;p)\\
&-\left(\epsilon_{0^{+},\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[M-f][f-m]\right)(t;p)\leq 0 \qquad (4.1.30)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&-\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[K-g][g-k]\right)(t;p)\\
&-\left(\epsilon_{0^+,\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1\right)(t;p)\left(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[K-g][g-k]\right)(t;p)\leq 0 \qquad (4.1.31)
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri yazılır. $f$ ve $g$ için Lemma 4.1.2, Lemma 4.1.3 ve (4.1.30), (4.1.31) eşitsizlikleri kullanılarak (4.1.29) eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.8** (4.1.29) eşitsizliğinde parametrelerin farklı seçenekleri için

(i) $p = 0$ alınırsa [34]'de tanımlanan Salim-Faraj kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(ii) $\tau = q = 1$ alınırsa [30]'de Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\tau = q = 1$ alınırsa [42]'da tanımlanan Srivastava-Tomovski kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\tau = r = q = 1$ alınırsa [29]'de tanımlanan Prabhakar kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.9** (4.1.29)'da $p = \omega = 0$ alınırsa (3.1.8)'deki Riemann-Liouville kesirli integrali için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.1.5** $f$, $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen

$$\varphi_1(t) \leq f(t) \leq \varphi_2(t) \quad \forall t \in [0,\infty) \qquad (4.1.32)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar olsun. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$
\begin{aligned}
&(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)+(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)\\
\geq\; &(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t;p)+(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \qquad (4.1.33)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

**İspat.** (4.1.32) eşitsizliğinden, her $s \geq 0$, $l \geq 0$ için

$$(\varphi_2(s) - f(s))\,(f(l) - \varphi_1(l)) \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi_2(s)f(l)+\varphi_1(l)f(s)\geq\varphi_1(l)\varphi_2(s)+f(s)f(l) \tag{4.1.34}$$

yazılır. (4.1.34) eşitsizliğinin her iki tarafı $(t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)$, $s\in(0,t)$, $t>0$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $s$'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & f(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t;p)+\varphi_1(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \\ \geq\ & \varphi_1(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t;p)+f(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \end{aligned} \tag{4.1.35}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.35) eşitsizliğinin her iki tarafı $(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)$ $l\in(0,t)$, $t>0$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $l$'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)+(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \\ \geq\ & (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t;p)+(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)+(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Sonuç 4.1.10** $f$, $t\in[0,\infty)$ ve $m,M\in\mathbb{R}$ olmak üzere $m\leq f(t)\leq M$ şartını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $t>0$ ve Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned} & m(\epsilon_{0^+,\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)+M(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \\ \geq\ & mM(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{0^+,\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)+(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t;p) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.11** (4.1.33) eşitsizliğinde parametrelerin farklı seçenekleri için

(i) $p=0$ alınırsa [34]'de tanımlanan Salim-Faraj kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(ii) $\tau=q=1$ alınırsa [30]'de Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iii) $p=0$ ve $\tau=q=1$ alınırsa [42]'da tanımlanan Srivastava-Tomovski kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iv) $p=0$ ve $\tau=r=q=1$ alınırsa [29]'de tanımlanan Prabhakar kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.12** (4.1.33) 'de $p = \omega = 0$ alınırsa (3.1.10)'deki Riemann-Liouville kesirli integrali için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 4.1.6** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun. (4.1.32) şartını ve ayrıca $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen $\psi_1$ ve $\psi_2$ fonksiyonları

$$\psi_1(t) \leq g(t) \leq \psi_2(t), \quad \forall t \in [0,\infty) \tag{4.1.36}$$

şartını sağlasın. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned}
(a) \quad & (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p) \qquad (4.1.37)\\
& \geq (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p),\\
(b) \quad & (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)\\
& \geq (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p),\\
(c) \quad & (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\\
& \geq (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad & (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\\
& \geq (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

**İspat.** (a): (4.1.32) ve (4.1.36) eşitsizlikleri yardımıyla her $t \in [0,\infty)$ için

$$(\varphi_2(s) - f(s))\,(g(l) - \psi_1(l)) \geq 0$$

yani

$$\varphi_2(s)g(l) + \psi_1(l)f(s) \geq \psi_1(l)\varphi_2(s) + f(s)g(l) \tag{4.1.38}$$

yazılır. (4.1.38) eşitsizliğinin her iki tarafı $s \in (0,t)$ olmak üzere $(t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $s$'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& g(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p) + \psi_1(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)\\
\geq\ & \psi_1(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p) + g(l)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p) \qquad (4.1.39)
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (4.1.39) eşitsizliğinin her iki tarafı $l \in (0,t)$ olmak üzere $(t-l)^{\theta-1}E_{\alpha,\theta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $l$'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\\
\geq\ & (\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p) + (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\theta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p) \qquad (4.1.40)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} (b) \qquad & (\psi_2(s) - g(s))\,(f(l) - \varphi_1(l)) \geq 0, \\ (c) \qquad & (\varphi_2(s) - f(s))\,(g(l) - \psi_2(l)) \leq 0, \\ (d) \qquad & (\varphi_1(s) - f(s))\,(g(l) - \psi_1(l)) \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri kullanılarak $(b), (c), (d)$ ispatlanır.

**Sonuç 4.1.13** $f$ ve $g$, $[0, \infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon ve $m, M, k, K \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m \leq f(t) \leq M, \quad k \leq g(t) \leq K, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

olsun. Bu takdirde Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned} (a_1) \qquad & k(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) + M(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g)(t,p) \\ & \geq kM(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g)(t,p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_1) \qquad & m(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g)(t,p) + K(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f)(t,p) \\ & \geq mK(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}f)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g)(t,p), \\ (c_1) \qquad & MK(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g)(t,p) \\ & \geq M(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g)(t,p) + K(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p), \\ (d_1) \qquad & mk(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p) + (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g)(t,p) \\ & \geq m(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\theta,\tau}g)(t,p) + k(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\theta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

**Sonuç 4.1.14** (4.1.37) eşitsizliğinde parametrelerin farklı seçenekleri için

(i) $p = 0$ alınırsa [34]'de tanımlanan Salim-Faraj kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(ii) $\tau = q = 1$ alınırsa [30]'de Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\tau = q = 1$ alınırsa [42]'da tanımlanan Srivastava-Tomovski kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\tau = r = q = 1$ alınırsa [29]'de tanımlanan Prabhakar kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.15** (4.1.37) eşitsizliğinde $p = \omega = 0$ alınırsa (3.1.12) eşitsizliği elde edilir.

**Lemma 4.1.4** $f$, $\varphi_1$ ve $\varphi_2$, $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar olsun. (4.1.32) şartı sağlansın. Bu takdirde $t > 0$ ve Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında

$$\begin{aligned}
& (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2)(t,p) - \Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)\Big)^2 \\
= \; & \Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p) - (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)\Big)\Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) - (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)\Big) \\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[\varphi_2 - f][f-\varphi_1])(t,p) \\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1 f)(t,p) - (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) \\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2 f)(t,p) - (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) \\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p) - (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1\varphi_2)(t,p) \quad (4.1.41)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** Herhangi $s > 0$ ve $l > 0$ için

$$\begin{aligned}
& (\varphi_2(l) - f(l))(f(s) - \varphi_1(s)) + (\varphi_2(s) - f(s))(f(l) - \varphi_1(l)) \\
& - (\varphi_2(s) - f(s))(f(s) - \varphi_1(s)) - (\varphi_2(l) - f(l))(f(l) - \varphi_1(l)) \\
= \; & f^2(s) + f^2(l) - 2f(s)f(l) + \varphi_2(l)f(s) + \varphi_1(s)f(l) - \varphi_1(s)\varphi_2(l) \\
& +\varphi_2(s)f(l) + \varphi_1(l).f(s) - \varphi_1(l)\varphi_2(s) - \varphi_2(s)f(s) + \varphi_1(s)\varphi_2(s) - \varphi_1(s)f(s) \\
& -\varphi_2(l)f(l) + \varphi_1(l)\varphi_2(l) - \varphi_1(l)f(l) \quad (4.1.42)
\end{aligned}$$

yazılır. (4.1.42) eşitliğinin her iki tarafı $s \in (0,t)$, $t > 0$ olmak üzere $(t-s)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^\alpha;p)$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $s$'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& (\varphi_2(l) - f(l))\Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) - (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)\Big) \\
& + \Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)\Big)(f(l) - \varphi_1(l)) \\
& - \Big((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[\varphi_2 - f][f-\varphi_1])(t,p)\Big) - (\varphi_2(l) - f(l))(f(l) - \varphi_1(l))(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p) \\
= \; & (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2)(t,p) + f^2(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p) - 2f(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) \\
& +\varphi_2(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) + f(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p) - \varphi_2(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p) \\
& +f(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p) + \varphi_1(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p) - \varphi_1(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p) \\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2 f)(t,p) + (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1\varphi_2)(t,p) - (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1 f)(t,p) \\
& -\varphi_2(l)f(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p) + \varphi_1(l)\varphi_2(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p) \\
& -\varphi_1(l)f(l)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p) \quad (4.1.43)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.43) eşitliğinin her iki tarafı $l \in (0,t)$, $t>0$ olmak üzere $(t-l)^{\beta-1}E^{\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}(\omega(t-s)^{\alpha};p)$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $l$'ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)\right)\left((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)\right)\\
& +\left((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)\right)\left((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)\right)\\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[\varphi_2-f][f-\varphi_1])(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[\varphi_2-f][f-\varphi_1])(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\\
& (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}[\varphi_2-f][f-\varphi_1])(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)\\
= \; & (\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2)(t,p)+(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f^2)(t,p)\\
& -2(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)+(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)\\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)\\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)+(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)\\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2 f)(t,p)\\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1\varphi_2)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1 f)(t,p)\\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_2 f)(t,p)+(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1\varphi_2)(t,p)\\
& -(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}\varphi_1 f)(t,p)
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

**Sonuç 4.1.16** Lemma 4.1.4'da $p=\omega=0$ alalım. Bu takdirde (3.1.13) eşitliği elde edilir.

**Teorem 4.1.7** *$f$ ve $g$ $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon, $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1$ ve $\psi_2$ (4.1.32) ve (4.1.36) şartlarını sağlayan $[0,\infty)$ aralığında dört integrallenebilen fonksiyon olsun. Bu takdirde her $t>0$ ve Tanım 4.1.7'nın hipotezindeki parametrelerin şartları altında*

$$\begin{aligned}
& \left|(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}fg)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}f)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}g)(t,p)\right|\\
\leq \; & \sqrt{T(f,\varphi_1,\varphi_2)T(g,\psi_1,\psi_2)} \qquad (4.1.44)
\end{aligned}$$

*eşitsizliği geçerlidir. Burada $T(u,v,w)$*

$$\begin{aligned}
T(u,v,w) \; = \; & \left((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}w)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}u)(t,p)\right)\left((\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}u)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}v)(t,p)\right)\\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}vu)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}v)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}u)(t,p)\\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}wu)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}w)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}u)(t,p)\\
& +(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}v)(t,p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}w)(t,p)-(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{0^+,\alpha,\beta,\tau}1)(t;p)(\epsilon^{\omega,\delta,r,q,c}_{\alpha,\beta,\tau}vw)(t,p)
\end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanır.*

**İspat.** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki integrallenebilen fonksiyon olsun ve (4.1.32) ve (4.1.36) şartları sağlansın.

$$H(s,l) = \left(f(s) - f(l)\right)\left(g(s) - g(l)\right), \quad s,l \in (0,t),\ t > 0 \tag{4.1.45}$$

eşitliğini tanımlayalım. (4.1.45) eşitliğinin her iki tarafı $s,l \in (0,t)$, $t > 0$ olmak üzere $(t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)$ ile çarpılır ve $(0,t)$ üzerinde $s$ ve $l$'ye göre çift katlı integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t (t-s)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-s)^{\alpha};p)(t-l)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta,\tau}^{\delta,r,q,c}(\omega(t-l)^{\alpha};p)H(s,l)dsdl\\
= &\ (\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}fg)(t,p) - (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)
\end{aligned} \tag{4.1.46}$$

elde edilir. (4.1.46) için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left((\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}fg)(t,p) - (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\right)^2\\
\leq &\left((\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f^2)(t,p) - \left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)\right)^2\right)\\
&\times\left((\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g^2)(t,p) - \left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.1.47}$$

elde edilir. $\left(\varphi_2(t) - f(t)\right)\left(f(t) - \varphi_1(t)\right) \geq 0$ ve $\left(\psi_2(t) - g(t)\right)\left(g(t) - \psi_1(t)\right) \geq 0$ olduğundan $t \in [0,\infty)$ için

$$\begin{aligned}
&(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)\left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[\varphi_2 - f][f - \varphi_1])(t,p)\right) \geq 0,\\
&(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)\left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}[\psi_2 - g][g - \psi_1])(t,p)\right) \geq 0
\end{aligned}$$

olur. Lemma 4.1.4 yardımıyla

$$\begin{aligned}
&(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f^2)(t,p) - \left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)\right)^2\\
\leq &\left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p) - (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)\right)\left((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p) - (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t,p)\right)\\
&+(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1 f)(t,p) - (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)\\
&+(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2 f) - (\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}f)(t,p)\\
&+(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_2)(t,p) - (\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\varphi_1\varphi_2)(t,p)\\
&= T(f,\varphi_1,\varphi_2)
\end{aligned} \tag{4.1.48}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g^2)(t,p)-\Big((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\Big)^2\\
\leq\ &\Big((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2)(t,p)-(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\Big)\Big((\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)-(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)\Big)\\
&+(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1 g)(t,p)-(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\\
&+(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2 g)-(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}g)(t,p)\\
&+(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1)(t,p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_2)(t,p)-(\epsilon_{0^+,\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}1)(t;p)(\epsilon_{\alpha,\beta,\tau}^{\omega,\delta,r,q,c}\psi_1\psi_2)(t,p)\\
&=T(g,\psi_1,\psi_2) \qquad (4.1.49)
\end{aligned}
$$

yazılır. (4.1.47), (4.1.48) ve (4.1.49) yardımıyla (4.1.44) eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.17** (4.1.44) eşitsizliğinde parametrelerin farklı seçenekleri için

(i) $p = 0$ alınırsa [34]'de tanımlanan Salim-Faraj kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(ii) $\tau = q = 1$ alınırsa [30]'de Rahman ve arkadaşları tarafından tanımlanan kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iii) $p = 0$ ve $\tau = q = 1$ alınırsa [42]'da tanımlanan Srivastava-Tomovski kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği,

(iv) $p = 0$ ve $\tau = r = q = 1$ alınırsa [29]'de tanımlanan Prabhakar kesirli integral operatörü için Grüss eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 4.1.18** (4.1.44)'de $p = \omega = 0$ alınırsa, (3.1.14)'deki Riemann-Liouville kesirli integrali için Grüss eşitsizliği elde edilir.

# 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Araştırmanın temelini oluşturan dördüncü bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonunu içeren kesirli integral operatörü için yeni Grüss tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen yeni sonuçların literatürde elde edilmiş olan sonuçların bir genelleştirmesi olduğu görülmüştür. Elde edilen bu yeni sonuçlar iki farklı makale olarak hazırlanmıştır. Bu makalelerden birincisi "Grüss type inequalities for fractional integral operator involving the extended generalized Mittag-Leffler function" başlıklı çalışmada "International Conference on Mathematics and Related Sciences 2019 (ICMRS 2019)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuştur. İkincisi "A new generalization of Grüss type inequality via extended generalized fractional integrals" başlıklı çalışmada "International Conference on Mathematics and Related Sciences 2019 (ICMRS 2019)" isimli uluslararası konferansta sözlü bildiri olarak sunulmuştur ve tam metin olarak basılmıştır. Konuyla ilgilenen araştırmacılar bu tezde verilen yöntemlerden ve sonuçlardan faydalanarak bu tezde kullanılmayan kesirli integral operatörleri için yeni Grüss tipli eşitsizlikler elde edebilirler.

# KAYNAKLAR


[1] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279(2015), 57-66.

[2] Agarwall, RP., Luo, MJ. & Raina, RK. (2016). On Ostrowski type inequalities. *Fasciculi Mathematici*, 204:5-27.

[3] Akkurt, A., Kılınç, S. & Yıldırım, H. (2016). Grüss type inequalities involving the generalized Gauss hypergeometric functions. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 106(4), 1103-1114

[4] Andric, M., Farid, G. & Pečarić, J. (2018). A further extension of Mittag-Leffler function. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 21(5) , 1377-1395.

[5] Awan, KM. (2016). On the Stefensen's generalization of the Chebyshev functional with applications. University of Sargodha, Pakistan.

[6] Baleanu, D., Machado, JAT. & Luo, CJ. (2012). Fractional Dynamic and Control. Springer, pp 159-171.

[7] Chinchane, VL. & Pachpatte, DB. (2014). On some new Grüss-type inequality using Hadamard fractional integral operator. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 5(3S) No. 12, pp. 1-10.

[8] Chinchane, VL. & Pachpatte, DB. (2014). On some Grüss-type fractional inequalities using Saigo fractional integral operator. *Journal of Mathematics*, Volume 2014.

[9] Choi, J. & Purohit, SD. (2015). A Grüss type integral inequality associated with Gauss hypergeometric function fractional integral operator. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 30 (2015), No. 2, pp. 81-92.

[10] Curiel, L. & Galué, L. (1996). A generalization of the integral operators involving the Gauss' hypergeometric function. *Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia*, Vol. 19, No. l, 17-22.

[11] Dahmani, Z., Tabharit, L. & Taf, S. (2010). New generalisations of Grüss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 2(3), 93-99.

[12] Diaz, R. & Pariguan, E. (2007). On hypergeometric functions and pochhammer k-symbol. *Divulgaciones Matemáticas*, Vol. 15 No. 2, pp. 179-192.

[13] Dimovski, IH. (1966). Operational calculus for a class of differential operators. *Comptes Rendus de l 'Academie Bulgare des Sciences*, 19, 1111-1114.

[14] Grüss, G. (1935). Über das maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt - (\frac{1}{(b-a)^2})\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt$. *Mathematische Zeitschrift*, 39(1), 215-226.

[15] Jarad, F., Uğurlu, E., Abdeljawad, T. & Baleanu, D. (2017). On a new class of fractional operators. *Advances in Difference Equations*, 2017:247, 1-16.

[16] Kaçar, E., Kaçar, Z. & Yıldırım, H. (2018). Integral inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of a function with respect to another function. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 13(1), 1-13.

[17] Kaçar, E. & Yıldırım, H. (2015). Grüss type inequalities for generalized Riemann-Liouville fractional integrals. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 101(1), 55-70.

[18] Kalla, SL. & Rao, A. (2011). On Grüss type inequality for a hypergeometric fractional integral. *Le Matematiche*, LXVI(1), 57-64.

[19] Kannapan, P. (2009). Functional Equations and Inequalities with Applications. *Springer*, New York, USA, 803pp.

[20] Katugampola, UN. (2011). New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 860-865.

[21] Katugampola, UN. (2014). New approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4), 1-15.

[22] Katugampola, UN. (2016). New fractional integral unifying six existing fractional integrals. preprint arXiv:1612.08596.

[23] Korkine, AN. (1883). Sur une therome de M. Tchebychef. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 96, 316-327.

[24] Mitrinović, DS. (1970). Analytic Inequalities. Springer-Verlag.

[25] Mittag Leffler, GM. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, (2) 137, 514-558.

[26] Mubeen, S. & Habibullah, GM. (2012). k-fractional integrals and application. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(2), 89-94.

[27] Mubeen, S. & Iqbal, S. (2016). Grüss type integral inequalities for generalized Riemann-Liouville k-fractional integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016:109.

[28] Mumcu, İ. & Set, E., (2019). On new Grüss type inequalities for conformable fractional integrals. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, V.9, N.4, pp. 755-763.

[29] Prabhakar, TR. (1971). A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Mathematical Journal*, vol. 19, 7-15.

[30] Rahman, G., Baleanu, D., Qurashi, MA., Purohit, SD., Mubeen, S. & Arshad, M. (2017). The extended Mittag-Leffler function via fractional calculus. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10 (2017), 4244-4253.

[31] Rahman, G., Nisar, S. & Qi, F. (2018). Some new inequalities of the Grüss type for conformable fractional integrals. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01871682.

[32] Raina, RK. (2005). On generalized Wright's hypergeometric functions an fractional calculus operators. *East Asian Mathematical Journal*, 21(2): 191-203.

[33] Saigo, M. (1978). A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions. *Mathematical reports, College of General Education, Kyushu University*, 11, 135-143.

[34] Salim, TO. & Faraj, AW., (2012). A generalization of Mittag-Leffler function and integral operator associated with fractional calculus. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 3(5), 1-13.

[35] Samko, SG., Kilbas, AA. & Marichev, OI. (1993). Fractional Integrals and Derivatives. Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon.

[36] Sarıkaya, MZ., Dahmani, Z., Kiriş, ME. & Ahmad, F. (2016). (k,s)-Riemann-Liouville fractional integral and applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(1), 77-89.

[37] Saxena, RK., Purohit, SD. & Kumar, D. (2016). Integral inequalities associated with Gauss hypergeometric function fractional integral operators. *National Academy of Sciences*, 88(1):27-31.

[38] Set, E., Tomar, M. & Sarıkaya, MZ. (2015). On generalized Grüss type inequalities for k-fractional integrals. *Applied Mathematics and Computation*, 269, 29-34.

[39] Set, E., Mumcu, İ. & Özdemir, ME. (2018). Grüss type inequalities involving new conformable fractional integral operators. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1991. No. 1.

[40] Shukla, AK. & Prajapati, JC. (2007). On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336, 797-811.

[41] Sousa, JVC., Oliveira, D. & Oliveira, EC. (2017). Grüss-type inequality by mean of a fractional integral. preprint arXiv:1705.00965.

[42] Srivastava, HM. & Tomovski, Z. (2009). Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Applied Mathematics and Computation*, 211, 198-210.

[43] Srivastava, HM. & Choi, J. (2012). Zeta and $q$-Zeta Functions and Associated Series and Integrals, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, London and New York.

[44] Tariboon, J., Ntouyas, SK. & Sudsutad, W. (2014). Some new Riemann-Liouville fractional integral inequalities. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Volume 2014, 6 pages.

[45] Tariboon, J., Ntouyas, SK. & Tomar, M., (2016). Some new integral inequalities for $k$-fractional integrals. *Malaya Journal of Matematik*, 4(1), 100-110.

[46] Tunç, T., Usta, F., Budak, H. & Sarıkaya, MZ. (2017). On Grüss type inequalities utilizing generalized fractional integral operators. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1833. No. 1.

[47] Yıldırım, H. & Kırtay, Z. (2014). Ostrowski inequality for generalized fractional integral and related inequalities. *Malaya Journal of Matematik*, 2(3), 322-329.

[48] Wang, G., Agarwal, P. & Chand, M. (2014). Certain Grüss type inequalities involving the generalized fractional integral operator. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014:147.

[49] Wang, G., Harsh, H., Purohit, SD. & Gupta, T. (2014). A note on Saigo's fractional integral inequalities. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, Vol. 2, No. 3, 65-69.

## ÖZGEÇMİŞ

| Kişisel Bilgiler | |
|---|---|
| Adı Soyadı | Filiz ÖZATA |
| Doğum Yeri | Konak/İZMİR |
| Doğum Tarihi | 11.03.1990 |
| Uyruğu | ☒ T.C. ❒ Diğer: |
| Telefon | 05384465456 |
| E-Posta Adresi | filizdemirci35@gmail.com |

| Eğitim Bilgileri | |
|---|---|
| **Lisans** | |
| Üniversite | Balıkesir Üniversitesi |
| Fakülte | Necatibey Eğitim Fakültesi |
| Bölümü | Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği |
| Mezuniyet Tarihi | 28.06.2016 |
| **Yayınlar** | |
| | |